

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курганский государственный университет»
Кафедра «Программное обеспечение автоматизированных систем»

СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Методические указания к проведению практических и лабораторных
занятий для студентов направлений 09.03.03, 09.03.04

Курган 2026

Кафедра: «Программное обеспечение автоматизированных систем»
Дисциплина: «Спецглавы математики»
(направления 09.03.03, 09.03.04)

Составила: канд. физ. - мат. наук, доцент С. В. Косовских.

Печатается в соответствии с планом издания, утвержденным
методическим советом университета «13» декабря 2024 г.

Утверждены на заседании кафедры «5» декабря 2025 г.

Введение

Одной из основных целей освоения дисциплины «Спецглавы математики» является формирование системы знаний, умений и навыков, связанных с особенностями математических способов представления и обработки информации как основы для развития профессиональных компетенций.

Целью изучения этой дисциплины является формирование компетенции обучающегося в области построения, исследования и применения методов дискретной и вычислительной математики для решения типовых математических задач.

Данные методические указания дают практические навыки при решении задач дискретной математики. Они предназначены для оказания помощи обучающимся направлений подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика» (направленность «Интеллектуальные информационные системы и технологии»), 09.03.04 «Программная инженерия» (направленность «Программное обеспечение автоматизированных систем») при самостоятельном изучении материала и выполнении контрольных работ по заданному разделу.

Эти указания содержат не только перечень теоретических вопросов, ответы на которые должен знать студент при подготовке к лабораторному и практическому занятию, но и значительный перечень задач, а также примерные варианты контрольной работы.

Раздел № 1

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЛОГИКУ

Тема № 1

(Практическое занятие)

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

Вопросы для самоконтроля

- 1 Определение множества, способы их задания.
- 2 Числовое множество. Мощность множества. Счетные и несчетные множества.
- 3 Определение подмножества, их виды.
- 4 Операции над множествами (пересечение, объединение, разность, симметрическая разность (кольцевая сумма), дополнение, декартово произведение).
- 5 Диаграмма Эйлера-Венна.
- 6 Метод включений и исключений.

Задачи, которые могут быть предложены на занятии

- 1 Укажите число элементов множества $A = \{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$, а также число его различных подмножеств.
- 2 Определите и обоснуйте истинность или ложность следующих утверждений: $\{1, 2, 3\} \in A$, $\{1, 2\} \subset A$, $\{\emptyset\} \in A$, $\emptyset \subseteq A$.
- 3 Даны множества: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 6, 7, 8\}$, $C = \{7, 8, 9, 10, 11\}$, $D = \{4, 5, 6, 11, 12\}$. Найдите: $\overline{A} \cap D$, $\overline{B} \setminus C$, $(A \cup \overline{C}) \cap B$, $((C \setminus B)) \cap D \setminus A$, $A \Delta C$. Для каждого множества постройте диаграмму Эйлера-Венна.
- 4 На одной из кафедр университета работают тринадцать человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский, семеро – немецкий, шестеро – французский. Пятеро знают английский и немецкий, четверо – английский и французский, трое – немецкий и французский. Сколько человек знают только один язык?
- 5 Студенты третьего курса, изучающие информационные технологии в университете, могут изучать и дополнительные дисциплины по выбору. В этом году 30 из них выбрали дисциплину «Информационные технологии моделирования интерьера», 35 предпочли дисциплину «Информационные технологии в рекламе», а 20 решили изучать дисциплину «Информационные технологии моделирования ландшафта». Кроме того, 15 студентов изъявили желание посещать «Информационные технологии моделирования интерьера» и «Информационные технологии в рекламе», 7 – «Информационные технологии в

рекламе» и «Информационные технологии моделирования ландшафта», 10 – «Информационные технологии моделирования интерьера» и «Информационные технологии моделирования ландшафта», 3 – все три дисциплины. Сколько из них предпочли только дисциплину «Информационные технологии в рекламе»?

6 Староста курса представил следующий отчет о физкультурной работе. Всего – 45 студентов. Футбольная секция – 25 человек, баскетбольная секция – 30, шахматная секция – 28, футбольная и баскетбольная – 16, футбольная и шахматная – 18, баскетбольная и шахматная – 17. В трех секциях одновременно занимаются 15 человек. Объясните, почему отчет не был принят?

Задачи, которые могут быть предложены для самостоятельного решения

1 Укажите число элементов множества $A = \{3, \{2\}, 2, \{1, \{2, 3\}\}, \emptyset\}$, а также число его различных подмножеств. Определите и обоснуйте истинность или ложность следующих утверждений: $\{1, 2, 3\} \in A$, $\{1, 2\} \subset A$, $\{2\} \subset A$, $\{2\} \in A$.

2 Укажите число элементов множества $A = \{3, \{3\}, 2, \{1, \{2, 3\}\}, \emptyset\}$, а также число его различных подмножеств. Определите и обоснуйте истинность или ложность следующих утверждений: $\{2, 3\} \in A$, $\{3, 2\} \subset A$, $\{2\} \subset A$, $\{2\} \in A$.

3 Даны множества: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 6, 7, 8\}$, $C = \{7, 8, 9, 10, 11\}$, $D = \{4, 5, 6, 11, 12\}$. Найдите: $\overline{A} \cap B$, $\overline{B} \setminus \overline{C}$, $(A \cup C) \cap \overline{D}$, $((C \setminus B)) \cap D \setminus A$, $A \Delta C$. Для каждого множества постройте диаграмму Эйлера-Венна.

4 Даны множества: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$, $C = \{5, 7, 8, 9, 10, 11\}$, $D = \{4, 5, 6, 12\}$. Найдите: $\overline{B} \cap C$, $\overline{A} \setminus D$, $(B \cup \overline{C}) \cap A$, $((C \setminus B)) \cap D \setminus A$, $A \Delta C$. Для каждого множества постройте диаграмму Эйлера-Венна.

5 На ЕГЭ по математике были предложены три задачи: по алгебре, геометрии, тригонометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800 человек, по геометрии – 700, по тригонометрии – 600. При этом задачи по алгебре и геометрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и тригонометрии – 500, по геометрии и тригонометрии – 400. А 300 абитуриентов решили все задачи. Сколько абитуриентов не решили ни одной задачи?

6 По итогам экзаменов из 40 студентов отличную оценку по математическому анализу имели 11 студентов, по физике – 15, по дискретной математике – 13, по математическому анализу и физике – 4, по математическому анализу и дискретной математике – 3, по физике и дискретной математике – 3, по всем трем предметам – 1. Сколько студентов получили хотя бы по одной отличной оценке?

7 Каждый из 100 курганцев, отдыхающих этим летом в Анапе, был на экскурсии, в дельфинарии или в аквапарке.

Из них аквапарк посетили 67 человек, экскурсии – 82, дельфинарий – 67, экскурсии и дельфинарий – 53, экскурсии и аквапарк – 58, дельфинарий и аквапарк – 51 человек. Сколько курганцев было на всех трех мероприятиях?

8 Каждая из 30 невест воспитанна, красива или умна. Воспитанных невест – 21, красивых – 18, умных – 15. Красивых и воспитанных – 11, умных и воспитанных – 9, умных и красивых – 7. Сколько невест обладают всеми указанными качествами?

9 Из 100 учеников старших классов все изучают английский, французский или немецкий языки. Английский изучают 70 учащихся, французский – 65, немецкий – 50, английский и немецкий – 30, английский и французский – 40, французский и немецкий – 20. Сколько учеников изучают все три языка?

Тема № 2 **(Практическое занятие)**

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ ПРИ РАБОТЕ С ИНФОРМАЦИЕЙ

Вопросы для самоконтроля

- 1 Определение высказывания.
- 2 Простые и сложные высказывания.
- 3 Операции над высказываниями (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция).
- 4 Формулы алгебры высказываний.
- 5 Эквивалентные высказывания, основные соотношения равносильности.
- 6 Логическое следование и логическая равносильность.

Задачи, которые могут быть предложены на занятии

- 1 Определите, какие из высказываний в следующих парах являются отрицаниями друг друга, а какие нет:
 - а) « $5 < 10$ », « $5 > 10$ »;
 - б) «мишень поражена первым выстрелом», «мишень поражена вторым выстрелом»;
 - в) «машина останавливалась у каждого из двух светофоров», «машина не останавливалась у каждого из двух светофоров»;
 - г) «существуют белые слоны», «все слоны серые»;
 - д) «кит – млекопитающее», «кит – рыба»;
 - е) «прямая а параллельна прямой b», «прямая а перпендикулярна прямой b».
- 2 Представьте в виде логической формулы:
 - а) «сегодня суббота или воскресенье»;
 - б) «если идет дождь, то крыши мокрые»;
 - в) «если допоздна работаешь с компьютером и при этом пьешь много кофе, то утром просыпаешься в дурном настроении или с головной болью».
- 3 Определите значения истинности высказываний:

- а) «наличие аттестата о среднем образовании достаточно для поступления в университет»;
- б) «если целое число делится на 6, то оно делится на 3»;
- в) «подобие треугольников является необходимым и достаточным условием их равенства»;
- г) «треугольники равны только в случае их подобия»;
- д) «для того, чтобы треугольники были неравны, достаточно, чтобы они были неподобны».

4 Формализуйте предостережение, которое одна жительница древних Афин сделала своему сыну, собиравшемуся заняться политической деятельностью: *«Если ты будешь говорить правду, то тебя возненавидят люди. Если ты будешь лгать, то тебя возненавидят боги. Но ты должен говорить правду или лгать. Значит, тебя возненавидят люди или возненавидят боги».*

5 Формализуйте также ответ сына: *«Если я буду говорить правду, то боги будут любить меня. Если я буду лгать, то люди будут любить меня. Но я должен говорить правду или лгать. Значит, меня будут любить боги или меня будут любить люди».*

6 Пусть даны высказывания:

А – «число 15 делится на 5»,

В – «число 10 делится на 3».

Требуется определить значения истинности следующих высказываний:

- а) $B \rightarrow A$
- б) $\bar{A} \wedge B$
- в) $\bar{B} \vee \bar{A}$
- г) $A \rightarrow \bar{B}$.

7 Для данной формулы построить таблицу значений истинности:

$$а) x \wedge \bar{y} \rightarrow (y \vee \bar{x} \rightarrow \bar{z})$$

$$б) (z \rightarrow x) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow x \wedge y))$$

$$в) \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee (x \rightarrow y) \vee \bar{z}$$

8 Для четырех дружинников, фамилии которых начинались буквами А, Е, Р, С составить график дежурств на 4 вечера подряд, учитывая, что:

- а) С и Р в первый вечер дежурить не могут в связи с командировкой;
- б) если выйдет С во второй вечер или Р – в третий, то Е сможет подежурить в четвертый вечер;
- в) если А не будет дежурить в третий вечер, то Е согласен дежурить во второй вечер;
- г) если А и Р будут дежурить во второй вечер, то С сможет пойти в четвертый вечер;
- д) если Р в четвертый вечер уедет на конференцию, то А придется дежурить в первый, а С – в третий вечер;

9 Семья, состоящая из отца, матери и трех дочерей С, Д, Е, купила телевизор. Условились, что в первый вечер будут смотреть передачи в таком порядке:

- а) когда отец смотрит передачу, то мать делает то же;
- б) дочери Д и Е, обе или одна из них, смотрят передачу;

в) из двух членов семьи – мать и дочь С – смотрят передачу одна и только одна;

г) дочери С и Д или обе смотрят передачу, или обе не смотрят;

д) если дочь Е смотрит передачу, то отец и дочь Д делают то же.

Кто же из членов семьи в этот вечер смотрит передачу?

Задачи, которые могут быть предложены для самостоятельного решения

1 Определите, какие из высказываний в следующих парах являются отрицаниями друг друга, а какие нет:

а) « $5 < 10$ », « $5 > 10$ »;

б) «человечеству известны все планеты Солнечной системы», «в Солнечной системе есть планеты, неизвестные человечеству»;

в) «неверно, что точка А не лежит на прямой а», «точка А лежит на прямой а»;

г) «этот треугольник равнобедренный и прямоугольный», «этот треугольник не равнобедренный или он не прямоугольный».

2 Представьте в виде логической формулы:

а) «произведение трех чисел равно нулю только тогда, когда одно из них равно нулю»;

б) «если светит солнце, то трава зеленая»;

в) «если в треугольнике медиана не является высотой и биссектрисой, то этот треугольник не равнобедренный и не равносторонний».

3 Определите значения истинности высказываний:

а) «наличие аттестата о среднем образовании необходимо для поступления в институт»;

б) «подобие треугольников является необходимым условием их равенства»;

в) «треугольники подобны только в случае их равенства»;

г) «равенство треугольников является достаточным условием их подобия»;

д) «для того, чтобы четырехугольник был квадратом, достаточно, чтобы его диагонали были равны и перпендикулярны».

4 Известно, что $x=1$, $y=1$, $z=0$, $a=0$. Найти значения истинности высказываний:

а) $(x \rightarrow y) \wedge (a \rightarrow x) \rightarrow (x \leftrightarrow z)$;

б) $\overline{(y \vee a)} \wedge x \rightarrow \bar{z}$;

в) $\bar{a} \vee x \leftrightarrow x \wedge \bar{z}$.

5 Для данной формулы построить таблицу значений истинности:

а) $\overline{(x \wedge y)} \leftrightarrow (y \vee \bar{x} \rightarrow \bar{z})$

б) $\overline{(\bar{a} \rightarrow x)} \rightarrow ((a \rightarrow y) \rightarrow (a \rightarrow x \wedge y))$

в) $\overline{\bar{x} \wedge \bar{y} \vee (x \rightarrow y)} \rightarrow \bar{z}$

6 Однажды следователю пришлось одновременно допрашивать трех свидетелей: Клода, Жака и Дика. Их показания противоречили друг другу, и каждый из них обвинял кого-нибудь во лжи.

а) Клод утверждал, что Жак лжет.

б) Жак обвинял во лжи Дика.

в) Дик уговаривал следователя не верить ни Клоду, ни Жаку.

Но следователь быстро вывел их на чистую воду, не задав им ни одного вопроса. Кто из свидетелей говорил правду?

7 Определите, кто из четырех студентов сдал математику, если известно:

а) «если первый сдал, то и второй сдал»;

б) «если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал»;

в) «если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал»;

г) «если четвертый сдал, то и первый сдал».

Тема № 3

(Лабораторная работа)

ТАВТОЛОГИИ И РАВНОСИЛЬНОСТИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ

Вопросы для самоконтроля

1 Формулы алгебры логики. Виды формул.

2 Равносильность формул алгебры логики.

3 Логическое следование.

4 Основные соотношения равносильности.

Задачи, которые могут быть предложены на занятии

1 Выяснить, будут ли тавтологиями следующие формулы:

а) $x \wedge y \rightarrow x$,

г) $x \wedge y \rightarrow x \wedge y$,

б) $x \vee y \rightarrow x$,

д) $(x \rightarrow y) \rightarrow (y \rightarrow x)$,

в) $x \wedge y \rightarrow x \vee y$,

2 Выяснить, существует ли формула F такая, что формула G тавтология:

а) $G = x \wedge y \rightarrow F \wedge z$;

б) $G = (F \wedge y \rightarrow \bar{z}) \rightarrow (z \rightarrow \bar{y})$;

3 Докажите, что все следующие формулы являются тавтологиями:

а) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R))$,

б) $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$;

4 С помощью эквивалентных преобразований докажите, что следующие формулы тождественно ложны:

а) $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \bar{B}) \wedge A$;

б) $(A \leftrightarrow B) \wedge ((A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge B))$;

5 Выяснить, будут ли следующие формулы равносильны:

а) $x \rightarrow y$ и $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$,

б) $x \rightarrow (y \rightarrow z)$ и $(x \rightarrow y) \rightarrow z$,

в) $x \rightarrow (y \rightarrow z)$ и $x \wedge y \rightarrow z$,

6 Докажите равносильность формул, проводя эквивалентные преобразования одной или обеих частей:

а) $(A \rightarrow B) \rightarrow B$ и $A \vee B$;

б) $\overline{\overline{A} \rightarrow \overline{B}} \leftrightarrow A$ и $(A \leftrightarrow B) \wedge \overline{A}$;

в) $\overline{\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{A} \rightarrow \overline{B} \vee B}$ и $A \wedge \overline{B} \rightarrow (\overline{B} \rightarrow A)$;

7 Выясните, выполняются ли следующие логические следования:

а) $P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \wedge R \vdash Q \wedge S$;

б) $P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \overline{P} \vee \overline{R} \vdash \overline{Q} \vee \overline{S}$;

в) $P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \overline{Q} \wedge \overline{S} \vdash \overline{P} \wedge \overline{R}$;

г) $(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S), P \vdash R \wedge S$;

д) $(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S), \overline{R} \vdash \overline{P} \wedge \overline{Q}$;

8 Найдите наипростейшую из равносильных формул от трех переменных, которая:

а) всегда принимает то же значение, что и ее второй аргумент;

б) принимает такое же значение, как и большинство ее аргументов;

в) принимает значение 1 тогда и только тогда, когда точно два ее аргумента принимают значение 0;

г) принимает такое же значение, как и меньшинство ее аргументов;

д) принимает значение 0 тогда и только тогда, когда по крайней мере один из первого и третьего аргументов принимает значение 0;

е) принимает значение 1 тогда и только тогда, когда большинство ее аргументов принимают значение 0;

9 Выяснить, является ли заключение логическим следствием посылок, то есть является ли приведенное рассуждение логически безупречным: «Если в строительстве внедряются современные методы планирования и руководства, то стройки будут расти быстрее, а стоимость строительства будет снижаться. В строительстве уже внедряются современные методы планирования и руководства. Следовательно, стройки будут расти быстрее, а стоимость строительства будет снижаться».

10 Выяснить, является ли заключение логическим следствием посылок, то есть является ли приведенное рассуждение логически безупречным: «Контракт будет выполнен тогда и только тогда, когда дом будет сдан в эксплуатацию. Если дом будет сдан в декабре, то в январе можно переезжать в новые квартиры. Если в январе квартиросъемщики не переезжают, то они не оплачивают квартирную плату. Даже если контракт не выполнен, то квартиросъемщики должны внести квартирную плату. Квартиросъемщики внесут квартирную плату».

Задачи, которые могут быть предложены для самостоятельного решения

1 Выяснить, будут ли тавтологиями следующие формулы:

а) $(x \rightarrow \overline{x}) \rightarrow x$,

в) $(x \rightarrow y) \rightarrow (\overline{y} \rightarrow \overline{x})$,

$$\text{б) } (\bar{x} \rightarrow x) \rightarrow x, \quad \text{г) } \overline{x \leftrightarrow y} \rightarrow (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}).$$

2 Выяснить, существует ли формула F такая, что формула G тавтология:

$$G = (F \wedge Z) \vee (\bar{F} \wedge \bar{Y} \wedge \bar{Z}).$$

3 Докажите, что все следующие формулы являются тавтологиями:

$$\text{а) } P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$$

$$\text{б) } (P \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (R \vee Q));$$

$$\text{в) } ((P \wedge Q) \rightarrow R) \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow R));$$

4 С помощью эквивалентных преобразований докажите, что следующие формулы тождественно ложны:

$$\text{а) } (A \wedge B) \wedge (A \vee B \rightarrow C) \wedge \bar{C};$$

$$\text{б) } (A \wedge \bar{B}) \vee (A \wedge \bar{C}) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C).$$

5 Выяснить, будут ли следующие формулы равносильны:

$$\text{а) } \bar{x} \rightarrow y \text{ и } \bar{y} \rightarrow x$$

$$\text{б) } \bar{x} \rightarrow \bar{y} \text{ и } \bar{x} \rightarrow y,$$

$$\text{в) } x \leftrightarrow y \text{ и } \bar{x} \leftrightarrow \bar{y}.$$

6 Докажите равносильность формул, проводя эквивалентные преобразования одной или обеих частей:

$$\text{а) } A \wedge \bar{B} \rightarrow (\bar{B} \rightarrow A) \text{ и } \overline{A \rightarrow B} \vee A \vee B;$$

$$\text{б) } (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee C) \text{ и } (\bar{A} \wedge B) \vee (A \wedge C);$$

$$\text{в) } (A \rightarrow B) \wedge C \text{ и } (\bar{A} \wedge B \wedge C) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

7 Выясните, выполняются ли следующие логические следования:

$$\text{а) } (P \rightarrow Q) \rightarrow (R \wedge S), \bar{R} \not\models P \wedge \bar{Q};$$

$$\text{б) } (P \vee Q) \rightarrow (R \rightarrow S), \bar{P} \wedge \bar{Q} \not\models R \wedge \bar{S};$$

$$\text{в) } P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee S \not\models Q \vee R;$$

$$\text{г) } P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R \not\models Q \wedge S;$$

$$\text{д) } (P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S), (S \vee K) \rightarrow L \not\models P \rightarrow L.$$

8 Найдите наипростейшую из равносильных формул от трех переменных, которая:

а) принимает значение 0 тогда и только тогда, когда большинство ее аргументов принимают значение 1;

б) принимает значение 1 тогда и только тогда, когда принимают значение 1 первый аргумент и один и только один из двух оставшихся;

в) принимает значение 1 тогда и только тогда, когда из первых двух ее аргументов принимает значение 1 ровно один;

г) принимает значение 0 тогда и только тогда, когда два ее последних аргумента принимают различные значения;

д) принимает значение 1 тогда и только тогда, когда либо первый ее аргумент равен 1, либо все аргументы равны 0.

9 Выяснить, является ли заключение логическим следствием посылок, то есть является ли приведенное рассуждение логически безупречным: «Если капиталовложения останутся постоянными, то возрастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не

возрастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и капиталовложения останутся постоянными, то безработица не возникнет. Следовательно, правительственные расходы возрастут».

10 Выяснить, является ли заключение логическим следствием посылок, то есть является ли приведенное рассуждение логически безупречным: «Если курс ценных бумаг растет или процентная ставка снижается, то либо падает курс акций, либо налоги не повышаются. Курс акций понижается тогда и только тогда, когда растет курс ценных бумаг и налоги растут. Если процентная ставка снижается, то либо курс акций не понижается, либо курс ценных бумаг не растет. Либо повышаются налоги, либо курс акций понижается и снижается процентная ставка».

11 Проверить правильность рассуждения средствами логики суждений: «Иванов утверждает, что не встречал этой ночью Сидорова. Если Иванов не встречал этой ночью Сидорова, то либо Сидоров был убийцей, либо Иванов лжет. Если Сидоров не был убийцей, то Иванов не встречал его этой ночью, а убийство было совершено после полуночи. Если убийство было совершено после полуночи, то либо Сидоров был убийцей, либо Иванов лжет. Следовательно, убийцей был Сидоров».

12 а) Представить высказывание в виде логической формулы: «Если в строительстве внедряются современные методы планирования и руководства, то стройки будут расти быстрее, а стоимость строительства будет снижаться».

б) Выяснить, является ли заключение логическим следствием посылок, то есть является ли приведенное рассуждение логически безупречным: «Если в строительстве внедряются современные методы планирования и руководства, то стройки будут расти быстрее, а стоимость строительства будет снижаться. В строительстве уже внедряются современные методы планирования и руководства. Следовательно, стройки будут расти быстрее, а стоимость строительства будет снижаться».

в) Привести выражение $F = (A \rightarrow B) \rightarrow (\overline{B \rightarrow A})$ к ДНФ, а затем сократить ее (если это возможно). Найти СДНФ и СКНФ этой формулы.

13 а) Представить высказывание в виде логической формулы: «Если «Спартак» или «Динамо» проиграют, а «Торпедо» выиграет, то «Зенит» потеряет первое место, а я кроме того проиграю пари».

б) Выяснить, является ли заключение логическим следствием посылок, то есть является ли приведенное рассуждение логически безупречным: «Контракт будет выполнен тогда и только тогда, когда дом будет сдан в эксплуатацию. Если дом будет сдан в декабре, то в январе можно переезжать в новые квартиры. Если в январе квартиросъемщики не переезжают, то они не оплачивают квартирную плату. Даже если контракт не выполнен, то квартиросъемщики должны внести квартирную плату. Квартиросъемщики внесут квартирную плату».

в) Привести выражение $F = (A \rightarrow B) \vee (B \wedge (B \leftrightarrow \overline{B}))$ к ДНФ, а затем сократить ее (если это возможно). Найти СДНФ и СКНФ этой формулы.

14 а) Представить высказывание в виде логической формулы: «Зенит» станет чемпионом тогда и только тогда, когда будет в каждом матче играть настоящему, а арбитры будут судить честно или все матчи будут куплены».

б) Выяснить, является ли заключение логическим следствием посылок, то есть является ли приведенное рассуждение логически безупречным: «Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Следовательно, Смит был убийцей».

в) Привести выражение $F = (A \vee B) \rightarrow (A \wedge C)$ к ДНФ, а затем сократить ее (если это возможно). Найти СДНФ и СКНФ этой формулы.

15 а) Представить высказывание в виде логической формулы: «Или Иванов лучший шахматист школы, или Петров не участвовал в соревнованиях, а Сидоров ему поддался».

б) Выяснить, является ли заключение логическим следствием посылок, то есть является ли приведенное рассуждение логически безупречным: «Если курс ценных бумаг растет или процентная ставка снижается, то либо падает курс акций, либо налоги не повышаются. Курс акций понижается тогда и только тогда, когда растет курс ценных бумаг и налоги растут. Если процентная ставка снижается, то либо курс акций не понижается, либо курс ценных бумаг не растет. Следовательно, либо повышаются налоги, либо курс акций понижается и снижается процентная ставка».

в) Привести выражение $F = (A \rightarrow B) \wedge (A \leftrightarrow C)$ к ДНФ, а затем сократить ее (если это возможно). Найти СДНФ и СКНФ этой формулы.

16 а) Представить высказывание в виде логической формулы: «Кактусы не следует обильно поливать или их корни загниют, а листья отомрут и растение погибнет».

б) Проверить правильность рассуждения средствами логики суждений: «Иванов утверждает, что не встречал этой ночью Сидорова. Если Иванов не встречал этой ночью Сидорова, то либо Сидоров был убийцей, либо Иванов лжет. Если Сидоров не был убийцей, то Иванов не встречал его этой ночью, а убийство было совершено после полуночи. Если убийство было совершено после полуночи, то либо Сидоров был убийцей, либо Иванов лжет. Следовательно, убийцей был Сидоров».

в) Привести выражение $F = (A \rightarrow (B \wedge \bar{C})) \wedge (A \rightarrow C)$ к ДНФ, а затем сократить ее (если это возможно). Найти СДНФ и СКНФ этой формулы.

17 а) Представить высказывание в виде логической формулы: «Лондон – столица Парижа, Париж – столица Рима, Рим – столица империи».

б) Проверить правильность рассуждения средствами логики суждений: «Если строить противоатомные убежища, то другие государства будут чувствовать себя в опасности, а наш народ получит ложное представление о своей безопасности. Если другие страны будут чувствовать себя в опасности, то они смогут начать превентивную войну. Если наш народ получит ложное

представление о своей безопасности, то он ослабит усилия, направленные на сохранения мира. Если же не строить противоатомные убежища, то мы рискуем иметь колоссальные потери в случае войны. Следовательно, другие страны смогут начать превентивную войну, и наш народ ослабит свои усилия, направленные на сохранение мира, либо мы рискуем иметь колоссальные потери в случае войны».

в) Привести выражение $F = (A \leftrightarrow B) \wedge (\overline{C \rightarrow D})$ к ДНФ, а затем сократить ее (если это возможно). Найти СДНФ и СКНФ этой формулы.

Тема № 4 **(Лабораторная работа)** **БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ**

Теоретические вопросы:

- 1 Определение булевой функции от n переменных.
- 2 Число булевых функций от n переменных.
- 3 Равенство булевых функций.
- 4 Свойства булевых функций.
- 5 Полиномы Жегалкина и линейные булевы функции.
- 6 Двойственные и самодвойственные булевы функции.
- 7 Монотонные булевы функции.
- 8 Булевы функции, сохраняющие нуль и сохраняющие единицу.
- 9 Полные и неполные системы булевых функций.
- 10 Теорема Поста.
- 11 Функционально замкнутые классы булевых функций.
- 12 Базисы булевых функций.
- 13 Анализ релейно-контактных схем.
- 14 Синтез релейно-контактных схем.

Задачи, которые могут быть предложены на занятии

1 Постройте таблицы значений для следующих булевых функций:

а) $(x \rightarrow y) \oplus (y \rightarrow z) \oplus (z \rightarrow x)$;

б) $\overline{x \wedge y \vee x \wedge z} \downarrow (x \leftrightarrow y)$;

в) $(x \vee y \rightarrow x) \wedge ((x \mid y) \leftrightarrow z)$;

г) $x \wedge y \vee t \wedge z$;

2 Какие переменные являются существенными, а какие – фиктивными для функции:

а) $f = (01011101)$

б) $f = (00110101)$

в) $f = (10110001)$

3 Решить булево уравнение:

$$a) (\bar{z} \oplus x) \vee (\bar{z} | (y \vee \bar{x})) = x \wedge (y \oplus z)$$

$$б) (\bar{z} \vee y) \rightarrow (\bar{z} \oplus \bar{x}) = x \wedge y$$

$$в) (\bar{z} \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\bar{z} \vee \bar{x}) = x \oplus y$$

4 Изобразить логическую схему функции $f = xy \oplus (z \vee y)$. Эквивалентными преобразованиями привести эту функцию к ДНФ и КНФ.

5 Данную функцию $f = (00011101)$ представить в виде СДНФ и СКНФ. Минимизировать эту функцию с помощью карты Карно, диаграммы Вейча. Выяснить ее монотонность, линейность, самодвойственность.

6 Для каждой функции системы $\{(00111010); (01110111); (10111100)\}$ выяснить принадлежность классам T_0, T_1, S, M, L . Проверить полноту системы.

7 Для данной функции $f = (x|y)$ построить полином Жегалкина.

8 Проверить полноту класса функций $\{\rightarrow, \neg, \wedge\}$.

9 Найти функцию, двойственную функции $f = (x \wedge y) (x | z)$.

10 Данную булеву функцию представить в виде полинома Жегалкина. Определить, является ли эта функция линейной, монотонной или самодвойственной.

$$a) ((x \vee y) \rightarrow \bar{z}) \vee x \wedge y \wedge z$$

$$б) x \wedge (y \rightarrow (x \vee z))$$

$$в) (x \rightarrow (z \wedge (y \leftrightarrow x)))$$

11 Для данной булевой функции построить СДНФ, СКНФ, найти минимальную ДНФ и соответствующую ей переключательную схему

$$a) (y \rightarrow x) \leftrightarrow (x \rightarrow z)$$

$$б) \overline{x \leftrightarrow y} \rightarrow (x \vee z)$$

$$в) x \wedge y \rightarrow ((x \vee z) \rightarrow y)$$

Задачи, которые могут быть предложены для самостоятельного решения

1 Постройте таблицы значений для следующих булевых функций:

$$a) (x \oplus y) \vee (y \oplus z) \vee (z \oplus x);$$

$$б) (x \rightarrow y) \leftrightarrow (xy \oplus z);$$

$$в) (((x | y) \downarrow z) | y) \downarrow z;$$

$$г) (x \rightarrow (y \downarrow z)) \oplus (u | v).$$

2 Какие переменные являются существенными, а какие – фиктивными для функции:

$$a) f = (01011101)$$

$$б) f = (00110101)$$

$$в) f = (10110001)$$

3 Решить булево уравнение:

$$a) (\bar{z} \vee y) \wedge (\bar{z} \oplus \bar{x}) = x \Rightarrow y$$

$$б) (\bar{z} \vee y) \oplus (\bar{z} \oplus \bar{x}) = x | y$$

$$в) (\bar{z} \vee x) \Leftrightarrow (\bar{z} | (y \vee \bar{x})) = y$$

4 Данную функцию $(x \oplus y \wedge \bar{z} \rightarrow x \wedge y \wedge \bar{z}) \leftrightarrow (z \vee \bar{x} \wedge y \downarrow \bar{y} \wedge z)$ представить в виде СДНФ и СКНФ. Минимизировать эту функцию с помощью карты Карно, диаграммы Вейча. Выяснить ее монотонность, линейность, самодвойственность.

5 Для каждой функции системы $\{(01101010); (01011111); (11110100)\}$ выяснить принадлежность классам T_0, T_1, S, M, L . Проверить полноту системы.

6 Данную булеву функцию представить в виде полинома Жегалкина. Определить, является ли эта функция линейной, монотонной или самодвойственной.

а) $\overline{(x \leftrightarrow y)} \rightarrow (x \vee z)$

б) $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow z)$

в) $(y \rightarrow x) \leftrightarrow (x \rightarrow z)$

г) $(x \leftrightarrow y) \rightarrow \overline{(x \vee z)}$

7 Для данной булевой функции построить СДНФ, СКНФ, найти минимальную ДНФ и соответствующую ей переключательную схему:

а) $\overline{x \wedge y} \rightarrow ((x \vee z) \rightarrow y)$

б) $\overline{x \leftrightarrow y} \rightarrow (x \vee z)$

в) $x \wedge y \rightarrow (\bar{x} \wedge z \rightarrow (x \vee y))$

Тема № 5

(Лабораторная работа)

ПРЕДИКАТЫ. ОПЕРАЦИИ НАД ПРЕДИКАТАМИ. КВАНТОРЫ

Теоретические вопросы:

- 1 Определение предиката.
- 2 Определение области истинности и области определения предиката.
- 3 Определение равносильных предикатов.
- 4 Определение логического следования предикатов.
- 5 Классификация предикатов.
- 6 Логические операции над предикатами.
- 7 Определение кванторов.

Задачи, которые могут быть предложены на занятии

1 Какие из следующих предложений являются предикатами? Определить их область истинности, область определения, местность.

а) $x + y = 5$, x и y – действительные числа;

б) $\exists x (x + y = 5)$, x и y – действительные числа;

в) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, x и y – действительные числа;

г) « x работает в вузе»;

д) $\exists x (\langle x - \text{учитель } y \rangle)$.

2 Запишите с помощью кванторов следующие утверждения:

а) «Некоторые студенты ходят в театр».

б) «Все кошки серые».

в) «Встречаются злые собаки».

3 Запишите отрицание для следующих утверждений.

а) $\exists x(x^2 = 5)$;

б) $\exists x(x + y = 5)$;

в) $\forall y(x + y = 5)$;

г) $\forall y \exists x(x + y = 5)$;

4 Даны предикаты $P(x)$: $x^2 + x + 1 > 0$ и $Q(x)$: $x^2 - 4x + 3 = 0$, определенные на множестве R . Требуется установить, какие из следующих высказываний истинны и какие ложны:

а) $\forall x P(x)$;

б) $\exists x P(x)$;

5 Выразить области истинности предиката $P(x, y)$ через области истинности предикатов $A(x, y)$ и $B(x, y)$, если:

а) $P(x, y) = \overline{A(x, y)}$;

б) $P(x, y) = A(x, y) \wedge B(x, y)$;

в) $P(x, y) = A(x, y) \vee B(x, y)$;

6 Указать свободные и связанные переменные:

а) $\exists x A(x) \wedge B(x)$;

б) $\exists x \forall y P(x) \wedge Q(y) \rightarrow \forall x R(x)$;

в) $P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$;

7 Пусть все приведенные предикаты определены на множестве действительных чисел. Изобразить графически области изменения свободных переменных, при которых следующие предикаты принимают значение «истина»:

а) $y \geq x^2$;

б) $\forall x(y < \sin x)$.

в) $\forall x \exists y(\sin x = 1)$;

8 Найти отрицание следующих формул.

а) $\exists x(A(x) \wedge B(x) \wedge C(x))$;

б) $\forall x(A(x) \rightarrow \forall y B(y))$;

в) $\forall x(A(x) \vee \exists y B(y))$;

9 Привести следующие формулы логики предикатов сначала к предваренной нормальной форме (ПНФ), затем к сколемовской нормальной форме (СНФ) и стандартной сколемовской форме (ССФ).

а) $\exists x \forall y \exists z \forall u P(x, y, z, u)$;

б) $\forall x R(x) \vee \exists x Q(x, y)$;

в) $p \rightarrow \exists x R(x)$;

10 Даны утверждения $A(n)$ – «число n делится на 3», $B(n)$ – «число n делится на 2», $C(n)$ – «число n делится на 4», $D(n)$ – «число n делится на 6», $E(n)$ – «число n делится на 12». Укажите, какие из следующих утверждений истины, а какие ложные.

а) $\forall n(A(n) \wedge B(n) \rightarrow E(n))$;

б) $\forall n(B(n) \wedge D(n) \rightarrow E(n))$;

в) $\exists n(C(n) \wedge D(n) \rightarrow E(n))$;

11 Какие из заданных формул являются общезначимыми?

а) $\exists x(P_1(x) \wedge P_2(x)) \rightarrow (\exists x P_1(x) \wedge \exists x P_2(x))$;

б) $\exists x(P_1(x) \wedge P_2(x)) \leftrightarrow (\exists x P_1(x) \wedge \exists x P_2(x))$;

в) $(\forall x P_1(x) \vee \forall x P_2(x)) \rightarrow (\forall x P_1(x) \vee P_2(x))$.

12 Перевести выражения естественного языка на язык исчисления предикатов:

а) Если произведение конечного числа сомножителей равно нулю, то, по меньшей мере, один из сомножителей равен нулю. ($P(y)$ – «у есть произведение конечного числа сомножителей», $F(x, y)$ – «x есть один из сомножителей числа y»).

б) Существуют такие действительные числа x, y, z что сумма чисел x и y больше, чем произведение чисел x и z .

в) Для каждого действительного числа x существует такое y , что для каждого z , если сумма z и 1 меньше y , то сумма x и 2 меньше 4.

г) Каждый студент выполнил, по крайней мере, одну лабораторную работу.

д) Животные, живущие в зоопарке, встречаются с людьми, посещающими зоопарк.

е) Некоторые юристы, являющиеся политиками, – члены конгресса.

ж) Ни один доктор не является знахарем.

Задачи, которые могут быть предложены для самостоятельного решения

1 Какие из следующих предложений являются предикатами? Определить их область истинности, область определения, местность.

а) $\forall y \exists x (x + y = 5)$, x и y – действительные числа;

б) $x^2 + y^2 < 0$, x и y – действительные числа;

в) $\forall x (\langle x - \text{студент} \rangle)$;

2 Запишите с помощью кванторов следующие утверждения:

а) «Люди ошибаются».

б) «Никто не обращает на него внимания»

в) «Ни одна фирма не обанкротилась».

г) «Все лебеди – белые или черные».

3 Запишите отрицание для следующих утверждений.

а) $\forall x (\langle x - \text{студент} \rangle)$;

б) $\exists x (\langle x - \text{учитель } y \rangle)$;

в) $\exists x \forall y (\langle x - \text{учитель } y \rangle)$.

4 Даны предикаты $P(x): x^2 + x + 1 > 0$ и $Q(x): x^2 - 4x + 3 = 0$, определенные на множестве R . Требуется установить, какие из следующих высказываний истинны и какие ложны:

а) $\forall x Q(x)$;

б) $\exists x Q(x)$.

5 Выразить области истинности предиката $P(x, y)$ через области истинности предикатов $A(x, y)$ и $B(x, y)$, если:

а) $P(x, y) = A(x, y) \rightarrow B(x, y)$;

б) $P(x, y) = A(x, y) \leftrightarrow B(x, y)$.

6 Указать свободные и связанные переменные:

а) $\exists x \exists y P(x, y) \wedge Q(z)$;

б) $\forall z P(z) \wedge \exists x Q(x, z) \rightarrow \exists y R(z, y) \vee Q(z, x)$.

7 Пусть все приведенные предикаты определены на множестве действительных чисел. Изобразить графически области изменения свободных переменных, при которых следующие предикаты принимают значение «истина»:

а) $\exists x (x^2 + y^2 \leq 4)$;

б) $\forall x (x^2 + 4y^2 \leq 4)$;

в) $\forall x (x + \sin y \leq 2)$.

8 Найти отрицание следующих формул:

а) $\exists x (R(x) \leftrightarrow Q(x))$;

б) $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \wedge \exists x (S(x) \wedge R(x))$;

в) $\forall x \exists y \forall z (P(x, y, z) \rightarrow Q(x, y, z))$;

г) $\forall x \exists y (R(x, y) \rightarrow L(x, y))$.

9 Привести следующие формулы логики предикатов сначала к предваренной нормальной форме (ПНФ), затем к сколемовской нормальной форме (СНФ) и стандартной сколемовской форме (ССФ).

а) $\forall x \exists y (A(x) \leftrightarrow A(y))$

б) $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

в) $\forall x (A(x) \rightarrow \exists y B(y))$

10 Даны утверждения: $A(n)$ – «число n делится на 3», $B(n)$ – «число n делится на 2», $C(n)$ – «число n делится на 4», $D(n)$ – «число n делится на 6», $E(n)$ – «число n делится на 12». Укажите, какие из следующих утверждений истинны, а какие ложные.

а) $\forall n (E(n) \rightarrow C(n) \wedge D(n))$;

б) $\forall n (E(n) \rightarrow B(n) \wedge D(n))$;

в) $\exists n (B(n) \wedge C(n) \rightarrow D(n))$;

г) $\forall n (A(n) \rightarrow E(n))$.

11 Какие из заданных формул являются общезначимыми?

а) $(\forall x P_1(x) \vee \forall x P_2(x)) \leftrightarrow \forall x (P_1(x) \vee P_2(x))$;

б) $\forall x (P_1(x) \rightarrow P_2(x)) \leftrightarrow (\forall x P_1(x) \rightarrow \forall x P_2(x))$.

12 Перевести выражения естественного языка на язык исчисления предикатов:

а) Наибольший общий делитель чисел a и b делится на всякий их общий делитель ($F(x, y)$ – « x есть один из делителей числа y », а $G(x, y, z)$ – « z есть наибольший общий делитель чисел x и y »).

- б) Для всякого действительного числа x существует большее действительное число y .
- в) Существует x , меньшее, чем 5 и большее, чем 3.
- г) Для любого числа x существует число y , меньшее x .
- д) Между любыми двумя различными точками на прямой лежит, по крайней мере, одна точка, с ними не совпадающая.
- е) Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.
- ж) Ни один член конгресса не бодр.
- з) Все старые члены конгресса – юристы.
- и) Некоторые женщины одновременно являются юристами и членами конгресса.
- к) Некоторые пациенты любят докторов.
- л) Выгул кошек или собак запрещен.

Тема № 6 (практическая работа) ПОНЯТИЕ АЛГОРИТМА. МАШИНА ТЬЮРИНГА

Теоретические вопросы:

- 1 Определение алгоритма.
- 2 Определение машины Тьюринга.
- 3 Определение алфавита и команды машины Тьюринга.
- 4 Тезис Черча – Тьюринга.

Задачи, которые могут быть предложены на занятии

1 На ленту подряд вписаны два конечных набора единиц, разделенные звездочкой. Причем в левом наборе единиц больше, чем в правом. Составьте программу машины Тьюринга, которая в левом наборе оставляла бы ровно столько единиц, на сколько единиц в левом наборе больше, чем в правом.

2 Машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1\}$ и алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}\}$ определяется функциональной схемой:

Q	A	a_0	1
q_1		$q_2 a_0 Л$	$q_0 1$
q_2		$q_5 a_0$	$q_3 a_0$
q_3		$q_4 a_0 Л$	$q_0 1$
q_4		$q_5 1$	$q_4 1Л$
q_5		$q_0 a_0$	$q_6 1Л$
q_6		$q_0 a_0$	$q_7 a_0$

q_7	$q_8 a_0 \Pi$	$q_0 1$
q_8	$q_9 1$	$q_8 1 \Pi$
q_9	$q_0 a_0$	$q_{10} 1 \Pi$
q_{10}	$q_0 a_0$	$q_{11} a_0$
q_{11}	$q_{12} a_0 \Pi$	$q_0 1$
q_{12}	$q_{13} 1$	$q_{12} 1 \Pi$
q_{13}	$q_0 a_0$	$q_0 1$

Определите, в какое слово перерабатывает машина каждое из следующих слов. В начальный момент времени машина находится в состоянии q_1 и обозревает крайнюю правую ячейку.

а) $a_0 1 a_0 11 a_0$;

б) $a_0 111 a_0 1 a_0$;

в) $a_0 11 a_0 111 a_0 11 a_0$.

3 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Пусть P – непустое слово, значит, P – это последовательность из десятичных цифр, т. е. запись неотрицательного целого числа в десятичной системе. Требуется получить на ленте запись числа, которое на 1 больше числа P .

4 $A = \{a, b, c\}$. Если первый и последний символы (непустого) слова P одинаковы, тогда это слово не менять, а иначе заменить его на пустое слово.

5 $A = \{0, 1, 2\}$. Считая непустое слово P записью числа в троичной системе счисления, определить, является оно четным числом или нет. Ответ: 1 (да) или 0 (нет). (Замечание: в четном троичном числе должно быть четное количество цифр 1).

6 $A = \{a, b, c\}$. Если в слово P не входит символ a , то заменить в P все символы b на c , иначе в качестве ответа выдать слово из одного символа a .

7 $A = \{a, b, 0, 1\}$. В данном алфавите определить, является ли слово P записью числа в двоичной системе счисления (непустым словом, состоящем только из цифр 0 и 1). Ответ: слово 1 (да) или слово 0 (нет).

8 $A = \{0, 1\}$. Для непустого слова P определить, является ли оно записью степени двойки (1, 2, 4, 8, ...) в двоичной системе счисления. Ответ: слово 1 (является) или слово 0 (не является).

Задачи, которые могут быть предложены для самостоятельного решения

1 Машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1\}$ и алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}\}$ определяется функциональной схемой:

Q	A	a_0	1
q_1		$q_2 a_0 \Pi$	$q_0 1$
q_2		$q_5 a_0$	$q_3 a_0$

q_3	$q_4 a_0 \text{ Л}$	$q_0 1$
q_4	$q_5 1$	$q_4 1 \text{ Л}$
q_5	$q_0 a_0$	$q_6 1 \text{ Л}$
q_6	$q_0 a_0$	$q_7 a_0$
q_7	$q_8 a_0 \text{ П}$	$q_0 1$
q_8	$q_9 1$	$q_8 1 \text{ П}$
q_9	$q_0 a_0$	$q_{10} 1 \text{ Л}$
q_{10}	$q_0 a_0$	$q_{11} a_0$
q_{11}	$q_{12} a_0 \text{ Л}$	$q_0 1$
q_{12}	$q_{13} 1$	$q_{12} 1 \text{ Л}$
q_{13}	$q_0 a_0$	$q_0 1$

Определите, в какое слово перерабатывает машина каждое из следующих слов. В начальный момент времени машина находится в состоянии q_1 и обозревает крайнюю правую ячейку.

- а) $a_0 11 a_0 111 a_0$
- б) $a_0 1111 a_0 1 a_0$
- в) $a_0 1 a_0 1 a_0 1111 a_0$

2 На ленту подряд вписаны два конечных набора единиц, разделенные звездочкой. Причем в левом наборе единиц меньше, чем в правом. Составьте программу машины Тьюринга, которая в правом наборе оставляла бы ровно столько единиц, на сколько единиц в левом наборе меньше, чем в правом.

- 3 $A = \{a, b, c\}$. Перенести первый символ непустого слова P в его конец.
- 4 $A = \{a, b, c\}$. Удалить из P все вхождения символа a .
- 5 $A = \{a, b, c\}$. Приписать слева к слову P символ b ($P \rightarrow bP$).
- 6 $A = \{a, b, c\}$. Определить, входит ли в слово P символ a . Ответ: слово из одного символа a (да, входит) или пустое слово (нет).
- 7 $A = \{0, 1\}$. Считая непустое слово P записью числа в двоичной системе, получить двоичное число, равное неполному частному от деления числа P на 2 (например: $1011 \rightarrow 101$).
- 8 $A = \{a, b, c\}$. Если P – слово чётной длины $(0, 2, 4, \dots)$, то выдать ответ a , иначе – пустое слово.
- 9 $A = \{a, b, c\}$. Пусть P имеет нечётную длину. Оставить в P только средний символ.
- 10 $A = \{a, b, c\}$. Если слово P имеет чётную длину, то оставить в нём только левую половину.
- 11 $A = \{a, b, c\}$. Приписать слева к непустому слову P его первый символ.

Тема № 7
(практическая работа)
АЛГОРИТМЫ МАРКОВА. ВЫЧИСЛИМЫЕ ФУНКЦИИ

Теоретические вопросы:

- 1 Определение алгоритма.
- 2 Определение нормального алгоритма Маркова.
- 3 Определение базисной функции.
- 4 Операции над функциями.
- 5 Вычислимые функции.
- 6 Тезис Черча.

Задачи, которые могут быть предложены на занятии

- 1 $A = \{a, b, c, d\}$. В слове P требуется заменить первое вхождение под слова bb на ddd и удалить все вхождения символа c .
- 2 $A = \{a, b\}$. Преобразовать слово P так, чтобы в его начале оказались все символы a , а в конце – все символы b . Например: $babba \rightarrow aabbb$.
- 3 $A = \{a, b\}$. Удалить из непустого слова P его первый символ. Пустое слово не менять.
- 4 $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Пусть P – непустое слово. Трактую его как запись неотрицательного целого числа в четверичной системе счисления, требуется получить запись этого же числа, но в двоичной системе. Например: $0123 \rightarrow 00011011$.
- 5 $A = \{a, b\}$. Требуется приписать символ a к концу слова P . Например: $bbab \rightarrow bbaba$.
- 6 $A = \{a, b\}$. В слове P заменить на aa последнее вхождение символа a , если такое есть. Например: $bababb \rightarrow babaabb$.
- 7 $A = \{a, b\}$. Перенести в конец непустого слова P его первый символ. Пустое слово не менять. Например: $bbaba \rightarrow babab$.
- 8 Получить функцию $f(x) = 1$ из базисных функций операций подстановки.
- 9 Получить функцию $h(x, y) = x + y$ из базисных функций рекурсией.
- 10 Выяснить примитивную рекурсивность функции $h(x) = x * y$.

Задачи, которые могут быть предложены для самостоятельного решения

- 1 $A = \{f, h, p\}$. В слове P заменить все пары ph на f .
- 2 $A = \{f, h, p\}$. В слове P заменить на f только первую пару ph , если такая есть.
- 3 $A = \{a, b, c\}$. Приписать слово bac слева к слову P .
- 4 $A = \{a, b, c\}$. Определить, входит ли символ a в слово P . Ответ (выходное слово): слово a , если входит, или пустое слово, если не входит.

5 Выписать НАМ, не меняющий входное слово (при любом алфавите A).

6 $A = \{ \mid \}$. Считая слово P записью положительного числа в единичной системе счисления, уменьшить это число на 1.

7 $A = \{a, b\}$. Если в слово P входит больше символов a, чем символов b, то в качестве ответа выдать слово из одного символа a, если в P равное количество a и b, то в качестве ответа выдать пустое слово, а иначе выдать ответ b.

8 $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Преобразовать слово P так, чтобы сначала шли все четные цифры (0 и 2), а затем – все нечетные.

9 Получить функцию $g(x, y, z) = z + 1$ из базисных функций операций подстановки.

10 Выяснить примитивную рекурсивность функции

$$p(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Тема № 8 **(практическая работа)**

КОМБИНАТОРНЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

Теоретические вопросы:

1 Определение комбинаторной конфигурации.

2 Правило суммы и произведения.

3 Понятие перестановки. Формула для подсчета числа различных перестановок.

4 Понятие размещения. Формула для подсчета числа различных размещений.

5 Понятие сочетания. Формула для подсчета числа различных сочетаний элементов.

6 Понятие перестановки с повторением элементов. Формула для подсчета числа различных перестановок.

7 Понятие размещения с повторением элементов. Формула для подсчета числа различных размещений.

8 Понятие сочетания с повторением элементов. Формула для подсчета числа различных сочетаний элементов.

Задачи, которые могут быть предложены на занятии

1 Сколько существует пятизначных чисел, в чьей десятичной записи участвуют только цифры: 0, 1, 2, 4, 5, 6?

а) сколько среди этих чисел не имеют повторяющихся цифр?

б) сколько среди этих чисел четных?

в) сколько среди таких четных чисел не имеют повторяющихся цифр?

г) сколько среди них делится на 4?

д) сколько чисел среди данных делится на четыре и не имеет повторяющихся цифр?

е) сколько чисел не превосходят 3000?

ж) сколько таких чисел больше 3000?

з) сколько среди них начинается на 2 и не имеют повторяющихся цифр?

2 Существуют матрицы, состоящие из 0 и 1, они называются бинарными.

а) сколько существует бинарных матриц размерности (3,4)?

б) сколько среди таких матриц, у которых различны все строки?

в) сколько среди таких матриц, у которых различны все столбцы?

г) сколько среди таких матриц, у которых различны все строки и столбцы?

3 Сколькими разными способами можно переставить буквы слова «каракули» так, чтобы не менялся порядок гласных букв?

4 12 человек, включая Мари и Петера, являются кандидатами в комитет пяти. Сколько разных комитетов можно набрать из 12 человек, которые включают либо Мари, либо Петера, но не обоих сразу?

5 В небольшой фирме восемь человек работают на производстве, только пятеро – в отделе сбыта, и трое – в бухгалтерии. Для обсуждения новой продукции было решено пригласить на совещание шестерых работающих. Сколькими способами это можно сделать, если необходимо пригласить, по крайней мере, двоих представителей производства?

6 Для расселения 25 студентов первого курса выделили 3 комнаты 4 – х местных, 3 комнаты 3– местных и 2 комнаты 2 – местных. Сколькими способами можно расселить студентов?

7 Сколько существует матриц размерности (3, 5), состоящих только из нулей и единиц (бинарных матриц)?

8 Перевертыш – это многозначное число, которое не поменяет своего значения, если все его цифры записать в обратном порядке. Сколько существует шестизначных перевертышей?

9 Пароль, открывающий доступ к компьютеру, состоит из 6 символов. Первые два из них – строчные буквы латинского алфавита (всего 26 букв), а оставшиеся четыре могут быть как цифрами, так и строчными буквами. Сколько можно придумать различных паролей?

10 Имеется 10 электронных документов.

а) сколькими способами три из них можно поместить в очередь на печать на лазерном принтере?

б) электронные документы передаются по семи каналам связи из пункта А в пункт В. В пункте В документы редактируются и передаются обратно в пункт А. Сколькими способами можно передать документы из пункта А в пункт В и обратно?

в) сколькими способами их можно передать по электронной почте, если каждый документ передается отдельно?

г) сколькими способами их можно передать по электронной почте, если документы А и В должны быть переданы вместе?

11 Имеется 10 символов, которые можно использовать для составления пятибуквенного кода электронного документа?

- а) сколько существует таких кодов?
- б) сколько кодов не имеют повторяющихся символов?
- в) сколько кодов содержат два указанных символа α и β ?
- г) сколько кодов начинаются с символа α или β ?

12 Сколькими способами можно расположить в 12 лузах 3 белых шара и 9 черных:

- а) часть луз может быть пустой и лузы считаются различными?
- б) ни одна из луз не может быть пустой?
- в) в первой лузе должен лежать белый шар и нет пустых луз?
- г) все шары считаются различными?

13 Сколькими способами можно расположить в 12 лузах 7 белых шаров и 5 черных (часть луз может быть пустой и лузы считаются различными)?

14 Сколькими способами группу из 25 человек можно разбить на 7 коалиций: 2 – по 5 человек, 1 – по 7 человек, 4 – по 2 человека?

15 В 92-процессорном ЭВС 19 микропроцессоров обрабатывают текстовую информацию, 17 – графическую, 11 – символьную, 12 – микропроцессоров одновременно обрабатывают графическую и текстовую, 7 – текстовую и символьную, 5 – графическую и символьную, а часть микропроцессоров одновременно обрабатывают графическую, текстовую и символьную информацию. Сколько микропроцессоров являются универсальными, если при решении задачи не задействованы 67 микропроцессоров.

16 Сколько соответствий можно установить между элементами множеств $A=\{k, l, m, n\}$ и $B=\{B_1, B_2, B_3\}$ Какие из этих соответствий являются отображениями?

17 Сколько различных трехбуквенных слов можно составить из букв русского алфавита, не обращая внимания на их смысл.

Задачи, которые могут быть предложены для самостоятельного решения

1 Сколько существует пятизначных чисел, в чьей десятичной записи участвуют только цифры: 0, 1, 2, 4, 5, 9?

- а) сколько среди этих чисел не имеют повторяющихся цифр?
- б) сколько среди этих чисел четных?
- в) сколько среди таких четных чисел не имеют повторяющихся цифр?
- г) сколько среди них делится на 4?
- д) сколько чисел среди данных делится на четыре и не имеет повторяющихся цифр?
- е) сколько чисел не превосходят 3000?
- ж) сколько таких чисел больше 3000?
- з) сколько среди них начинается на 2 и не имеют повторяющихся цифр?

2 Существуют матрицы, состоящие из 0 и 1, они называются бинарными.

а) сколько существует бинарных матриц размерности (5,4)?

б) сколько среди таких матриц, у которых различны все строки?

в) сколько среди таких матриц, у которых различны все столбцы?

г) сколько среди таких матриц, у которых различны все строки и столбцы?

3 Сколькими разными способами можно переставить буквы слова «логарифм» так, чтобы второе, третье и шестое места были заняты согласными буквами?

4 Сколькими способами 12 полтинников можно разложить по пяти различным пакетам, если ни один из пакетов не должен быть пустым?

5 Шесть одинаковых предметов распределяется по 3 ящикам. Сколькими способами можно это сделать, если каждый ящик может вместить все 6 предметов?

6 На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

7 В некотором городе у велосипедистов были трехзначные номера. Но суеверные велосипедисты попросили, чтобы в этих номерах не встречались цифры 0 и 8, потому что первая из них похожа на вытянутое колесо, ну а что для велосипедиста значит восьмерка колеса – знает каждый. Сколько номеров может быть в этом городе?

8 В спортивной секции занимается 30 человек. Сколькими способами можно выставить 4 спортсменов на эстафету 4 по 100 м?

9 В один из комитетов парламента нужно отобрать трех членов, причем выбирать надо из 5 консерваторов, 3 лейбористов и 4 либерал-демократов.

а) сколько разных комитетов можно составить?

б) сколько разных комитетов можно составить, если в него должен входить по крайней мере один либерал-демократ?

в) сколько разных комитетов можно составить, если в него должен входить только один либерал-демократ?

г) сколько разных комитетов можно составить, если в него не должен входить ни один либерал-демократ?

д) сколько разных комитетов можно составить, если в него должен войти по крайней мере один консерватор и хотя бы один лейборист?

10 В алфавите племени Мумба–Юмба 5 букв: М, У, Б, А, Ю. Словом в словаре этого племени является последовательность не более чем 4 букв.

а) сколько всего слов в словаре этого племени?

б) сколько слов имеют хотя бы одну гласную букву?

в) сколько слов состоят только из согласных букв?

г) сколько слов начинаются с буквы М?

11 Автобусные билеты имеют шестизначные номера от 000000 до 999999.

а) сколько номеров, у которых есть хотя бы одна нечетная цифра?

б) сколько номеров содержат цифру 7?

в) сколько номеров содержат цифры 7 и 0?

г) сколько среди них счастливых? (Счастливым считается номер абсциссы или ординаты).

12 Забор состоит из 10 досок. У маляра Васи есть краска 4 разных цветов.

а) сколькими способами маляр Вася может покрасить забор?

б) сколькими способами он может покрасить лишь одну доску забора?

в) в бригаде маляров кроме Васи есть еще маляры Люся и Нюся.

Сколькими способами кто-то из них может покрасить лишь одну доску забора?

г) Вася, Люся и Нюся работают с понедельника по пятницу. Сколькими способами кто-то из них может покрасить лишь одну доску забора в рабочий день?

Тема № 9 (практическая работа)

БИНОМ НЬЮТОНА. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ.

Теоретические вопросы:

- 1 Понятие бинома Ньютона. Биномиальные коэффициенты.
- 2 Полиномиальная теорема. Полиномиальные коэффициенты.
- 3 Рекуррентные соотношения. Решение уравнений.

Задачи, которые могут быть предложены на занятии

1 Найти решение следующих уравнений:

а) $A_{2n}^3 = 20A_n^2$;

в) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$;

б) $A_{k-4}^2 + A_{k-3}^2 + A_{k-2}^2 = 20$

г) $A_x^4 \cdot P_{x-4} : P_{x-2} = 42$

2 Найти решение следующих неравенств:

а) $\frac{(2n-1)!}{(2n-3)!} > 420$

в) $C_{2n}^7 > C_{2n}^5$

б) $\frac{(n+2)!}{(n+1)1(n+2)} < 1000$

г) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} < 72$

3 Найти решение следующих систем уравнений:

а)
$$\begin{cases} A_{5x}^{n-3} : A_{5x}^{n-2} = 1:7, \\ C_{5x}^{n-3} : C_{5x}^{n-2} = 4:7; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} A_{2n}^{3x} : A_{2n}^{3x-1} = 8, \\ C_{2n}^{3x} : C_{2n}^{3x-1} = 8:9; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} A_{k-2}^n : A_{k-2}^{n-1} = 8, \\ C_{k-2}^n : C_{k-2}^{n-1} = 1,6. \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} C_x^{y+1} = 2,5x \\ C_{x-1}^y = 10 \end{cases}$$

4 Найти коэффициент при x^3 в выражении $(1+x)^3 + (1+x)^4 + \dots + (1+x)^{15}$.

5 В разложении $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$ биномиальный коэффициент третьего члена на 44 больше коэффициента второго члена разложения бинома Ньютона. Найти член, не содержащий x .

6 Найти x , если второй член разложения бинома Ньютона $(\sqrt[3]{x} + x^{-1})^5$ равен 20.

7 Определить наибольшее слагаемое в разложении многочлена $(1+\sqrt{13})^{80}$.

8 Для освещения зала может быть включена каждая из имеющихся 10 ламп. Сколько существует различных способов освещения зала?

9 Во сколько раз сумма чисел, стоящих в сто первой строке треугольника Паскаля, больше суммы чисел, стоящих в сотой строке?

10 Сколько рациональных слагаемых содержится в разложении бинома Ньютона $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$.

11 Определить коэффициент k в $ka^6b^6c^{12}$ в следующем члене многочлена, получаемого из алгебраического выражения $(a+b+c)^3(a^2+b^2+c^2)^6$.

12 Найдите коэффициент при a^3b^5c после раскрытия скобок в выражении $(a+b+c+5)^{10}$.

13 Решить рекуррентное соотношение $a_{n+2} - a_n = n$, $a_1 = 1$.

14 Решить рекуррентное соотношение $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 6n^2 - 4n - 17$, $a_1 = 3$, $a_2 = 15$, $a_3 = 41$.

Задачи, которые могут быть предложены для самостоятельного решения

1 Найти решение следующих уравнений:

а) $4C_x^4 = 15A_x^2$

в) $C_{x-1}^2 = 6$

б) $A_x^4 \cdot P_{x-4} : P_{x-2} = 42$

г) $\frac{P_{x+3}}{A_x^5 \cdot P_{x-5}} = 720$

2 Найти решение следующих неравенств:

а) $C_{19}^{k-1} < C_{19}^k$

в) $C_{2n}^{n-1} < 5C_{2n-1}^n$

б) $C_n^5 > C_n^4$

г) $C_{15}^{k-2} < C_{15}^k$

3 Найти решение следующих систем уравнений:

а) $\begin{cases} A_x^y \div A_x^{y-1} = 8 \\ C_x^y \div C_x^{y-1} = 1,6 \end{cases}$

в) $\begin{cases} C_x^{y+1} = 2,5x \\ C_{x-1}^y = 10 \end{cases}$

$$6) \begin{cases} A_x^{n-3} \div A_x^{n-2} = 1 \div 8 \\ C_x^{n-3} \div C_x^{n-2} = 5 \div 8 \end{cases} \quad \Gamma) \begin{cases} A_{2n}^{3x} \div A_{2n}^{3x-1} = 8 \\ C_{2n}^{3x} \div C_{2n}^{3x-1} = 8 \div 9 \end{cases}$$

4 Найти x , если второй член разложения $(\sqrt[3]{x} + x^{-1})^5$ равен 20;

5 Найти x , если четвертый член разложения $(\sqrt{x} + x^{-1})^6$ равен $\frac{5}{9}$.

6 Найти четвертый член разложения бинома $\left(\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{a}\right)^n$, если отношение коэффициента второго члена к коэффициенту первого члена равно $\frac{11}{2}$.

7 Найдите коэффициент при a^3b^5 с после раскрытия скобок в выражении $(a + b - c + 5)^{11}$.

8 Найдите коэффициент при a^3b^5 с после раскрытия скобок в выражении $(a + b + c + 5)^{10}$.

9 Решить рекуррентное соотношение $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27 \cdot 3^n$, $a_1 = -9$, $a_2 = 45$.

10 Решить рекуррентное соотношение $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$, $a_1 = 10$, $a_2 = 16$.

11 Найти общее решение системы рекуррентных соотношений $a_{n+1} = b_n + 5$, $b_{n+1} = -a_n + 3$.

12 Решить систему рекуррентных соотношений $a_{n+1} = 3a_n + b_n$, $b_{n+1} = -a_n + b_n$, $a_1 = 14$, $b_1 = -6$.

Тема № 10 (практическая работа)

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Теоретические вопросы:

- 1 Определение графа.
- 2 Способы задания графа.
- 3 Радиус. Диаметр. Центр графа.
- 4 Остов графа. Обход по глубине и ширине.

Задачи, которые могут быть предложены на занятии

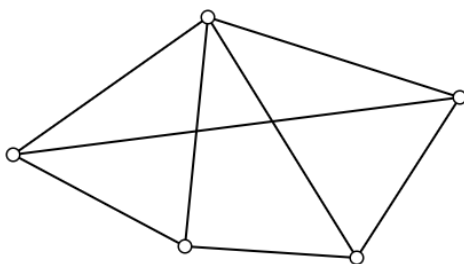
1 Задайте данный неориентированный граф матрицей смежности, матрицей инцидентностей, списком дуг и структурой смежности. Определите его остов, радиус, диаметр и центр, хроматическое и цикломатическое число.

$$V = \{(1,2), (2,3), (4,3), (4,5), (6,5), (7,6), (7,1), (7,2), (6,4), (3,7), (5,3)\}$$

2 Описать данный граф по плану:

а) Числовые характеристики графа (количество вершин, ребер, набор степеней вершин, хроматическое и цикломатическое число).

б) Вид графа (граф, орграф, полный, эйлеров, гамильтонов, планарный, двудольный, связный, взвешенный, дерево).

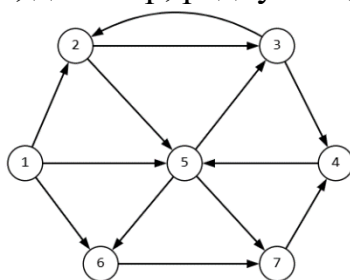


3 Имея матрицу смежности графа, задать его списком дуг.

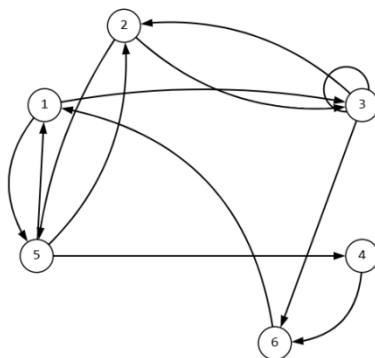
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 Для орграфа найти:

- а) компоненты сильной связности с помощью матрицы смежности;
- б) минимальный путь с помощью алгоритма фронта волны;
- в) расстояния в орграфе, диаметр, радиус и центры орграфа.



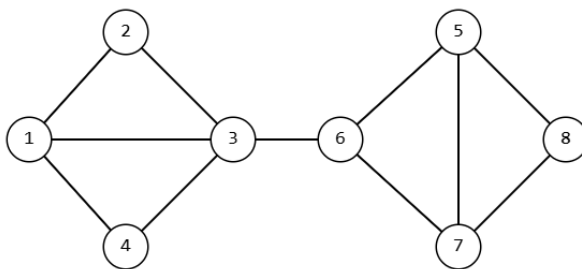
5 Постройте матрицы смежности и инцидентности для графа.



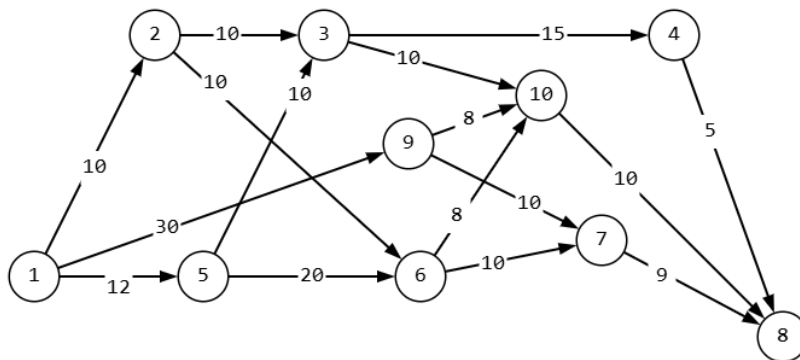
6 Дана матрица смежности, постройте граф.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7 Составить матрицу расстояний графа, найти эксцентриситеты всех вершин графа, его центр.



8 Составьте для графа матрицу весов.



9 Дана матрица смежности графа. Постройте матрицу расстояний графа, совершите обход по ширине и глубине.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

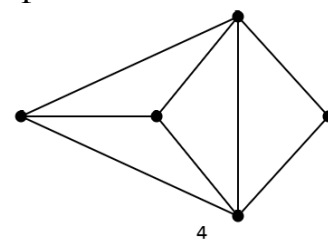
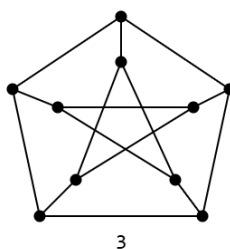
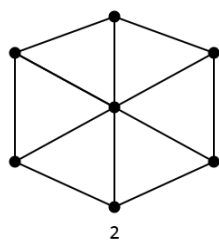
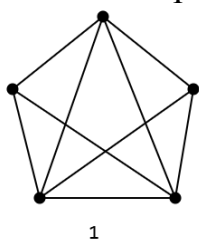
10 В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?

11 В графе из каждой вершины выходит по три ребра. Может ли в нем быть 1990 ребер?

12 Между населенными пунктами A, B, C, D, E, F, Z построены дороги с односторонним движением. В таблице указана протяженность каждой дороги. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет. Например, из A в B есть дорога длиной 4 км, а из B в A дороги нет. Сколько существует таких маршрутов из A в Z, которые проходят через 6 и более населенных пунктов? Пункты A и Z при подсчете учитывать. Два раза проходить через один пункт нельзя.

	A	B	C	D	E	F	Z
A		4	6				30
B			3				
C				11			27
D					4	7	10
E						4	8
F					5		2
Z	29						

13 Найти хроматическое число и хроматический индекс графа



Задачи, которые могут быть предложены для самостоятельного решения

1 Задайте данный неориентированный граф матрицей смежности, матрицей инцидентностей, списком дуг и структурой смежности. Определите его остов, радиус, диаметр и центр, хроматическое и цикломатическое число.

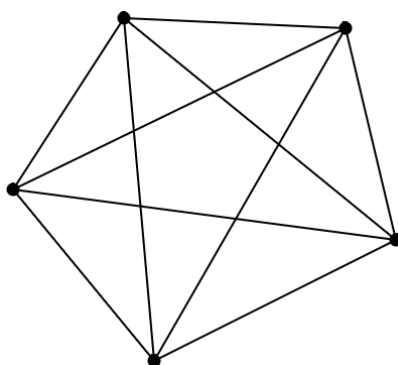
а) $V = \{(1,3), (2,3), (5,3), (3,6), (2,7), (4,1), (4,2), (7,2), (6,4), (3,4), (6,7)\}$

б) $V = \{(1,4), (2,3), (4,3), (4,5), (3,6), (7,6), (3,1), (3,5), (5,6), (2,4), (6,2)\}$

2 Описать данный граф по плану:

а) Числовые характеристики графа (количество вершин, ребер, набор степеней вершин, хроматическое и цикломатическое число).

б) Вид графа (граф, орграф, полный, эйлеров, гамильтонов, планарный, двудольный, связный, взвешенный).



3 Имея матрицу смежности графа, задать его структурой смежности.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

4 В классе больше 32, но меньше 40 человек. Каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка – с пятью мальчиками. Сколько человек в классе?

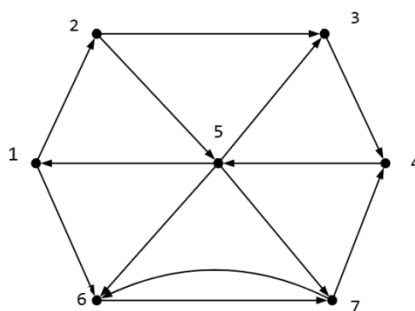
5 У короля 19 баронов – вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассального баронства 1, 5 или 9 соседних баронств?

6 Для орграфа найти:

а) компоненты сильной связности с помощью матрицы смежности;

б) минимальный путь из вершины 6 в вершину 2 с помощью алгоритма фронта волны;

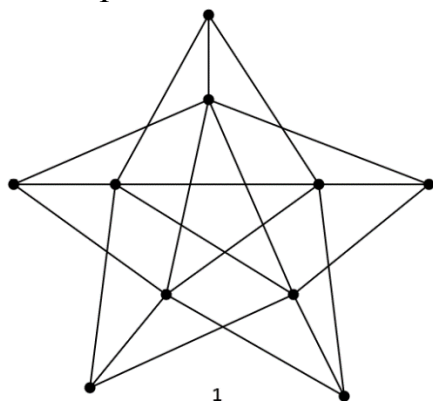
в) расстояния в орграфе, диаметр, радиус и центры орграфа.



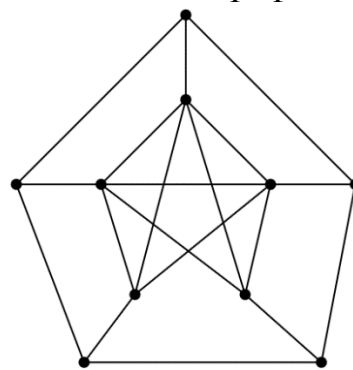
7 Между населенными пунктами A, B, C, D, E, F, Z построены дороги с односторонним движением. В таблице указана протяженность каждой дороги. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет. Например, из A в B есть дорога длиной 4 км, а из B в A дороги нет. Сколько существует таких маршрутов из A в Z, которые проходят через 6 и более населенных пунктов? Пункты A и Z при подсчете учитывать. Два раза проходить через один пункт нельзя.

	A	B	C	D	E	F	Z
A		4	6				30
B			3	4			
C				11			27
D					4	7	10
E						4	8
F					5		2
Z	29						

8 Найти хроматическое число и хроматический индекс графа.



1



2

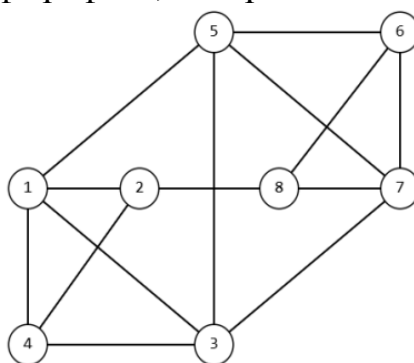
Тема № 11
(практическая работа)
Виды графов. Изоморфизм графов

Теоретические вопросы:

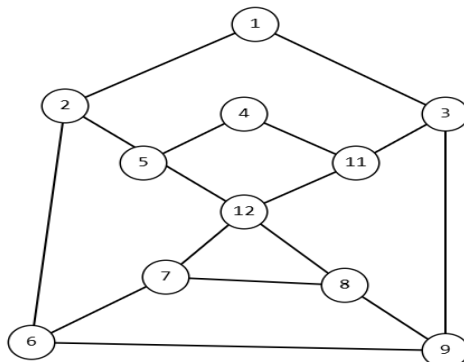
- 1 Эйлеровы графы.
- 2 Гамильтоновы графы.
- 3 Планарные графы.
- 4 Деревья.
- 5 Гомеоморфизм и изоморфизм графов.

Задачи, которые могут быть предложены на занятии

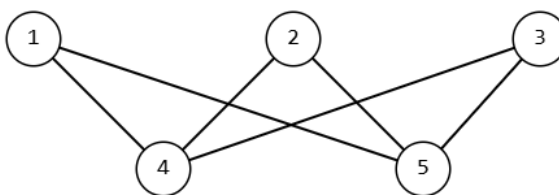
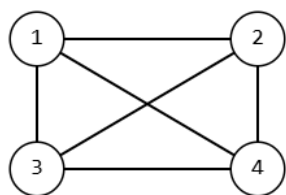
- 1 Изобразите подграф графа G, который был бы гомеоморфен данному.



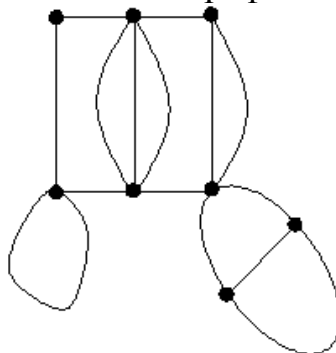
- 2 Имеет ли граф G подграф гомеоморфный $K_{3,3}$?



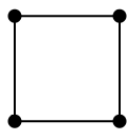
3 Преобразовать в планарные графы без пересечения ребер.



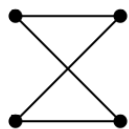
4 Сосчитайте степень граней данного графа.



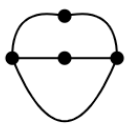
5 Среди следующих графов найти одинаковые.



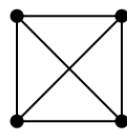
1



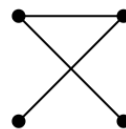
2



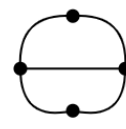
3



4

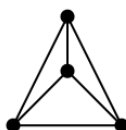


5



6

6 Среди следующих графов найти одинаковые.



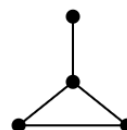
1



2



3



4

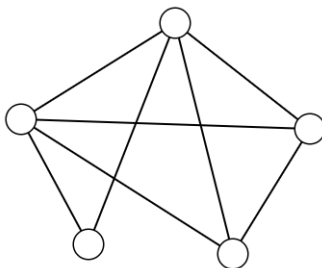


5



6

7 Докажите, что граф планарен.



Задачи, которые могут быть предложены для самостоятельного решения

1 Изобразите все связные неорграфы, имеющие 5 вершин.

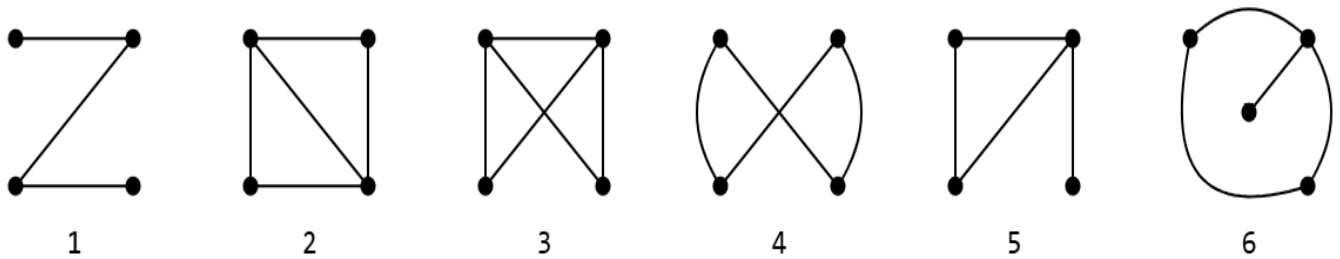
2 Может ли так случиться, что в компании из 6 человек каждый знает двух и только двух человек?

3 Изобразите все деревья, имеющие 5 вершин.

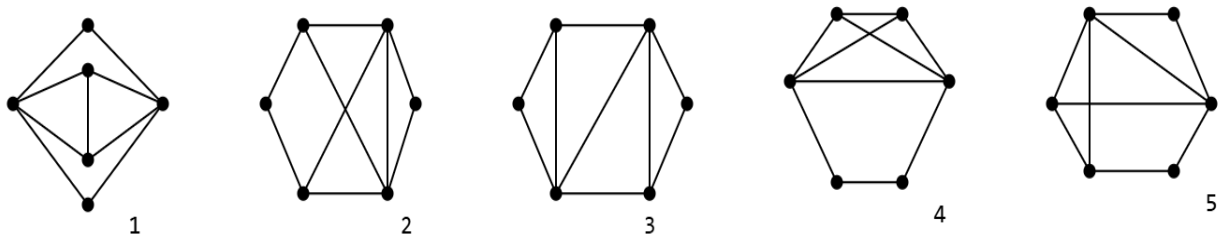
4 Решить с помощью графов. Между девятью планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий, Плутон – Венера, Земля – Плутон, Плутон –

Меркурий, Меркурий – Венера, Уран – Нептун, Нептун – Сатурн, Сатурн – Юпитер, Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

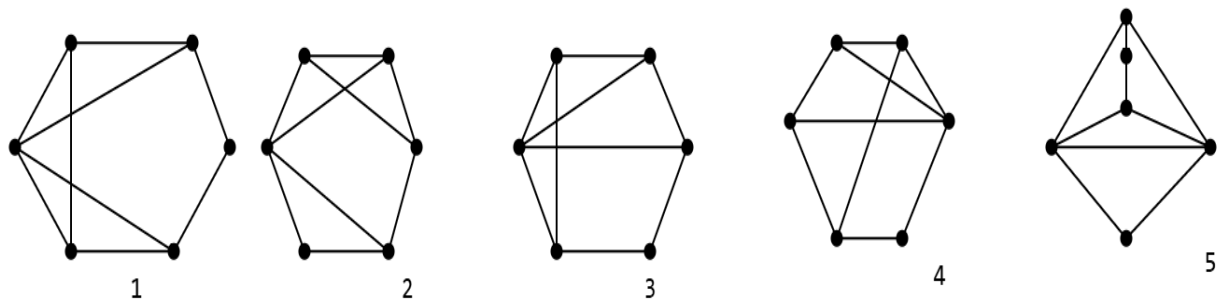
5 Среди следующих графов найти одинаковые.



6 Среди следующих графов найти одинаковые.



7 Среди следующих графов найти одинаковые.



8 Изобразите все неорграфы, имеющие 4 вершины. Сколько среди них несвязных.

9 Решить с помощью графа. Несколько Совершенно Секретных Объектов соединены подземной железной дорогой таким образом, что каждый Объект напрямую соединен не более чем с тремя другими, и от каждого Объекта можно добраться под землей до любого другого, сделав не более одной пересадки. Каково максимальное число Совершенно Секретных Объектов?

10 Изобразите все леса, имеющие 4 вершины.

11 Изобразите все полные графы, имеющие не более 6 вершин.

12 Изобразите все полные двудольные графы, имеющие 5 вершин.

Тема № 12
(практическая работа)

МИНИМАЛЬНОЕ ОСТОВНОЕ ДЕРЕВО

Теоретические вопросы:

- 1 Определение дерева.
- 2 МОД.
- 3 Алгоритм Прима.
- 4 Алгоритм Краскала.
- 5 Алгоритм Борувки.

Задачи, которые могут быть предложены на занятии

- 1 Найти минимальное остовное дерево с помощью алгоритмов Прима, Краскала и Борувки.

0	3	∞	∞	19	3	∞	∞	∞	9
3	0	7	2	7	∞	∞	∞	∞	∞
∞	7	0	5	4	∞	22	∞	∞	∞
∞	2	5	0	6	∞	∞	11	∞	10
19	7	4	6	0	14	∞	17	∞	3
3	∞	∞	∞	14	0	18	∞	13	8
∞	∞	22	∞	∞	18	0	∞	5	25
∞	∞	∞	11	17	∞	∞	0	13	14
∞	∞	∞	∞	∞	13	5	13	0	11
9	∞	∞	10	3	8	25	14	11	0

2 В первенстве класса по настольному теннису 6 участников: Андрей, Борис, Виктор, Галина, Дмитрий и Елена. Первенство проводят по круговой системе – каждый из участников играет с каждым из остальных один раз. К настоящему моменту некоторые игры уже проведены: Андрей сыграл с Борисом, Галиной, Еленой; Борис – с Андреем, Галиной; Виктор – с Галиной, Дмитрием, Еленой; Галина – с Андреем, Виктором и Борисом. Сколько игр проведено к настоящему моменту и сколько еще осталось?

3 В школьном драматическом кружке решили ставить гоголевского «Ревизора». И тут разгорелся жаркий спор. Все началось с Ляпкина-Тяпкина.

– Ляпкиным-Тяпкиным буду я! – решительно заявил Дима.

– С раннего детства я мечтал воплотить этот образ на сцене.

– Ну хорошо, согласен уступить эту роль, если мне дадут сыграть Хлестакова, – проявил великодушие Гена.

– А мне Осипа, – не уступил ему в великодушии Дима.

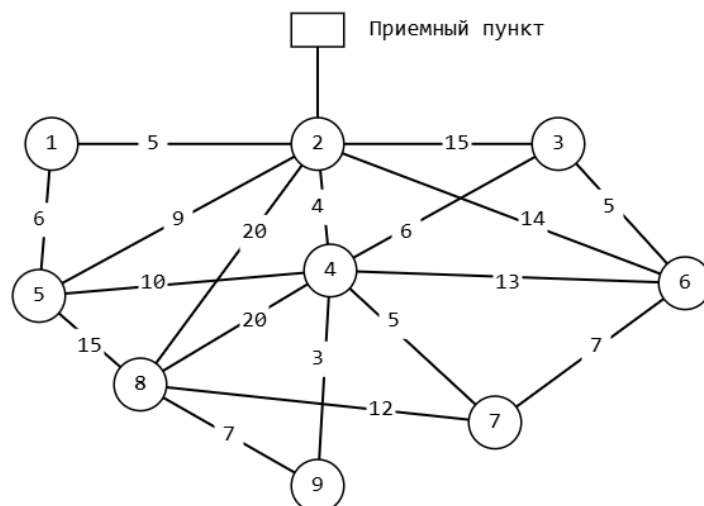
– Хочу быть Земляником или Городничим, – сказал Вова.

– Нет, Городничим буду я, – хором закричали Алик и Боря.

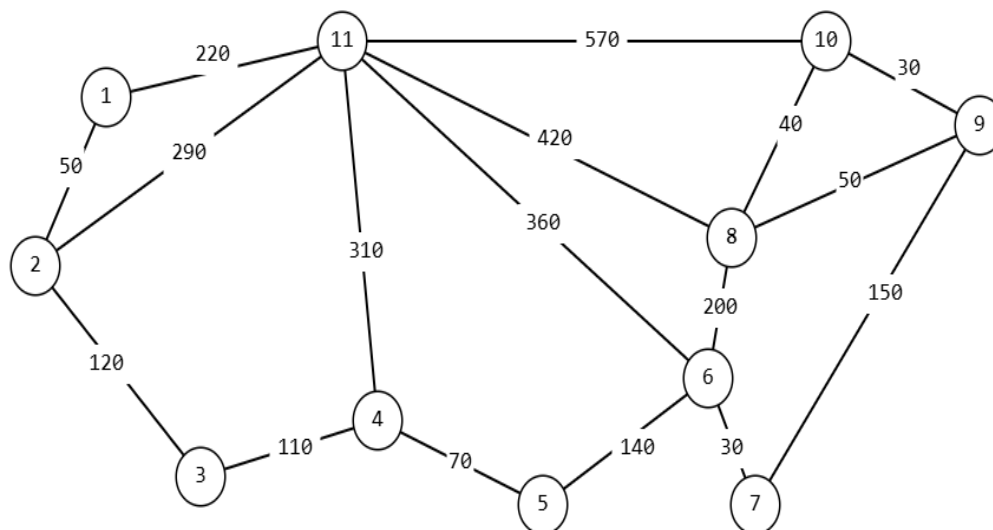
– Или Хлестаковым, – добавили они одновременно.

Удастся ли распределить роли так, чтобы исполнители были довольны?

4 На рисунке показаны расстояния между платформами, добывающими газ в открытом море, и приемным пунктом, расположенным на берегу. Платформа x_1 оснащена оборудованием для перекачки газа от остальных платформ к приемному пункту. Требуется спроектировать сеть трубопроводов минимальной длины.



5 Районной администрацией принято решение о газификации одного из небольших сел района, имеющего 10 жилых домов. Расположение домов указано на рисунке. Числа в кружках обозначают условный номер дома. Узел 11 является газопонижающей станцией. Разработать такой план газификации села, чтобы общая длина трубопровода была наименьшей.



6 Страна называется пятерочной, если в ней каждый город соединен авиалиниями ровно с пятью другими городами (международных рейсов нет).

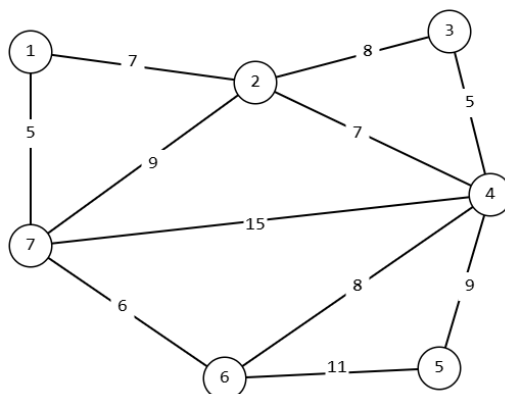
а) Нарисуйте схему авиалиний для пятерочной страны из 10 городов.

б) Сколько авиалиний в пятерочной стране из 50 городов?

в) Может ли существовать пятерочная страна, в которой ровно 46 авиалиний?

Задачи, которые могут быть предложены для самостоятельного решения

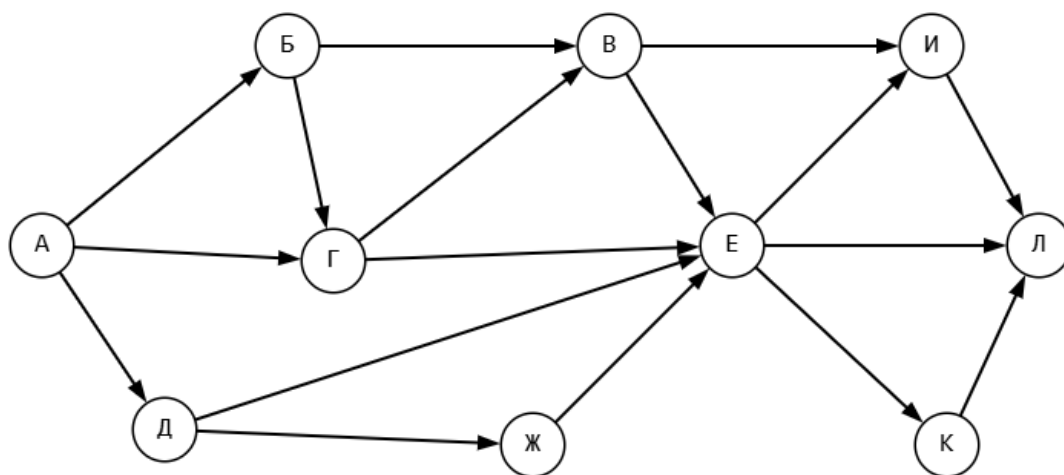
1 Найти минимальное остовное дерево с помощью алгоритмов Прима, Краскала и Борувки.



2 Найти минимальное остовное дерево с помощью алгоритмов Прима, Краскала и Борувки для графа, заданного матрицей смежностей.

0	7	8	∞	∞	∞
7	0	11	2	∞	∞
8	11	0	6	9	∞
∞	2	6	0	11	9
∞	∞	9	11	0	10
∞	∞	∞	9	10	0

3 На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К, Л. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Л?



Тема № 13-14
(лабораторная работа)
ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Теоретические вопросы:

- 1 Алгоритм Дейкстры.
- 2 Сетевые модели.
- 3 Задача о назначениях.
- 4 Транспортная задача.
- 5 Алгоритмы нахождения кратчайших путей.

Задачи, которые могут быть предложены на занятии

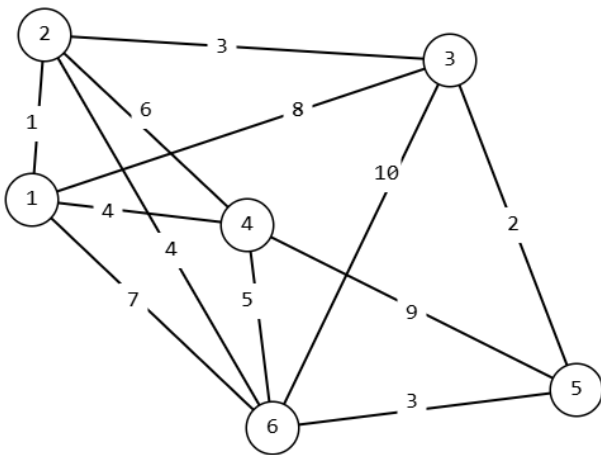
1 а) Найти критический путь и минимальное время выполнения работы для графа, заданного сетью планирования.

Вид работы	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈	A ₉	A ₁₀	A ₁₁	A ₁₂	A ₁₃	A ₁₄	A ₁₅	A ₁₆
Время	10	12	6	12	2	10	3	9	1	3	3	6	3	10	10	10
Предшественники	-	-	-	A ₁	A ₄	A ₂	A ₆	A ₃	A ₄	A ₄	A ₆	A ₆	A ₁₀	A ₆	A ₉	A ₁₄
					A ₅			A ₇					A ₁₂		A ₁₁	A ₈

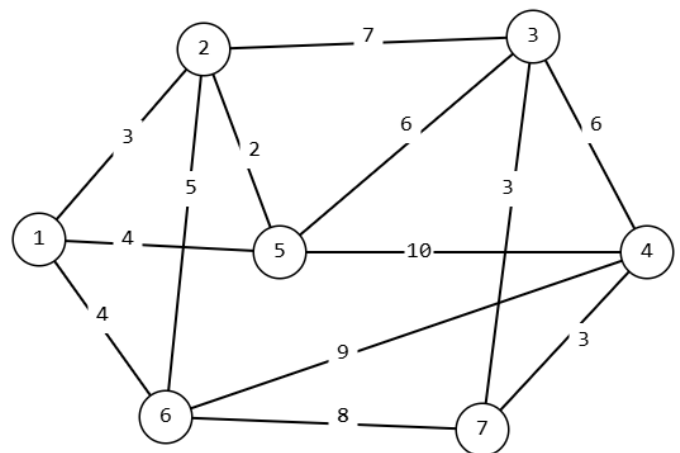
б) Рассматривая граф как транспортную сеть, построит максимальный поток сети.

в) Рассматривая граф как ориентированный взвешенный граф, выбрать произвольные две вершины, кроме u_0 и v_0 , и найти путь кратчайшей длины между этими вершинами.

2 Автодорожная компания проектирует сеть дорог с твердым покрытием, соединяющую населенные пункты в сельской местности. Структура сети и расстояние между населенными пунктами приведены на схеме. Необходимо построить транспортную сеть с минимальными затратами.



а)



б)

3 На предприятии планируется выполнить 8 видов работ: $v_1, v_2, \dots, v_8$. Для выполнения этих работ необходимы механизмы $a_1, a_2, \dots, a_6$.

Использование механизмов для проведения каждой из работ определяется следующей таблицей:

Работа механ.	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
a_1	+		+				+	+
a_2		+		+				
a_3			+			+	+	
a_4	+	+		+	+			
a_5			+		+			+
a_6					+	+		+

Никакой из механизмов не может быть занят одновременно на двух работах. Все работы выполняются за одно и то же время t . Как распределить механизмы, чтобы суммарное время выполнения всех работ было наименьшим?

4 На предприятии планируется выполнить 8 видов работ: $v_1, v_2, \dots, v_8$. Для выполнения этих работ необходимы механизмы $a_1, a_2, \dots, a_6$. Использование механизмов для проведения каждого из видов работ определяется следующей таблицей:

Работа механ.	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
a_1	+			+			+	
a_2	+	+			+			
a_3		+	+	+				
a_4			+		+	+		
a_5				+	+			
a_6				+		+		+

Никакой из механизмов не может быть занят одновременно на двух работах. Все работы выполняются за одно и то же время t . Как распределить механизмы, чтобы суммарное время выполнения всех работ было наименьшим?

5 На многопроцессорном вычислительном комплексе необходимо выполнить 7 заданий $v_1, \dots, v_7$. Задания могут использовать общие данные, и в этом случае их выполнение не может проводиться одновременно:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1		+			+		+
v_2	+		+			+	+
v_3		+		+	+		+
v_4			+		+	+	+
v_5	+		+	+		+	+
v_6		+		+	+		+
v_7	+	+	+	+	+	+	

Предположим, что все задания могут выполняться за одно и то же время. За какое наименьшее время можно выполнить все задания? Какое количество процессоров может для этого понадобиться?

6 Необходимо составить фрагмент расписания для одного дня с учетом следующих обстоятельств:

а) учитель истории может дать либо первый, либо второй, либо третий уроки, но только один урок;

б) учитель литературы может дать один, либо второй, либо третий урок;

в) математик готов дать либо только первый, либо только второй урок;

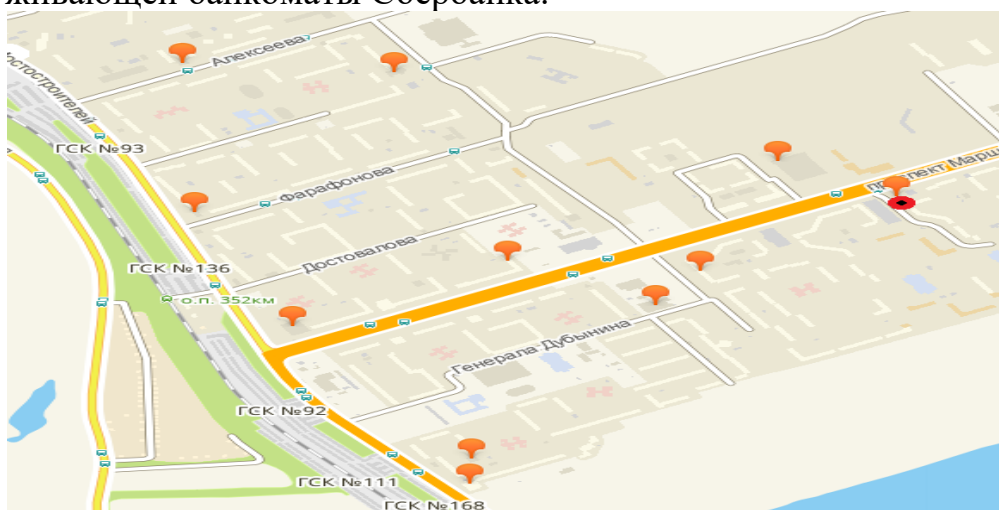
г) преподаватель физкультуры согласен дать только последний урок.

Сколько и каких вариантов расписания, удовлетворяющего всем вышеперечисленным условиям одновременно, может составить завуч школы?

7 Для создания нового стартапа была нанята команда разработчиков, у которых разный опыт работы в различных областях. Необходимо самым эффективным способом задействовать каждого члена команды. (В таблице указан опыт работы в годах)

	Проектирование	Дизайн	Верстка	Программирование	Публикация	Наполнение	Тестирование
Антон	2	3	1	2	6	3	3
Денис	8	8	2	4	1	2	4
Максим	4	0	2	4	4	3	1
Алексей	4	5	2	5	7	6	4
Евгений	1	7	3	5	6	4	4
Сергей	2	58	6	2	8	4	6
Анатолий	2	3	5	9	2	7	5

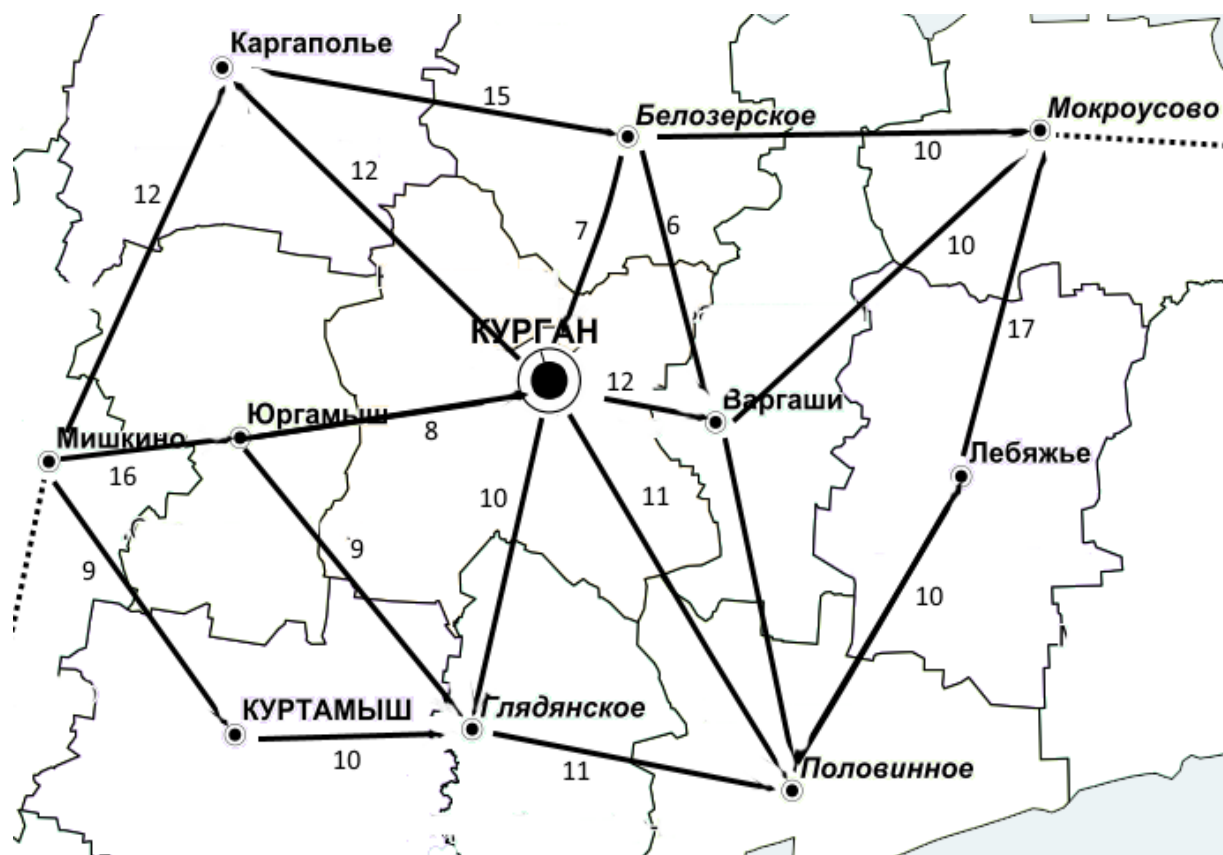
8 Найти минимальный маршрут инкассаторской машины, обслуживающей банкоматы Сбербанка.



9 Порядок оформления купли-продажи автомобиля.

A	Проверка документов		2 дня
B	Подготовить правоустанавливающие и правоподтверждающие документы на квартиру, а также документы, подтверждающие личности сторон-сделки	A	1 день
C	Заказать документы БТИ	A	1 неделя
D	Получить документы БТИ	B	1 день
E	Получить единый жилищный документ	A	1 день
F	Получить выписку из домовой книги	A	2 дня
G	Получить справку жилищно-эксплуатационной организации об отсутствии задолженности по платежам и копии финансового лицевого счета.	B,E	3 дня
H	Получить нотариальное согласие супруга на продажу квартиры (или доли)	E	1 день
K	Заказать и проверить выписку из ЕРГП	G	1 неделя
J	Составить договор купли-продажи квартиры	A	1 день
N	Подать документы на государственную регистрацию в территориальном отделении Росреестра	K, J, F,D	2 недели
M	Получить документы после регистрации	N	1 день

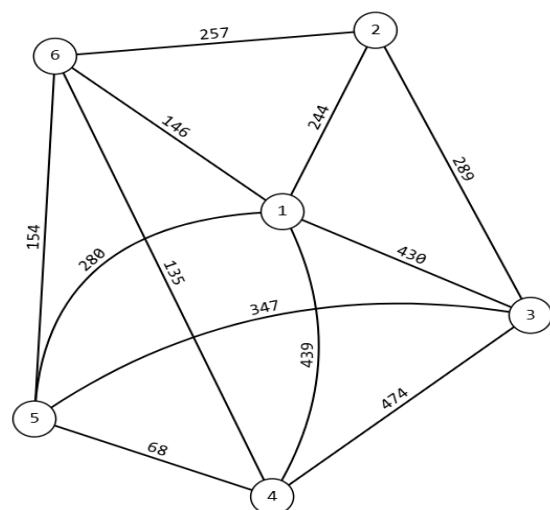
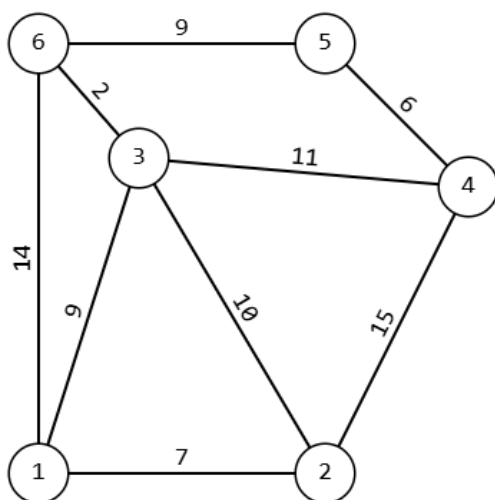
10 Найдите кратчайшее расстояние по дорогам от Мишкино до Мокроусово.



11 В больницу поступил вызов. Машина скорой помощи должна найти кратчайший путь до больного, не попав в пробку. В матрице приведены возможные маршруты скорой. Найдите минимальный путь.

0	0	1	6	3	3	0	0	0	0
0	0	2	2	10	6	5	6	8	4
6	1	0	0	2	8	0	1	10	4
10	5	0	0	0	0	3	8	9	0
3	3	0	4	0	1	6	8	1	0
9	10	0	8	2	0	3	7	3	5
0	7	8	4	2	9	0	7	9	0
2	5	0	1	0	8	0	0	0	7
0	9	5	0	1	5	0	0	0	0
7	9	0	10	0	7	8	6	0	0

12 Автодорожная компания проектирует сеть дорог с твердым покрытием, соединяющую населенные пункты в сельской местности. Структура сети и расстояние между населенными пунктами приведены на схеме. Необходимо построить транспортную сеть с минимальными затратами.



а)

б)

Задачи, которые могут быть предложены для самостоятельного решения

1 а) Найти критический путь и минимальное время выполнения работы для графа, заданного сетью планирования.

Вид работы	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈	A ₉	A ₁₀	A ₁₁	A ₁₂	A ₁₃	A ₁₄	A ₁₅	A ₁₆
Время	8	6	6	12	2	10	13	9	1 1	3	3	6	3	12	10	10
Предшестве нники	-	-	-	A ₁	A ₄	A ₂ A ₅	A ₆	A ₃ A ₇	A ₄	A ₄	A ₆	A ₆	A ₁₀ A ₁₂	A ₆	A ₉ A ₁₁	A ₁₄ A ₈

б) Рассматривая граф как транспортную сеть, построить максимальный поток сети.

в) Рассматривая граф как ориентированный взвешенный граф, выбрать произвольные две вершины, кроме u_0 и v_0 , и найти путь кратчайшей длины между этими вершинами.

2 В учебном центре необходимо провести занятия по математике, физике, химии, иностранному языку и истории в группах А, В, С. Занятия проводятся преподавателями К, L, М. Следующая таблица Т указывает, какие занятия надо провести в группах и какими преподавателями они могут быть проведены:

Предмет	Группа			Преподаватель		
	А	В	С	К	L	М
Математика	+	+		+		
Физика	+		+	+		
Химия	+	+			+	
Иностр. язык		+	+			+
История	+		+			+

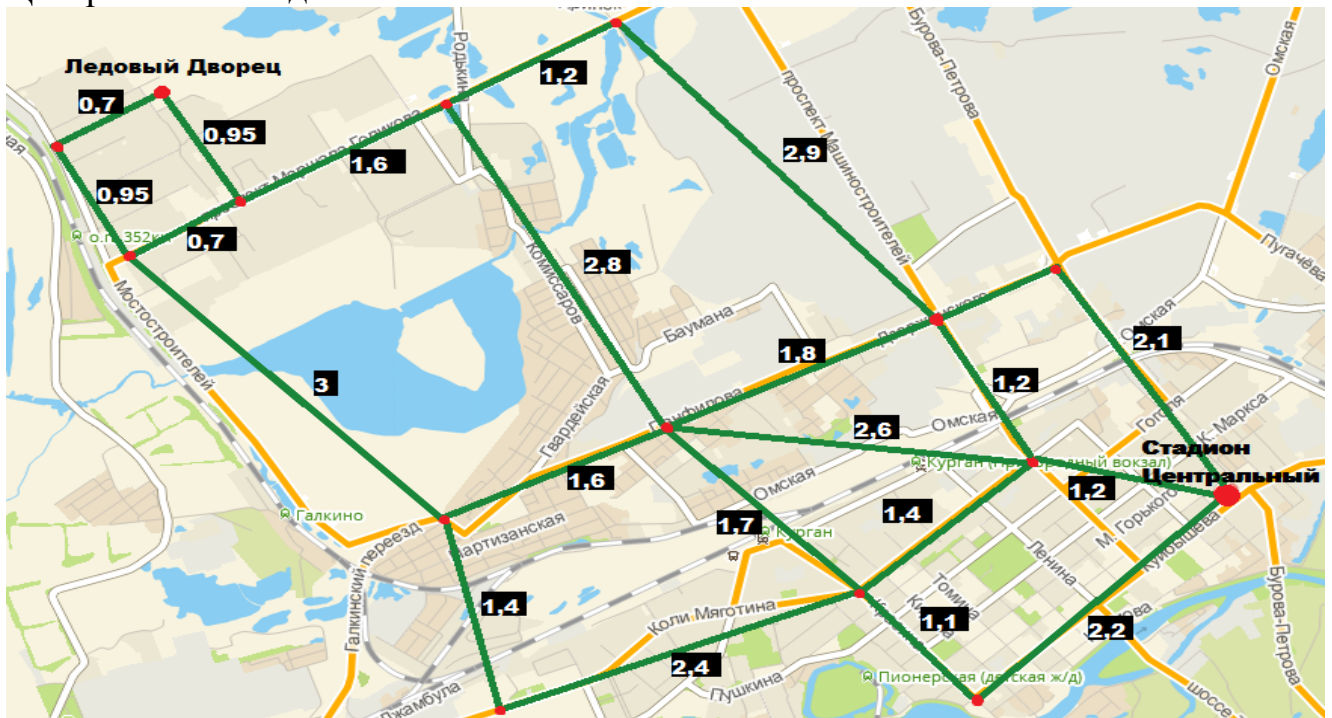
Каждое занятие проводится в течение двух часов, включая перерывы. В центре имеются три аудитории, которые вмещают лишь одну из групп. Для занятий по физике и химии оборудована одна из этих аудиторий. Можно ли провести все необходимые занятия в течение одного рабочего дня (8 часов)? Если можно, то как это сделать?

3 В учебном центре необходимо провести занятия по математике, физике, химии, иностранному языку и истории в группах А, В, С. Занятия проводятся преподавателями К, L, М. Следующая таблица указывает, какие занятия надо провести в группах и какими преподавателями они могут быть проведены:

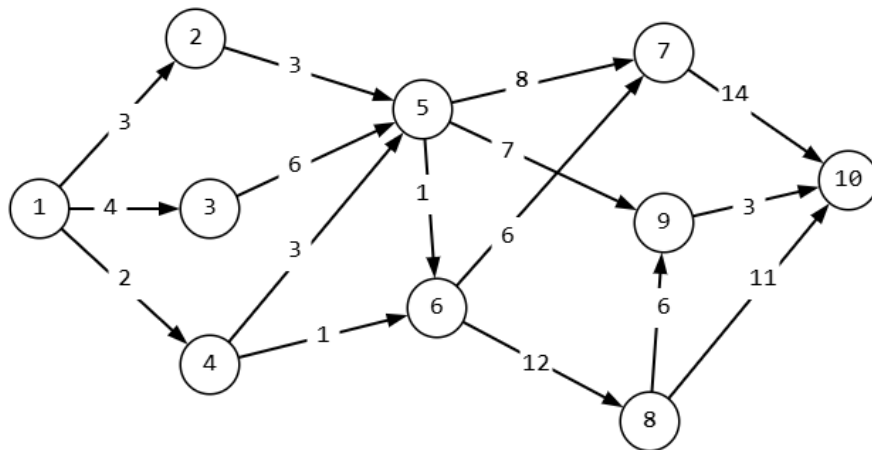
Предмет	Группа			Преподаватель		
	А	В	С	К	L	М
Математика	+	+	+	+		
Физика	+	+			+	
Химия		+	+		+	
Иностр. язык						
История						

Каждое занятие проводится в течение двух часов, включая перерывы. В центре имеются три аудитории, которые вмещают лишь одну из групп. Для занятий по физике и химии оборудована одна из этих аудиторий. Можно ли провести все необходимые занятия в течение одного рабочего дня (8 часов)? Если можно, то как это сделать?

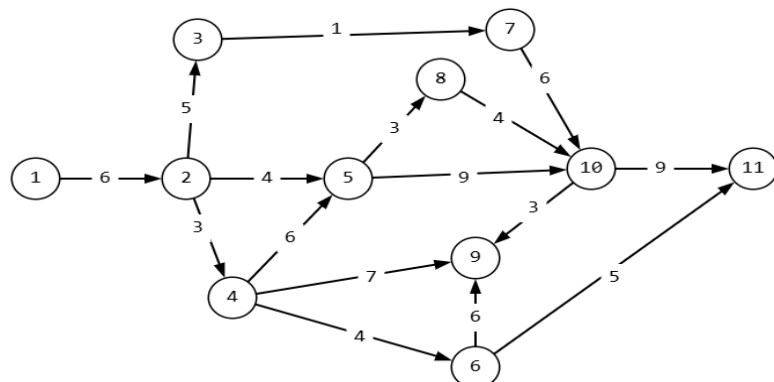
4 Найдите кратчайшее расстояние по дорогам от Ледового дворца до Центрального стадиона.



5 Между домами на одной из улиц Кургана проложен газопровод, определите максимальную пропускную способность данной сети.



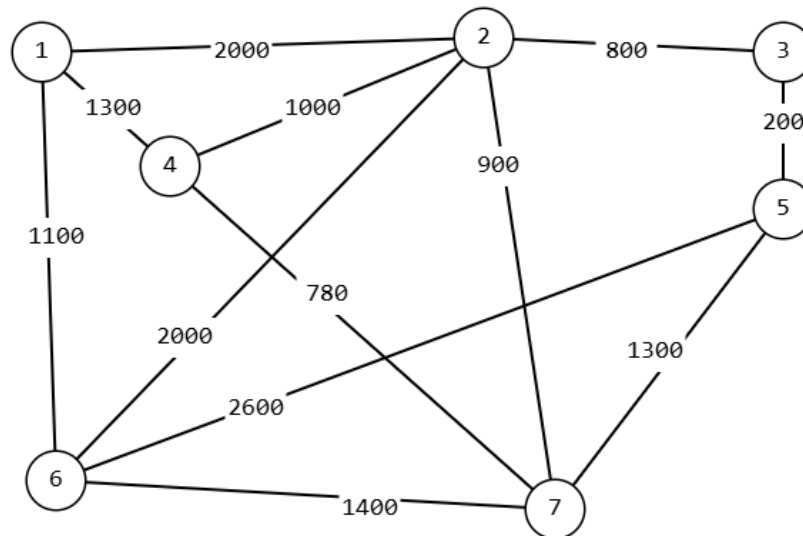
6 На рисунке графически представлена сетевая модель, состоящая из 11 событий и 16 работ, продолжительность выполнения которых указана над работами. Необходимо вычислить «поздний срок» для исходной сетевой модели.



7 От каждого дома выделяется команда для уборки города. Необходимо распределить команды таким образом, чтобы убрать город как можно быстрее.

0	8	8	3	0	0	2	1	1	0
9	0	5	1	0	4	0	7	0	2
0	3	0	5	8	8	4	4	7	0
3	0	6	0	0	3	0	3	0	7
0	0	5	3	0	8	7	2	10	7
9	8	2	5	8	0	0	6	4	6
2	0	2	6	8	1	0	3	5	6
3	7	10	10	2	4	7	0	8	0
9	9	5	9	0	5	0	4	0	8
0	8	4	0	0	2	4	2	7	0

8 В модульных перевозках трейлерные платформы перевозятся по железной дороге между перевалочными железнодорожными терминалами. На схеме показаны железнодорожные терминалы и пути между ними. Выделите сегменты железных дорог так, чтобы были связаны все железнодорожные терминалы, и была минимизирована суммарная стоимость перевозок платформ.

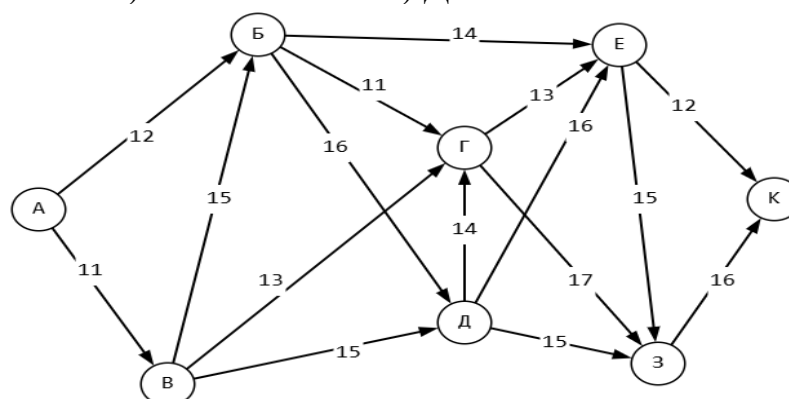


9 На рисунке изображена транспортная сеть между населенными пунктами. Найдите кратчайшие маршруты между пунктами:

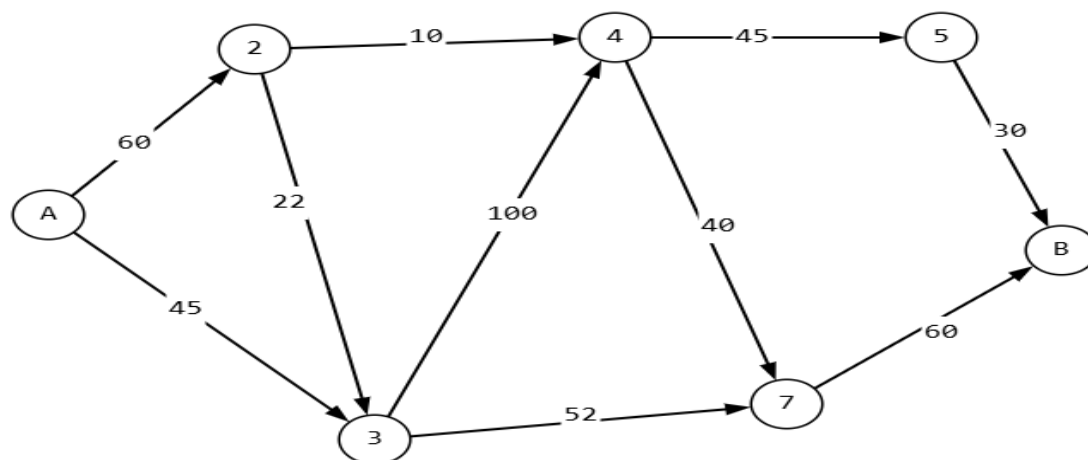
а) А и К

б) А и Е

в) Д и К



10 На рисунке изображена транспортная сеть между населенными пунктами. Найдите кратчайшие маршруты между пунктами А и В.



Библиографический список

- 1 Игошин В. И. Математическая логика и теория алгоритмов / В. И. Игошин. – Москва : Академия, 2008. – 448 с.
- 2 Гусева Е. Н. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / Е. Н. Гусева. – 5-е изд., стереотип. – Москва : Флинта, 2011. – 220 с.
- 3 Математика для гуманитариев : учебник / под общ. ред. д. э. н., проф. К. В. Балдина. – 3-е изд. – Москва : Дашков и К, 2012. – 512 с.
- 4 Стефанова Н. Л. Основы математической обработки информации: учеб. пособие для организации самостоятельной деятельности студентов. – Санкт-Петербург : РГПУ им. А. И. Герцена, 2011. – 134 с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=author_red&id=151597 (дата обращения: 20.12.2021).
- 5 Управление Федеральной службы государственной статистики по Свердловской и Курганской области. – URL: <https://sverdl.gks.ru/folder/31382> (дата обращения 20.12.2021).

Косовских Светлана Викторовна

СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Методические указания к проведению практических и лабораторных
занятий для студентов направлений 09.03.03, 09.03.04

Редактор В. А. Лисина

Подписано в печать 05,10,2026	Формат бумаги 60x84 1/16	Бумага 80 г/м ²
Печать цифровая	Усл. печ. л. 3	Уч.- изд.л. 2,25
Заказ 49	Тираж 25	

БИЦ Курганского государственного университета.
640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет