МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра программного обеспечения автоматизированных систем

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
к выполнению лабораторных и контрольных работ
для студентов направлений 09.03.03, 09.03.04

Курган 2023

Кафедра: «Программное обеспечение автоматизированных систем».

Дисциплина: «Вычислительная математика».

Направления: 09.03.04 «Программная инженерия»,
09.03.03 «Прикладная информатика».

Составил: канд. техн. наук, доцент А. М. Семахин.

Печатается в соответствии с планом издания, утверждённым методическим советом университета «28» декабря 2022 г.

Утверждены на заседании кафедры «3» февраля 2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Вычислительная математика» имеет целью дать студентам теоретические знания алгоритмов и практические навыки реализации на ПЭВМ приближённых численных методов решения математических задач.

Предмет дисциплины – алгоритмы приближённых численных методов решения математических задач, которые не решаются или трудно решаются точными аналитическими методами.

Задачи дисциплины – изучение алгоритмов приближённых численных методов решения математических задач.

Практические занятия составляют 16 часов.

Методические указания содержат теоретическое обоснование и варианты заданий для выполнения лабораторных и контрольных работ по дисциплине «Вычислительная математика».

Методические указания разработаны в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта по подготовке студентов по направлениям 09.04.04 «Программная инженерия» и 09.03.03 «Прикладная информатика».

1 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Пусть A – точное число, a – приближённое значение точного числа A. Если $a<A$, то число a – приближённое значение числа A по недостатку. Если $a>A$, то число a – приближённое значение числа A по избытку.

Погрешность – разность между точным числом A и его приближённым значением a.

Абсолютная погрешность приближённого числа а – величина Δ_a, удовлетворяющая неравенству

$$\Delta_a \geq |A - a|, \tag{1.1}$$

где A – точное число;

a – приближённое значение.

Абсолютная погрешность представляет верхнюю границу отклонения точного числа A от приближённого

$$a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a \tag{1.2}$$

$$A = a \pm \Delta a \tag{1.3}$$

Относительная погрешность приближённого числа а – величина δ_a, удовлетворяющая неравенству

$$\delta_a \geq \left|\frac{A-a}{a}\right|,\ a \neq 0 \tag{1.4}$$

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|},\ a \neq 0 \tag{1.5}$$

Точное число A можно записать в виде

$$A = a(1 \pm \delta_a) \tag{1.6}$$

Относительная погрешность – отвлечённое число, иногда выражается в процентах [1].

1.1 Лабораторная работа № 1 «Погрешность»

Цель: получить теоретические знания и практические навыки в решении задач с использованием погрешностей.

Используемые приемы и технологии: элементарная теория погрешностей.

Ключевые термины: абсолютная и относительная погрешности, верные значащие и сомнительные цифры.

Постановка задачи: разработайте программу, реализующую алгоритм решения задачи элементарной теории погрешностей:

1) определить приближённое значение, абсолютную и относительную погрешность точного числа A принадлежащему диапазону чисел;

2) определить какое равенство точнее;

3) определить верные значащие и сомнительные цифры заданного числа, если абсолютная погрешность $\Delta a = 0{,}01$.

1.1.1 Варианты заданий

Вариант 1. 1) $A \in [23{,}07; 23{,}10]$; 2) $a_1 = 13/19 \approx 0{,}684$ или $a_2 = \sqrt{52} \approx 7{,}21$; 3) $a = 708{,}1978$.

Вариант 2. 1) $A \in [21{,}06; 21{,}12]$; 2) $a_1 = 17/18 \approx 0{,}944$ или $a_2 = \sqrt{41} \approx 6{,}403$; 3) $a = 428{,}2459$.

Вариант 3. 1) $A \in [13{,}08; 13{,}11]$; 2) $a_1 = 11/13 \approx 0{,}846$ или $a_2 = \sqrt{37} \approx 6{,}082$; 3) $a = 159{,}7423$.

Вариант 4. 1) $A \in [15{,}09; 15{,}13]$; 2) $a_1 = 15/17 \approx 0{,}882$ или $a_2 = \sqrt{27} \approx 5{,}196$; 3) $a = 753{,}9562$.

Вариант 5. 1) $A \in [24{,}07; 24{,}10]$; 2) $a_1 = 21/23 \approx 0{,}913$ или $a_2 = \sqrt{19} \approx 4{,}358$; 3) $a = 153{,}1793$.

Вариант 6. 1) $A \in [26{,}09; 26{,}14]$; 2) $a_1 = 23/26 \approx 0{,}884$ или $a_2 = \sqrt{51} \approx 7{,}141$; 3) $a = 964{,}9752$.

Вариант 7. 1) $A \in [16{,}08; 16{,}11]$; 2) $a_1 = 33/35 \approx 0{,}942$ или $a_2 = \sqrt{67} \approx 8{,}185$; 3) $a = 745{,}3219$.

Вариант 8. 1) $A \in [19{,}06; 19{,}10]$; 2) $a_1 = 48/49 \approx 0{,}979$ или $a_2 = \sqrt{79} \approx 8{,}888$; 3) $a = 345{,}7859$.

Вариант 9. 1) $A \in [17{,}08; 17{,}12]$; 2) $a_1 = 7/11 \approx 0{,}636$ или $a_2 = \sqrt{91} \approx 9{,}539$; 3) $a = 968{,}1834$.

Вариант 10. 1) $A \in [21{,}09; 21{,}13]$; 2) $a_1 = 14/17 \approx 0{,}823$ или $a_2 = \sqrt{43} \approx 6{,}557$; 3) $a = 249{,}1795$.

1.1.2 Методические указания

1 Разработайте алгоритм решения задачи.

2 Разработайте программу решения задачи.

3 Оформите отчет по практической работе, включающий

- титульный лист;
- теоретическое обоснование;
- постановку задачи;
- описание алгоритма решения задачи;
- скриншоты результатов работы программы.

1.1.3 Контрольные вопросы

1 Что называется погрешностью приближённого числа?

2 Что такое абсолютная погрешность приближённого числа?

3 Что называется относительной погрешностью приближённого числа?

4 Какое определение формулируется для верной значащей цифры приближённого числа?

5 Какая формулировка существует для правила чётной цифры?

2 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Аппроксимация (приближение) функции $f(x)$ – процесс нахождения функции $g(x)$, близкой к функции $f(x)$. Функция $f(x)$ – аппроксимируемая функция. Функция $g(x)$ – аппроксимирующая функция. Аппроксимирующая функция $g(x)$ должна быть проще аппроксимируемой функции.

Аппроксимация функции выполняется в случаях:

- когда известны значения функции $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2,\ldots$, $f(x_n)=y_n$. Необходимо определить значение функции $f(x)$, значение x отсутствует среди $x_1, x_2, ..., x_n$. Определяют аппроксимирующую функцию $g(x)$ наилучшим образом приближающуюся к аппроксимируемой функции $f(x)$ на множестве узлов $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Следовательно, в точке x^* функция $f(x^*) \approx g(x^*)$;
- когда функция $f(x)$ задана аналитически. Математическое выражение имеет сложный вид. Аппроксимируемую функцию $f(x)$ приближают простой функцией $g(x)$ для выполнения расчётов.

Полиномы (многочлены) используют в качестве аппроксимирующих функций

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \tag{2.1}$$

Операции арифметики (сложение, вычитание, умножение, деление) и высшей математики (дифференцирование, интегрирование), расчёт значений полинома при любом значении x выполняются просто с многочленами [2].

Существует множество способов построения полинома $P_n(x)$. Например, интерполяционный полином Лагранжа. Коэффициент Лагранжа имеет вид

$$L_n^i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} \tag{2.2}$$

Индекс $i=\overline{0,n}$. В числителе сомножитель представляет разность переменной x и значения одного из узлов за исключением пропущенного i-го узла. В знаменателе вместо переменной x используется значение i-го узла интерполяции x_i. После упрощения получаем полином n-й степени. При подстановке значения j-го узла в качестве аргумента коэффициента Лагранжа получается:

$$L_n^i(x_j)\begin{cases}1,\ j=i\ (\textit{числитель совпадает со знаменателем})\\ 0,\ j\neq i\ (\textit{одна из скобок вверху обратится в ноль})\end{cases} \tag{2.3}$$

Полином Лагранжа имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_n^i(x) = f(x_0)L_n^0(x) + f(x_1)L_n^1(x) + \ldots + f(x_n)L_n^n(x), \qquad (2.4)$$

удовлетворяет условиям $L_n(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{1,n}$ и имеет степень n, т. е. является *интерполяционным полиномом* [2].

2.1 Лабораторная работа № 2 «Аппроксимация функций полиномом Лагранжа»

Цель: получить теоретические знания и практические навыки в решении задач аппроксимации функций с использованием интерполяционного полинома Лагранжа.

Используемые приемы и технологии: аппроксимация функций.

Ключевые термины: аппроксимация, интерполяция, экстраполяция, наилучшее приближение, полином Лагранжа.

Постановка задачи: разработайте программу, реализующую алгоритм решения задачи аппроксимации и интерполяции функций.

Построить интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(x)$ с узлами интерполирования x_i, $i = 0, 1, 2$. Вычислить значения функции $f(x)$ и полином Лагранжа в точке p. Построить графики полинома Лагранжа и аппроксимируемой функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x_2]$. Вычислить точно и оценить погрешность в точке p.

2.1.1 Варианты заданий

Вариант 1. $f(x) = (\ln x)^{12/5}$; $x_i = 5; 6; 7$; $p = 6{,}5$.

Вариант 2. $f(x) = (\ln x)^{16/3}$; $x_i = 8; 10; 12$; $p = 11{,}5$.

Вариант 3. $f(x) = (\ln x)^{11/4}$; $x_i = 3; 4; 5$; $p = 3{,}5$.

Вариант 4. $f(x) = (\ln x)^{6/9}$; $x_i = 4; 7; 10`$; $p = 9{,}5$.

Вариант 5. $f(x) = (\ln x)^{13/5}$; $x_i = 6; 7; 8$; $p = 6{,}5$.

Вариант 6. $f(x) = (\ln x)^{15/6}$; $x_i = 10; 11; 14$; $p = 11{,}5$.

Вариант 7. $f(x) = (\ln x)^{9/11}$; $x_i = 7; 9; 11$; $p = 7{,}5$.

Вариант 8. $f(x) = (\ln x)^{18/13}$; $x_i = 9; 12; 15$; $p = 14{,}5$.

Вариант 9. $f(x) = (\ln x)^{2/3}$; $x_i = 8; 9; 13$; $p = 9{,}5$.

Вариант 10. $f(x) = (\ln x)^{11/8}$; $x_i = 12; 13; 15$; $p = 12{,}5$.

2.1.2 Методические указания

1 Разработайте алгоритм решения задачи.

2 Разработайте программу решения задачи.

3 Оформите отчет по практической работе, включающий:

- титульный лист;
- теоретическое обоснование;
- постановка задачи;
- описание алгоритма решения задачи;
- скриншоты результатов работы программы.

2.1.3 Контрольные вопросы

1 Какое существует определение аппроксимации (приближения) функции?

2 В каких случаях выполняется аппроксимация функции?

3 Что называется интерполированием?

4 Какой вид имеет интерполирующий многочлен Лагранжа?

5 Каким образом рассчитывается погрешность полинома Лагранжа?

3 ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Дифференцирование – операция взятия частной или полной производной функции. Численное дифференцирование применяется, когда функция $f(x)$, которую нужно продифференцировать, задана таблично или сложным математическим выражением, вычислить значения $f(x)$ трудно [2].

Пусть дана сетка узлов x_0, x_1, x_2, x_3, расстояние между узлами одинаковое и равно шагу h.

Первая производная рассчитывается по формулам [2]:

$$f'(x_0) = \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4} f^{IV}(\xi) \tag{3.1}$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12} f^{IV}(\xi) \tag{3.2}$$

$$f'(x_2)=\frac{1}{6h}(y_0-6y_1+3y_2+2y_3)-\frac{h^3}{12}f^{IV}(\xi) \qquad (3.3)$$

$$f'(x_3)=\frac{1}{6h}(-2y_0+9y_1-18y_2+11y_3)+\frac{h^3}{4}f^{IV}(\xi) \qquad (3.4)$$

Вторая производная рассчитывается по формулам [2]:

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}(2y_0-5y_1+4y_2-y_3)+\frac{11}{12}h^2 f^{IV}(\xi) \qquad (3.5)$$

$$f''(x_1)=\frac{1}{h^2}(y_0-2y_1+y_2)-\frac{1}{12}h^2 f^{IV}(\xi) \qquad (3.6)$$

$$f''(x_2)=\frac{1}{h^2}(y_1-2y_2+y_3)-\frac{1}{12}h^2 f^{IV}(\xi) \qquad (3.7)$$

$$f''(x_3)=\frac{1}{h^2}(-_0+4y_1-5y_2+2y_3)+\frac{11}{12}h^2 f^{IV}(\xi) \qquad (3.8)$$

3.1 Лабораторная работа № 3 «Численное дифференцирование функций»

Цель: получить теоретические знания и практические навыки в решении задач с применением приближённых методов численного дифференцирования функций.

Используемые приемы и технологии: численное дифференцирование функций.

Ключевые термины: производная функция, численное дифференцирование.

Постановка задачи: разработайте программу, реализующую алгоритм решения задачи численного дифференцирования функции.

Для функции $f(x)$, заданной таблично в четырёх равноотстоящих узлах x_i, $i=0,1,2,3,$ найти значения её первой и второй производных в четырёх узлах, используя формулы численного дифференцирования без учёта погрешности [2].

3.1.1 Варианты заданий

Варианты заданий приведены в таблицах 3.1–3.10.

Вариант 1

Таблица 3.1 – Исходные данные варианта 1

x_i	1,23	1,25	1,27	1,29
$y_i = f(x_i)$	4,82831	4,84414	4,85997	4,875280

Вариант 2

Таблица 3.2 – Исходные данные варианта 2

x_i	13,3	13,5	13,7	13,9
$y_i = f(x_i)$	4,90581	4,92005	4,93429	4,94853

Вариант 3

Таблица 3.3 – Исходные данные варианта 3

x_i	0,142	0,145	0,148	0,151
$y_i = f(x_i)$	4,97669	4,99038	5,00464	5,01886

Вариант 4

Таблица 3.4 – Исходные данные варианта 4

x_i	0,449	0,452	0,455	0,458
$y_i = f(x_i)$	0,43584	0,43674	0,43764	0,43854

Вариант 5

Таблица 3.5 – Исходные данные варианта 5

x_i	0,723	0,724	0,725	0,726
$y_i = f(x_i)$	0,89985	0,89895	0,89805	0,89715

Вариант 6

Таблица 3.6 – Исходные данные варианта 6

x_i	0,344	0,348	0,352	0,356
$y_i = f(x_i)$	0,34198	0,34292	0,34386	0,34480

Вариант 7

Таблица 3.7 – Исходные данные варианта 7

x_i	0,724	0,726	0,728	0,730
$y_i = f(x_i)$	0,66312	0,66462	0,66612	0,66762

Вариант 8

Таблица 3.8 – Исходные данные варианта 8

x_i	0,250	0,252	0,254	0,256
$y_i = f(x_i)$	0,24834	0,25124	0,25414	0,25704

Вариант 9

Таблица 3.9 – Исходные данные варианта 9

x_i	0,339	0,342	0,345	0,348
$y_i = f(x_i)$	2,19279	2,20290,	2,21303	2,22316

Вариант 10

Таблица 3.10 – Исходные данные варианта 10

x_i	0,110	0,114	0,118	0,122
$y_i = f(x_i)$	1,29415	1,29715	1,30015	1,30315

3.1.2 Методические указания

1 Разработайте алгоритм решения задачи.

2 Разработайте программу решения задачи.

3 Оформите отчет по практической работе, включающий:

- титульный лист;
- теоретическое обоснование;
- постановку задачи;
- описание алгоритма решения задачи;
- скриншоты результатов работы программы.

3.1.3 Контрольные вопросы

1 Какое существует определение производной функции?

2 Какое определение даётся понятию дифференцирование функции?

3 В каких случаях применяется численное дифференцирование?

4 Какой вид имеют формулы первой производной при численном дифференцировании для четырёх равноотстоящих узлов?

5 Какой вид имеют формулы второй производной при численном дифференцировании для четырёх равноотстоящих узлов?

4 ЧИСЛЕННОЕ ИТЕГРИРОВАНИЕ

Аналитические методы расчёта интеграла заключаются в приближённом построении первообразной и использовании формулы

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{4.1}$$

Численные методы расчёта интеграла позволяют найти числовое значение интеграла, основываясь на известных значениях подынтегральной функции в заданных точках.

Квадратура – процесс численного определения интеграла.

Квадратурные формулы – формулы расчёта численного интеграла.

Существуют два вида численного интегрирования в зависимости от способа задания подынтегральной функции.

Задача 1. На отрезке *[a, b]* в узлах x_i заданы значения $f(x_i)$ функции, принадлежащей определённому классу *F*. Требуется приближённо рассчитать интеграл (4.1) и оценить погрешность полученного значения. Задача 1 численного интегрирования ставится в случае, когда функция задана в виде таблицы.

Задача 2. На отрезке *[a,b]* функция *f(x)* задана в виде аналитического выражения. Требуется вычислить интеграл (4.1) с заданной предельно допустимой погрешностью ε [1].

Приближённое значение интеграла по формуле Ньютона – Котеса вычисляется по формуле

$$I_{Cotes} = \sum_{i=0}^{n} c_n^i y_i\ , \tag{4.2}$$

где c_n^i – коэффициенты Котеса (таблица 4.1);

y_i – значение функции $f(x_i)$.

Таблица 4.1 – Коэффициенты Котеса c_n^i в случае равноотстоящих узлов

n	Коэффициенты Котеса c_n^i
1	$c_1^0 = c_1^1 = \dfrac{b-a}{2}$
2	$c_2^0 = c_2^2 = \dfrac{b-a}{6}$, $c_2^1 = \dfrac{4(b-a)}{6}$
3	$c_3^0 = c_3^3 = \dfrac{b-a}{8}$, $c_3^1 = c_3^2 = \dfrac{3(b-a)}{8}$
4	$c_4^0 = c_4^4 = \dfrac{7(b-a)}{90}$, $c_4^1 = c_4^3 = \dfrac{16(b-a)}{45}$, $c_4^2 = \dfrac{2(b-a)}{15}$
5	$c_5^0 = c_5^5 = \dfrac{19(b-a)}{288}$, $c_5^1 = c_5^4 = \dfrac{25(b-a)}{96}$, $c_5^2 = c_5^3 = \dfrac{25(b-a)}{144}$
6	$c_6^0 = c_6^6 = \dfrac{41(b-a)}{840}$, $c_6^1 = c_6^5 = \dfrac{9(b-a)}{35}$, $c_6^2 = c_6^4 = \dfrac{9(b-a)}{280}$, $c_3^3 = \dfrac{34(b-a)}{105}$

Расчёт приближённого значения интеграла методом прямоугольника производится по формуле

$$I_{прям} = \int_a^b f(x)dx \approx y_0h + y_1h + ... + y_{n-1}h = h[y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}] \tag{4.3}$$

Приближённое значение интеграла методом трапеций вычисляется по формуле

$$I_{трап} = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}) + y_n] \tag{4.4}$$

Приближённое значение интеграла методом Симпсона вычисляется по формуле

$$I_{Simp} = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2s}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2s-2}) + \\ + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2s-1})] \tag{4.5}$$

$$I_{Simp} \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_4) + 4(y_1 + y_3) + 2y_2] \qquad 4.6)$$

4.1 Лабораторная работа № 4
«Численное интегрирование функций»

Цель: получить теоретические знания и практические навыки в решении задач с применением приближённых методов численного интегрирования функций.

Используемые приемы и технологии: численное интегрирование функций.

Ключевые термины: квадратура, квадратурная формула Ньютона – Котеса, коэффициенты Котеса.

Постановка задачи: разработайте программу, реализующую алгоритм решения задачи численного интегрирования функции.

Для функции $f(x)$, заданной таблично в пяти равноотстоящих узлах x_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4,$ приближённо вычислить определённый интеграл на отрезке $[x_0; x_4]$, используя формулы Ньютона – Котеса, прямоугольников, трапеций и Симпсона.

4.1.1 Варианты заданий

Варианты заданий приведены в таблицах 4.2–4.11.

Вариант 1

Таблица 4.2 – Исходные данные варианта 1

x_i	1,23	1,25	1,27	1,29	1,31
$y_i = f(x_i)$	4,82833	4,84416	4,85999	4,87582	4,89165

Вариант 2

Таблица 4.3 – Исходные данные варианта 2

x_i	13,4	13,6	13,8	14,0	14,2
$y_i = f(x_i)$	4,90581	4,92005	4,93429	4,94853	4,96277

Вариант 3

Таблица 4.4 – Исходные данные варианта 3

x_i	0,143	0,145	0,147	0,149	0,151
$y_i = f(x_i)$	4,97674	4,94273	4,95642	4,97011	4,98380

Вариант 4

Таблица 4.5 – Исходные данные варианта 4

x_i	0,450	0,451	0,452	0,453	0,454
$y_i = f(x_i)$	0,43585	0,43675	0,43765	0,43855	0,43946

Вариант 5

Таблица 4.6 – Исходные данные варианта 5

x_i	0,723	0,724	0,725	0,729	0,727
$y_i = f(x_i)$	0,89958	0,89915	0,89872	0,89829	0,89786

Вариант 6

Таблица 4.7 – Исходные данные варианта 6

x_i	0,348	0,349	0,350	0,351	0,352
$y_i = f(x_i)$	0,34195	0,34289	0,34383	0,34479	0,344128

Вариант 7

Таблица 4.8 – Исходные данные варианта 7

x_i	0,724	0,726	0,728	0,730	0,732
$y_i = f(x_i)$	0,66313	0,66462	0,66611	0,66760	0,66909

Вариант 8

Таблица 4.9 – Исходные данные варианта 8

x_i	0,250	0,253	0,256	0,259	0,262
$y_i = f(x_i)$	0,24835	0,25126	0,25417	0,25709	0,25719

Вариант 9

Таблица 4.10 – Исходные данные варианта 9

x_i	0,341	0,343	0,345	0,347	0,349
$y_i = f(x_i)$	2,19279	2,20295	2,21311	2,22327	2,23343

Вариант 10

Таблица 4.11 – Исходные данные варианта 10

x_i	0,111	0,112	0,113	0,114	0,115
$y_i = f(x_i)$	1,29416	1,29715	1,30014	1,30313	1,30612

4.1.2 Методические указания

1 Разработайте алгоритм решения задачи.

2 Разработайте программу решения задачи.

3 Оформите отчет по практической работе, включающий:

- титульный лист;
- теоретическое обоснование;
- постановку задачи;
- описание алгоритма решения задачи;
- скриншоты результатов работы программы.

4.1.3 Контрольные вопросы

1 Что понимается под интегрированием функции?

2 Какое определение формулируется для понятия квадратура?

3 Сколько и какие задачи численного интегрирования существуют?

4 Какой вид имеет квадратурная формула трапеций?

5 Какой вид имеет квадратурная формула Симпсона?

5 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Если алгебраическое или трансцендентное уравнение сложное, то его корни невозможно найти точно. Выполняют численное решение уравнений – приближённое нахождение корней и оценки степени точности.

Аналитическое решение уравнения $f(x)=0$ можно найти для узкого класса функций.

Численное решение уравнения $f(x)=0$ проводят в два этапа.

Этап 1. *Отделение корней уравнения* – нахождение интервалов изоляции, содержащих один корень.

Этап 2. *Уточнение корней* – нахождение корней с заданной точностью.

Численные методы решения уравнений $f(x)=0$ *основаны на свойстве непрерывной функции:* если функция $f(x)$ непрерывна на интервале *[a, b]* и на его концах имеет различные знаки $f(a)>0$ и $f(b)<0$, то между точками имеется хотя бы один корень. Интервал изоляции корня мал, в нем находится один корень [3].

Численные методы решения уравнений $f(x)=0$;

1. Метод половинного деления (дихотомии).

2. Метод итераций (последовательных приближений).
3. Метод хорд.
4. Метод касательных (Ньютона).

5.1 Лабораторная работа № 5 «Решение нелинейных уравнений»

Цель: получить теоретические знания и практические навыки в численном решении нелинейных уравнений.

Используемые приемы и технологии: методы численного решения нелинейных уравнений.

Ключевые термины: отделение корней, уточнение корней.

Постановка задачи: разработайте программу, реализующую методы дихотомии, ход, касательных (Ньютона) численного решения нелинейных уравнений.

Для заданного уравнения $f(x)=0$:

1. Изолировать все корни.

2. Найти один из корней методами дихотомии, касательных, хорд.

3. Достичь точности 10^{-2} методом дихотомии, 10^{-3} – остальными методами.

4. Построить график функции.

5.1.1 Варианты заданий

Вариант 1. $\ln x + x - 3 = 0$
Вариант 2. $\ln x + x^2 - 9 = 0$
Вариант 3. $\ln x + 2x^2 - 4 = 0$
Вариант 4. $2\ln x - x^2 + 7 = 0$
Вариант 5. $2\ln x + 2x - 5 = 0$
Вариант 6. $\sin x + x^2 - 2 = 0$
Вариант 7. $\sin x + 2x^2 - 6 = 0$
Вариант 8. $\sin x - x + 4 = 0$
Вариант 9. $3\sin x + x^2 + 5 = 0$
Вариант 10. $3\sin x + x - 3$

5.1.2 Методические указания

1 Разработайте алгоритм решения задачи.

2 Разработайте программу решения задачи.

3 Оформите отчет по практической работе, включающий:

- титульный лист;
- теоретическое обоснование;

- постановку задачи;
- описание алгоритма решения задачи;
- скриншоты результатов работы программы.

5.1.3 Контрольные вопросы

1 Что понимается под изоляцией корней?
2 Что понимается под уточнением корней?
3 Какие этапы включает алгоритм метода дихотомии?
4 Какие этапы включает алгоритм метода хорд?
5 Какие этапы включает алгоритм метода Ньютона?

6 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приближённые методы решения систем линейных уравнений – методы, которые в предположении отсутствия погрешности округления получают решение системы с заданной точностью. Точное решение системы достигается асимптотически как результат бесконечного процесса. Приближённые методы решения линейных систем уравнений:

- метод простой итерации;
- метод Зейделя [2].

6.1 Лабораторная работа № 6 «Численное решение систем линейных уравнений»

Цель: получить теоретические знания и практические навыки в численном решении систем линейных уравнений.

Используемые приемы и технологии: методы численного решения систем линейных уравнений.

Ключевые термины: норма Минковского, коэффициент сжатия, условие сходимости.

Постановка задачи: разработайте программу, реализующую численные методы решения систем линейных уравнений.

1 Решить систему линейных уравнений методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 0{,}001$, преобразовав систему уравнений к виду, удобному для итераций.

6.1.1 Варианты заданий 1

Вариант 1. $$\begin{cases} 0{,}69x_1 + 0{,}21x_2 - 0{,}43x_3 + 0{,}08x_4 = -0{,}77 \\ -0{,}23x_1 + 0{,}85x_2 + 0{,}35x_3 = 0{,}98 \\ -0{,}14x_1 - 0{,}30x_2 + 1{,}06x_3 - 0{,}65x_4 = 0{,}16 \\ -0{,}08x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}07x_3 + 1{,}11x_4 = 1{,}52 \end{cases}$$

Вариант 2. $$\begin{cases} 0{,}75x_1 - 0{,}27x_2 - 0{,}28x_3 + 0{,}12x_4 = 1{,}33 \\ -0{,}10x_1 + 1{,}22x_2 + 0{,}17x_3 - 0{,}33x_4 = -0{,}64 \\ -0{,}21x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}84x_3 + 0{,}26x_4 = 1{,}05 \\ -0{,}17x_1 - 0{,}14x_2 + 0{,}37x_3 + 0{,}88x_4 = 1{,}82 \end{cases}$$

Вариант 3. $$\begin{cases} 0.93x_1 - 0{,}15x_2 - 0{,}26x_3 - 0{,}18x_4 = 2{,}38 \\ -0{,}34x_1 + 0{,}75x_2 + 0{,}39_4 = -1{,}21 \\ -0{,}14x_1 + 0{,}10x_2 + x_3 + 0{,}15x_4 = 0{,}54 \\ -0{,}06x_1 - 0{,}22x_2 + 0{,}17x_3 + x_4 = 0{,}91 \end{cases}$$

Вариант 4. $$\begin{cases} x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}25x_3 - 0{,}32x_4 = 1{,}28 \\ -0{,}14x_1 + 0{,}74x_2 - 0{,}19x_3 = 2{,}24 \\ -0{,}17x_1 - 0{,}13x_2 + 0{,}69x_3 + 0{,}19x_4 = 0{,}42 \\ -0{,}24x_1 - 0{,}20x_2 + 0{,}17x_3 + 0{,}96x_4 = 0{,}74 \end{cases}$$

Вариант 5. $$\begin{cases} 0{,}7x_1 + 0{,}11x_2 + 0{,}09x_3 - 0{,}15x_4 = 2{,}34 \\ -0{,}15x_1 + 1{,}23x_2 - 0{,}11x_3 + 0{,}23x_4 = 1{,}62 \\ -0{,}06x_1 + 0{,}07x_2 + x_3 - 0{,}41x_4 = -0{,}18 \\ -0{,}14x_1 - 0{,}10x_2 + 0{,}22x_3 - 0{,}92x_4 = 1{,}75 \end{cases}$$

Вариант 6. $$\begin{cases} 0{,}83x_1 - 0{,}25x_2 + 0{,}32x_3 - 0{,}06x_4 = 0{,}15 \\ 0{,}59x_2 + 0{,}2x_3 - 0{,}08x_4 = -0{,}51 \\ 0{,}13x_1 + 1{,}09x_3 - 0{,}65x_4 = 0{,}76 \\ -0{,}07x_1 - 0{,}08x_2 - 0{,}36x_3 + 0{,}77x_4 = -2{,}11 \end{cases}$$

Вариант 7. $$\begin{cases} 0.96x_1 + 0{,}09x_2 - 0{,}27x_3 + 0{,}35x_4 = 0{,}64 \\ -0{,}21x_1 + 0.37x_2 + 0{,}86x_3 - 0{,}05x_4 = -1{,}19 \\ -0{,}33x_1 - 0{,}12x_2 + 1.08x_3 - 0{,}07x_4 = -0{,}8 \\ -0{,}09x_1 - 0{,}18x_2 - 0{,}26x_3 + 0.66x_4 = 1{,}68 \end{cases}$$

Вариант 8. $$\begin{cases} x_1 - 0{,}15x_2 + 0{,}36x_3 - 0{,}17x_4 = -1{,}31 \\ 0{,}81x_2 - 0{,}48x_3 + 0{,}09x_4 = 0{,}36 \\ -0{,}24x_1 - 0{,}16x_2 + 0{,}74x_3 - 0{,}08x_4 = 0{,}56 \\ -0{,}09x_1 - 0{,}08x_2 - 0{,}73x_3 + 0{,}94x_4 = -1{,}32 \end{cases}$$

Вариант 9. $\begin{cases} 0{,}96x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}64x_3 - 0{,}09x_4 = -1{,}49 \\ -0{,}06x_1 + 0{,}65x_2 - 0{,}36x_3 + 0{,}08x_4 = 1{,}25 \\ 0{,}08x_1 - 0{,}17x_2 + 0{,}55x_3 - 0{,}26x_4 = 1{,}64 \\ 0{,}11x_1 + 0{,}23x_2 - x_4 - 0{,}06x_3 - 0{,}32x_4 = 1{,}38 \end{cases}$

Вариант 10. $\begin{cases} 0{,}43x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}18x_4 = -0{,}21 \\ -0{,}09x_1 + 1{,}41x_2 + 0{,}06x_3 - 0{,}34x_4 = 1{,}95 \\ -0{,}06x_1 - 0{,}47x_2 + 0{,}81x_3 + 0{,}08x_4 = -1{,}25 \\ -0{,}18x_1 - 0{,}19x_2 + 0{,}15x_3 + 0{,}75x_4 = 0{,}53 \end{cases}$

2 Решить систему линейных уравнений методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0{,}001$, преобразовав систему уравнений к виду, удобному для итераций.

6.1.2 Варианты заданий 2

Вариант 1. $\begin{cases} 3{,}4x_1 - 6{,}5x_2 + 3{,}9x_3 = 2{,}65 \\ 0{,}9x_1 + 1{,}5x_2 - 6{,}8x_3 = -8{,}4 \\ 3{,}2x_1 + 7{,}6x_2 - 1{,}3x_3 = 6{,}2 \end{cases}$

Вариант 2. $\begin{cases} 2{,}8x_1 + 3{,}6x_2 - 9{,}1x_3 = 2{,}5 \\ 1{,}6x_1 + 4{,}5x_2 + 2{,}1x_3 = -3{,}1 \\ 3{,}3x_1 - 2{,}1x_2 + 5{,}4x_3 = 4{,}3 \end{cases}$

Вариант 3. $\begin{cases} 4{,}7x_1 - 2{,}6x_2 + 3{,}5x_3 = 5{,}9 \\ 3{,}1x_1 + 6{,}5x_2 - 1{,}4x_3 = 4{,}6 \\ 2{,}9x_1 - 0{,}8x_2 + 1{,}6x_3 = -4{,}5 \end{cases}$

Вариант 4. $\begin{cases} 2{,}1x_1 + 2{,}3x_2 - 2{,}8x_3 = 6{,}2 \\ 0{,}9x_1 + 3{,}8x_2 - 1{,}6x_3 = 4{,}1 \\ 1{,}5x_1 - 2{,}4x_2 + 8{,}7x_3 = -6{,}2 \end{cases}$

Вариант 5. $\begin{cases} 1{,}1x_1 + 2{,}8x_2 - 3{,}6x_3 = 2{,}3 \\ 2{,}4x_1 + 5{,}9x_2 - 0{,}6x_3 = 3{,}7 \\ 4{,}6x_1 - 2{,}5x_2 + 3{,}4x_3 = -1{,}5 \end{cases}$

Вариант 6. $\begin{cases} 1{,}8x_1 + 2{,}2x_2 - 3{,}9x_3 = 4{,}8 \\ 2{,}9x_1 + 3{,}7x_2 + 5{,}6x_3 = -4{,}1 \\ 1{,}4x_1 + 7{,}1x_2 - 2{,}6x_3 = 5{,}8 \end{cases}$

Вариант 7. $\begin{cases} 6{,}3x_1 + 5{,}2x_2 - 0{,}6x_3 = 1{,}5 \\ 2{,}3x_1 - 3{,}5x_2 + 3{,}4x_3 = 2{,}7 \\ 0{,}8x_1 + 1{,}4x_2 + 3{,}5x_3 = -2{,}3 \end{cases}$

Вариант 8. $\begin{cases} 3{,}7x_1 - 2{,}3x_2 + 4{,}5x_3 = 2{,}4 \\ 2{,}5x_1 + 4{,}7x_2 - 7{,}8x_3 = 3{,}5 \\ 1{,}6x_1 + 5{,}3x_2 + 1{,}3x_3 = -2{,}4 \end{cases}$

Вариант 9. $\begin{cases} 4{,}1x_1 + 5{,}8x_2 - 5{,}2x_3 = 7{,}1 \\ 3{,}8x_1 - 3{,}1x_2 + 4{,}1x_3 = 5{,}3 \\ 7{,}8x_1 + 5{,}3x_2 - 6{,}3x_3 = 5{,}8 \end{cases}$

Вариант 10. $\begin{cases} 3{,}7x_1 + 3{,}1x_2 + 4{,}1x_3 = 5{,}1 \\ 4{,}8x_1 + 4{,}5x_2 - 3{,}9x_3 = 4{,}9 \\ -2{,}1x_1 - 3{,}7x_2 + 1{,}8x_3 = 2{,}7 \end{cases}$

6.1.3 Методические указания

1 Разработайте алгоритм решения задачи.

2 Разработайте программу решения задачи.

3 Оформите отчет по практической работе, включающий:

- титульный лист;
- теоретическое обоснование;
- постановка задачи;
- описание алгоритма решения задачи;
- скриншоты результатов работы программы.

6.1.4 Контрольные вопросы

1 Какое определение приближённым методам решения линейных систем уравнений существует?

2 Какие этапы включает метод простой итерации?

3 Какие этапы включает метод Зейделя?

4 Каким образом рассчитывается коэффициент сжатия?

5 Какое условие сходимости?

7 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задача Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка записывается в виде

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (7.1)$$

Необходимо найти решение на отрезке $[a, b]$, где $x_0 = a$. Вводится разностная сетка на отрезке $\Omega^k = \{x_k = x_0 + h * k\}$, $k = \overline{0, N}$, $h = |b - a| / N$. Точки x_k – узлы разностной сетки. Расстояние между узлами h – шаг разностной сетки. Сеточная функция $y^{(h)} = \{y_k, k = \overline{0, N}\}$ – множество значений величины, заданной в узлах сетки.

Приближенное решение задачи Коши (7.1) определяется численно в виде сеточной функции $y^{(h)}$. Для оценки погрешности приближенного численного решения $y^{(h)}$ применяется норма элемента $N+1$ – мерного линейного векторного пространства $\delta^{(h)} = y^{(h)} - [y]^{(h)}$, где $[y]^{(h)}$ – точное решение задачи (7.1) в узлах расчетной сетки: $\varepsilon_h = \left\| \delta^{(h)} \right\|$ [3].

7.1 Методы Эйлера

7.1.1 Явный метод Эйлера

Метод Эйлера имеет невысокую точность решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Способы вывода расчетных соотношений: геометрическая интерпретация, разложение в ряд Тейлора, конечно-разностный метод (разностная аппроксимация производной), квадратурный способ (использование эквивалентного интегрального уравнения). Формула метода Эйлера имеет вид

$$y_{k+1} = y_k + h * f(x_k, y_k) \qquad (7.2)$$

Погрешности подразделяются на локальную и глобальную. Локальная погрешность по отношению к точному решению допускается на каждом шаге метода Эйлера. Глобальная погрешность накапливается начиная со второго шага. Глобальная погрешность – разность между численным решением и точным решением исходной начальной задачи.

Локальная погрешность рассчитывается по формуле

$$\varepsilon_k^h = \frac{y''(\xi)}{2} * h^2 \qquad (7.3)$$

Глобальная погрешность метода Эйлера рассчитывается по формуле

$$\varepsilon_{ГЛ}^h = Ch \qquad (7.4)$$

Глобальная погрешность в окрестности $h = 0$ представляет линейную функцию, поэтому метод Эйлера имеет первый порядок точности относительно шага h.

7.1.2 Неявный метод Эйлера

Неявный метод Эйлера первого порядка точности получается, если на правой границе интервала использовать точное значение производной от решения. Формула неявного метода Эйлера имеет вид

$$y_{k+1} = y_k + h * f(x_{k+1}, y_{k+1}) \tag{7.5}$$

Нелинейное относительно y_{k+1} уравнение 7.5 решается методом Ньютона.

7.1.3 Метод Эйлера – Коши

Расчет на каждом интервале проводится в два этапа: прогноз и коррекция. На первом этапе (прогноз) определяется приближенное решение на правом конце интервала по методу Эйлера. На втором этапе (коррекция) уточняется значение решения на правом конце с использованием полусуммы тангенсов углов наклона на концах интервала.

$$\begin{gathered}\tilde{y}_{k+1} = y_k + h * f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h * (f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}))}{2} \\ x_{k+1} = x_k + h\end{gathered} \tag{7.6}$$

Метод Эйлера – Коши имеет второй порядок точности.

7.1.4 Неявный метод Эйлера – Коши

Неявный метод Эйлера – Коши (метод трапеций) второго порядка точности получается, если на правой границе интервала использовать точное значение производной к решению (тангенса угла наклона касательной).

$$\begin{gathered}y_{k+1} = y_k + \frac{h * (f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}))}{2} \\ x_{k+1} = x_k + h\end{gathered} \tag{7.7}$$

7.1.5 Метод Эйлера – Коши с итерационной обработкой

Метод Эйлера – Коши с итерационной обработкой представляет комбинацию методов: неявного метода Эйлера, метода Эйлера – Коши, неявного метода Эйлера – Коши. Метод Эйлера – Коши с итерационной обработкой более точный метод по сравнению с предыдущими.

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k + h * f(x_k, y_k)$$
$$y_{k+1}^{i} = y_k + \frac{h*(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(i-1)}))}{2} \qquad (7.8)$$
$$y_{k+1} = x_k + h$$

Метод Эйлера – Коши с итерационной обработкой представляет собой реализацию метода простой итерации для решения нелинейного уравнения (7.7) в неявном методе Эйлера. Рекомендуется выполнять 3-4 итерации.

7.1.6 Первый улучшенный метод Эйлера

Первый улучшенный метод Эйлера применяется для расчета приближенного значения производной от решения в точке на середине расчетного интервала. Значение производной в середине получают применением явного метода Эйлера на половинном шаге по *x*.

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2} * f(x_k, y_k)$$
$$y_{k+1} = y_k + h * f(x_{k+1/2}, y_{k+1/2}) \qquad (7.9)$$
$$x_{k+1} = x_k + h$$
$$x_{k+1/2} = x_k + \frac{h}{2}$$

Первый улучшенный метод Эйлера имеет второй порядок точности.

7.2 Методы Рунге – Кутты

Методы Рунге – Кутты *p*-го порядка записываются в виде

$$
\begin{aligned}
&y_{k+1} = x_k + \Delta y_k \\
&\Delta y_k = \sum_{i=1}^{p} c_i * K_i^k \\
&K_i^k = h * f(x_k + a_i * h,\ y_k + h * \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} * K_j^k) \\
&i = \overline{2, p}
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

Параметры a_i, b_{ij}, c_i подбираются так, чтобы значение y_{k+1}, рассчитанное по соотношению (7.10), совпадало со значением разложения в точке x_{k+1} точного решения в ряд Тейлора с погрешностью $O(h^{p+1})$.

7.2.1 Метод Рунге – Кутты второго порядка

Анализ метода Эйлера показывает, что глобальная ошибка дискретизации есть *O(h)*. При уменьшении *h* приближённое решение будет более точным и при стремлении *h* к нулю будет сходиться к точному решению с линейной скоростью по *h*.

Медленная сходимость при уменьшении *h* характерна для методов первого порядка и служит препятствием для их использования. В методе Хьюна погрешность при стремлении *h* к нулю убывает с более высокой скоростью. Метод Хьюна использует формулу

$$y_{k+1} = y_k + h[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1,} y_k + hf(x_k, y_k))] \tag{7.11}$$

Метод Хьюна имеет локальную ошибку дискретизации $O(h^2)$. Метод Рунге – Кутты четвёртого порядка задаётся формулой

$$y_{k+1} = y_k + h(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)/6, \tag{7.12}$$

где $F_1 = f(x_k, y_k)$,

$F2 = f(xk + h/2, yk + h F1/2)$,

$F3 = f(xk + h/2, yk + h F2/2)$,

$F4 = f(xk + h, yk + h F3)$

Здесь $f(xk, yk)$ в методе Эйлера заменено на среднее взвешенное значение *f*, вычисленных в четырёх различных точках.

Метод Рунге – Кутты четвёртого порядка является одношаговым, также как и метод Эйлера, который иногда называют методом Рунге – Кутты первого порядка. Такие методы представляются в виде соответствующей функции *g( )*.

$$\text{yk+1} = \text{yk} + \text{h g(xk ,yk)} \tag{7.13}$$

В случае метода Эйлера функцией *g( )* является сама *f( )*. Для метода Хьюна соответствующая функция для метода Рунге – Кутты четвёртого порядка записывается в виде

$$g(x,y)= [f(x,y)+ f(x+h, y+hf(x,y))] \qquad (7.14)$$

Для любого одношагового метода (7.13) определим локальную ошибку дискретизации аналогично методу Эйлера соотношением

$$L(h)= \max aJJ\, xJ\, b\text{-}h|L(x,h)|$$

$$L(x,h)= [y(x+h)-y(x)]/h - g(x,y(x)) \qquad (7.15)$$

где $y(x)$ – точное решение дифференциального уравнения.

Если для данной функции *g( )* окажется, что $L(h)=O(h\ p\ )$ при некотором целом *p*, то при соответствующих предположениях относительно функций *g( )* и *f( )* можно показать, что глобальная ошибка дискретизации будет также порядка *p* по *h* , т.е.

$$E(h)\ =\ \max 1J\, kJ\, N\ |\ y\, k\ \text{-}y(xk)|=\ O(h\ p\ ) \qquad (7.16)$$

Порядок метода (7.13) определяется как целое *p*, для которого такое определение порядка является некоторым утверждением о свойствах самого метода. При этом предполагается, что решение дифференциального уравнения *y* имеет ограниченные производные до определённого порядка [3].

7.2.2 Метод Рунге – Кутты третьего порядка

Метод Рунге – Кутты третьего порядка точности $(p=3, a_1=0, a_2=\frac{1}{3}, a_3=\frac{2}{3}, b_{21}=\frac{1}{3}, b_{31}=0, b_{32}=\frac{2}{3}, c_1=\frac{1}{4}, c_2=0, c_3=\frac{3}{4})$ имеет вид

$$\begin{aligned}
&y_{k+1}=y_k+\Delta y_k\\
&\Delta y_k=\frac{1}{4}*(K_1^k+3*K_3^k)\\
&K_1^k=h*f(x_k,y_k) \qquad (7.17)\\
&K_2^k=h*f(x_k+\frac{1}{3}*h, y_k+\frac{1}{3}*K_1^k)\\
&K_3^k=h*f(x_k+\frac{2}{3}*h, y_k+\frac{2}{3}*K_2^k)
\end{aligned}$$

7.2.3 Метод Рунге – Кутты четвертого порядка

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности

$(p=4, a_1=0, a_2=\frac{1}{2}, a_3=\frac{1}{2}, a_4=1, b_{21}=\frac{1}{2}, b_{31}=0, b_{32}=\frac{1}{2}, b_{42}=0, b_{43}=\frac{1}{2},$

$c_1=\frac{1}{6}, c_2=\frac{1}{3}, c_3=\frac{1}{3}, c_4=\frac{1}{6})$

имеет вид

$$
\begin{aligned}
&y_{k+1} = y_k + \Delta y_k \\
&\Delta y_k = \frac{1}{6}*(K_1^k + 2*K_2^k + 2*K_3^k + K_4^k) \\
&K_1^k = h*f(x_k, y_k) \\
&K_2^k = h*f(x_k + \frac{1}{2}*h, y_k + \frac{1}{2}*K_1^k) \\
&K_3^k = h*f(x_k + \frac{1}{2}*h, y_k + \frac{1}{2}*K_2^k) \\
&K_4^k = h*f(x_k + h, y_k + K_3^k)
\end{aligned}
\tag{7.18}
$$

Метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности широко применяется для решения задачи Коши.

7.2.4 Контроль точности на каждом шаге

Контроль точности получаемого численного решения осуществляется методами, основанными на принципе Рунге – Ромберга – Ричардсона.

Пусть y^h решение задачи Коши (7.1), полученное методом Рунге –Кутты p-го порядка точности с шагом h в точке $x+2*h$. Пусть y^{2*h} решение той же задачи в точке $x+2*h$, полученное тем же методом, но с шагом $2*h$. Тогда выражение

$$\breve{y} = y^h + \frac{y^h - y^{2*h}}{2^p - 1} \tag{7.19}$$

аппроксимирует точное решение в точке $x+2*h$ $y*(x+2*h)$ с $p+1$-ым порядком. Второе слагаемое в выражении (7.12) оценивает главный член в погрешности решения y^h, т. е. $R^h = \frac{y^h - y^{2*h}}{2^p - 1}$. Контроль точности организуется следующим образом. Выбирается значение шага h и дважды рассчитывается решение в точке $x+2*h$: один раз с шагом h, другой раз с шагом $2*h$. Рассчитывается величина R^h и сравнивается с заданной точностью ε. Если величина R^h меньше ε, то можно продолжить вычисление с тем же шагом, иначе необходимо вернуться к решению в точке x, уменьшить шаг h и повторить вычисления.

Вычислительная стоимость контроля точности велика. Используют грубый способ контроля правильности выбора шага h. В случае метода Рунге – Кутты четвертого порядка точности на каждом шаге h рассчитывают параметр

$$\theta^k = \left| \frac{K_2^k - K_3^k}{K_1^k - K_2^k} \right| \qquad (7.20)$$

Если величина θ^k порядка нескольких сотых единиц, то расчет продолжается с тем же шагом, если θ^k больше одной десятой, то шаг следует уменьшить, если θ^k меньше одной сотой, то шаг можно увеличить.

С помощью определения величин θ^k и R^h можно организовать алгоритм выбора шага h для явного метода Рунге – Кутты [4, 5].

7.3 Примеры решения задачи Коши

7.3.1 Решение задачи Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения явным методом Эйлера

Задача. Явным методом Эйлера с шагом $h = 0{,}1$ получить численное решение дифференциального уравнения $y' = (y + x)^2$ с начальными условиями $y(0) = 0$ на интервале *[0; 0,5]*.

Решение. Начальная точка имеет значение $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Рассчитаем значение y_1 в узле $x_1 = 0{,}1$ по формуле 7.2

$$y_1 = y_0 + h * f(x_0, y_0) = 0 + 0{,}1 * (0 + 0)^2 = 0.$$

Решение в узле $x_2 = 0{,}2$ имеет вид

$$y_2 = y_1 + h * f(x_1, y_1) = 0 + 0{,}1 * (0 + 0{,}1)^2 = 0{,}001.$$

Продолжим вычисления. Решение задачи приведено таблице 7.1.

Таблица 7.1 – Решение задачи явным методом Эйлера

K	0	1	2	3	4	5
x_k	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_k	0,0	0,0	0,001	0,0050401	0,014345	0,031513

7.3.2 Решение задачи Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения методом Эйлера – Коши

Задача. Методом Эйлера – Коши с шагом $h = 0{,}1$ получить численное решение дифференциального уравнения $y' = (y + x)^2$ с начальными условиями $y(0) = 0$ на интервале *[0; 0,5]*.

Решение. Начальная точка имеет значение $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Рассчитаем значение y_1 в узле $x_1 = 0{,}1$ по формуле

$$\tilde{y}_1 = y_0 + h * f(x_0, y_0) = 0 + 0{,}1 * (0 + 0)^2 = 0.$$

$$f(x_1, \tilde{y}_1) = (0 + 0.1)^2 = 0{,}01.$$

$$y_1 = y_0 + 0{,}5 * h * (f(x_0, y_0) + f(x_1, \tilde{y}_1)) = 0 + 0{,}5 * 0{,}1 * (0 + 0{,}01) = 0{,}0005.$$

Продолжим вычисления. Решение задачи приведено в таблице 7.2.

Таблица 7.2 – Решение задачи явным методом Эйлера – Коши

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_k	0,0	0,0005	0,003035327	0,009813786	0,023408346	0,047024301
$\tilde{y}_k$	0,0	0,0	1,5100E-003	7,1576E-003	1,9412E-002	4,1335E-002

7.3.3 Решение задачи Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения улучшенным методом Эйлера

Задача. Улучшенным методом Эйлера с шагом $h = 0{,}1$ получить численное решение дифференциального уравнения $y' = (y + x)^2$ с начальными условиями $y(0) = 0$ на интервале *[0; 0,5]*.

Решение. Начальная точка имеет значение $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Рассчитаем значение $y_{1/2}$ в узле $x_{1/2} = x_0 + h/2 = 0{,}05$ по формуле

$$y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2} * f(x_0, y_0) = 0 + \frac{0{,}1}{2} * (0 + 0)^2 = 0.$$

Определим величину правой части в середине интервала $[x_0;\ x_1]$. $f(\dot{x}_{1/2}, y_{1/2}) = (0 + 0{,}05)^2 = 0{,}0025$. Рассчитаем значение функции в узле x_1.

$$y_1 = y_0 + h * f(x_{1/2}, y_{1/2}) = 0 + 0{,}1 * 0{,}0025 = 0{,}00025.$$

Аналогично получим решение в остальных узлах. Решение задачи приведено в таблице 7.3.

Таблица 7.3 – Решение задачи явным улучшенным методом Эйлера

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_k	0,0	0,00025	0,00252	0,00900	0,02222	0,04538
$y_{k+1/2}$	0,0	0,00075	0,00457	0,01377	0,03115	

7.3.4 Решение задачи Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения методом Рунге – Кутты четвертого порядка

Задача. Методом Рунге – Кутты 4-го порядка с шагом $h = 0{,}1$ получить численное решение дифференциального уравнения $y' = (y + x)^2$ с начальными условиями $y(0) = 0$ на интервале *[0; 0,5]*.

Решение. Вычислим значение вспомогательных величин

$$K_1^0 = h * f(x_0, y_0) = 0{,}1 * (0 + 0)^2 = 0;$$

$$y_0^1 = y_0 + \frac{1}{2} * K_1^0 = 0 + \frac{1}{2} * 0 = 0;$$

$$K_2^0 = h * f(x_0 + \frac{1}{2} * h, y_0 + \frac{1}{2} * K_1^0) = 0{,}1 * (0 + \frac{1}{2} * 0{,}1)^2 = 0{,}00025;$$

$$y_0^2 = y_0 + \frac{1}{2} * K_2^0 = 0 + \frac{1}{2} * 0{,}00025 = 0{,}000125;$$

$$K_3^0 = h * f(x_0 + \frac{1}{2} * h, y_0 + K_2^0) = 0.1 * (0 + \frac{1}{2} * 0{,}00025 + 0 + \frac{1}{2} * 0{,}1)^2$$
$$= 0{,}000251251;$$

$$y_0^3 = y_0 + K_3^0 = 0 + 0{,}000251251 = 0{,}000251251;$$

$$\mathrm{K}_4^0 = \mathrm{h} * \mathrm{f}(\mathrm{x}_0 + \mathrm{h}, \mathrm{y}_0 + \mathrm{K}_3^0) = 0{,}1 * (0 + 0{,}000251251 + 0 + 0{,}1)^2 =$$
$$= 0{,}001005031$$

Найдем приращение функции на первом интервале

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} * (K_1^0 + 2 * K_2^0 + 2 * K_3^0 + K_4^0) = \frac{1}{6} * (0 + 2 * 0{,}00025 + 2 *$$
$$* 0{,}000251251 + 0{,}001005031) = 0{,}000334588;$$

и значение функции в первом узле

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0 + 0{,}000334588 = 0{,}000334588.$$

Решение задачи приведено в таблице 7.4.

Таблица 7.4 – Решение задачи явным улучшенным методом Эйлера

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_k	0,0	0,000334589	0,0027098	0,0093360	0,0227929	0,046302308

8 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

8.1 Назначение, цели и задачи контрольной работы

Разрабатываемое приложение контрольной работы предназначено для формализации решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Цель выполнения контрольной работы – закрепление теоретических знаний и повышение практических навыков в разработке программ на языке Visual C++.

Задачи, решаемые студентом в процессе выполнения контрольной работы:

– изучение теоретического обоснования предметной области;

– разработка алгоритма решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка;

– разработка программного приложения, формализующего решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка явным методом Эйлера, модификациями метода Эйлера, методом Рунге – Кутты;

– документирование контрольной работы.

8.2 Требования к контрольной работе

Контрольная работа включает приложение на языке Visual C++ и пояснительную записку, содержащую разделы:

– введение;

– постановка задачи;

– алгоритм решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка методами согласно вариантам задания;

– результаты работы приложения (скриншоты);

– заключение;

– библиографический список.

Пояснительная записка оформляется в соответствии с требованиями методического указания к оформлению курсовых и дипломных проектов [6].

8.2.1 Требования к функциональным характеристикам

Проектируемое приложение должно обеспечивать выполнение функций:

– ввод исходных данных задачи;

– расчет приближенного решения явным методом Эйлера задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, уточненное решение с помощью формулы Рунге, численное решение задачи одной из модификаций метода Эйлера, методом Рунге – Кутты;

– вывод расчетных данных.

8.2.2 Требования к эксплуатационным характеристикам

Модульность и расширяемость.

8.2.3 Требования к программному обеспечению

Интегрированная среда разработки Microsoft Visual Studio 2022 Community. Язык программирования Visual C++, Visual C#.

8.3 Варианты заданий

Разработать программу, реализующую численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

1. Найти приближенное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

в точке $x = x_k$ с помощью метода Эйлера, $k = n - 1$.

2. Получить уточненное решение с помощью формулы Рунге

$$Y^*(x_k) = 2 * y_{2*n}(x_k) - y_n(x_k)$$

Использовать разбиение отрезка $[x_0, x_n]$ на $n_1 = 5$ и $n_2 = 10$ равных частей.

3. Получить численное решение задачи методами, указанными в заданиях вариантов (таблица 8.1).

Таблица 8.1 – Варианты заданий

Вариант	$f(x,y)$	x_0	y_0	x_n	Методы
1	$\sin(x*y)+N*y^2$	0	1	0,5	1. Метод Эйлера – Коши. 2. Метод Рунге – Кутты 3-го порядка
2	$\sin(x+N*y)+y$	0	0	0,5	1. Улучшенный метод Эйлера. 2. Метод Хьюна
3	$N*y^2+e^x$	0	1	0,5	1. Метод Эйлера – Коши. 2. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка
4	$N*\sqrt{y}+\sin x$	0	4	0,5	1. Улучшенный метод Эйлера. 2. Метод Рунге – Кутты 2-го порядка
5	$N*\sqrt{y}+2*x^2$	0	1	1	1. Метод Эйлера – Коши. 2. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка
6	$10*\sqrt{y}+\sin(x/N)$	0	1	1	1. Улучшенный метод Эйлера. 2. Метод Рунге – Кутты 3-го порядка
7	$\cos y*\sqrt{y}+x^2*y/N$	0	0,1	1	1. Метод Эйлера – Коши. 2. Метод Хьюна
8	$\sqrt{y}/N+x^2$	0	0,1	1	1. Улучшенный метод Эйлера. 2. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка
9	$3*x+N*y+\ln y$	0	1	0,5	1. Метод Эйлера – Коши. 2. Метод Рунге – Кутты 2-го порядка
10	$x/N+2*y*x*\ln y$	1	1	1,5	1. Улучшенный метод Эйлера. 2. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка
11	$x*y/N+\ln y$	1	1	1,5	1. Метод Эйлера – Коши. 2. Метод Рунге – Кутты 3 порядка
12	$3*x*y+(\ln y/N)$	1	1	1,5	1. Улучшенный метод Эйлера. 2. Метод Хьюна
13	$e^{2*x}*y+N$	0	0	0,5	1. Метод Эйлера – Коши. 2. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка
14	e^x+x*y/N	0	1	1	1. Улучшенный метод Эйлера. 2. Метод Рунге – Кутты 2-го порядка
15	$e^x*y+N*x$	0	1	0,5	1. Метод Эйлера – Коши. 2. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка
16	$e^x*\sin y+N*x$	0	1	0,5	1. Улучшенный метод Эйлера. 2. Метод Рунге – Кутты 3 порядка
17	$e^x*\cos y+x*y/N$	0	1	1	1. Метод Эйлера – Коши. 2. Метод Хьюна
18	$e^x*(1+y)+x/N$	0	1	1	1. Улучшенный метод Эйлера. 2. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка
19	$y*x^2+e^{-N*x}$	0	0	5	1. Метод Эйлера – Коши. 2. Метод Рунге – Кутты 2-го порядка
20	$y*x^3+e^{-N*x}$	0	1	5	1. Улучшенный метод Эйлера. 2. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка
21	$y*\sqrt{x}+e^{-N*x}$	0	1	5	1. Метод Эйлера – Коши. 2. Метод Рунге – Кутты 3-го порядка
22	$2*y*x+e^{-N*y}$	0	0	1	1. Улучшенный метод Эйлера. 2. Метод Хьюна
23	$5*y*x+2*\sin(x/N)$	0	1	0,5	1. Метод Эйлера – Коши. 2. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка
24	$2*x^2+\cos y/N$	0	1	0,5	1. Улучшенный метод Эйлера. 2. Метод Рунге – Кутты 2-го порядка
25	$2*\ln x+\cos(y/N)$	1	1	1,5	1. Метод Эйлера – Коши. 2. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка

8.4 Пример выполнения задания

Найти приближенное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка $\begin{cases} y' = \cos x * y + \dfrac{y}{5} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ в точке x_k с помощью метода Эйлера. Использовать разбиение отрезка $[x_0; x_n]$ на $n_1 = 5$ и $n_2 = 10$ равных частей. Получить уточнённое решение с помощью формулы Рунге (вычисления проводить с точностью до 0,001).

Решение. Проводим расчет приближенного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка с помощью метода Эйлера. Разобьем отрезок на 5 частей, т. к. $x_0 = 0$, $x_n = 0.5$, $n = 5$, то $h = \dfrac{x_n - x_0}{5} = \dfrac{0.5}{5} = 0{,}1$. По условию задачи $y_0 = 1$, $f(x, y) = \cos x * y + \dfrac{y}{5}$. Находим значения приближенного решения в узлах по формуле $y_{i+1} = y_i + h * (\cos x_i * y_i + \dfrac{y_i}{5})$.

Итерация 1. $x_0 = 0$.

$$y_1 = y_0 + h * (\cos x_0 * y_0 + \frac{y_0}{5}) = 1 + 0{,}1 * (\cos 0 * 1 + \frac{1}{5}) = 1 + 0{,}1 * (1 + 0{,}2) = 1{,}12$$

Итерация 2. $x_1 = 0{,}1$.

$$y_2 = y_1 + h * (\cos x_1 * y_1 + \frac{y_1}{5}) = 1{,}12 + 0{,}1 * (\cos 0{,}1 * 1{,}12 + \frac{1{,}12}{5}) =$$

$$1{,}12 + 0{,}1 * (0{,}9937 + 0{,}224) = 1{,}12 + 0{,}1 * 1{,}2177 = 1{,}12 + 0{,}1218 = 1{,}2418$$

Итерация 3. $x_2 = 0{,}2$.

$$y_3 = y_2 + h * (\cos x_2 * y_2 + \frac{y_2}{5}) = 1{,}2418 + 0{,}1 * (\cos 0.2 * 1{,}2418 + \frac{1{,}2418}{5}) =$$

$$1{,}2418 + 0{,}1 * (\cos 0{,}24836 + 0{,}24836) = 1{,}2418 + 0{,}1 * (0{,}9631 + 0{,}24836) =$$

$$1{,}2418 + 0{,}1 * 1{,}21146 = 1{,}362946 \approx 1{,}363$$

Итерация 4. $x_3 = 0{,}3$.

$$y_4 = y_3 + h * (\cos x_3 * y_3 + \frac{y_3}{5}) = 1{,}363 + 0{,}1 * (\cos 0{,}3 * 1{,}363 + \frac{1{,}363}{5}) =$$

$$1{,}363 + 0{,}1 * (\cos 0{,}4089 + 0{,}2726) = 1{,}363 + 0{,}1 * (0{,}9176 + 0{,}2726) =$$

$$1{,}363 + 0{,}1 * 1{,}1902 = 1{,}363 + 0{,}11902 = 1{,}48202 \approx 1{,}482$$

Итерация 5. $x_4 = 0{,}4$.

$$y_5 = y_4 + h*(\cos x_4 * y_4 + \frac{y_4}{5}) = 1{,}482 + 0{,}1*(\cos 0{,}4*1{,}482 + \frac{1{,}482}{5}) =$$

$$1{,}482 + 0{,}1*(\cos 0{,}5928 + 0{,}2964) = 1{,}482 + 0{,}1*(0{,}8294 + 0{,}2964) =$$

$$1{,}482 + 0{,}1*1{,}1252 = 1{,}482 + 0{,}11252 = 1{,}59452 \approx 1{,}595$$

Последовательно выполняя вычисления, получаем $y_5(x_k) = 1{,}595$. Аналогично, разбивая отрезок на 10 частей $(h = \frac{x_k - x_0}{5} = \frac{0.5}{10} = 0{,}05)$, имеем $y_{10}(x_k) = 1{,}592$.

Определим уточненное значение решения, используя формулу Рунге:

$$y^*(x_k) = 2*y_{10}(x_k) - y_5(x_k) = 2*1{,}592 - 1{,}595 = 1{,}589.$$

Проводим расчет приближенного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка с помощью метода Рунге – Кутты 4-го порядка.

Вычисления производятся по формуле

$$y_{i+1} = y_i + \frac{(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)}{6},$$

где $k1 = h* f(x_i, y_i)$

$$k2 = h* f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1}{2})$$

$$k3 = h* f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k2}{2})$$

$$k4 = h* f(x_i + h, y_i + k3),\ k = \overline{0,(n-1)},$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

По условию задачи $y_0 = 1$, $f(x, y) = \cos x * y + \frac{y}{5}$, $h = \frac{x_n - x_0}{5} = \frac{0{,}5}{5} = 0{,}1$

Находим значения приближенного решения в узлах по формуле $y_{i+1} = y_i + \frac{(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)}{6}$.

Итерация 1. $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

$$k1 = h* f(x_0, y_0) = 0{,}1*(\cos 0*1 + \frac{1}{5}) = 0{,}1*(1 + 0{,}2) = 0{,}1200$$

$$k2 = h * f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k1}{2}) = 0{,}1*(\cos 0{,}05*1{,}06 + \frac{1{,}06}{5}) =$$
$$0{,}1*(\cos 0{,}053 + 0{,}212) = 0{,}1*(0{,}9986 + 0{,}212) = 0{,}1*1{,}2106$$
$$= 0{,}12106 \approx 0{,}1211$$
$$k3 = h * f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k2}{2}) = 0{,}1*(\cos 0{,}05*1{,}06055 + \frac{1{,}06055}{5}) =$$
$$0{,}1*(\cos 0{,}0530275 + 0{,}21211) = 0{,}1*(0{,}9986 + 0{,}21211) =$$
$$0{,}1*1{,}21071 = 0{,}121071 \approx 0{,}1211$$
$$k4 = h * f(x_0 + h, y_0 + k3) = 0{,}1*(\cos 0{,}1*1{,}1211 + \frac{1{,}1211}{5}) =$$
$$0{,}1*(\cos 0{,}11211 + 0{,}22422) = 0{,}1*(0{,}9937 + 0{,}22422) =$$
$$0{,}1*1{,}21792 \approx 0{,}1218$$
$$y_1 = y_0 + \frac{(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)}{6} = 1 + \frac{(0{,}1200 + 2*0{,}1211 + 2*0{,}1211 + 0{,}1218)}{6} =$$
2
$$1 + \frac{0{,}1200 + 0{,}2422 + 0{,}2422 + 0{,}1218}{6} = 1 + \frac{0{,}7262}{6} = 1 + 0{,}12103 = 1{,}12103 \approx 1{,}1210$$

Итерация 2. $x_1 = 0{,}1,\ y_1 = 1{,}121.$

$$k1 = h * f(x_1, y_1) = 0{,}1*(\cos 0{,}1*1{,}121 + \frac{1{,}121}{5}) = 0{,}1*(0{,}9937 + 0{,}2242) =$$
$$0{,}1*1{,}2179 = 0{,}12179 \approx 0{,}1218$$
$$k2 = h * f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k1}{2}) = 0{,}1*(\cos 0{,}15*(1{,}121 + 0{,}0609) +$$
$$\frac{1{,}121 + 0{,}0609}{5}) = 0{,}1*(\cos 0{,}15*1{,}1819 + \frac{1{,}1819}{5}) =$$
$$0{,}1*(\cos 0{,}177285 + 0{,}23638) = 0{,}1*(0{,}9843 + 0{,}23638) =$$
$$0{,}1*1{,}22068 = 0{,}122068 \approx 0{,}1221$$
$$k3 = h * f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k2}{2}) = 0{,}1*(\cos 0{,}15*(1{,}121 + 0{,}06105) +$$
$$\frac{1{,}121 + 0{,}06105}{5}) = 0{,}1*(\cos 0{,}15*1{,}18205 + \frac{1{,}18205}{5}) =$$
$$0{,}1*(\cos 0{,}1773075 + 0{,}23641) = 0{,}1*(0{,}9843 + 0{,}23641) =$$
$$0{,}1*1{,}22071 = 0{,}122071 \approx 0{,}1221$$
$$k4 = h * f(x_1 + h, y_1 + k3) = 0{,}1*(\cos 0{,}2*(1{,}1210 + 0{,}1221) +$$
$$\frac{1{,}1210 + 0{,}1221}{5}) = 0{,}1*(\cos 0{,}2*1{,}2431 + \frac{1{,}2431}{5}) =$$
$$0{,}1*(\cos 0{,}24862 + 0{,}24862) = 0{,}1*(0{,}9693 + 0{,}24862) =$$
$$0{,}1*1{,}21792 = 0{,}121792 \approx 0{,}1218$$

$$y_2 = y_1 + \frac{(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)}{6} = 1{,}121 +$$

$$\frac{(0{,}1218 + 2*0{,}1221 + 2*0{,}1221 + 0{,}1218)}{6} = 1{,}121 +$$

$$\frac{0{,}1218 + 0{,}2442 + 0{,}2442 + 0{,}1218}{6} = 1{,}121 + \frac{0{,}732}{6} = 1{,}121 + 0{,}122 = 1{,}243$$

Итерация 3. $x_2 = 0{,}2$, $y_2 = 1{,}243$.

$$k1 = h * f(x_2, y_2) = 0{,}1*(\cos 0{,}2*1{,}243 + \frac{1{,}243}{5}) = 0{,}1*(\cos 0{,}2486 +$$

$$0{,}2486) = 0{,}1*(0{,}9693 + 0{,}2486) = 0{,}1*1{,}2179 = 0{,}12179 \approx 0{,}1218$$

$$k2 = h * f(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k1}{2}) = 0{,}1*(\cos 0{,}25*(1{,}243 + 0{,}0609) +$$

$$\frac{1{,}243 + 0{,}0609}{5}) = 0{,}1*(\cos 0{,}25*1{,}3039 + \frac{1{,}3039}{5}) = 0{,}1*(\cos 0{,}325975 +$$

$$0{,}26078) = 0{,}1*(0{,}9473 + 0{,}26078) = 0{,}1*1{,}20808 = 0{,}120808 \approx 0{,}1208$$

$$k3 = h * f(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k2}{2}) = 0{,}1*(\cos 0{,}25*(1{,}243 + 0{,}0604) +$$

$$\frac{1{,}243 + 0{,}0604}{5}) = 0{,}1*(\cos 0{,}25*1{,}3034 + \frac{1{,}3034}{5}) =$$

$$0{,}1*(\cos 0{,}32585 + 0{,}26068) = 0{,}1*$$

$$(0{,}9474 + 0{,}26068) = 0{,}1*1{,}20808 = 0{,}120808 \approx 0{,}1208$$

$$k4 = h * f(x_2 + h, y_2 + k3) = 0{,}1*(\cos 0{,}3*(1{,}243 + 0{,}1208) +$$

$$\frac{1{,}243 + 0{,}1208}{5}) = 0{,}1*(\cos 0{,}3*1{,}3638 + 0{,}27276) =$$

$$0{,}1*(\cos 0{,}40914 + 0{,}27276) = 0{,}1*(0{,}9175 + 0{,}27276) =$$

$$0{,}1*1{,}19026 = 0{,}119026 \approx 0{,}1190$$

$$y_3 = y_2 + \frac{(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)}{6} = 1{,}243 +$$

$$\frac{(0{,}1218 + 2*0{,}1208 + 2*0{,}1208 + 0{,}1190)}{6} =$$

$$1{,}243 + \frac{0{,}1218 + 0{,}2416 + 0{,}2416 + 0{,}1190}{6} =$$

$$1{,}243 + \frac{0{,}724}{6} = 1{,}243 + 0{,}1207 = 1{,}3637$$

Итерация 4. $x_3 = 0{,}3$, $y_3 = 1{,}3637$.

$$k1 = h * f(x_3, y_3) = 0{,}1 * (\cos 0{,}3 * 1{,}3637 + \frac{1{,}3637}{5}) = 0{,}1 * (\cos 0{,}40911 +$$

$$0{,}27274) = 0{,}1 * (0{,}9175 + 0{,}27274) = 0{,}1 * 1{,}19024 = 0{,}119024 \approx 0{,}1190$$

$$k2 = h * f(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{k1}{2}) = 0{,}1 * (\cos 0{,}35 * (1{,}3637 + 0{,}0595) +$$

$$\frac{1{,}3637 + 0{,}0595}{5}) = 0{,}1 * (\cos 0{,}49812 + 0{,}28464) =$$

$$0{,}1 * (0{,}8785 + 0{,}28464) = 0{,}1 * 1{,}16314$$

$$= 0{,}116314 \approx 0{,}1163$$

$$k3 = h * f(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{k2}{2}) = 0{,}1 * (\cos 0{,}35 * (1{,}3637 + 0{,}05815) +$$

$$\frac{1{,}3637 + 0{,}05815}{5}) = 0{,}1 * (\cos 0{,}4976475 + 0{,}28437) = 0{,}1 *$$

$$(0{,}8787 + 0{,}28437) = 0{,}1 * 1{,}16307 = 0{,}116307 \approx 0{,}1163$$

$$k4 = h * f(x_3 + h, y_3 + k3) = 0{,}1 * (\cos 0.4 * (1{,}3637 + 0{,}1163) +$$

$$\frac{1{,}3637 + 0{,}1163}{5}) = 0{,}1 * (\cos 0{,}592 + 0{,}296) =$$

$$0{,}1 * (0{,}8298 + 0{,}296) = 0{,}1 * 1{,}1258 = 0{,}11258 \approx 0{,}1126$$

$$y_4 = y_3 + \frac{(k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)}{6} = 1{,}3637 +$$

$$\frac{(0{,}1190 + 2 * 0{,}1163 + 2 * 0{,}1163 + 0{,}1126)}{6} = 1{,}3637 +$$

$$\frac{0{,}1190 + 0{,}2326 + 0{,}2326 + 0{,}1126}{6} = 1{,}3637 + \frac{0{,}6968}{6} =$$

$$1{,}3637 + 0{,}1161 = 1{,}4798$$

Итерация 5. $x_4 = 0{,}4$, $y_4 = 1{,}4798$.

$$k1 = h * f(x_4, y_4) = 0{,}1 * (\cos 0{,}4 * 1{,}4798 + \frac{1{,}4798}{5}) =$$

$$0{,}1 * (0{,}8299 + 0{,}29596) = 0{,}1 * 1{,}12586 = 0{,}112586 \approx 0{,}1126$$

$$k2 = h * f(x_4 + \frac{h}{2}, y_4 + \frac{k1}{2}) = 0{,}1 * (\cos 0{,}45 * (1{,}4798 + 0{,}0563) +$$

$$\frac{1{,}4798 + 0.0563}{5}) = 0{,}1 * (\cos 0{,}691245 + 0{,}30722) = 0{,}1 *$$

$$(0{,}7705 + 0{,}30722) = 0{,}1 * 1{,}07772 = 0{,}107772 \approx 0{,}1078$$

$$k3 = h * f(x_4 + \frac{h}{2}, y_4 + \frac{k2}{2}) = 0{,}1 * (\cos 0{,}45 * (1{,}4798 + 0{,}0539) +$$

$$\frac{1{,}4798 + 0{,}0539}{5}) = 0{,}1 * (\cos 0{,}690165 + 0{,}30674) =$$

$$0{,}1 * (0{,}7712 + 0{,}30674) = 0{,}1 * 1{,}07794 =$$

$$0{,}107794 \approx 0{,}1078$$

$$k4 = h * f(x_4 + h, y_4 + k3) = 0{,}1 * (\cos 0{,}5 * (1{,}4798 + 0{,}1078) +$$

$$\frac{1{,}4798 + 0{,}1078}{5}) = 0{,}1 * (\cos 0{,}7938 + 0{,}31752) =$$

$$0{,}1 * (0{,}7012 + 0{,}31752) = 0{,}1 * 1{,}01872 =$$

$$0{,}101872 \approx 0{,}1019$$

$$y_5 = y_4 + \frac{(k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)}{6} = 1{,}4798 +$$

$$\frac{(0{,}1126 + 2 * 0{,}1078 + 2 * 0{,}1078 + 0{,}1019)}{6} = 1{,}4798 +$$

$$\frac{(0{,}1126 + 0{,}2156 + 0{,}2156 + 0{,}1019)}{6} = 1{,}4798 + 0{,}1076 = 1{,}5874 \approx 1{,}588$$

Ответ. Приближенное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка $\begin{cases} y' = \cos x * y + \frac{y}{5} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ в точке x_k представлено в таблице 8.2.

Таблица 8.2 – Приближенное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

№ п/п	Метод	Решение
1	Эйлера	1,595
2	Формула Рунге	1,589
3	Метод Рунге-Кутты 4-го порядка	1,588

8.5 Контрольные вопросы

1 Какие методы называются численными методами для обыкновенных дифференциальных уравнений?

2 Каким образом формулируется задача Коши?

3 Что значит решить задачу Коши численно?

4 Какие этапы включает метод Эйлера?

5 Какие этапы включает метод Рунге – Кутты четвёртого порядка?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вычислительная математика является дисциплиной для подготовки квалифицированных специалистов. Она даёт студентам теоретические основы и практические навыки для решения прикладных задач с применением математических моделей и численных методов, реализуемых на ПЭВМ. В качестве программного обеспечения для выполнения лабораторных и контрольных работ используется интегрированная среда программирования Microsoft Visual Studio 2022 Community и язык программирования Visual C++.

Методические указания содержат теоретическое обоснование и варианты заданий для выполнения лабораторных и контрольных работ по дисциплине «Вычислительная математика».

Методические указания разработаны в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта по подготовке студентов по направлению 09.04.04 «Программная инженерия» и 09.03.03 «Прикладная информатика».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Волков Е. А. Численные методы : учеб. пособие для вузов / Е. А. Волков. – 2 изд., испр. – Москва : Наука, 1987. – 248 с.

2 Вычислительная математика / Н. И. Данилина, Н. С. Дубровская, О. П. Кваша, Г. Л. Смирнов – Москва : Высшая школа, 1985. – 472 с.

3 Дик Д. И. Требования к оформлению текстовой документации курсовых и дипломных проектов (работ) : методические указания для студентов направлений (специальностей) 230000 (230105), 090000 (090105) / Д. И. Дик. – Курган : Изд-во Курганского гос. ун-та, 2008. – 40 с.

4 Зенков А. В. Вычислительная математика для IT-специальностей : учебное пособие / А. В. Зенков. – Москва : Вологда : Инфра-Инженерия, 2022. – 128 с.

5 Киреев В. И. Численные методы в примерах и задачах / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. – 3-е изд., стер. – Москва : Высш. шк., 2008. – 480 с.

6 Мудров А. Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран, Паскаль / А. Е. Мудров. – Томск : МП «РАСКО», 1991. – 272 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Производные элементарных функций

1 Производная постоянного числа. $(C)^{'} = 0$`, где С – постоянное число.

2 Производная степенной функции. $(x^n)^{'} = n * x^{n-1}$. Например, $(\sqrt{x})^{'} = \frac{1}{2*\sqrt{x}}$; $(x)^{'} = 1$; $(\frac{1}{x})^{'} = -\frac{1}{x^2}$.

3 Производная логарифмической функции. $(\ln x)^{'} = \frac{1}{x}$; $(\log_n x)^{'} = \frac{1}{x*\ln a}$.

4 Производная показательной функции. $(a^x)^{'} = a^x * \ln a$. Например, $(e^x)^{'} = e^x$.

5 Производная тригонометрической функции. $(\sin x)^{'} = \cos x$; $(\cos x)^{'} = -\sin x$; $(tgx)^{'} = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(ctgx)^{'} = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

6 Производная обратной тригонометрической функции.
$(arctgx)^{'} = \frac{1}{1+x^2}$; $(arcctgx)^{'} = -\frac{1}{1+x^2}$; $(\arcsin x)^{'} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
$(\arccos x)^{'} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

7 Производная гиперболической функции. $(shx)^{'} = chx$; $(chx)^{'} = shx$; $(thx)^{'} = \frac{1}{ch^2 x}$; $(cthx)^{'} = \frac{1}{sh^2 x}$.

8 Производная параметрической функции. Пусть функция задана в параметрической форме: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, тогда $y_x^{'} = \frac{\psi_t^{'}(t)}{\varphi_t^{'}(t)}$, $y_{xx}^{''} = \frac{(y_x^{'})_t^{'}}{\varphi_t^{'}(t)}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Правила дифференцирования

1 $(C*u)' = C*u'$, где C – постоянное число. Константу можно вынести за знак производной.

2 $(u \pm v)' = u' \pm v'$ – правило дифференцирования суммы.

3 $(u*v)' = u'*v + u*v'$ – правило дифференцирования произведения.

4 $(\frac{u}{v})' = \frac{u'*v - u*v'}{v^2}$ – правило дифференцирования частного.

5 $(u(v))' = u'(v)*v'$ – дифференцирование сложной функции.

Семахин Андрей Михайлович

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
к выполнению лабораторных и контрольных работ
для студентов направлений 09.03.03, 09.04.04

Редактор В. С. Никифорова

Подписано в печать 15.03.2023 Формат 60×84 1/16 Бумага 80 г/м^2
Печать цифровая Усл. печ. л. 2,8 Уч.-изд. л. 2,8
Заказ 13 Тираж 25

Библиотечно-издательский центр КГУ.
640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.