Т. Н. Михащенко

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курганский государственный университет»

Т. Н. Михащенко

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Учебно-методическое пособие

Курган 2022

УДК 519.61(075.8)
ББК 22.193я73
М 69

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Прикладная механика» ФГБОУ ВО «Тюменский индустриальный университет» Юрий Евгеньевич Якубовский;

кандидат технических наук, доцент Курганского института железнодорожного транспорта Курганского филиала ФГБОУ ВО «Уральский государственный университет путей сообщения» Александр Константинович Остапчук.

Печатается по решению методического совета Курганского государственного университета.

Михащенко Т. Н.

Практикум по решению систем уравнений численными методами : учебно-методическое пособие / Т. Н. Михащенко. – Курган : Изд-во Курганского гос. ун-та, 2022. – 68 с.

Учебное пособие состоит из трех глав. Целью учебно-методического пособия является знакомство студентов с численными методами решения систем уравнений. В первой главе дается обзор точных методов решения систем линейных уравнений. Во второй главе рассматриваются итерационные методы решения систем линейных уравнений. Третья глава посвящена методам решения систем нелинейных уравнений. В каждой главе имеются индивидуальные задания для лабораторно-практических занятий и контрольные вопросы для проверки знаний. Учебное пособие предназначено для студентов направления 01.03.01 «Математика» и специальности 01.05.01 «Фундаментальная математика и механика».

ISBN 978-5-4217-0619-9

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ..4
1 ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 5
1.1 Компактная схема Гаусса...5
1.2 Модификация Краута – Дулитла..8
1.3 Схема Гаусса с выбором главного элемента......................................11
1.4 Схема Халецкого...15
Основные вопросы теории к первой главе..19
Задания для лабораторно-практической работы 19
2 ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 21
2.1 Метод простой итерации..21
2.2 Метод Зейделя..24
2.3 Метод накопления 26
2.4 Метод релаксации..27
Основные вопросы теории ко второй главе...31
Задания для лабораторно-практической работы 31
3 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ 33
3.1 Метод простой итерации..33
3.2 Метод Зейделя 38
3.3 Метод Ньютона 39
3.4 Метод Брауна..44
3.5 Метод скорейшего спуска (градиентный метод)...............................48
Основные вопросы теории к третьей главе..54
Задания для лабораторно-практической работы 55
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 56
ПРИЛОЖЕНИЯ..57

ВВЕДЕНИЕ

Решение систем уравнений – одна из основных задач алгебры и вычислительной математики. Значительная часть численных методов решения технических, экономических задач включает в себя решение систем линейных или нелинейных уравнений как элементарный шаг соответствующего алгоритма.

Целью учебно-методического пособия является обучение студентов математических специальностей численным методам решения систем линейных и нелинейных уравнений.

В данном пособии содержатся теоретические сведения по каждому методу, практические рекомендации по организации вычислений, задания для лабораторно-практических работ по темам «Методы решения систем линейных уравнений», «Методы решения систем нелинейных уравнений», все схемы снабжены подробными инструкциями по их применению и алгоритмизированы для применения на ЭВМ.

На выбор студенту предлагается несколько видов проведения и оформления вычислений.

1 ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методы решения систем уравнений разделяют на две большие группы. К первой группе относят методы, которые называют точными, они позволяют найти точные значения неизвестных после выполнения конечного числа арифметических операций. Метод Гаусса является точным методом решения системы линейных уравнений. Ко второй группе относятся методы, которые не являются точными, их называют приближёнными, или численными или итерационными. Точное решение при использовании этих методов удается получить в результате бесконечного итерационного процесса.

1.1 Компактная схема Гаусса

Метод Гаусса (метод исключения неизвестных) состоит в том, что исходную систему линейных уравнений приводят последовательным исключением неизвестных к эквивалентной системе уравнений с треугольной матрицей:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \qquad x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_n = \beta_n, \end{cases} \tag{1}$$

решение которой находят по рекуррентным формулам:

$$x_n = \beta_n, \quad x_i = \beta_i - \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j, \tag{2}$$

где x_i – переменные, $i, j = n-1, n-2, \ldots, 1$ – индексы, α_{ij}, β_j – коэффициенты системы линейных уравнений [3].

Компактная схема Гаусса дает экономный способ записи вычислений и полностью соответствует традиционному методу Гаусса, изучаемому в курсе алгебры. Рассмотрим порядок составления схемы для системы четырёх уравнений с четырьмя неизвестными. Результаты вычислений удобно оформить в таблице 1.

Таблица 1 – Компактная схема Гаусса

№	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	a_{i6}
I	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}
	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}
	4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}
		1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	$a_{16} / a_{11} = b_{15}$
II	2		$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}$
	3		$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$	$a_{36}^{(1)}$
	4		$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(1)}$	$a_{45}^{(1)}$	$a_{46}^{(1)}$
			1	$b_{23}^{(1)}$	$b_{24}^{(1)}$	$b_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}/a_{22}^{(1)}=b_{26}^{(1)}$
III	3			$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$
	4			$a_{43}^{(2)}$	$a_{44}^{(2)}$	$a_{45}^{(2)}$	$a_{46}^{(2)}$
				1	$b_{34}^{(2)}$	$b_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}/a_{33}^{(2)}=b_{36}^{(2)}$
IV	4				$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$	$a_{46}^{(3)}$
V					1	$\mathbf{x}_4$	
				1		$\mathbf{x}_3$	
			1			$\mathbf{x}_2$	
		1				$\mathbf{x}_1$	

Порядок заполнения таблицы 1, прямой ход

1 Записываем коэффициенты данной системы в четырёх строках и пяти столбцах раздела I.

2 Суммируем все коэффициенты по строке и записываем сумму в столбце (столбец контроля), например $a_{16}=\sum_{j=1}^{5} a_{1j}$.

3 Делим все числа, стоящие в первой строке, на a_{11} и результаты $\boldsymbol{b_{1j}=a_{1j}/a_{11}}$ записываем в пятой строке раздела I.

4 Вычисляем $\sum_{j=1}^{5} b_{1j}$ и делаем проверку. Если вычисления ведутся постоянным знаком после запятой, то числа b_{16} и $\sum_{j=1}^{5} b_{1j}$ не должны отличаться более чем на единицу последнего разряда. В противном случае следует проверить действия пункта 3.

5 Вычисляем коэффициенты $a_{ij}^{(1)}$ (i =2, 3, 4; j=2, 3, 4, 5, 6): $\boldsymbol{a_{ij}^{(1)}=a_{ij}-a_{i1}b_{1j}}$.

6 Результаты записываем в первые три строки раздела II.

7 Делаем проверку. Сумма элементов каждой строки $\sum_{j=2}^{5} a_{ij}^{(1)}$ (i=2, 3, 4) не должна отличаться от $a_{i6}^{(1)}$ более чем на единицу последнего разряда (если все вычисления ведутся с постоянным числом знаков после запятой).

8 Делим все элементы первой строки раздела II на $a_{22}^{(1)}$ и результаты записываем в четвёртой строке раздела II. Делаем проверку как в пункте 4.

9 Вычисляем $a_{ij}^{(2)}$, $\boldsymbol{a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-a_{i2}^{(1)}}\mathrm{b}_{2j}^{(1)}$, ($i$=3, 4; j=3, 4, 5, 6). Делаем проверку, как в пункте 7.

10 Делим элементы первой строки раздела III на $a_{33}^{(2)}$ и находим числа $\boldsymbol{b_{3j}^{(2)}=a_{3j}^{(2)}/a_{33}^{(2)}}$. Все результаты записываем в третьей строке раздела III. Делаем проверку. Вычисляем $\boldsymbol{a_{4j}^{(3)}=a_{4j}^{(2)} - a_{43}^{(2)} b_{3j}^{(2)}}$. Результаты записываем в разделе IV.

Обратный ход

11 В разделе V записываем единицы на определенных местах, вычисляем $\mathbf{x_4}=\boldsymbol{a_{45}^{(3)}/a_{44}^{(3)}}$.

12 Для вычисления значений x_3, x_2, x_1 используются лишь строки разделов I, II, III, содержащие единицы. Так для вычисления x_3 умножаем x_4 на $b_{34}^{(2)}$ и получившееся произведение вычитаем из $b_{35}^{(2)}$. При этом единицы, расставленные в разделе V, помогают находить для x_i (i=3, 2, 1) соответствующие коэффициенты в отмеченных строках. Таким образом, $\mathbf{x_3}=\boldsymbol{b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)}}\mathbf{x_4}$.

13 Вычисляем x_2, и затем x_1, для чего используем элементы отмеченной строки раздела II: $\mathbf{x_2}=\boldsymbol{b_{25}^{(1)} - b_{24}^{(1)}}\mathbf{x_4} - \boldsymbol{b_{23}^{(1)}}\mathbf{x_3}$, $\mathbf{x_1}=\boldsymbol{b_{15} - b_{14}}\mathbf{x_4} - \boldsymbol{b_{13}}\mathbf{x_3} - \boldsymbol{b_{12}}\mathbf{x_2}$.

Компактная схема Гаусса оказывается особенно выгодной при одновременном решении нескольких систем, отличающихся лишь столбцами свободных членов, при вычислении обратной матрицы.

Решим с помощью компактной схемы Гаусса систему уравнений, все вычисления внесем в таблицу 2.

Пример

$$\begin{cases} 2x_1 - 3.5x_2 + 2.7x_3 - 8.2x_4 = 0.9, \\ x_1 + 2.8x_2 + 3.6x_3 + 2.4x_4 = 1.2, \\ x_1 + 2.5x_2 - 3.8x_3 - 2.6x_4 = 14, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4.8x_3 + 2.1x_4 = 10. \end{cases}$$

Следуя порядку действий, указанному в параграфе 1, получаем значения неизвестных: x_4=0,068976; x_3=-1,815417; x_2=0,964032; x_1=4,870672.

Проверка показывает, с какой точностью получен результат, погрешность вычислений не превосходит соответственно 0,0000029; 0,0000028; 0,000001; 0,000016 в первом, втором, третьем и четвертом уравнениях.

Таблица 2 – Пример оформления решения системы уравнений методом Гаусса

№	*i*	x_1	x_2	x_3	x_4	Свободные члены	Сумма	Проверка
I	1	2	-3,5	2,7	-8,2	0,9	-6,1	-6,1
	2	1	2,8	3,6	2,4	1,2	11	11
	3	1	2,5	-3,8	-2,6	14	11,1	11,1
	4	5	-6	4,8	2,1	10	15,9	15,9
		1	**-1,75**	**1,35**	**-4,1**	**0,45**	-3,05	-3,05
II	2		4,55	2,25	6,5	0,75	14,05	14,05
	3		4,25	-5,15	1,5	13,55	14,15	14,15
	4		2,75	-1,95	22,6	7,75	31,15	31,15
			1	**0,494505**	**1,428571**	**0,164835**	3,087912	3,087912
III	3			-7,251648	-4,571429	12,849451	1,026374	1,026374
	4			-3,30989	18,671429	7,296703	22,658242	22,658242
				1	**0,630399**	**-1,771935**	-0,141537	-0,141537
IV	4				20,757978	1,431793	22,189771	22,189771
					1	**0,068976**	1,068976	1,068976
V					1	**0,068976**		***0,0000029***
				1		**-1,815417**		***0,0000028***
			1			**0,964032**		***0,000001***
		1				**4,870672**		***0,000016***

1.2 Модификация Краута – Дулитла

Если учесть некоторые дополнительные возможности метода решения систем линейных уравнений, то можно составить схему вычислений, позволяющую ещё больше сократить записи промежуточных результатов по сравнению с компактной схемой Гаусса, представленной в таблице 3.

Порядок заполнения таблицы 3, прямой ход

1 Записываем коэффициенты системы a_{ij} для i=1, 2, 3, 4; j=1, 2, 3, 4, 5 в разделе I.

2 Суммируем коэффициенты по каждой строке и результаты заносим в столбец в качестве a_{i6} (i=1, 2, 3, 4).

3 При i=2, 3, 4 находим числа $m_{i1}=a_{i1}/a_{11}$ и записываем их в разделе II.

4 При j=2, 3, 4, 5, 6 вычисляем коэффициенты $a_{2j}^{(1)}$ по формуле $a_{2j}^{(1)}=a_{2j}-m_{21}a_{1j}$ и записываем их в разделе III.

5 Контроль: сумма $\sum_{j=2}^{5} a_{2j}^{(1)}$ не должна отличаться от $a_{26}^{(1)}$ более чем на единицу последнего разряда.

6 При i=3, 4 находим числа m_{i2}по формуле $m_{i2}=(a_{i2} - m_{i1}a_{12})/a_{22}^{(1)}$ и заносим в раздел IV.

7 При j=3, 4, 5 ,6 вычисляем коэффициенты $a_{3j}^{(2)}$ по формуле:

$a_{3j}^{(2)}=a_{3j} - m_{31}a_{1j} - m_{32}a_{2j}^{(1)}$ и записываем в раздел V.

8 Находим число $m_{43}=(a_{43} - m_{41}a_{13} - m_{42}a_{23}^{(1)})/a_{33}^{(2)}$ и записываем его в раздел VI.

9 При j=4,5,6 находим коэффициенты $a_{4j}^{(3)}$ по формуле:

$a_{4j}^{(3)}=a_{4j}- m_{41}a_{1j} - m_{42}a_{2j}^{(1)} - m_{43}a_{3j}^{(2)}$ и записываем в раздел VII.

10 Контроль: сравниваем сумму $a_{44}^{(3)} + a_{45}^{(3)}$ с числом $a_{46}^{(3)}$.

Обратный ход осуществляется аналогично компактной схеме Гаусса. Находим неизвестные x_4, x_3, x_2, x_1по формулам:

$$\begin{aligned}
&a_{44}^{(3)}x_4=a_{45}^{(3)},\\
&a_{33}^{(2)}x_3+a_{34}^{(2)}x_4= a_{35}^{(2)},\\
&a_{22}^{(1)}x_2+ a_{23}^{(1)}x_3+ a_{24}^{(1)}x_4= a_{25}^{(1)},\\
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4= a_{15}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Вычисления по формулам (3) ведутся без промежуточных записей, результаты записываются в разделе VIII таблицы 3.

Таблица 3 – Схема Краута – Дулитла

№	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	a_{i6}
I	a_{11} a_{21} a_{31} a_{41}	a_{12} a_{22} a_{32} a_{42}	a_{13} a_{23} a_{33} a_{43}	a_{14} a_{24} a_{34} a_{44}	a_{15} a_{25} a_{35} a_{45}	a_{16} a_{26} a_{36} a_{46}
II	m_{21} m_{31} m_{41}					
III		$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}$
IV		m_{32} m_{42}				
V			$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$

Продолжение таблицы3

VI			m_{43}			
VII				$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$	$a_{46}^{(3)}$
VIII				1	x_4	
			1		x_3	
		1			x_2	
	1				x_1	

Количество арифметических операций в приведенной схеме и в схеме компактного метода Гаусса одинаково, поскольку операции выполняются те же самые, хотя и в другом порядке, но записи промежуточных вычислений значительно сокращаются.

Решим предыдущую систему с помощью схемы Краута – Дулитла (систему уравнений), результаты вычислений занесем в таблицу 4.

Таблица 4 – Пример оформления решения системы уравнений методом Краута – Дулитла

№	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	Сумма
I	2	-3,5	2,7	-8,2	0,9	-6,1
	1	2,8	3,6	2,4	1,2	11
	1	2,5	-3,8	-2,6	14	11,1
	5	-6	4,8	2,1	10	15,9
II	0,5					
	0,5					
	2,5					
III		4,55	2,25	6,5	0,75	14,05
IV		0,934066				
		0,604396				
V			-7,2516483	-4,5714285	12,84945	1,0263
VI			0,4564327			
VII				20,757978	1,431793	22,189
VIII				1	0,068976	
			1		-1,815417	
		1			0,964032	
	1				4,870726	

Система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 3.5x_2 + 2.7x_3 - 8.2x_4 = 0.9, \\ x_1 + 2.8x_2 + 3.6x_3 + 2.4x_4 = 1.2, \\ x_1 + 2.5x_2 - 3.8x_3 - 2.6x_4 = 14, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4.8x_3 + 2.1x_4 = 10. \end{cases}$ имеет решение:

x_4=0,068976; x_3=-1,815417; x_2=0,964032; x_1=4,870672.

1.3 Схема Гаусса с выбором главного элемента

Рассмотрим линейную систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{nn+1}. \end{cases} \tag{4}$$

Выпишем расширенную матрицу коэффициентов данной системы:

$$\text{M}=\begin{pmatrix} a_{11}\ldots a_{1q}\ldots a_{1n}a_{1n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}\ldots a_{pq}\ldots a_{pn}a_{pn+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nq}\ldots a_{nn}a_{nn+1} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Среди элементов матрицы a_{ij} $(i, j$=1, ..., n) выберем наибольший по модулю, называемый главным элементом. Пусть им будет, например, элемент a_{pq}. Строка с номером p, содержащая главный элемент, называется главной строкой. Далее вычисляем множители $m_i=a_{iq}/a_{pq}$ для всех $i \neq p$. Затем преобразуем матрицу следующим образом: из каждой i-й неглавной строки вычитаем почленно главную строку, умноженную на m_i. В результате получим матрицу, у которой все элементы q-го столбца, за исключением a_{pq}, равны нулю. Отбрасывая этот столбец и главную строку, получим новую матрицу M_I с меньшим на единицу числом строк и столбцов.

Над матрицей M_1 повторяем те же операции, после чего получим матрицу M_2 и т. д. Такие преобразования продолжаем до тех пор, пока не получим матрицу, содержащую одну строку из двух элементов, которую считаем тоже главной. Затем объединяем все главные строки, начиная с последней. После некоторой перестановки они образуют треугольную матрицу, эквивалентную исходной. На этом заканчивается этап вычислений, называемый прямым ходом. Решив систему с полученной треугольной матрицей коэффициентов, найдем последовательно значения неизвестных x_i (i=1, 2, ..., n). Этот этап вычислений называется обратным ходом.

Все описанные вычисления можно расположить в одной таблице аналогично компактной схеме Гаусса [7] и на каждом этапе проводить контроль вычислений. Смысл выбора главного элемента состоит в том, чтобы сделать возможно меньшими числа m_i и тем самым уменьшить погрешность вычислений. Поэтому при реализации метода Гаусса на ЭВМ обычно используют схему с выбором главного элемента.

Результаты всех вычислений удобно записывать в таблицу 5.

Прямой ход

1 Записываем в первом разделе таблицы коэффициенты системы a_{ij} (i=1, 2, 3, 4; j=1, 2, 3, 4, 5).

2 В столбце a_{i6} записываем суммы коэффициентов по каждой строке.

3 Находим главный элемент, подчёркиваем его.

4 Находим числа m_i по формуле $m_i=a_{iq}/a_{pq}$, где a_{pq} – главный элемент, и результаты записываем в столбце m_i раздела I.

5 Из каждой i-ой строки вычитаем главную строку, умноженную на соответствующий элемент m_i.

6 Контроль: находим суммы $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ и сравниваем с a_{i6}.

Решим с помощью данного метода систему уравнений. Результаты всех вычислений запишем в таблицу 5.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3.5x_2 + 2.7x_3 - 8.2x_4 = 0.9, \\ x_1 + 2.8x_2 + 3.6x_3 + 2.4x_4 = 1.2, \\ x_1 + 2.5x_2 - 3.8x_3 - 2.6x_4 = 14, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4.8x_3 + 2.1x_4 = 10. \end{cases}.$$

Порядок действий, прямой ход

1 Записываем в первом разделе таблицы коэффициенты системы a_{ij} (i=1, 2, 3, 4; j=1, 2, 3, 4, 5).

2 В столбце a_{i6} записываем суммы коэффициентов в каждой строке.

3 Находим главный элемент. В данной системе им будет коэффициент a_{14}= -8,2 (p=1, q=4), выделяем этот элемент.

4 Находим числа m_i (i=2, 3, 4). Для этого делим элементы столбца a_{i4} на a_{14} и результаты записываем в столбце m_i раздела I:

$m_2=\dfrac{a_{24}}{a_{14}}=\dfrac{2{,}4}{-8{,}2}$=-0,292683 ; $m_3=\dfrac{a_{34}}{a_{14}}=\dfrac{-2{,}6}{-8{,}2}$=0,3170732;

$m_4=\dfrac{a_{44}}{a_{14}}=\dfrac{2{,}1}{-8{,}2}$=-0,256098.

5 Вычисляем коэффициенты новой матрицы. Из каждой i-ой (i=2, 3, 4) строки вычитаем главную строку, умноженную на соответствующий элемент m_i. Так, при i=2 будем иметь:

$a_{21}^{(1)}=a_{21}-m_2a_{11}=1-(-0{,}292683)*2=1{,}5853659;$

$a_{22}^{(1)}=a_{22}-m_2a_{12}=2{,}8-(-0{,}292683)*(-3{,}5)=1{,}7756098;$

$a_{23}^{(1)}=a_{23}-m_2a_{13}=3{,}6-(-0{,}292683)*2{,}7=4{,}3902439;$

$a_{24}^{(1)}=a_{24}-m_2a_{14}=2{,}4-(-0{,}292683)*(-8{,}2)=0;$

$a_{25}^{(1)}=a_{25}-m_2a_{15}=1{,}2-(-0{,}292683)*0{,}9=1{,}4634146;$

$a_{26}^{(1)}=a_{26}-m_2a_{16}=11-(-0{,}292683)*(-6{,}1)=9{,}2146341.$

При i=3, 4 продолжаем вычисления аналогичным образом. Результаты записываем в разделе II.

6 Контроль: находим суммы $\sum\limits_{j-1}^{5}a_{ij}^{(1)}$ и сравниваем с $a_{i6}^{(1)}$, например, $\sum\limits_{j=1}^{5}a_{2j}^{(1)}=9{,}2146341=a_{i6}^{(1)}$ и т. д.

7 Выбираем главный элемент, выделяем его. В нашем случае это будет $a_{42}^{(1)}$= -6,8963415.

8 Делим элементы столбца a_{i2} на $a_{42}^{(1)}$. Получаем числа:

$m_2^{(1)}=\dfrac{a_{22}^{(1)}}{a_{42}^{(1)}}=\dfrac{1{,}7756098}{-6{,}8963415}=-0{,}257471;$

$m_3^{(1)}=\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{42}^{(1)}}=\dfrac{3{,}6097561}{-6{,}8963415}=-0{,}523431.$

9 Вычисляем коэффициенты $a_{ij}^{(2)}$. Для этого из каждой i-ой (i=2, 3) строки вычитаем главную строку, умноженную на соответствующий элемент $m_i^{(1)}$. Так, при i=2 имеем:

$a_{21}^{(2)}=a_{21}^{(1)}-m_2^{(1)}a_{41}^{(1)}=1{,}5853659-(-0{,}257471)*5{,}5121951=3{,}0045977;$

$a_{22}^{(2)}=a_{22}^{(1)}-m_2^{(1)}a_{42}^{(1)}=1{,}7756098-(-0{,}257471)*(-6{,}8963415)=0;$

$a_{23}^{(2)}=a_{23}^{(1)}-m_2^{(1)}a_{43}^{(1)}=4{,}3902439-(-0{,}257471)*5{,}4914634=5{,}8041379;$

$a_{25}^{(2)}=a_{25}^{(1)}-m_2^{(1)}a_{45}^{(1)}=1{,}4634146-(-0{,}257471)*10{,}2304878=4{,}0974713;$

$a_{26}^{(2)}=a_{26}^{(1)}-m_2^{(1)}a_{46}^{(1)}=9{,}2146341-(-0{,}257471)*14{,}3378049=12{,}90620.$

При i=3 вычисления ведутся аналогично. Результаты записываем в разделе III, оставляя свободными столбцы a_{i2} и a_{i4}.

10 Контроль: сумма $\sum_{j=1}^{5} a_{ij}^{(2)}$ (i=2,3) должна равняться $a_{i6}^{(2)}$; условие выполняется.

11 Выбираем главный элемент, выделяем его. В нашем случае это будет $a_{23}^{(2)}$=5,8041379.

12 Находим $m_3^{(2)} = \dfrac{a_{33}^{(2)}}{a_{23}^{(2)}} = \dfrac{-1{,}7816976}{5{,}8041379}$ = -0,30697. Записываем в столбец m_i раздела III.

13 Вычисляем коэффициенты $a_{ij}^{(3)}$. Для этого из третьей строки вычитаем главную строку, умноженную на соответствующий элемент $m_3^{(2)}$. Получаем:

$a_{31}^{(3)} = a_{31}^{(2)} - m_3^{(2)} a_{21}^{(2)}$ = 3,2511052 – (-0,30697)*3,2511052=4,1734273;

$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - m_3^{(2)} a_{23}^{(2)}$ = -1,7816976 – (-0,30697)*5,8041379=0;

$a_{35}^{(3)} = a_{35}^{(2)} - m_3^{(2)} a_{25}^{(2)}$ = 19,0695844 – (-0,30697)*4,0974713=20,3273862;

$a_{36}^{(3)} = a_{36}^{(2)} - m_3^{(2)} a_{26}^{(2)}$ = 20,5389920 – (-0,30697)* 2,9062069=24,5008135.

14 Контроль вычислений: $a_{36}^{(3)} + a_{35}^{(3)} = 4{,}1734273 + 20{,}3273862 = 24{,}5008135 = a_{36}^{(3)}$.

15 Выписываем главные строки каждого раздела. Получаем систему, эквивалентную данной системе уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3{,}5x_2 + 2{,}7x_3 - 8{,}2x_4 = 0{,}9 \\ 5{,}51x_1 - 6{,}9x_2 + 5{,}49x_3 = 10{,}23 \\ 3x_1 + 5{,}8x_3 = 4{,}1 \\ 4{,}17x_1 = 20{,}33 \end{cases}$$

Обратный ход

16 Результаты вычислений при реализации обратного хода записываем в разделе V:

x_1=20,3273862/4,1734273 = 4,8706698;

x_2=(10,23048 – 5,51219*4,87066 – 5,49146*(-1,81541))/(-6,89634) = 0,964032;

x_3=(4,0974713 – 3,0045977*4,8706698)/ 5,8041379 = -1,8154172;

x_4=(0,9 – 2*4,8706698+3,5*0,9640325 – 2,7*(-1,8154172))/(8,2) =0,0689755.

Таблица 5 – Пример оформления решения системы уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента

№	i	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	a_{i6}	
I	1		2	-3,5	2,7	**-8,2**	0,9	-6,1	
	2	-0,29268	1	2,8	3,6	2,4	1,2	11	
	3	0,31707	1	2,5	-3,8	-2,6	14	11,1	
	4	-0,25609	5	-6	4,8	2,1	10	15,9	
II	2	-0,25741	1,585365	1,775609	4,3902439	0	1,46341	9,214634	9,21463
	3	-0,52343	0,365853	3,609756	-4,656097	0	13,7146	13,03414	13,0341
	4		5,512195	**-6,89634**	5,491463	0	10,2304	14,33780	14,3378
III	2		3,004597	0	**5,804137**		4,09747	12,90620	12,9062
	3	-0,30697	3,251105	0	-1,781697		19,0695	20,53899	20,5389
IV	3		**4,17342**		0		20,3273	24,50081	24,5008
V	1		**4,8706698**				x_1		
	2			**0,964032**			x_2		
	3				**-1,8154172**		x_3		
	4					**0,0689755**	x_4		

Исходная система имеет решение: x_4=0,0689755; x_3=-1,8154172; x_2=0,964032; x_1=4,8706698.

1.4 Схема Халецкого

Рассмотрим систему линейных уравнений, записанную в матричном виде:

$$Ax=b, \tag{6}$$

где $A=(a_{ij})$ – квадратная матрица (i, j=1, 2,..., n); $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} a_{1n+1} \\ \dots \\ a_{nn+1} \end{pmatrix}$ – векторы-столбцы.

Представим матрицу А в виде произведения A=BC, где $B=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \dots 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \dots 0 \\ \dots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} \dots b_{nn} \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Тогда элементы b_{ij} и c_{ij} будут определяться по формулам:

$$\left.\begin{aligned} b_{i1} &= a_{i1}, \\ b_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} c_{kj}.(i \geq j > 1) \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} c_{i1} &= \frac{a_{1j}}{b_{11}}, \\ c_{ij} &= \frac{1}{b_{ii}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj}).(1 < i < j) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Искомый вектор x может быть вычислен из цепи уравнений By=b, Cx=y.Так как матрицы B и C треугольные, то данные системы легко решаются, а именно:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{1n+1} / b_{11}, \\ y_i &= a_{1n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} y_k (i > 1). \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} x_n &= y_n, \\ x_i &= y_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik} x_k (i < n). \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Данная схема вычислений называется схемой ***Халецкого*** [1; 2]. В схеме Халецкого применяется обычный контроль с помощью сумм. Рассмотрим порядок составления схемы для системы четырёх уравнений с четырьмя неизвестными. Все результаты вычислений будем записывать в таблицу 6.

Порядок заполнения таблицы 6, прямой ход

1 В первый раздел таблицы 6 выписываем матрицу коэффициентов системы, её свободные члены и контрольные суммы.

2 Элементы столбца x_1 из раздела I переносим в столбец x_1 из раздела II, так как $b_{i1}=a_{i1}$ (i=1, 2, 3, 4).

3 Вычисляем элементы первой строки раздела II. Для этого делим все элементы первой строки раздела I на элемент $a_{11}=b_{11}$.

4 Заполняем столбец x_2 раздела II, начиная со второй строки. Пользуясь вышеприведенными формулами, определяем b_{j2}.

5 Заполняем вторую строку раздела II, определяя c_{2j} для j=3, 4, 5, 6.

6 Заполняем столбец x_3, вычисляя его элементы b_{33} и b_{43}.

7 Аналогично продолжаем процесс до тех пор, пока не будет заполнен раздел II, таким образом, заполнение раздела II происходит способом «ёлочки»: столбец – строка, столбец – строка и т. д.

8 Определяем y_i и x_i (i=1, 2, 3, 4) по соответствующим формулам и записываем в разделе III.

9 Текущий контроль осуществляем с помощью столбца $\sum$, над которым производим те же действия, что и над столбцом свободных членов.

Таблица 6 – Схема Халецкого

№	x1	x2	x3	x4		
I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}
	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}
II	b_{11} | 1	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}
	b_{21}	b_{22} | 1	c_{24}	c_{24}	c_{25}	c_{26}
	b_{31}	b_{32}	b_{33} | 1	c_{34}	c_{35}	c_{36}
	b_{41}	b_{42}	b_{43}	b_{44} | 1	c_{45}	c_{46}
III	1				y1	x1
		1			y2	x2
			1		y3	x3
				1	y4	x4

Решим систему уравнений, используя схему Халецкого. Результаты вычислений запишем в таблицу 7.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3.5x_2 + 2.7x_3 - 8.2x_4 = 0.9, \\ x_1 + 2.8x_2 + 3.6x_3 + 2.4x_4 = 1.2, \\ x_1 + 2.5x_2 - 3.8x_3 - 2.6x_4 = 14, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4.8x_3 + 2.1x_4 = 10. \end{cases}$$

Порядок заполнения таблицы 7, прямой ход

1 В первый раздел таблицы 7 выписываем матрицу коэффициентов системы, её свободные члены и контрольные суммы.

2 Элементы столбца x_1 из раздела I переносим в столбец x_1 из раздела II, так как $b_{i1}=a_{i1}$ (i=1, 2, 3, 4).

3 Вычисляем элементы первой строки раздела II. Для этого делим все элементы первой строки раздела I на элемент $a_{11}=b_{11}$, в нашем случае на 2. Имеем:

$$c_{12}=\frac{-3,5}{2}=-1,75; c_{13}=\frac{2,7}{2}=1,35; c_{14}=\frac{-8,2}{2}=-4,1; c_{15}=\frac{0,9}{2}=0,45; c_{16}=\frac{-6,1}{2}=-3,05;$$

4 Заполняем столбец x_2 раздела II, начиная со второй строки. Пользуясь формулами (6), определяем b_{j2}:

$$b_{22}=a_{22}-b_{21}c_{12}=2,8-1*(-1,75)=4,55; \qquad b_{32}=a_{32}-b_{31}c_{12}=2,5-1*(-1,75)=4,25;$$
$$b_{42}=a_{42}-b_{41}c_{12}=-6-5*(-1,75)=4,55.$$

5 Заполняем вторую строку раздела II, определяя c_{2j} для j=3,4,5,6

$$c_{23} = \frac{1}{b_{22}}(a_{23} - b_{21}c_{13}) = \frac{1}{4{,}55}(3{,}6 - 1*1{,}35) = 0{,}494505495;$$

$$c_{24} = \frac{1}{b_{22}}(a_{24} - b_{21}c_{14}) = \frac{1}{4{,}55}(2{,}4 - 1*(-4{,}1)) = 1{,}428571;$$

$$c_{25} = \frac{1}{b_{22}}(a_{25} - b_{21}c_{15}) = \frac{1}{4{,}55}(1{,}2 - 1*0{,}45) = 0{,}164835;$$

6 Заполняем столбец x_3, вычисляя его элементы b_{33} иb_{43}. Аналогично продолжаем процесс до тех пор, пока не будет заполнен раздел II.

7 Определяем y_i и x_i (i=1,2,3,4) по формулам (7), записываем их в раздел III:

$$y_1 = a_{15} / b_{11} = 0{,}9/2 = 0{,}45;$$

$$y_2 = (a_{25} - b_{21}y_1)/b_{22} = (1{,}2 - 1*0{,}45)/4{,}55 = 0{,}164835;$$

$$y_3 = (a_{35} - b_{31}y_1 - b_{32}y_2)/b_{33} = (14 - 1*0{,}45 - 4{,}25*0{,}164835)/(-7{,}25165) = -1{,}77193;$$

$$y_4 = (a_{45} - b_{41}y_1 - b_{42}y_2 - b_{43}y_3)/b_{44} = 0{,}068976;$$

$$x_4 = y_4 = 0{,}06876;$$

$$x_3 = y_3 - c_{34}x_4 = -1{,}77193 - 0{,}630398*0{,}068976 = -1{,}815416848;$$

$$x_2 = y_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4 = 0{,}164835 - 0{,}494505495*(-1{,}81541684) - 1{,}428571*0{,}06876 = 0{,}964032;$$

$$x_1 = y_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3 - c_{14}x_4 = 0{,}45 - (-1{,}75)*0{,}964032 - 1{,}35*(-1{,}81541684) - (-4{,}1)*0{,}06876 = 4{,}87.$$

Система имеет решение: x_4=0,0689755; x_3=-1,8154172; x_2=0,964032; x_1=4,8706698.

Таблица 7 – Пример оформления решения системы уравнений по схеме Халецкого

№	x_1	x_2	x_3	x_4			
I	2	-3,5	2,7	-8,2	0,9	-6,1	
	1	2,8	3,6	2,4	1,2	11	
	1	2,5	-3,8	-2,6	14	11,1	
	5	-6	4,8	2,1	10	15,9	
II	2 **1**	-1,75	1,35	-4,1	0,45	-3,05	-3,05
	1	4,55 **1**	0,494505	1,428571	0,164835	3,087912	3,087912
	1	4,25	-7,25165 **1**	0,630398	-1,77193	-0,14154	-0,14154
	5	2,75	-3,30989011	20,757978 **1**	0,068976	1,068976	1,068976
III	1				0,45	4,870671	
		1			0,164835	0,964032	
			1		-1,77193	-1,81541	
				1	0,068976	0,068976	

Основные вопросы теории к первой главе

1 Теоретические основы метода решения системы линейных уравнений Гаусса (описать прямой и обратный ход решения системы).
2 Как производится контроль вычислений на каждом из этапов решения? Какие числа называют невязками?
3 Компактная схема Гаусса, формулы и правила заполнения таблицы.
4 Модификация Краута – Дулитла и ее реализация на практике.
5 Схема Гаусса с выбором главного элемента, ее особенности.
6 Схема Халецкого и ее реализация.
7 Погрешность вычислений метода Гаусса и его модификаций.

Задания для лабораторно-практической работы

1 Найдите решение системы линейных уравнений, используя компактную схему Гаусса или схему Краута – Дулитла.
2 Найдите решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса с выбором главного элемента.
3 Найдите решение системы линейных уравнений, используя схему Халецкого.
4 Найдите матрицу, обратную матрице из коэффициентов данной системы, используя компактную схему Гаусса.

1 $$\begin{cases} 7{,}5x_1+2{,}6x_2+1{,}3x_3-8{,}1x_4=5{,}7 \\ 6{,}4x_1+3{,}3x_2-2{,}4x_3+1{,}7x_4=-2{,}1 \\ 0{,}1x_1-2{,}3x_2+0{,}8x_3-5{,}7x_4=4{,}6 \\ 8{,}2x_1+0{,}1x_2-5{,}3x_3-7{,}6x_4=5{,}1 \end{cases}$$

2 $$\begin{cases} 6{,}5x_1+3{,}8x_2-4{,}1x_3+1{,}2x_4=9{,}92 \\ 7{,}1x_1-2{,}7x_2-1{,}4x_3+1{,}4x_4=6{,}95 \\ -1{,}8x_1-x_2+4{,}3x_3+1{,}3x_4=7{,}91 \\ 1{,}5x_1-3{,}4x_2+7{,}8x_3-1{,}8x_4=15{,}09 \end{cases}$$

3 $$\begin{cases} -3x_1+2x_2-4x_3+5x_4=12{,}29 \\ 2x_1-x_2+x_3-11{,}5x_4=-12{,}69 \\ x_1-3x_2-2x_3+2{,}7x_4=13{,}10 \\ 5x_1-x_2+3x_3+7{,}8x_4=56{,}93 \end{cases}$$

4 $$\begin{cases} 6x_1-x_2-x_3+11x_4=26{,}25 \\ -x_1+6x_2-x_3+5{,}7x_4=39{,}59 \\ -x_1-x_2+6x_3+3{,}4x_4=46{,}53 \\ 2x_1-x_2+3x_3-14x_4=10{,}22 \end{cases}$$

5 $$\begin{cases} 0{,}7x_1-x_2+3x_3+4x_4=0{,}09 \\ x_1+x_2-8x_3+24x_4=10{,}11 \\ 3x_1-0{,}5x_2-2{,}4x_3+8{,}75x_4=1{,}01 \\ 8x_1+7x_2-0{,}7x_3+10{,}1x_4=0{,}92 \end{cases}$$

6 $$\begin{cases} x_1-6x_2+12x_3-5x_4=7{,}12 \\ -3x_1+7x_2+2x_3-x_4=7{,}89 \\ 6x_1-5x_2-4x_3+x_4=9{,}38 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=11{,}19 \end{cases}$$

7 $$\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+5x_4=7{,}94 \\ -3x_1+2x_2-x_3+3x_4=1{,}86 \\ -2x_1+3x_2+2x_3=-3{,}89 \\ 4x_1-x_2-4x_3-6x_4=15{,}54 \end{cases}$$

8 $$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=7{,}44 \\ 3x_1+2x_2-4x_3+9x_4=0{,}87 \\ 3x_1-2x_2-2x_3+3x_4=4{,}85 \\ 2x_2+x_3-5x_4=9{,}45 \end{cases}$$

9 $\begin{cases} 2{,}5x_1-0{,}12x_2+2{,}2x_3+0{,}2x_4=-1{,}2 \\ 1{,}2x_1+3x_2+x_3-1{,}5x_4=0{,}1 \\ 0{,}2x_1-0{,}4x_2+2{,}5x_3+0{,}7x_4=-0{,}4 \\ 0{,}3x_1+0{,}7x_2-0{,}8x_3+3{,}7x_4=0{,}6 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+2x_4=3{,}31 \\ -x_1+2x_2+2x_3+x_4=0{,}30 \\ 3x_1-x_2+x_4=-0{,}92 \\ 2x_1-2x_2+x_3-12x_4=0{,}02 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 0{,}1x_1-3{,}2x_2+2{,}3x_3+2{,}3x_4=10 \\ 3{,}4x_1+3{,}2x_2+3x_3-0{,}9x_4=9 \\ 3{,}7x_1+2{,}7x_2-3{,}5x_3+6{,}2x_4=9{,}3 \\ x_1-2{,}3x_2-3{,}1x_3-0{,}7x_4=17 \end{cases}$

12 $\begin{cases} 2{,}3x_1+3{,}2x_2-0{,}4x_3+0{,}9x_4=3{,}2 \\ 2x_1-2x_2+3{,}4x_3-x_4=7{,}1 \\ x_1-2{,}5x_2+4{,}7x_3-8{,}1x_4=9{,}2 \\ 0{,}4x_1+2{,}6x_3-2{,}5x_4=6{,}3 \end{cases}$

13 $\begin{cases} -x_1+2{,}7x_2+4x_3+x_4=12 \\ 2x_1-3{,}2x_2-2{,}4x_3+1{,}4x_4=11 \\ 3x_1-4{,}2x_2-4{,}2x_3+4{,}1x_4=1{,}2 \\ 2x_1+3x_2-2{,}9x_3+18x_4=0{,}71 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 2x_1+0{,}5x_2+2{,}7x_3-8{,}2x_4=3{,}9 \\ x_1+2{,}9x_2+3{,}6x_3+2{,}4x_4=1{,}4 \\ -x_1+2{,}5x_2-4{,}8x_3-2{,}6x_4=2{,}4 \\ 5x_1-2x_2+4{,}8x_3+3{,}6x_4=10 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 8{,}3x_1+2{,}4x_2-x_3+2x_4=8{,}3 \\ 2{,}5x_1-3{,}2x_2+3x_3-x_4=9{,}2 \\ -x_1+2x_2+3{,}2x_3+4x_4=1 \\ 2x_1+3x_2-x_3+2{,}1x_4=5 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 7{,}5x_1-2{,}8x_2+3{,}4x_3-x_4=10 \\ 8x_1+2{,}9x_2-4{,}3x_3+9x_4=9 \\ 4x_1+2{,}7x_2+x_3-8x_4=11 \\ 2x_1-3{,}2x_2-3x_3+9x_4=2{,}99 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2{,}3x_1-8{,}7x_2+4{,}9x_3+5x_4=19 \\ 3{,}1x_1+3{,}2x_2-2{,}2x_3-x_4=0{,}9 \\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4=6 \\ x_1+x_2+3x_3+0{,}2x_4=7 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 4x_1+2x_2+5x_3+11x_4=19 \\ 0{,}8x_1-3x_2-4x_3+11{,}2x_4=12 \\ 9x_1+9x_2-3x_3-0{,}4x_4=0{,}9 \\ x_1+1{,}8x_2+3{,}2x_3-0{,}6x_4=2{,}8 \end{cases}$

19 $\begin{cases} 2x_1-3x_2+6{,}2x_3+2{,}8x_4=1{,}9 \\ 3{,}1x_1+2{,}4x_2-7{,}8x_3-6{,}4x_4=2{,}8 \\ 4x_1+4x_2+2{,}9x_3-7{,}5x_4=9{,}1 \\ 6{,}4x_1+2{,}7x_2-0{,}39x_3-9{,}2x_4=2{,}8 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 6{,}2x_1+2x_2-3x_3+4{,}2x_4=2{,}7 \\ 2{,}1x_1+3{,}2x_2-0{,}9x_3+x_4=3{,}2 \\ 9x_1+2{,}3x_2+8{,}1x_3+9x_4=13 \\ 0{,}5x_1-0{,}8x_2-3{,}1x_3-4{,}1x_4=5{,}6 \end{cases}$

2 ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

При большом числе неизвестных в системе любая из рассмотренных схем метода Гаусса становится весьма сложной. В этих условиях для нахождения решений системы удобнее пользоваться итерационными методами решения систем линейных уравнений.

2.1 Метод простой итерации

Пусть дана система линейных уравнений в матричной форме:

$$AX = B \tag{9}$$

Получим эквивалентную ей систему:

$$X = \alpha X + \beta, \tag{10}$$

в развернутом виде:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}, \end{cases} \tag{11}$$

причем любое $(k + 1)$ приближение вычисляется по формуле:

$$X^{(\kappa+1)} = \alpha X^{(\kappa)} + \beta. \tag{12}$$

Запишем формулы приближений в развернутом виде:

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = \beta_i, \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i^{(k)}. \end{cases} \tag{13}$$

Приведем достаточное условие сходимости метода итераций.

Теорема: процесс итерации для приведенной линейной системы $X = \alpha X + \beta$, сходится к единственному ее решению, если какая-нибудь каноническая норма матрицы α меньше единицы [2; 6].

Следствие 1. Процесс итерации для системы $X = \alpha X + \beta$, сходится, если:

1) $\|\alpha\|_m = \max\limits_i \sum\limits_j |\alpha_{ij}| < 1$ (m-норма);

2) $\|\alpha\|_l = \max\limits_j \sum\limits_i |\alpha_{ij}| < 1$ (l-норма);

3) $\|\alpha\|_k = \sqrt{\sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2} < 1$ (k-норма или евклидова норма).

Следствие 2. Для системы $AX = B$ процесс итерации сходится, если диагональные коэффициенты для каждой строки (или столбца) превышают сумму модулей недиагональных элементов этой строки (или столбца) [2; 7].

Рассмотрим пример решения системы методом простой итерации:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_3 + x_4 = -1{,}68 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 9x_4 = 0{,}34 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -3{,}98 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4{,}87 \end{cases}$$

Приведем систему к виду удобному для итерации:

$$\begin{cases} 34x_1 = 2x_2 - 29x_3 + 2x_4 - 12{,}1 \\ 18x_2 = 5x_1 - 5x_3 - 3x_4 - 14{,}9 \\ 13x_3 = 5x_1 + 2x_2 - 3x_4 - 37{,}94 \\ 9x_4 = -x_1 - 2x_2 + x_3 + 0{,}34 \end{cases}$$

Выразим неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}05882x_2 - 0{,}85294x_3 + 0{,}05882x_4 - 0{,}35588 \\ x_2 = 0{,}27777x_1 - 0{,}27777x_3 - 0{,}16666x_4 - 0{,}82777 \\ x_3 = 0{,}38461x_1 + 0{,}15384x_2 - 0{,}23076x_4 - 2{,}91846 \\ x_4 = -0{,}11111x_1 - 0{,}22222x_2 + 0{,}11111x_3 + 0{,}03777 \end{cases}$$

Вычисления удобно оформить в виде таблицы 8.

Таблица 8 – Метод простой итерации

	x1	x2	x3	x4	β
α	-	0,05882	-0,85294	0,05882	-0,35588
	0,27777	-	-0,27777	-0,16666	-0,82777
	0,38461	0,15384	-	-0,23076	-2,91846
	-0,11111	-0,22222	0,11111	-	0,03777
0	$x_1^{(0)}$	$x_2^{(0)}$	$x_3^{(0)}$	$x_4^{(0)}$	**1**

Продолжение таблицы 8

1	$x_1^{(1)}$	$x_2^{(1)}$	$x_3^{(1)}$	$x_4^{(1)}$	**1**
2	$x_1^{(2)}$	$x_2^{(2)}$	$x_3^{(2)}$	$x_4^{(2)}$	**1**
…	…	…	…	…	…

1-й шаг таблицы вычисляется по формулам:

$$x_1^{(1)} = 0{,}05882 \cdot x_2^{(0)} - 0{,}85294 \cdot x_3^{(0)} + 0{,}05882 \cdot x_4^{(0)} - 0{,}35588 \cdot 1 = 2{,}086923472$$
$$x_2^{(1)} = 0{,}27777 \cdot x_1^{(0)} - 0{,}27777 \cdot x_3^{(0)} - 0{,}16666 \cdot x_4^{(0)} - 0{,}82777 \cdot 1 = 0{,}122256902$$
$$x_3^{(1)} = 0{,}38461 \cdot x_1^{(0)} + 0{,}15384 \cdot x_2^{(0)} - 0{,}23076 \cdot x_4^{(0)} - 2{,}91846 \cdot 1 = 3{,}191394949$$
$$x_4^{(1)} = -0{,}11111 \cdot x_1^{(0)} - 0{,}22222 \cdot x_2^{(0)} + 0{,}11111 \cdot x_3^{(0)} + 0{,}03777 \cdot 1 = 0{,}063011214$$

Продолжая аналогичные вычисления, получим приближенное решение системы линейных уравнений. Вычисления представлены в таблице 9.

Таблица 9 – Пример оформления решения системы уравнений по методу простой итерации

	X_1	X_2	X_3	X_4	β
	-	0,05882	-0,85294	0,05882	-0,35588
α	0,27777	-	-0,27777	-0,16666	-0,82777
	0,38461	0,15384	-	-0,23076	-2,91846
	-0,11111	-0,22222	0,11111	-	0,03777
0	-0,35588	-0,82777	-2,91846	0,03777	1
1	2,086923472	-0,122256902	-3,191394949	-0,063011214	1
2	2,355290937	0,648889957	-2,120075897	-0,521536031	1
3	1,459908494	0,50227184	-1,792416667	-0,603684335	1
4	1,166978789	0,176238391	-2,140388897	-0,435210697	1
5	1,454510555	0,163449737	-2,342086553	-0,368875319	1
6	1,629696172	0,288287539	-2,248773919	-0,420391705	1
7	1,55441886	0,319615119	-2,15030281	-0,457230069	1
8	1,470104768	0,277492502	-2,165934962	-0,444886496	1
9	1,481686452	0,256357539	-2,207691551	-0,427894758	1
…	…	…	…	…	…
34	**1,507847421**	**0,273519161**	**-2,196168399**	**-0,434564673**	1

Система имеет приближенное решение: x_4=-0,434564673; x_3=-2,196168399; x_2=0,273519161; x_1=1,507847421, найденное на тридцать четвертом шаге.

2.2 Метод Зейделя

Одним из самых распространенных итерационных методов, отличающихся простотой и легкостью программирования, является метод Гаусса – Зейделя [4; 8]. Он являет собой некоторую модификацию метода итераций. Основная его идея заключается в том, что при вычислении (k+1)-го приближения неизвестной x_i учитывается уже вычисленные ранее (k+1)-е приближения неизвестных $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$.

Пусть дана приведенная к виду для итераций линейная система:

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{14}$$

Выберем произвольно начальное приближение корней $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$. Предполагая, что k-ые приближения корней $x_i^{(k)}$ известны, согласно методу Гаусса – Зейделя будем строить (k+1)-е приближения корней по следующим формулам:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum\limits_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)} \\ .... \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum\limits_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ .... \\ x_i^{(k+1)} = \beta_n + \sum\limits_{j=1}^{i-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)} \qquad (k = 0, 1, 2, ...) \end{cases} \tag{15}$$

Вычисления удобно оформить, как в методе простой итерации, в виде таблицы 8.

Рассмотрим пример решения системы методом Зейделя:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_3 + x_4 = -1{,}68 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 9x_4 = 0{,}34 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -3{,}98 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4{,}87 \end{cases}$$

Приведем систему к виду, удобному для итерации:

$$\begin{cases} 34x_1 = 2x_2 - 29x_3 + 2x_4 - 12,1 \\ 18x_2 = 5x_1 - 5x_3 - 3x_4 - 14,9 \\ 13x_3 = 5x_1 + 2x_2 - 3x_4 - 37,94 \\ 9x_4 = -x_1 - 2x_2 + x_3 + 0,34 \end{cases}$$

Выделим неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4.

$$\begin{cases} x_1 = 0,05882x_2 - 0,85294x_3 + 0,05882x_4 - 0,35588 \\ x_2 = 0,27777x_1 - 0,27777x_3 - 0,16666x_4 - 0,82777 \\ x_3 = 0,38461x_1 + 0,15384x_2 - 0,23076x_4 - 2,91846 \\ x_4 = -0,11111x_1 - 0,22222x_2 + 0,11111x_3 + 0,03777 \end{cases}$$

Вычисления оформлены в таблице 10.

Таблица 10 – Пример оформления решения системы уравнений по методу Зейделя

α	X_1	X_2	X_3	X_4	β
	-	0,05882	-0,85294	0,05882	-0,35588
	0,27777	-	-0,27777	-0,16666	-0,82777
	0,38461	0,15384	-	- 0,23076	-2,91846
	-0,11111	-0,22222	0,11111	-	0,03777
0	-0,35588	-0,82777	-2,91846	0,03777	1
1	2,086923472	0,556280619	-2,038945958	-0,544272032	1
2	1,383924911	0,213709218	-2,2277154	-0,411009817	1
3	1,532622352	0,285237914	-2,190272491	-0,439266415	1
4	1,503231062	0,271382623	-2,197187681	-0,433690173	1
5	1,50864233	0,273877206	-2,19600946	-0,434714853	1
6	1,507723838	0,273465576	-2,196189591	-0,434541341	1
7	**1,507863473**	**0,27352548**	**-2,19616671**	**-0,434567626**	1

Система имеет приближенное решение: x_4=-0,434564673; x_3=-2,196168399; x_2=0,273519161; x_1=1,507847421, которое найдено уже на седьмом шаге в отличие от метода простой итерации.

Существует еще одна модификация метода Зейделя – нестационарный метод Зейделя. Данный метод обеспечивает еще более высокую скорость сходимости метода Зейделя.

Пусть каким-либо образом для системы линейных уравнений найдены компоненты к-ого приближения $X^{\kappa} = (x_1^{\kappa}, x_2^{\kappa}, ..., x_n^{\kappa})$ и $(k+1)$-ого приближения

$X^{k+1} = (x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, ..., x_n^{k+1})$. Вычисляют вектор поправки $\Delta X^{k+1} = X^{k+1} - X^k = (x_1^{k+1} - x_1^k, ..., x_n^{k+1} - x_n^k)$ и величины $|\Delta x_i^{k+1}| = |x_i^{k+1} - x_i^k|$, $i = \overline{1,n}$. Далее располагают величины $|\Delta x_i^{k+1}|$, $i = \overline{1,n}$ в порядке их убывания.

В таком же порядке переписывают уравнения в исходной системе и неизвестные в этой системе. И к «новой» системе применяют стационарный метод Зейделя. При этом в первую очередь будут уточняться значения тех неизвестных, для которых погрешность в предыдущем приближении была наибольшей. Это и обеспечивает более высокую сходимость метода Зейделя.

2.3 Метод накопления

Метод накопления является одной из модификаций метода простой итерации [3]. Суть метода накопления состоит в подсчете не самих приближений x_i, а их разностей. Основной недостаток заключается в возможном систематическом накоплении ошибки.

$$X^{(m)} = \alpha X^{(m-1)} + \beta, \qquad X^{(m+1)} = \alpha X^{(m)} + \beta$$

$$\Delta^{(m)} = X^{(m+1)} - X^{(m)} = \alpha\left(X^{(m)} - X^{(m-1)}\right) = \alpha\Delta^{(m-1)}$$

$$X^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} \Delta^{(k)} \tag{16}$$

пусть

$$\Delta^{(0)} = \beta, \;\; \Delta^{(1)} = \alpha\beta, \quad \Delta^{(2)} = \alpha\Delta^{(2)} = \alpha^2\beta, \dots, \Delta^{(m)} = \alpha\Delta^{(m-1)} = \alpha^m\beta \tag{17}$$

Вычисления по методу накопления удобно оформить в виде таблицы 11.

Таблица 11 – Метод накопления

m	α			
0	β_1	β_2	…	β_n
1	$\alpha\beta_1$	$\alpha\beta_2$	…	$\alpha\beta_n$
2	$\alpha^2\beta_1$	$\alpha^2\beta_2$	…	$\alpha^2\beta_n$
…	…	…	…	…
m	$\alpha^m\beta_1$	$\alpha^m\beta_2$	…	$\alpha^m\beta_n$
X_i	Σ_1	Σ_2		Σ_n

Вычислим неизвестные системы линейных уравнений методом накопления (таблица 12).

$$\begin{cases} x_1 = 0,05882x_2 - 0,85294x_3 + 0,05882x_4 - 0,35588 \\ x_2 = 0,27777x_1 - 0,27777x_3 - 0,16666x_4 - 0,82777 \\ x_3 = 0,38461x_1 + 0,15384x_2 - 0,23076x_4 - 2,91846 \\ x_4 = -0,11111x_1 - 0,22222x_2 + 0,11111x_3 + 0,03777 \end{cases}$$

Таблица 12 – Пример оформления решения системы уравнений по методу накопления

i	α			
	-	0,05882	-0,85294	0,05882
	0,27777	-	-0,27777	-0,16666
	0,38461	0,15384	-	-0,23076
	-0,11111	-0,22222	0,11111	-
0	0,975714286	1,152	-1,7722222	0,037777778
1	0,906063492	-0,708888889	-0,2014356	-0,561326279
2	-0,296113379	-0,08057425	-0,318417	0,034475407
3	-0,005479343	-0,127366804	0,08592116	0,015427208
4	-0,08725937	0,034368466	-0,0140396	0,038459346
5	0,016150582	-0,005615821	0,02863191	0,000498098
6	-0,007370471	0,011452766	-0,0060629	0,002634775
7	0,007034163	-0,002425141	0,0034366	0,00
8	-0,001533914	0,00137464	-0,0023475	0,00
9	0,001100987	-0,000939016	0,00	0,00
10	-0,00057268	0,000259431	0,00	0,00
11	0,000186666	0,00	0,00	0,00
12	-0,000120624	0,00	0,00	0,00
13	0,00005147	0,00	0,00	0,00
14	-0,000022038	0,00	0,00	0,00
X	**1,507836843**	**0,273538383**	**-2,1961585**	**-0,434562867**

Система имеет приближенное решение: x_4=-0,434564673; x_3=-2,196168399; x_2=0,273519161; x_1=1,507847421, которое найдено путем суммирования всех элементов столбца.

2.4 Метод релаксации

Пусть дана система с преобладающими диагональными коэффициентами

$$A \cdot X = B\,. \tag{18}$$

Суть метода релаксации [2] заключается в следующем. Приведем систему к виду, удобному для метода релаксации:

$$\begin{cases} -x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n + d_1 = 0 \\ c_{21}x_1 - x_2 + \ldots + c_{2n}x_n + d_2 = 0 \\ \ldots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots - x_n + d_n = 0 \end{cases} \tag{19}$$

где $c_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$, $d_{ij} = \dfrac{b_j}{a_{jj}}, i, j = \overline{1,n}$.

Выберем начальное приближение $X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \ldots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$. Находим начальные невязки $R^{(0)} = CX^{(0)} - EX^{(0)} + D$, и выбираем максимальную невязку $R_s = \max\left|R^{(0)}\right|$.

Увеличиваем соответствующее x_s на R_s, так чтобы $R_s^{(1)} = 0$,

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \ldots \\ x_s^{(0)} + R_s \\ \ldots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Вычисления продолжаем до тех пор, пока $\left|R_s^{(i)}\right| < \varepsilon$, где ε – заданная точность.

Рассмотрим пример решения системы методом релаксации:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_3 + x_4 = -1{,}68 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 9x_4 = 0{,}34 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -3{,}98 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4{,}87 \end{cases}$$

Приведем систему к виду, удобному для вычислений:

$$\begin{cases} 34x_1 = 2x_2 - 29x_3 + 2x_4 - 12{,}1 \\ 18x_2 = 5x_1 - 5x_3 - 3x_4 - 14{,}9 \\ 13x_3 = 5x_1 + 2x_2 - 3x_4 - 37{,}94 \\ 9x_4 = -x_1 - 2x_2 + x_3 + 0{,}34 \end{cases}$$

С помощью элементарных преобразований приводим систему к виду, удобному для метода релаксации:

$$\begin{cases} -x_1 + 0,05882x_2 - 0,85294x_3 + 0,05882x_4 - 0,35588 = 0 \\ 0,27777x_1 - x_2 - 0,27777x_3 - 0,16666x_4 - 0,82777 = 0 \\ 0,38461x_1 + 0,15384x_2 - x_3 - 0,23076x_4 - 2,91846 = 0 \\ -0,11111x_1 - 0,22222x_2 + 0,11111x_3 - x_4 + 0,03777 = 0 \end{cases}$$

Выбираем начальное приближение $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Находим начальные невязки:

$$R_1^{(0)} = -1 \cdot x_1^{(0)} + c_{12} \cdot x_2^{(0)} + c_{13} \cdot x_3^{(0)} + c_{14} \cdot x_4^{(0)} + 1 \cdot d_1$$
$$R_2^{(0)} = c_{21} \cdot x_1^{(0)} - 1 \cdot x_2^{(0)} + c_{23} \cdot x_3^{(0)} + c_{24} \cdot x_4^{(0)} + 1 \cdot d_2$$
$$R_3^{(0)} = c_{31} \cdot x_1^{(0)} + c_{32} \cdot x_2^{(0)} - 1 \cdot x_3^{(0)} + c_{34} \cdot x_4^{(0)} + 1 \cdot d_3$$
$$R_4^{(0)} = c_{41} \cdot x_1^{(0)} + c_{42} \cdot x_2^{(0)} + c_{43} \cdot x_3^{(0)} - 1 \cdot x_4^{(0)} + 1 \cdot d_4$$

Для данной системы $\begin{matrix} R_1^{(0)} = 0,35588 \\ R_2^{(0)} = 0,82777 \\ R_3^{(0)} = 2,91846 \\ R_4^{(0)} = 0,03777 \end{matrix}$ максимальная невязка $R_s = 2,91846$.

Увеличиваем $x_3^{(0)}$ на $R_s = 2,91846$, остальные переменные не изменяются, т. е. $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 + 2,91846 \\ 0 \end{pmatrix}$

Находим следующие невязки:

$R_1^{(1)} = -1 \cdot x_1^{(1)} + c_{12} \cdot x_2^{(1)} + c_{13} \cdot x_3^{(1)} + c_{14} \cdot x_4^{(1)} + 1 \cdot d_1$ $R_2^{(1)} = c_{21} \cdot x_1^{(1)} - 1 \cdot x_2^{(1)} + c_{23} \cdot x_3^{(1)} + c_{24} \cdot x_4^{(1)} + 1 \cdot d_2$;
$R_3^{(1)} = c_{31} \cdot x_1^{(1)} + c_{32} \cdot x_3^{(1)} - 1 \cdot x_3^{(1)} + c_{34} \cdot x_4^{(1)} + 1 \cdot d_3$ $R_4^{(1)} = c_{41} \cdot x_1^{(1)} + c_{42} \cdot x_2^{(1)} + c_{43} \cdot x_3^{(1)} - 1 \cdot x_4^{(1)} + 1 \cdot d_4$

и т. д.

Вычисления удобно оформить в виде последовательности таблиц 13.1–13.8:

Таблица 13.1 – Пример оформления решения системы уравнений по методу релаксации, первый шаг

X						**R**
0	-1	-0,05882	-0,85294	0,05882	-0,35588	-0,35588
0	0,27777	-1	-0,27777	-0,16666	-0,82777	-0,82777
0	0,38461	0,15384	-1	-0,23076	-2,91846	**-2,91846**
0	-0,11111	-0,22222	0,11111	-1	0,03777	0,03777

Таблица 13.2 – Второй шаг метода релаксации

0	-1	-0,05882	-0,85294	0,05882	-0,35588	**2,133391272**
0	0,27777	-1	-0,27777	-0,16666	-0,82777	-0,017109366
-2,91846	0,38461	0,15384	-1	-0,23076	-2,91846	0
0	-0,11111	-0,22222	0,11111	-1	0,03777	-0,286500091

Таблица 13.3 – Третий шаг метода релаксации

2,13339127	-1	-0,05882	-0,85294	0,05882	-0,35588	0
0	0,27777	-1	-0,27777	-0,16666	-0,82777	0,575482728
-2,91846	0,38461	0,15384	-1	-0,23076	-2,91846	**0,820523617**
0	-0,11111	-0,22222	0,11111	-1	0,03777	-0,523541195

Таблица 13.4 – Четвертый шаг метода релаксации

2,13339127	-1	-0,05882	-0,85294	0,05882	-0,35588	**-0,699857414**
0	3	-1	-0,27777	-0,16666	-0,82777	0,347565883
-2,0979363	0,38461	0,15384	-1	-0,23076	-2,91846	0
0	-0,11111	-0,22222	0,11111	-1	0,03777	-0,432372816

Таблица 13.5 – Пятый шаг метода релаксации

1,43353386	-1	-0,05882	-0,85294	0,05882	-0,35588	0
0	0,27777	-1	-0,27777	-0,16666	-0,82777	0,153166489
-2,0979363	0,38461	0,15384	-1	-0,23076	-2,91846	-0,26917216
0	-0,11111	-0,22222	0,11111	-1	0,03777	**-0,354611658**

Таблица 13.6 – Шестой шаг метода релаксации

1,43353386	-1	-0,05882	-0,85294	0,05882	-0,35588	-0,020858258
0	0,27777	-1	-0,27777	-0,16666	-0,82777	**0,212266068**
-2,09793638	0,38461	0,15384	-1	-0,23076	-2,91846	-0,187341974
-0,35461166	-0,11111	-0,22222	0,11111	-1	0,03777	**0**

Таблица 13.7 – Седьмой шаг метода релаксации

1,43353386	-1	-0,05882	-0,85294	0,05882	-0,35588	-0,033343748
0,21226607	0,27777	-1	-0,27777	-0,16666	-0,82777	0
-2,09793638	0,38461	0,15384	-1	-0,23076	-2,91846	**-0,154686962**
-0,35461166	-0,11111	-0,22222	0,11111	-1	0,03777	-0,047169766

Таблица 13.8 – Последний шаг метода релаксации

1,48360549	-1	-0,05882	-0,85294	0,05882	-0,35588	0,00007804
0,26899623	0,27777	-1	-0,27777	-0,16666	-0,82777	0
-2,20513541	0,38461	0,15384	-1	-0,23076	-2,91846	**-0,001440089**
-0,43288532	-0,11111	-0,22222	0,11111	-1	0,03777	0,001022974

Таким образом, система имеет приближенное решение: x_4=-0,43289; x_3=-2,2051; x_2=0,26899; x_1=1,4836, достигнутое на тридцать четвертом шаге.

Основные вопросы теории по второй главе

1 Основные теоретические положения метода простой итерации.

2 Метод Зейделя, его реализация и отличие от метода итерации.

3 Метод накопления и релаксации, их отличие от метода итерации.

4 Погрешность вычислений по методу простой итерации.

Задания для лабораторно-практической работы

Найдите решение системы линейных уравнений методом простой итерации и одной из ее модификаций на выбор.

1 $\begin{cases} 7{,}5x_1+2{,}6x_2+1{,}3x_3-8{,}1x_4=5{,}7 \\ 6{,}4x_1+3{,}3x_2-2{,}4x_3+1{,}7x_4=-2{,}1 \\ 0{,}1x_1-2{,}3x_2+0{,}8x_3-5{,}7x_4=4{,}6 \\ 8{,}2x_1+0{,}1x_2-5{,}3x_3-7{,}6x_4=5{,}1 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 6{,}5x_1+3{,}8x_2-4{,}1x_3+1{,}2x_4=9{,}92 \\ 7{,}1x_1-2{,}7x_2-1{,}4x_3+1{,}4x_4=6{,}95 \\ -1{,}8x_1-x_2+4{,}3x_3+1{,}3x_4=7{,}91 \\ 1{,}5x_1-3{,}4x_2+7{,}8x_3-1{,}8x_4=15{,}09 \end{cases}$

3 $\begin{cases} -3x_1+2x_2-4x_3+5x_4=12{,}29 \\ 2x_1-x_2+x_3-11{,}5x_4=-12{,}69 \\ x_1-3x_2-2x_3+2{,}7x_4=13{,}10 \\ 5x_1-x_2+3x_3+7{,}8x_4=56{,}93 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 6x_1-x_2-x_3+11x_4=26{,}25 \\ -x_1+6x_2-x_3+5{,}7x_4=39{,}59 \\ -x_1-x_2+6x_3+3{,}4x_4=46{,}53 \\ 2x_1-x_2+3x_3-14x_4=10{,}22 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 0{,}7x_1-x_2+3x_3+4x_4=0{,}09 \\ x_1+x_2-8x_3+24x_4=10{,}11 \\ 3x_1-0{,}5x_2-2{,}4x_3+8{,}75x_4=1{,}01 \\ 8x_1+7x_2-0{,}7x_3+10{,}1x_4=0{,}92 \end{cases}$

6 $\begin{cases} x_1-6x_2+12x_3-5x_4=7{,}12 \\ -3x_1+7x_2+2x_3-x_4=7{,}89 \\ 6x_1-5x_2-4x_3+x_4=9{,}38 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=11{,}19 \end{cases}$

7 $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+5x_4=7{,}94 \\ -3x_1+2x_2-x_3+3x_4=1{,}86 \\ -2x_1+3x_2+2x_3=-3{,}89 \\ 4x_1-x_2-4x_3-6x_4=15{,}54 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=7{,}44 \\ 3x_1+2x_2-4x_3+9x_4=0{,}87 \\ 3x_1-2x_2-2x_3+3x_4=4{,}85 \\ 2x_2+x_3-5x_4=9{,}45 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 2{,}5x_1-0{,}12x_2+2{,}2x_3+0{,}2x_4=-1{,}2 \\ 1{,}2x_1+3x_2+x_3-1{,}5x_4=0{,}1 \\ 0{,}2x_1-0{,}4x_2+2{,}5x_3+0{,}7x_4=-0{,}4 \\ 0{,}3x_1+0{,}7x_2-0{,}8x_3+3{,}7x_4=0{,}6 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+2x_4=3{,}31 \\ -x_1+2x_2+2x_3+x_4=0{,}30 \\ 3x_1-x_2+x_4=-0{,}92 \\ 2x_1-2x_2+x_3-12x_4=0{,}02 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 0{,}1x_1-3{,}2x_2+2{,}3x_3+2{,}3x_4=10 \\ 3{,}4x_1+3{,}2x_2+3x_3-0{,}9x_4=9 \\ 3{,}7x_1+2{,}7x_2-3{,}5x_3+6{,}2x_4=9{,}3 \\ x_1-2{,}3x_2-3{,}1x_3-0{,}7x_4=17 \end{cases}$

12 $\begin{cases} 2{,}3x_1+3{,}2x_2-0{,}4x_3+0{,}9x_4=3{,}2 \\ 2x_1-2x_2+3{,}4x_3-x_4=7{,}1 \\ x_1-2{,}5x_2+4{,}7x_3-8{,}1x_4=9{,}2 \\ 0{,}4x_1+2{,}6x_3-2{,}5x_4=6{,}3 \end{cases}$

13 $\begin{cases} -x_1+2{,}7x_2+4x_3+x_4=12 \\ 2x_1-3{,}2x_2-2{,}4x_3+1{,}4x_4=11 \\ 3x_1-4{,}2x_2-4{,}2x_3+4{,}1x_4=1{,}2 \\ 2x_1+3x_2-2{,}9x_3+18x_4=0{,}71 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 2x_1+0{,}5x_2+2{,}7x_3-8{,}2x_4=3{,}9 \\ x_1+2{,}9x_2+3{,}6x_3+2{,}4x_4=1{,}4 \\ -x_1+2{,}5x_2-4{,}8x_3-2{,}6x_4=2{,}4 \\ 5x_1-2x_2+4{,}8x_3+3{,}6x_4=10 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 8{,}3x_1+2{,}4x_2-x_3+2x_4=8{,}3 \\ 2{,}5x_1-3{,}2x_2+3x_3-x_4=9{,}2 \\ -x_1+2x_2+3{,}2x_3+4x_4=1 \\ 2x_1+3x_2-x_3+2{,}1x_4=5 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 7{,}5x_1-2{,}8x_2+3{,}4x_3-x_4=10 \\ 8x_1+2{,}9x_2-4{,}3x_3+9x_4=9 \\ 4x_1+2{,}7x_2+x_3-8x_4=11 \\ 2x_1-3{,}2x_2-3x_3+9x_4=2{,}99 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2{,}3x_1-8{,}7x_2+4{,}9x_3+5x_4=19 \\ 3{,}1x_1+3{,}2x_2-2{,}2x_3-x_4=0{,}9 \\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4=6 \\ x_1+x_2+3x_3+0{,}2x_4=7 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 4x_1+2x_2+5x_3+11x_4=19 \\ 0{,}8x_1-3x_2-4x_3+11{,}2x_4=12 \\ 9x_1+9x_2-3x_3-0{,}4x_4=0{,}9 \\ x_1+1{,}8x_2+3{,}2x_3-0{,}6x_4=2{,}8 \end{cases}$

19 $\begin{cases} 2x_1-3x_2+6{,}2x_3+2{,}8x_4=1{,}9 \\ 3{,}1x_1+2{,}4x_2-7{,}8x_3-6{,}4x_4=2{,}8 \\ 4x_1+4x_2+2{,}9x_3-7{,}5x_4=9{,}1 \\ 6{,}4x_1+2{,}7x_2-0{,}39x_3-9{,}2x_4=2{,}8 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 6{,}2x_1+2x_2-3x_3+4{,}2x_4=2{,}7 \\ 2{,}1x_1+3{,}2x_2-0{,}9x_3+x_4=3{,}2 \\ 9x_1+2{,}3x_2+8{,}1x_3+9x_4=13 \\ 0{,}5x_1-0{,}8x_2-3{,}1x_3-4{,}1x_4=5{,}6 \end{cases}$

3 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Методы решения нелинейных уравнений в целом похожи на методы решения систем линейных уравнений. В данной главе рассмотрим методы простой итерации, Зейделя, метод Ньютона, Брауна и другие.

3.1 Метод простой итерации

Многие задачи оптимизации производственных, экономических, технических и других процессов сводятся к отысканию корней систем нелинейных уравнений [2; 3]. В общем случае систему нелинейных уравнений можно записать в виде

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\ , i = 1,2, \dots, n. \tag{21}$$

Если неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_n$ и функции $f_1, f_2, \dots, f_n$ рассматривать как мерные векторы $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$, то систему (21) можно записать кратко в векторном виде $F(x) = 0$.

Решением системы (21) будет вектор $x = \xi$, превращающий систему в тождество. Для систем нелинейных уравнений в отличие от линейных не существует прямых методов решения. Лишь в отдельных простейших случаях нелинейные уравнения можно решить непосредственно. Обычно для решения нелинейных систем применяются методы последовательных приближений (итерационные методы) Ньютона и простой итерации.

Суть метода простой итерации состоит в следующем:

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, n <=> X_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$X^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$$

$$X_i^{(k+1)} = \varphi_i\left(X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \dots, X_n^{(k)}\right), \quad i = 1, n$$

$$X^{(k+1)} = \Phi\left(X^{(k)}\right).$$

Существует $\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k+1)} = \lim\limits_{k\to\infty} \Phi\left(X^{(k)}\right) = \overline{X}$,

где $\overline{X}$ – точное решение системы нелинейных уравнений

Теорема: если $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ является сжимающим отображением, то $X^{(k+1)} = \Phi\left(X^{(k)}\right)$ сходится.

Рассмотрим якобиан отображения Ф:

$$J(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial X} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Если все значения якобиана в $\mathrm{O}\left(\overline{X}, \xi\right)$ имеют собственные значения $\lambda_i < \mathbf{1}$, то итерационный процесс сходится.

Процесс итерации сходится, если $max \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right| < 1, \quad i = \mathbf{1}, n.$

Возможна модификация метода в виде метода Зейделя:

$$X_i^{(k+1)} = \varphi_i(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_i^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}.$$

Пример 1

Решить систему нелинейных уравнений (рисунок 1)

$$\begin{cases} \sin(x + y) - y - 1{,}2 = 0 \\ 2x + \cos y - 2 = 0 \end{cases}.$$

Решение

1 Отделение корней (геометрический способ)

$$2x + \cos y - 2 = 0$$
$$2x = 2 - \cos y$$
$$x = 1 - \frac{\cos y}{2}$$

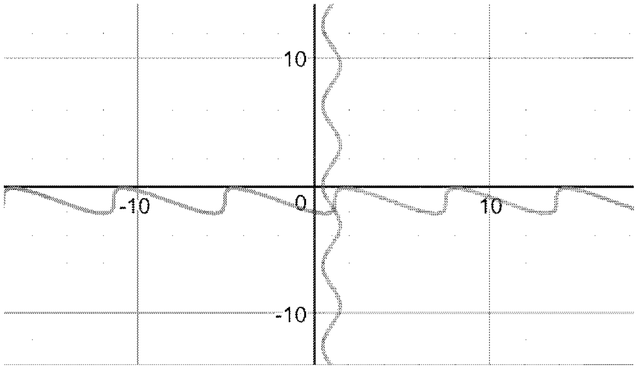

Рисунок 1 – Геометрическая интерпретация системы уравнений

2 Метод итерации

$$x = 1 - \frac{\cos y}{2}$$

$$y = \sin(x + y) - 1{,}2$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{cos\, y}{2} \\ sin(x + y) - 1{,}2 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\sin y}{2} & 0 \\ \cos(x + y) & \cos(x + y) \end{vmatrix}$$

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1{,}208073418 \\ -1{,}258374143 \end{pmatrix}$$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}846317767 \\ -1{,}250279516 \end{pmatrix}$$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0{,}842471453 \\ -1{,}593064289 \end{pmatrix}$$

$$X^{(4)} = \begin{pmatrix} 1{,}011133061 \\ -1{,}882072412 \end{pmatrix}$$

$$X^{(5)} = \begin{pmatrix} 1{,}153136823 \\ -1{,}964934318 \end{pmatrix}$$

$$X^{(6)} = \begin{pmatrix} 1{,}192006207 \\ -1{,}925525373 \end{pmatrix}$$

$$X^{(7)} = \begin{pmatrix} 1{,}173668147 \\ -1{,}869487893 \end{pmatrix}$$

$$X^{(8)} = \begin{pmatrix} 1{,}14713498 \\ -1{,}841014833 \end{pmatrix}$$

$$X^{(9)} = \begin{pmatrix} 1{,}13347101 \\ -1{,}839524705 \end{pmatrix}$$
$$X^{(10)} = \begin{pmatrix} 1{,}132752835 \\ -1{,}848835976 \end{pmatrix}$$
$$X^{(11)} = \begin{pmatrix} 1{,}137235556 \\ -1{,}856434905 \end{pmatrix}$$
$$X^{(12)} = \begin{pmatrix} 1{,}140885106 \\ -1{,}858782526 \end{pmatrix}$$
$$X^{(13)} = \begin{pmatrix} 1{,}142010967 \\ -1{,}857802484 \end{pmatrix}$$
$$X^{(14)} = \begin{pmatrix} 1{,}141541058 \\ -1{,}85621488 \end{pmatrix}$$
$$X^{(15)} = \begin{pmatrix} 1{,}140779548 \\ -1{,}855371087 \end{pmatrix}$$
$$X^{(16)} = \begin{pmatrix} 1{,}14037467 \\ -1{,}855308936 \end{pmatrix}$$
$$X^{(17)} = \begin{pmatrix} 1{,}140344844 \\ -1{,}85556778 \end{pmatrix}$$
$$X^{(18)} = \begin{pmatrix} 1{,}140469058 \\ -1{,}855785738 \end{pmatrix}$$
$$X^{(19)} = \begin{pmatrix} 1{,}140573645 \\ -1{,}855856507 \end{pmatrix}$$
$$X^{(20)} = \begin{pmatrix} 1{,}140607602 \\ -1{,}855830978 \end{pmatrix}$$

3 Заполним таблицу по формулам:

$$\begin{cases} \sin(x+y) - y - 1{,}2 = 0 \\ 2x + \cos y - 2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 1 - \dfrac{\cos y}{2} \\ y = \sin(x+y) - 1{,}2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = \varphi_2(x_n, y_n) \end{cases}$$

Вывод: $x \approx 1{,}14059352; y \approx -1{,}85578607$.

k	x	y	f_1	f_2	$\lvert x_{k+1} - x \rvert$	$\lvert y_{k+1} - y \rvert$	ε_1	ε_2
0	1,2	2	1,208073418	-1,258374143			-3,258374143	-0,01614684
1	1,208073418	-1,258374143	0,846317767	-1,250279516	0,008073418	3,258374143	0,008094627	0,723511302
2	0,846317767	-1,250279516	0,842471453	-1,593064289	0,361755651	0,008094627	-0,342784773	0,007692628
3	0,842471453	-1,593064289	1,011133061	-1,882072412	0,003846314	0,342784773	-0,289008122	-0,33732322
4	1,011133061	-1,882072412	1,153136823	-1,964934318	0,168661608	0,289008122	-0,082861906	-0,28400752
5	1,153136823	-1,964934318	1,192006207	-1,925525373	0,142003762	0,082861906	0,039408944	-0,07773877
6	1,192006207	-1,925525373	1,173668147	-1,869487893	0,038869384	0,039408944	0,056037481	0,036676121
7	1,173668147	-1,869487893	1,14713498	-1,841014833	0,01833806	0,056037481	0,02847306	0,053066335
8	1,14713498	-1,841014833	1,13347101	-1,839524705	0,026533167	0,02847306	0,001490128	0,027327939
9	1,13347101	-1,839524705	1,132752835	-1,848835976	0,013663969	0,001490128	-0,009311271	0,001436351
10	1,132752835	-1,848835976	1,137235556	-1,856434905	0,000718175	0,009311271	-0,007598929	-0,00896544
11	1,137235556	-1,856434905	1,140885106	-1,858782526	0,004482722	0,007598929	-0,002347621	-0,0072991
12	1,140885106	-1,858782526	1,142010967	-1,857802484	0,00364955	0,002347621	0,000980042	-0,00225172
13	1,142010967	-1,857802484	1,141541058	-1,85621488	0,001125861	0,000980042	0,001587604	0,000939818
14	1,141541058	-1,85621488	1,140779548	-1,855371087	0,000469909	0,001587604	0,000843793	0,00152302
15	1,140779548	-1,855371087	1,14037467	-1,855308936	0,00076151	0,000843793	0,000062151	0,000809757
16	1,14037467	-1,855308936	1,140344844	-1,85556778	0,000404878	0,000062151	-0,000258844	0,00005965
17	1,140344844	-1,85556778	1,140469058	-1,855785738	2,9826E-05	0,000258844	-0,000217958	-0,00024843
18	1,140469058	-1,855785738	1,140573645	-1,855856507	0,000124214	0,000217958	-0,000070769	-0,00020917
19	1,140573645	-1,855856507	1,140607602	-1,855830978	0,000104587	0,000070769	0,0000255291	-0,00006791
20	1,140607602	-1,855830978	1,140595352	-1,85578607	0,000033957	0,000025529	0,0000449075	0,000024499

3.2 Метод Зейделя

Метод Зейделя предназначен для решения систем, записанных в форме

$$x_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n),$$
$$x_1 = \varphi_2(x_1, \dots, x_n),$$
$$\dots$$
$$x_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_n).$$

Этот метод является модификацией метода простых итераций, где после задания начального приближения $x^{(0)}$вместо параллельного итерирования производится последовательное итерирование, причем на каждой итерации в каждое последующее уравнение подставляются значения неизвестных, полученных из предыдущих уравнений [2].

$$x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}),$$
$$x_2^{(k+1)} = \varphi_2(\boxed{x_1^{(k+1)}}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}),$$
$$\vdots$$
$$x_n^{(k+1)} = \varphi_n(\boxed{x_1^{(k+1)}}, \boxed{x_2^{(k+1)}}, \dots, \boxed{x_{n-1}^{(k+1)}}, x_n^{(k)})$$

Нелинейные методы сходятся гораздо медленнее метода Ньютона. В нелинейных методах не требуется строить матрицу системы уравнений. Решение каждого уравнения, в свою очередь, выполняется итерационно. Эти итерации называются внутренними, а итерации для всей системы называются внешними.

Большое распространение получили гибридные методы, когда внешние итерации осуществляются одним методом, а внутренние другим. Например, внешние итерации можно выполнять методом Ньютона, а внутренние методом Зейделя. При этом внутренние итерации необязательно выполнять до тех пор, пока решение будет удовлетворять заданной точности, а можно ограничиться некоторым заданным числом итераций.

Пример 2.

Решить систему нелинейных уравнений $\begin{cases} \sin(x+y) - y - 1{,}2 = 0 \\ 2x + \cos y - 2 = 0 \end{cases}$.

Решение

$$f_1(x,y) = \sin(x+y) - y - 1{,}2$$

$$f_2(x,y) = 2x + cosy - 2$$

Выразим из f_1, f_2значения x и y.

$$x_{k+1} = 1 - \frac{cosy}{2}$$
$$y_{k+1} = \sin(x + y) - 1{,}2$$

Далее действуем по схеме, указанной выше, и подставляем каждый последующий шаг в уравнение до тех пор, пока не найдем нужные корни системы.

Начальные приближения $x^{(0)} = 1{,}2;\ \ y^{(0)} = 2$.

k	x_k	y_k	Δ_x	Δ_y	ε_1	ε_2
0	1,2	2	-	-	-3,258374143	-0,0161468
1	1,208073418	-1,258374143	0,008073418	0,741625857	0,008094627	0,7235113
2	0,846317767	-1,250279516	0,361755651	0,008094627	-0,342784773	0,00769263
3	0,842471453	-1,593064289	0,003846314	0,342784773	-0,289008122	-0,3373232
4	1,011133061	-1,882072412	0,168661608	0,289008122	-0,082861906	-0,2840075
5	1,153136823	-1,964934318	0,142003762	0,082861906	0,039408944	-0,0777388
6	1,192006207	-1,925525373	0,038869384	0,039408944	0,056037481	0,03667612
7	1,173668147	-1,869487893	0,01833806	0,056037481	0,02847306	0,05306633
8	1,14713498	-1,841014833	0,026533167	0,02847306	0,001490128	0,02732794
9	1,13347101	-1,839524705	0,013663969	0,001490128	-0,009311271	0,00143635
10	1,132752835	-1,848835976	0,000718175	0,009311271	-0,007598929	-0,0089654
11	1,137235556	-1,856434905	0,004482722	0,007598929	-0,002347621	-0,0072991
12	1,140885106	-1,858782526	0,00364955	0,002347621	0,000980042	-0,0022517
13	1,142010967	-1,857802484	0,001125861	0,000980042	0,001587604	0,00093982
14	1,141541058	-1,85621488	0,000469909	0,001587604	0,000843793	0,00152302
15	1,140779548	-1,855371087	0,00076151	0,000843793	0,000062151	0,00080976
16	1,14037467	-1,855308936	0,000404878	0,000062151	-0,000258844	0,00005965
17	1,140344844	-1,85556778	0,000029826	0,000258844	-0,000217958	-0,0002484
18	1,140469058	-1,855785738	0,000124214	0,000217958	-0,000070769	-0,0002092
19	1,140573645	-1,855856507	0,000104587	0,000070769	0,000025529	-0,00006791
20	1,140607602	-1,855830978	0,000033957	0,000025529	0,000044907	0,00002450
21	1,140595352	-1,85578607	0,000012250	0,000044907	0,000024655	0,00004310
22	1,140573804	-1,855761415	0,000021548	0,000024655	0,000002346	0,00002366

Вывод: x $\approx 1{,}140573804$; y $\approx -1{,}855761415$.

3.3 Метод Ньютона

Формулы метода Ньютона для систем нелинейных уравнений, как и в случае одного нелинейного уравнения, получаются посредством применения формулы Тейлора для функции $F(x)$ в окрестности решения ξ [8]. Пусть нам известно некоторое k-е приближение $x^{(k)}$ к решению ξ системы (21). Поэтому решение можно представить как

$$\xi = x^{(k)} + \Delta x\,, \qquad (22)$$

где Δx – приращение к приближенному решению. В развернутом виде это уравнение записывается как

$$\xi_1 = x_1^{(k)} + \Delta x_1; \xi_2 = x_2^{(k)} + \Delta x_2; \dots; \xi_n = x_n^{(k)} + \Delta x_n\,.$$

Разложим функцию $F(x)$ в ряд Тейлора по малому параметру Δx, оставив только два первых члена разложения в силу малости параметра:

$$F(\xi) = F\left(x^{(k)} + \Delta x\right) = F\left(x^{(k)}\right) + F'\left(x^{(k)}\right)\Delta x \approx 0. \qquad (23)$$

Здесь $F'\left(x^{(k)}\right)$ – матрица Якоби для системы уравнений

$$F'\left(x^{(k)}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Полагая, что матрица Якоби $F'\left(x^{(k)}\right)$ неособенная, решим уравнение (23) относительно вектора Δx:

$$\Delta x = (F')^{-1}(x^{(k)})F(x^{(k)}).$$

Здесь $(F')^{-1}(x^{(k)})$ – обратная матрица Якоби.

Подставив значение приращения Δx в уравнение (22), получаем алгоритм метода Ньютона

$$x^{-(k+1)} = x^{-(k)} - (F')^{-1}\left(x^{-(k)}\right)F\left(x^{-(k)}\right). \qquad (24)$$

Здесь вместо точного решения ξ системы (21) в левой части алгоритма (24) поставлено последующее приближение $x^{-(k+1)}$ к решению, так как значение приращения Δx получено из приближенного уравнения (23). При расчете по формуле (24) на каждом шаге итерации необходимо вычислять обратную матрицу $(F')^{-1}(x^{(k)})$ при новых значениях $x^{-(k)}$. Расчеты продолжаются до выполнения условия сходимости решения, т. е. близости двух последовательных приближений

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \le \varepsilon\,, k = 1,2,\dots, \qquad (25)$$

где ε – малая величина, погрешность решения.

Этот метод обладает значительно большей скоростью сходимости, чем метод простой итерации. Для его применения необходимо, чтобы матрица Якоби была неособенной.

Пример 3.

Решить систему нелинейных уравнений $\begin{cases} \sin(x+y) - y - 1{,}2 = 0 \\ 2x + \cos y - 2 = 0 \end{cases}$.

Решение

Выпишем $f_1(x,y)$; $f_2(x,y)$:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = \sin(x+y) - y - 1{,}2 \\ f_2(x,y) = 2x + cosy - 2. \end{cases}$$

Из уравнений $f_1(x,y)$; $f_2(x,y)$ известно приближенное значение решения: $x = 1{,}2; y = 2.$

Введем векторы

$$x^{-(k)} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f\left(x^{-(k)}\right) = \begin{pmatrix} f_1\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right) \\ f_2\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}258374143 \\ -0{,}016146837 \end{pmatrix}$$

и составим матрицу Якоби для системы $f\left(x^{-(k)}\right)$:

$$f'\left(x^{-(k)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) - 1 \\ 2 & -siny \end{pmatrix}.$$

На основании этого найдем обратную матрицу $(f')^{-1}(x^{-(k)})$:

$$(f')^{-1}\left(x^{-(k)}\right) = \begin{pmatrix} -0{,}185406821 & 0{,}407454669 \\ -0{,}407802367 & -0{,}203553486 \end{pmatrix}.$$

Теперь перемножим обратную матрицу $(f')^{-1}\left(x^{-(k)}\right)$ с вектором $f\left(x^{-(k)}\right)$:

$$(f')^{-1}\left(x^{-(k)}\right) * f\left(x^{-(k)}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}185406821 & 0{,}407454669 \\ -0{,}407802367 & -0{,}203553486 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3{,}258374143 \\ -0{,}016146837 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}597545689 \\ 1{,}332059432 \end{pmatrix}.$$

Найдем $x^{(k+1)}; y^{(k+1)}$.

$$x^{-(k)} - (f')^{-1}\left(x^{-(k)}\right) * f\left(x^{-(k)}\right) = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}597545689 \\ 1{,}332059432 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}602454311 \\ 0{,}667940568 \end{pmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = 0{,}602454311; y^{(k+1)} = 0{,}667940568$$

Полученные $x^{(k+1)}, y^{(k+1)}$ будем подставлять в уравнения и проделывать все те же операции до тех пор, пока не получим приближенное значение корней уравнения с малой погрешностью ε.

Вывод: x $\approx$ **1,140567177; y $\approx$ −1,855772259.**

k	x / y	$f_1(x,y)$ / $f_2(x,y)$	$f'(x,y)$		$(f')^{-1}(x,y)$		$(f')^{-1}(x,y)(f')^{-(k)}$	x^{k+1} / y^{k+1}	$\lvert x^{k+1}-x^k\rvert$ / $\lvert y^{k+1}-y^k\rvert$	ε_1 / ε_2
0	1,2	-3,258374143	-0,99829478	-1,998294776	-0,185406821	0,407454669	0,597545689	0,602454311	0,597545689	-3,258374143
	2	-0,016146837	2	-0,909297427	-0,407802367	-0,203553486	1,332059432	0,667940568	1,332059432	-0,016146837
1	0,602454311	-0,912722792	0,2959037	-0,7040963	-0,505642128	0,574810688	0,455767301	0,14668701	0,455767301	-1,572036868
	0,667940568	-0,0100	2	-0,619370444	-1,632761566	0,241570095	1,487844806	-0,819904238	1,487844806	-0,009992496
2	0,14668701	-1,003600264	0,78181976	-0,21818024	0,725326007	0,216462898	-0,949667842	1,096354852	0,949667842	-1,003600264
	-0,819904238	-1,024334759	2	0,731080496	-1,984257579	0,775665891	1,196859895	-2,016764133	1,196859895	-1,024334759
3	1,096354852	0,020914629	0,605494482	-0,394505518	0,67565659	0,295446832	-0,056368867	1,152723719	0,056368867	0,020914629
	-2,016764133	-0,238621526	2	0,902193643	-1,49780836	0,453457348	-0,139530791	-1,877233342	0,139530791	-0,238621526
4	1,152723719	0,014465026	0,748824518	-0,251175482	0,783870294	0,206509352	0,012120111	1,140603608	0,012120111	0,014465026
	-1,877233342	0,003783881	2	0,953414442	-1,644343236	0,615662266	-0,021455875	-1,855777467	0,021455875	0,003783881
5	1,140603608	0,00003	0,754979245	-0,245020755	0,790128887	0,201734545	0,000036	1,140567177	0,000036431	0,000028781
	-1,855777467	0,00007	2	0,959666955	-1,646673114	0,621602012	-0,000005	-1,855772259	0,000005208	0,000067864

3.4 Метод Брауна

В отличие от пошаговой линеаризации векторной функции $f(x)$, приведшей к методу Ньютона, Брауном предложено проводить на каждом итерационном шаге поочередную линеаризацию компонент вектор-функции $f(x)$, т. е. линеаризовать в системе сначала функцию f_1, затем f_2 и т. д., и последовательно решать получаемые таким образом уравнения [5; 6]. Рассмотрим вывод расчетных формул метода Брауна в двумерном случае.

Пусть требуется найти решение системы

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \tag{26}$$

и пусть уже получены приближения x_k, y_k. Заменим первое уравнение системы (26) линейным, полученным по формуле Тейлора для функции двух переменных:

$$f(x,y) \approx f(x_k,y_k) + f'_x(x_k,y_k)(x - x_k) + f'_y(x_k,y_k)(y - y_k) = 0.$$

Отсюда выражаем x (обозначим этот результат через

$$\underset{x}{\sim} = x_k - \frac{1}{f'_x(x_k,y_k)}\left(f(x_k,y_k) + f'_y(x_k,y_k)(y - y_k)\right). \tag{27}$$

При $y = y_k$ находим значение $\underset{x_k}{\sim}$ переменной $\underset{x}{\sim}$:

$$\underset{x_k}{\sim} = x_k - \frac{f(x_k,y_k)}{f'_x(x_k,y_k)}$$

которое будем считать лишь промежуточным приближением (т. е. не x_{k+1}), поскольку оно не учитывает второго уравнения системы (26).

Подставив в $g(x,y)$ вместо x переменную $\underset{x}{\sim} = \underset{x}{\sim}(y)$, придем к некоторой функции $G(y) = g\left(\underset{x}{\sim}, y\right)$ только одной переменной y. Это позволяет линеаризовать второе уравнение системы (26) с помощью формулы Тейлора для функции одной переменной

$$g\left(\underset{x}{\sim}, y\right) \approx G(y_k) + G'(y_k)(y - y_k) = 0 \tag{28}$$

При нахождении производной $G'(y)$ нужно учесть, что $G(y) = g\left(\tilde{x}(y), y\right)$ есть сложная функция одной переменной y, т. е. нужно применить формулу полной производной. Дифференцируя по y равенство (27), получаем выражение $\tilde{x}'_y = -\frac{f'_y(x_k, y_k)}{f'_x(x_k, y_k)}$ подстановка которого в предыдущее равенство при $x = x_k$, $y = y_k$ дает $G'(y_k) = -g'_x\left(\tilde{x}_k, y_k\right) * \frac{f'_y(x_k, y_k)}{f'_x(x_k, y_k)} + g'_y\left(\tilde{x}_k, y_k\right)$

При известных значениях $G(y_k) = g\left(\tilde{x}_k, y_k\right)$ и $G'(y_k)$ теперь можно разрешить линейное уравнение (28) относительно y (назовем полученное значение y_{k+1}):

$$y_{k+1} = y_k - \frac{G(y_k)}{G'(y_k)} = y_k - \frac{g\left(\tilde{x}_k, y_k\right) * f'_x(x_k, y_k)}{f'_x(x_k, y_k) * g'_y\left(\tilde{x}_k, y_k\right) - f'_y(x_k, y_k) * g'_x(\tilde{x}_k, y_k)}.$$

Заменяя в (27) переменную y найденным значением y_{k+1}, приходим к значению

$$x_{k+1} = \tilde{x}(y_{k+1}) = x_k - \frac{1}{f'_x(x_k, y_k)} * f(x_k, y_k) + f'_y(x_k, y_k)(y_{k+1} - y_k).$$

Таким образом, реализация метода Брауна решения двумерных нелинейных систем вида (26) сводится к следующему.

При выбранных начальных значениях каждое x_k, y_k последующее приближение по методу Брауна находятся при $k = 0, 1, 2 \ldots$ с помощью совокупности формул:

$$\tilde{x}_k = x_k - \frac{f(x_k, y_k)}{f'_x(x_k, y_k)};$$

$$q_k = \frac{g(\tilde{x}_k, y_k) f'_x(x_k, y_k)}{f'_x(x_k, y_k) g'\left(\tilde{x}_k, y_k\right) - f'_y(x_k, y_k) g'_x(\tilde{x}_k, y_k)};$$

$$p_k = \frac{f(x_k, y_k) - q_k f'_y(x_k, y_k)}{f'_x(x_k, y_k)};$$

$$x_{k+1} = x_k - p_k$$

$$y_{k+1} = y_k - q_k.$$

Вычисления в методе Брауна естественно заканчивать, когда выполнится неравенство $\{|p_{k-1}|, |q_{k-1}|\} < \varepsilon$, с результатом $(x, y) \approx (x_k, y_k)$. В ходе вычислений следует контролировать немалость знаменателей расчетных формул. Заметим, что функции f и g в этом методе неравноправны и перемена их ролями может изменить ситуацию со сходимостью. Указывая на наличие квадратичной сходимости метода Брауна, отмечают, что рассчитывать на его большую по сравнению с методом Ньютона эффективность в смысле вычислительных затрат можно лишь в случае, когда фигурирующие в нем частные производные заменяются разностными отношениями.

Пример 4.

$$\begin{cases} \sin(x+y) - y - 1{,}2 = 0 \\ 2x + cosy - 2 = 0 \end{cases}.$$

Решение

Выразим $f(x,y), g(x,y) \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(x,y) = \sin(x+y) - y - 1{,}2 \\ g(x,y) = 2x + cosy - 2 \end{cases}$$

Далее воспользуемся выведенными формулами.

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - p_k \\ y_{k+1} = y_k - q_k \end{cases}$$

$$q_k = \frac{g(\tilde{x}_k, y_k) f'_x(x_k, y_k)}{f'_x(x_k, y_k) g'\left(\tilde{x}_k, y_k\right) - f'_y(x_k, y_k) g'_x(\tilde{x}_k, y_k)} = 1{,}332059432$$

$$p_k = \frac{f(x_k, y_k) - q_k f'_y(x_k, y_k)}{f'_x(x_k, y_k)} = 0{,}597545689$$

$$\tilde{x}_k = x_k - \frac{f(x_k, y_k)}{f'_x(x_k, y_k)} = -2{,}063939893$$

$$f'_x(x_k, y_k) = \cos(x+y)$$

$$f'_y(x_k, y_k) = \cos(x+y) - 1$$

$$g'_x(x_k, y_k) = 2$$

$$g'_y(x_k, y_k) = -siny$$

Проделываем все операции до тех пор, пока приближенные значения не будут близки к точным решениям.

Вывод: x $\approx 1{,}140603608$; y $\approx -1{,}85577747$.

	x_k	y_k	$f(x_k,y_k)$	$f'_x(x_k,y_k)$	$\bar{x}_k$	$g(\bar{x}_k,y_k)$	$g'_y(\bar{x}_k,y_k)$	$f'_y(x_k,y_k)$	$g'_x(\bar{x}_k,y_k)$	q_k	p_k		
0	1,2	2	-3,258374143	-0,99829478	-2,063939893	-6,544026622	-0,909297427	-1,998294776	2	1,332059432	0,597545689	-3,2583741	-0,0161468
1	0,602454311	0,667940568	-0,912722792	0,2959037	3,686980766	6,159060413	-0,619370444	-0,7040963	2	1,487844806	0,455767301	-0,9127228	-0,0099925
2	0,14668701	-0,81990424	-1,003600264	0,78181976	1,430359176	1,543009571	0,731080496	-0,21818024	2	1,196859895	-0,949667842	-1,0036003	-1,0243348
3	1,096354852	-2,01676413	0,020914629	0,605494482	1,061813449	-0,307704333	0,902193643	-0,394505518	2	-0,139530791	-0,056368867	0,02091463	-0,2386215
4	1,152723719	-1,87723334	0,014465026	0,748824518	1,133406742	-0,034850073	0,953414442	-0,251175482	2	-0,021455875	0,012120111	0,01446503	0,00378388
5	1,140603608	-1,85577747	0,000028781	0,754979245	1,140565487	-0,000008378	0,959666955	-0,245020755	2	-0,00000521	0,000036431	0,00002878	0,00006786

3.5 Метод скорейшего спуска (градиентный метод)

В методе скорейшего спуска или методе градиента [3] решение системы (21) сводится к задаче отыскания минимумов функции $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которую можно построить различными способами, например,

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \big(f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\big)^2 = f^T * f \tag{29}$$

или

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^T * A * f, \tag{30}$$

где a_{ij} – элементы некоторой положительной определенной матрицы A,

$f^T = [f_1 f_2 \dots f_n]$ и $f = [f_1 f_2 \dots f_n]^T$ – матрица-строка и матрица-столбец, элементами которых являются правые части уравнений системы (21). Функцию (28) будем считать частным случаем функции (29). Если $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ есть некоторое решение системы (21), то $U(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$. В других точках $U(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ в силу положительной определенной матрицы A. Таким образом, решение системы (21) сводится к поиску нулевых минимумов функции $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Будем рассматривать функцию $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$как некоторую скалярную функцию n-мерного векторного пространства и будем обозначать ее еще и как $U(x)$, где искомые величины считаются компонентами n-мерного вектора $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$. Производные $\frac{\partial U}{\partial x_j}$, $j = 1, 2 \dots, n$ в этом пространстве являются компонентами вектора

$$\nabla U = gradU = \left[\frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial U}{\partial x_2} \dots \frac{\partial U}{\partial x_n}\right]^T \tag{31}$$

для функции (28):

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} 2 f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j}$$

В матричной записи на k-ой итерации градиент (31) для функции (28) имеет вид

$$\nabla U = 2 F'^T\big(x^{(k)}\big) * f\big(x^{(k)}\big) \tag{32}$$

где $F'^T\left(x^{(k)}\right)$ – транспонированная матрица Якоби $F'(x^{(k)})$, которая определена $F'\left(x_i^{(k)}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$.

Вектор ∇U как градиент скалярной функции, вычисленный при некоторых значениях $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$, ортогонален поверхности уровня, для которой $U(x_1, x_2, \dots, x_n) = U\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right) = const$, и направлен в сторону возрастания функции $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в данной точке n-мерного пространства. Таким образом, итерационная зависимость определения экстремума функции $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет вид

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda^{(k)} \nabla U\left(x^{(k)}\right) = x^{(k)} - \lambda^{(k)} 2F'^T\left(x^{(k)}\right) * f\left(x^{(k)}\right). \tag{33}$$

Остается определить множитель $\lambda^{(k)}$. Для этого подставим новое приближение (33) в исследуемую функцию $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$и рассмотрим ее как функцию параметра λ

$$U(\lambda) = U\left(x^{(k)} - \lambda \nabla U\left(x^{(k)}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i\left(x^{(k)} - \lambda \nabla U\left(x^{(k)}\right)\right)\right)^2.$$

Параметр λ должен иметь такой знак, чтобы от итерации к итерации функция $U(\lambda)$уменьшалась, а величина параметра λ должна позволять при данном векторе $\nabla U\left(x^{(k)}\right)$ как можно ближе продвинуться к минимуму функции $U(\lambda)$. Параметр λ приближенно можно найти следующим образом. Считая параметр λ малой величиной, разложим функцию $U(\lambda)$ в ряд Тейлора по степеням λ в окрестности нуля с точностью до слагаемых второй степени. В результате получим

$$U(\lambda) \approx \sum_{i=1}^{n} \left(f_i\left(x^{(k)}\right) - \lambda \left(\nabla f_i\left(x^{(k)}\right)\right)^T * \nabla U\left(x^{(k)}\right)\right)^2, \tag{34}$$

где $\left(\nabla f_i\left(x^{(k)}\right)\right)^T = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right] |_{x^{(k)}}$.

Функция $U(\lambda)$ дает изменение значения функции $U(x^{(k)})$ вдоль нормали $\nabla U(x^{(k)})$ к поверхности уровня в точке $x^{(k)}$, поэтому значение параметра получим из условия минимума функции $U(\lambda)$ как корень уравнения $U'(\lambda) = 0$. Возьмем производную $U(\lambda)$ по λ, приравняем ее нулю и получим уравнение для определения λ

$$-2\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\nabla f_i\left(x^{(k)}\right)\right)^T * \nabla U\left(x^{(k)}\right)\right)\left(f_i\left(x^{(k)}\right) - \lambda\left(\nabla f_i\left(x^{(k)}\right)\right)^T * \nabla U\left(x^{(k)}\right)\right) = 0.$$

Отсюда получим параметр

$$\lambda^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\nabla f_i\left(x^{(k)}\right)\right)^T * \nabla U\left(x^{(k)}\right) f_i\left(x^{(k)}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\nabla f_i\left(x^{(k)}\right)\right)^T * \nabla U\left(x^{(k)}\right)\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{\left(F' * F'^T * f\right) * f}{\left(F' * F'^T * f\right) * \left(F' * F'^T * f\right)^T},$$

где использовали равенство (32) и для краткости обозначали $F' = F'(x^{(k)})$, $f = f(x^{(k)})$. Таким образом, для принятых упрощений равенство (33) примет вид

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\left(F' * F'^T * f\right) * f}{\left(F' * F'^T * f\right) * \left(F' * F'^T * f\right)^T} F'^T\left(x^{(k)}\right) * f\left(x^{(k)}\right). \quad (35)$$

В процессе решения нужно следить за поведением параметра $\lambda^{(k)}$. Он не должен возрастать от итерации к итерации и должен изменяться плавно. Существует много разновидностей метода градиента на основе управления этим параметром. Для дважды дифференцируемых функций $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, можно получить более точные формулы для параметра $\lambda^{(k)}$.

Если начальное приближение выбрано удачно и в окрестности искомого нулевого минимума функции $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нет других минимумов, то метод градиента довольно быстро даст искомое решение с заданной точностью. Если в окрестности искомого решения функции $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеются другие минимумы, то итерационный процесс (33) сойдется, но не обязательно даст решение системы уравнений (21).

Пример 4.

Решить систему нелинейных уравнений $\begin{cases} \sin(x+y) - y - 1{,}2 = 0 \\ 2x + \cos y - 2 = 0 \end{cases}$.

Решение

Возьмем начальное приближение для данной системы $x_0 = 1{,}2; y_0 = 2$, подставим их в функцию и найдем вектор-функцию $f_{1,2}$.

$$f_{1,2} = \begin{bmatrix} \sin(x+y) - y - 1{,}2 \\ 2*x + cosy - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3{,}258374143 \\ -0{,}016146837 \end{bmatrix}$$

$$f^T = [-3{,}258374143 \quad -0{,}016146837]$$

Якобиан, или матрица частных производных, имеет вид:

$$F' = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) - 1 \\ 2 & -siny \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}998294776 & -1{,}998294776 \\ 2 & -0{,}909297427 \end{bmatrix};$$

$$F'^T = \begin{bmatrix} -0{,}998294776 & 2 \\ -1{,}998294776 & -0{,}909297427 \end{bmatrix}.$$

1 итерация.

$$F'^T * f = \begin{bmatrix} -0{,}998294776 & 2 \\ -1{,}998294776 & -0{,}909297427 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -3{,}258374143 \\ -0{,}016146837 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3{,}220524212 \\ 6{,}525874305 \end{bmatrix}$$

$$F' * F'^T * f = \begin{bmatrix} -0{,}998294776 & -1{,}998294776 \\ 2 & -0{,}909297427 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3{,}220524212 \\ 6{,}525874305 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -16{,}25565303 \\ 0{,}50708771 \end{bmatrix}$$

$$f^T * F' * F'^T * f = [-3{,}258374143 \quad -0{,}016146837] * \begin{bmatrix} -16{,}25565303 \\ 0{,}50708771 \end{bmatrix} =$$

$$= 52{,}95881165$$

$$(F' * F'^T * f)^T = [-16{,}25565303 \quad 0{,}50708771]$$

$$\left(F' * F'^T * f\right)^T * F' * F'^T * f =$$

$$= [-16{,}25565303 \quad 0{,}50708771] * \begin{bmatrix} -16{,}25565303 \\ 0{,}50708771 \end{bmatrix} =$$

$$= 264{,}5033933$$

$$\lambda = \frac{f^T * F' * F'^T * f}{(F' * F'^T * f)^T * F' * F'^T * f} = \frac{52{,}95881165}{264{,}5033933} = 0{,}200219782$$

$$\Delta_{x,y} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \lambda * F'^T * f = \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ 2 \end{bmatrix} - 0{,}200219782 * \begin{bmatrix} 3{,}220524212 \\ 6{,}525874305 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0{,}555187346 \\ 0{,}693390872 \end{bmatrix}$$

Вычисления продолжим в таблице.

Вывод: x $\approx 1{,}1405722338$; y $\approx$-1,855772752.

k	x / y	f	f^T		F'		F'^T		$F'^T * f$	$F' * F'^T * f$	$f^T * F' * F'^T * f$		$(F' * F'^T * f)^T$		$(F' * F'^T * f)^T * F' * F'^T * f$	λ	Δ_x / Δ_y
	1,2	-3,258374143	-3,258374143	-0,016146837	-0,998294776	-1,998294776	-0,998294776	2	3,220524212	-16,25565303	52,95881165		-16,25565303	0,50708771	264,5033933	0,200219782	0,555187346
0	2	-0,016146837			2	-0,909297427	-1,998294776	-0,909297427	6,525874305	0,50708771							0,693390872
	0,555187346	-0,944855531	-0,944855531	-0,12054214	0,316671293	-0,683328707	0,316671293	2	-0,540292902	-0,664930937	0,81419908		-0,664930937	-1,542492995	2,821417789	0,288577992	0,711103986
1	0,693390872	-0,12054214			2	-0,639148714	-0,683328707	-0,639148714	0,722691262	-1,542492995							0,484838079
	0,711103986	-0,754277087	-0,754277087	0,306958399	0,366136915	-0,633863085	0,366136915	2	0,337748113	-0,088711114	0,226329477		-0,088711114	0,519343068	0,277586884	0,81534644	0,435722265
2	0,484838079	0,306958399			2	-0,466065106	-0,633863085	-0,466065106	0,335045803	0,519343068							0,211659676
	0,435722265	-0,808559536	-0,808559536	-0,150871878	0,797665482	-0,202334518	0,797665482	2	-0,946703788	-0,794667872	0,934388237		-0,794667872	-1,934435722	4,37353859	0,21364582	0,637981572
3	0,211659676	-0,150871878			2	-0,210082827	-0,202334518	-0,210082827	0,195295095	-1,934435722							0,169935696
	0,637981572	-0,647086132	-0,647086132	0,261558788	0,691005433	-0,308994567	0,691005433	2	0,075977543	0,004386873	0,030018673		0,004386873	0,125621309	0,015799958	1,899921057	0,493630239
4	0,169935696	0,261558788			2	-0,169118971	-0,308994567	-0,169118971	0,155711546	0,125621309							-0,12590395
	0,493630239	-0,714601394	-0,714601394	-0,02065496	0,933147144	-0,066852856	0,933147144	2	-0,70813817	-0,663817487	0,503500852		-0,663817487	-1,410603083	2,430454714	0,207163231	0,64033043
5	-0,12590395	-0,02065496			2	0,125571579	-0,066852856	0,125571579	0,045179468	-1,410603083							-0,135263474
	0,64033043	-0,580870488	-0,580870488	0,271526697	0,875142079	-0,124857921	0,875142079	2	0,034709187	0,016748222	0,013116711		0,016748222	0,084136327	0,007359425	1,782301157	0,578468207
6	-0,135263474	0,271526697			2	0,134851383	-0,124857921	0,134851383	0,109142032	0,084136327							-0,329787445
	0,578468207	-0,624087037	-0,624087037	0,103047613	0,969237963	-0,030762037	0,969237963	2	-0,398793623	-0,388143058	0,161799888		-0,388143058	-0,780563093	0,759933776	0,212913142	0,66337661
7	-0,329787445	0,103047613			2	0,323841935	-0,030762037	0,323841935	0,052569327	-0,780563093							-0,340980145
	0,66337661	-0,54217939	-0,54217939	0,269180567	0,948478845	-0,051521155	0,948478845	2	0,024115451	0,016796042	0,014493909		0,016796042	0,087674891	0,007968994	1,818787888	0,619515719
8	-0,340980145	0,269180567			2	0,334410968	-0,051521155	0,334410968	0,117950642	0,087674891							-0,555507345
	0,619515719	-0,58052798	-0,58052798	0,088664427	0,997952163	-0,002047837	0,997952163	2	-0,402010299	-0,401285237	0,163911308		-0,401285237	-0,778733955	0,767456414	0,213577351	0,705376014
9	-0,555507345	0,088664427			2	0,527374425	-0,002047837	0,527374425	0,047948178	-0,778733955							-0,56574799
	0,705376014	-0,495077242	-0,495077242	0,254939907	0,990267834	-0,009732166	0,990267834	2	0,019620745	0,018052905	0,020401012		0,018052905	0,115080432	0,013569413	1,50345574	0,675877092
10	-0,56574799	0,254939907			2	0,53604741	-0,009732166	0,53604741	0,14147805	0,115080432							-0,778453976
	0,675877092	-0,523943117	-0,523943117	0,063754159	0,994743603	-0,005256397	0,994743603	2	-0,393680746	-0,391861192	0,157242767		-0,391861192	-0,753993279	0,722061059	0,217769349	0,761608692
11	-0,778453976	0,063754159			2	0,70217949	-0,005256397	0,70217949	0,047520916	-0,753993279							-0,788802575
	0,761608692	-0,438387956	-0,438387956	0,227912789	0,999630269	-0,000369731	0,999630269	2	0,017599708	0,017533353	0,026511155		0,017533353	0,150046715	0,022821435	1,161677798	0,741163502
12	-0,788802575	0,227912789			2	0,709509962	-0,000369731	0,709509962	0,16186848	0,150046715							-0,976841595
	0,741163502	-0,456660792	-0,456660792	0,041969815	0,972356229	-0,027643771	0,972356229	2	-0,360097335	-0,351453357	0,131917385		-0,351453357	-0,680908011	0,587155181	0,224672096	0,822067325
13	-0,976841595	0,041969815			2	0,828733928	-0,027643771	0,828733928	0,047405636	-0,680908011							-0,823860565
	0,822067325	-0,377932674	-0,377932674	0,323528144	0,999998392	-0,000001608	0,999998392	2	0,269124222	0,269123407	0,128785273		0,269123407	0,712444362	0,580004377	0,222041899	0,762310472
14	-0,823860565	0,323528144			2	0,733774134	-0,000001608	0,733774134	0,237397191	0,712444362							-0,876572688
	0,762310472	-0,437441059	-0,437441059	0,164409903	0,993479172	-0,006520828	0,993479172	2	-0,105768776	-0,10592163	0,02788221		-0,10592163	-0,112233266	0,023815698	1,170749234	0,886139185
15	-0,876572688	0,164409903			2	0,768550641	-0,006520828	0,768550641	0,129209814	-0,112233266							-1,027844979
	0,886139185	-0,313387037	-0,313387037	0,288943515	0,989976524	-0,010023476	0,989976524	2	0,26764122	0,262447333	0,134397639		0,262447333	0,749784023	0,631054684	0,212973047	0,829138818
16	-1,027844979	0,288943515			2	0,856187554	-0,010023476	0,856187554	0,250531069	0,749784023							-1,081201344
	0,829138818	-0,368200494	-0,368200494	0,128546126	0,968400084	-0,031599916	0,968400084	2	-0,099473137	-0,100282314	0,025539929		-0,100282314	-0,088560187	0,017899449	1,426855553	0,971072617
17	-1,081201344	0,128546126			2	0,882523398	-0,031599916	0,882523398	0,125080069	-0,088560187							-1,259672535
	0,971072617	-0,224937791	-0,224937791	0,248273902	0,958643293	-0,041356707	0,958643293	2	0,280912699	0,259135511	0,139259303		0,259135511	0,795688436	0,700271301	0,198864788	0,915208972
18	-1,259672535	0,248273902			2	0,951990146	-0,041356707	0,951990146	0,245656994	0,795688436							-1,308525061
	0,915208972	-0,274728339	-0,274728339	0,08969276	0,923643238	-0,076356762	0,923643238	2	-0,074365452	-0,07690336	0,017108617		-0,07690336	-0,044807582	0,007921846	2,159675432	1,075814211
19	-1,308525061	0,08969276			2	0,965803588	-0,076356762	0,965803588	0,107602956	-0,044807582							-1,540912521
	1,075814211	-0,10759815	-0,10759815	0,18150778	0,893777477	-0,106222523	0,893777477	2	0,266846757	0,218015961	0,108400662		0,218015961	0,726463493	0,575280165	0,188431078	1,025531989
20	-1,540912521	0,18150778			2	0,999553512	-0,106222523	0,999553512	0,192856086	0,726463493							-1,577252601
	1,025531989	-0,146900717	-0,146900717	0,044607748	0,851623918	-0,148376082	0,851623918	2	-0,035888668	-0,04041632	0,005697404		-0,04041632	-0,005375349	0,001662373	3,427271188	1,148532188
21	-1,577252601	0,044607748			2	0,999979158	-0,148376082	0,999979158	0,066403371	-0,005375349							-1,804834963
	1,148532188	-0,005356926	-0,005356926	0,065156438	0,792253658	-0,207746342	0,792253658	2	0,126068832	0,086480307	0,020052698		0,086480307	0,314872447	0,106623501	0,188070156	1,124822403
22	-1,804834963	0,065156438			2	0,972737739	-0,207746342	0,972737739	0,064493008	0,314872447							-1,816964173
	1,124822403	-0,02122338	-0,02122338	0,005955676	0,769880931	-0,230119069	0,769880931	2	-0,004428123	-0,005862205	0,000133245		-0,005862205	0,001482427	0,000036563	3,644244573	1,140959567
23	-1,816964173	0,005955676			2	0,969853395	-0,230119069	0,969853395	0,010660037	0,001482427							-1,855811955
	1,140959567	0,000306006	0,000306006	0,000746686	0,75519001	-0,24480999	0,75519001	2	0,001724464	0,001145216	0,000003385		0,001145216	0,004064691	0,000017833	0,189841599	1,140632192
24	-1,855811955	0,000746686			2	0,959657259	-0,24480999	0,959657259	0,000641649	0,004064691							-1,855933766
	1,140632192	0,000088663	0,000088663	-0,00002496	0,75489549	-0,24510451	0,75489549	2	0,000017012	0,000024039	0,000000002		0,00002403921	-0,00000982	0,000000001	3,52456083	1,140572234
25	-1,855933766	-0,000024960			2	0,959623001	-0,24510451	0,959623001	-0,000045684	-0,000009816							-1,855772752
	1,140572234	0,0000039384	3,93844E-06	0,000009641	0,754961763	-0,245038237	0,754961763	2	0,000022255	1,47709E-05	0,000000001		0,0000147709	0,000052462	0,00000000297045	0,189851736	1,140568009
26	-1,855772752	0,0000096407			2	0,959668281	-0,245038237	0,959668281	0,0000082868	0,000052462							-1,855774325

Подведем итог главы. Пусть ищется решение системы

$$\begin{cases} \sin(x+y) - y - 1{,}2 = 0 \\ 2x + \cos y - 2 = 0 \end{cases}$$

в окрестности точки $x_0 = 1{,}2;\ y_0 = 2.$

В таблице 14 приведены: приближенные решения, полученные на k-итерации с помощью перечисленных там методов.

Таблица 14 – Приближенные решения с помощью различных методов

№	Метод	Приближенное решение		Число итераций k	Точность ε	
		x_k	y_k		ε_1	ε_2
1	Простой итерации	1,140595352	-1,85578607	20	0,000044907	0,000024499
2	Зейделя	1,140573804	-1,855761415	22	0,000002346	0,000023661
3	Ньютона	1,140567177	-1,855772259	5	0,0000287805	0,000067863944
4	Брауна	1,140603608	-1,855777467	5	0,000028781	0,000067864
5	Скорейшего спуска	1,1405722338	-1,855772752	26	0,0000039384	0,0000096407

На основании данной таблицы можно сказать, что наиболее быстрыми методами являются метод Ньютона и Брауна, так как число итераций составило всего лишь 5, это наиболее распространенные методы решения систем нелинейных уравнений. Это обусловлено тем, что по сравнению с другими методами они обеспечивают более быструю сходимость. Наиболее медленным и трудоемким оказался метод скорейшего спуска, он имеет довольно слабые условия сходимости и при этом скорость сходимости достаточно мала.

Основные вопросы теории к третьей главе

1. Теоретические основы метода простой итерации решения систем нелинейных уравнений.
2. Метод Зейделя, его практическая реализация и сходимость.
3. Основные положения метода Ньютона для систем нелинейных уравнений.
4. Основные характеристики метода Брауна.
5. Метод скорейшего спуска и его аналитическая интерпретация.
6. Погрешности решения по методам Ньютона, Брауна и простой итерации.

Задания для лабораторно-практической работы

N	Система уравнений	N	Система уравнений
1	$\sin(x_1 + x_2) - x_2 - 1.2 = 0$ $2x_1 + \cos x_2 - 2 = 0$	11	$\sin(0.5x_1 + x_2) - 1.2x_1 - 1 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
2	$\cos(x_1 - 1) + x_2 - 0.5 = 0$ $\sin x_1 + 2x_2 - 2 = 0$	12	$\tan(x_1x_2 + 0.3) - x_1^2 = 0$ $0.9x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$
3	$\sin x_1 + 2x_2 - 2 = 0$ $\cos x_1 + x_2 - 1.5 = 0$	13	$\sin(x_1 + x_2) - 1.3x_1 - 1 = 0$ $x_1^2 + 0.2x_2^2 - 1 = 0$
4	$\cos x_1 + x_2 - 1.5 = 0$ $2x_1 - \sin(x_2 - 0.5) - 1 = 0$	14	$\tan(x_1x_2) - x_1^2 = 0$ $0.8x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$
5	$\tan(x_1x_2 + 0.4) - x_1^2 = 0$ $0.6x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$	15	$\sin(x_1 + x_2) - 1.5x_1 - 0.1 = 0$ $3x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
6	$\sin(x_2 + 1) - x_1 - 1.2 = 0$ $2x_1^2 + x_2 - 2 = 0$	16	$\tan(x_1x_2) - x_1^2 = 0$ $0.7x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$
7	$\sin(x_1 - 1) + x_2 - 0.1 = 0$ $x_1 - \sin(x_2 + 1) - 0.8 = 0$	17	$\sin(x_1 + x_2) - 1.2x_1 - 0.1 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
8	$\cos(x_1 + x_2) + 2x_2 = 0$ $x_1 + \sin x_2 - 0.6 = 0$	18	$\tan(x_1x_2 + 0.2) - x_1^2 = 0$ $0.6x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$
9	$\cos(x_1 + 0.5) - x_2 - 2 = 0$ $\sin x_2 - 2x_1 - 1 = 0$	19	$\sin(x_1 + x_2) - x_1 + 0.1 = 0$ $x_2 - \cos(3x_1) + 0.1 = 0$
10	$\sin(x_1 + x_2) - 1.6x_1 - 1 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	20	$\sin(x_2 + 1) - x_1 - 1 = 0$ $2x_2 + \cos x_1 - 0.5 = 0$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Балакин А. А. Численные методы и математическое моделирование : учебное пособие / А. А. Балакин. – Долгопрудный : Интеллект, 2022. – 288 с. // Znanium.com : электронно-библ. система. – URL: https://znanium.com/ catalog/product/1870014 (дата обращения: 10.05.2022).

2 Бахвалов Н. С. Численные методы : учебник / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – 8-е изд., 90ЭЛ. – Москва : БИНОМ. Лаб. знаний, 2015. – 639 с. // Znanium.com : электронно-библ. система. – URL: https://znanium.com/catalog/product/539069 (дата обращения: 10.05.2022).

3 Вержбицкий В. М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения) : учеб. пособие для вузов / В. М. Вержбицкий. – Москва : Высш. шк., 2000. – 266 с.: ил.

4 Денежкина И. Е. Численные методы. Курс лекций : учебное пособие / И. Е. Денежкина. – Москва : Финансовая академия, 2004. – 112 с. // Znanium.com : электронно-библ. система. – URL: https://znanium.com/catalog/product/497545 (дата обращения: 10.05.2022).

5 Козин Р. Г. Программирование численных методов линейной алгебры : учебно-методическое пособие / Р. Г. Козин. – Москва : НИЯУ «МИФИ», 2010. – 128 с. // Znanium.com : электронно-библ. система. – URL: https://znanium.com/catalog/ product/ 563303 (дата обращения: 10.05.2022).

6 Крюкова О. Г. Численные методы линейной алгебры : учебное пособие. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Магистр, 2021. – 528 с. // Znanium.com : электронно-библ. система. – URL: https://znanium.com/ catalog/product/1238539 (дата обращения: 10.05.2022).

7 Пантелеев А. В. Численные методы. Практикум : учебное пособие / А. В. Пантелеев, И. А. Кудрявцева. – Москва : ИНФРА-М, 2020. – 512 с. // Znanium.com : электронно-библ. система. – URL: https://znanium.com/ catalog/product/1028969 (дата обращения: 10.05.2022).

8 Повитухин С. А. Введение в численные методы : учебно-методическое пособие / С. А. Повитухин, Е. В. Карманова. – Москва : ФЛИНТА, 2017. – 81 с. // Znanium.com : электронно-библ. система. – URL: https://znanium.com/ catalog/product/1859860 (дата обращения: 10.05.2022).

9 Трухачев А. А. Лабораторный практикум по курсу «Численные методы» : учебное пособие / А. А. Трухачев. – Москва : НИЯУ «МИФИ», 2010. – 88 с. // Znanium.com : электронно-библ. система. URL: https://znanium.com/catalog/ product/610482 (дата обращения: 10.05.2022).

10 Шевченко А. С. Численные методы : учебное пособие / А. С. Шевченко. – Москва : ИНФРА-М, 2022. – 381 с. // Znanium.com : электронно-библ. система. – URL: https://znanium.com/catalog/ product/996207 (дата обращения: 10.05.2022).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Метод квадратного корня решения системы линейных уравнений с симметрической матрицей

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными АХ = В, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – симметрическая вещественная матрица порядка n с отличными от нуля главными минорами $A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1k} & a_{2k} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$, $(k = 1, \dots, n-1)$; а X и B – вектор-столбцы $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Для симметрической вещественной матрицы А существует такая верхняя треугольная матрица Т, что $A = T'T$, где $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$ и $T' = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$, действительно $T'T$ – симметрическая матрица, так как $(T'T)' = T'(T')' = T'T$. Найдем элементы матрицы $T'T$:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t^2{}_{11} & t_{11}t_{12} & t_{11}t_{13} & \dots & t_{11}t_{1n} \\ t_{11}t_{12} & t^2{}_{22} + t^2{}_{22} & t_{11}t_{12} + t_{22}t_{23} & \dots & t_{1n}t_{12} + t_{2n}t_{22} \\ t_{11}t_{13} & t_{13}t_{12} + t_{23}t_{22} & t_{13}^2 + t_{23}^2 + t_{33}^2 & \dots & t_{1n}^2 + t_{2n}^2 + \dots + t_{nn}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{11}t_{1n} & \dots & \dots & \dots & \sum_{k=1}^{i} t^2{}_{kj} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Формулы для поиска элементов матриц Т и T' имеют вид

$$\begin{cases} a_{1j} = t_{11}t_{1j} & (1 \le j \le n) \\ a_{ij} = t_{1i}t_{1j} + \dots + t_{ii}t_{ij} & (1 < i \le j \le n) \end{cases}$$

при $j = 1$ получим $t_{11} = \sqrt{a_{11}}$ (отсюда название метода), при $j > 1$ элементы первой строки равны $t_{ij} = \frac{a_{1j}}{t_{11}}$ $(1 < j \le n)$, $t_{11} \ne 0$.

Пусть уже найдены $t_{kj}\,(1 \le k \le j \le n)$ для всех $k < j$, $1 < i \le n$. При $i = j$ получим, что $a_{ii} = t^2{}_{1i} + \dots + t^2{}_{ii}$, отсюда $t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t^2{}_{ki}}$ $(1 < i \le n)$. Затем, если $t_{ii} \ne 0$, то при $j > i$ следует, что $t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}t_{kj}}{t_{ii}}$ $(1 < i < j \le n)$.

Покажем, что все t_{ii} отличны от нуля, используя метод от противного. Пусть $t_{ii} \ne 0 (i = 1, \dots, m-1)$, а $t_{mm} = 0$, где $1 \le m \le n-1$. Тогда для значений $t_{ij}(1 \le i \le j \le m)$, имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1m} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1m} & t_{2m} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

По теореме об определителе произведения матриц $A_m = (\prod_{i=1}^{m} t_{ii})^2 = 0$, что противоречит условию неравенства нулю главных миноров матрицы А.

Таким образом, суть метода квадратного корня заключается в следующем. Пусть дана линейная система АХ = В с симметрической вещественной матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, причем все главные миноры матрицы А отличны от нуля и $A = \mathbf{T}'\mathbf{T}$, где $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$ – верхняя треугольная матрица, тогда $\mathbf{T}'\mathbf{T}\mathrm{X} = \mathrm{B}$. Обозначим $\mathbf{T}\mathrm{X} = \mathrm{У}$, где У – вектор-столбец $\mathrm{У} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_2 \end{pmatrix}$, следовательно $\mathbf{T}'\mathrm{У} = \mathrm{B}$. Таким образом, решение исходной системы АХ=В будет сведено к решению двух систем линейных уравнений с треугольными матрицами $\mathbf{T}'\mathrm{У} = \mathrm{B}$ и $\mathbf{T}\mathrm{X} = \mathrm{У}$.

Запишем полученные системы в явном виде

$$\begin{cases} t_{11}y_1 & = b_1 \\ t_{12}y_1 + t_{22}y_2 & = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t_{1n}y_1 + t_{2n}y_2 + \dots + t_{nn}y_n & = b_n \end{cases}, \qquad \begin{cases} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \dots + t_{1n}x_n = y_1 \\ t_{22}x_2 + \dots + t_{2n}x_n = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t_{nn}y_n = y_n \end{cases}$$

и найдем значения матрицы У, а затем и матрицы Х по формулам:

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}}, \qquad y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}y_k}{t_{ii}} \qquad (1 < i \le n);$$

$$x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}, \qquad x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} t_{ik}x_k}{t_{ii}} \qquad (i < n).$$

Заметим, что полученные формулы похожи на формулы нахождения элементов матрицы Т. Вычислительная схема метода квадратного корня имеет следующий вид (таблица 1).

Таблица 1 – Схема метода квадратного корня

$\boldsymbol{a_{i1}}$	$\boldsymbol{a_{i2}}$	$\boldsymbol{a_{i3}}$	$\boldsymbol{a_{i4}}$	$\boldsymbol{a_{i5}}$	$\boldsymbol{b_i}$	$\boldsymbol{\overline{b_i}}$	***Раздел***
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	b_1	$\overline{b_1}$	
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	b_2	$\overline{b_2}$	
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	b_3	$\overline{b_3}$	***A***
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	b_4	$\overline{b_4}$	
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	b_5	$\overline{b_5}$	
$\boldsymbol{t_{i1}}$	$\boldsymbol{t_{i2}}$	$\boldsymbol{t_{i3}}$	$\boldsymbol{t_{i4}}$	$\boldsymbol{t_{i5}}$	$\boldsymbol{y_i}$	$\boldsymbol{\overline{y_i}}$	
t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}	y_1	$\overline{y_1}$	
	t_{22}	t_{23}	t_{24}	t_{25}	y_2	$\overline{y_2}$	
		t_{33}	t_{34}	t_{35}	y_3	$\overline{y_3}$	***B***
			t_{44}	t_{45}	y_4	$\overline{y_4}$	
				t_{55}	y_5	$\overline{y_5}$	
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		$\boldsymbol{x_i}$	
$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$		$\overline{x}_i$	***C***

Решение

1 Запишем коэффициенты a_{ij} и свободные члены b_i данной системы в первый раздел A таблицы 1.

2 При проведении вычислений необходимо применять контроль с помощью «контрольных сумм» – это последний столбец раздела А. Элементы $\bar{b}_i$ в разделе *А* находятся по формуле $\bar{b}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + b_i$, $i=\overline{1,n}$.

3 Применяя соответствующие формулы:

$t_{11} = \sqrt{a_{11}}$, $t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t^2{}_{ki}}$, $t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}}$, вычисляем коэффициенты $t_{ij} (i \le j)$ и записываем их в строки раздела В.

4 Элементы y_i находятся по формулам $y_1 = \frac{b_1}{t_{11}}$ и $y_i = \frac{b_{i-} \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} y_k}{t_{ii}}$ $(1 < i \le n)$. Элементы $\overline{y_i}$ находятся по аналогичным формулам $\overline{y_1} = \frac{\overline{b_1}}{t_{11}}$ и $\bar{y}_i = \frac{\bar{b}_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} \bar{y}_k}{t_{ii}}$ $(1 < i \le n)$.

5 С помощью формул $x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}$, $x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} t_{ik} x_k}{t_{ii}}$ $(i < n)$ находим значения неизвестных x_i, записывая их в раздел С. Элементы $\overline{x_i}$ находим по формулам: $\overline{x_n} = \frac{\overline{y_n}}{t_{nn}}$, $\overline{x_i} = \frac{\overline{y_i} - \sum_{k=i+1}^{n} t_{ik} \overline{x_k}}{t_{ii}}$ $(i < n)$.

Проверке подлежат равенства $\overline{y_i} = \sum_{j=i}^{n} t_{ij} + y_{ki}$ и $\overline{x_i} = x_i + 1 (i = 1, \dots, n)$.

Пример. Методом квадратного корня решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +x_4 & -x_5 & = 9{,}919 \\ 3x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & & = 6{,}955 \\ -4x_1 & -x_2 & +x_3 & -2x_4 & +x_5 & = 1{,}877 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & & +6x_5 & = 11{,}125 \\ -x_1 & & +x_3 & +6x_4 & +3x_5 & = 4{,}967 \end{cases}$$

Решение

1 Запишем коэффициенты a_{ij} и свободные члены b_i данной системы в первый раздел *А* таблицы 1.

2 Подсчитаем элементы $\bar{b}_i$ в разделе *А* по формуле $\bar{b}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + b_i$, $i=\overline{1,n}$; $\overline{\quad b}_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + b_1 = 6 + 3 - 4 + 1 - 1 + 9{,}919 = 14{,}919$.

3 Применяя соответствующие формулы, вычисляем коэффициенты $t_{ij} (i \le j)$ и записываем их в строки раздела В:

$t_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{6} = 2{,}449$; $t_{12} = \frac{a_{12}}{t_{11}} = \frac{3}{2{,}449} = 1{,}225$;

$t_{13} = \frac{a_{13}}{t_{11}} = \frac{-4}{2,449} = -1,633;$ $t_{14} = \frac{a_{14}}{t_{11}} = \frac{1}{2,449} = 0,408;$

$t_{15} = \frac{a_{15}}{t_{11}} = -\frac{1}{2,449} = -0,408.$

При проведении вычислений могут появиться комплексные (мнимые) числа, например: $t_{22} = \sqrt{a_{22-}\,t^2{}_{12}} = \sqrt{-1-(1,225)^2} = 1,871i;$

$t_{23} = \frac{a_{23}-t_{12}t_{13}}{t_{22}} = \frac{-1-1,225\cdot(-1,633)}{1.871i} = -0,535i;$ $t_{24} = \frac{a_{24}-t_{12}t_{14}}{t_{22}} = \frac{1-1,225\cdot 0,408}{1.871i} = -0,267i;$

$t_{25} = \frac{a_{25}-t_{12}t_{15}}{t_{22}} = \frac{1-1,225\cdot(-0,408)}{1.871i} = -0,267i;$

$t_{33} = \sqrt{a_{33-}\,t^2{}_{13} - t^2{}_{23}} = \sqrt{1-(-1,633)^2-(-0,535i)^2} = 1,175i;$

$t_{34} = \frac{a_{34}-t_{13}t_{14}-t_{23}t_{24}}{t_{33}} = \frac{-2-(-1,633)\cdot(0,408)-(-0,535i)\cdot(-0,267i))}{1,175i} = 0,013i;$

$t_{35} = \frac{a_{35}-t_{13}t_{15}-t_{23}t_{25}}{t_{33}} = \frac{1-(-1,633)\cdot(-0,408)-(-0,535i)\cdot(-0,267i)}{1,175i} = -0,406i;$

$t_{44} = \sqrt{a_{44} - t^2{}_{14} - t^2{}_{24} - t^2{}_{34}} = \sqrt{0-(0,408)^2-(-0,267i)^2-(1,013i)^2} = 0,965;$

$t_{45} = \frac{a_{45}-t_{14}t_{15}-t_{24}t_{25}-t_{34}t_{35}}{t_{44}} = \frac{6-(0,408)\cdot(-0,408)-(-0,267i)\cdot(-0,267i)-(1,013i)\cdot(-0,406i)}{0,965} = 6,038;$

$$t_{55} = \sqrt{a_{55-}\,t^2{}_{15} - t^2{}_{25} - t^2{}_{35} - t^2{}_{45}} = \sqrt{3-(-0,408)^2-(-0,267i)^2-(-0,406i)^2-(-6,038i)^2} = 5,778.$$

4 Элементы y_i находятся по формулам:

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}} \quad и \quad y_i = \frac{b_{i-}\sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}y_k}{t_{ii}} \qquad (1 < i \le n).$$

Например,

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}} = \frac{9,919}{2,449} = 4,049; \; y_2 = \frac{b_2 - t_{12}y_1}{t_{22}} = \frac{6,955 - 1,225\cdot 4,049}{1,871i} = -1,067i;$$

$$y_3 = \frac{b_3 - t_{13}y_1 - t_{23}y_2}{t_{33}} = \frac{1,877 — (-1,633)\cdot 4,049 — (-0,535i)\cdot(-1,067i)}{1,175i} = -7,710i;$$

$$y_4 = \frac{b_4 - t_{14}y_1 - t_{24}y_2 - t_{34}y_3}{t_{44}} = \frac{11,125 - 0,408\cdot 4,049 - (-0,267i)\cdot(-1,067i) - 1,013i\cdot(-7,710i)}{0,965} = 2,017;$$

$$y_5 = \frac{b_5 - t_{15}y_1 - t_{25}y_2 - t_{35}y_3 - t_{45}y_4}{t_{55}}$$
$$= \frac{4{,}967 - (-0{,}408)\cdot 4{,}049 - (-0{,}267i)\cdot(-1{,}067i) - (-0{,}406i)\cdot(-7{,}710i) - 6{,}038\cdot 2{,}017}{5{,}778}$$
$$= 0{,}371.$$

Элементы $\overline{y_i}$ находятся по формулам:

$$\overline{y_1} = \frac{\overline{b_1}}{t_{11}}; \quad \bar{y}_i = \frac{\bar{b}_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}\bar{y}_k}{t_{ii}} \quad (1 < i \le n).$$

5 Далее с помощью формул:

$$x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}; \qquad x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} t_{ik}x_k}{t_{ii}} \quad (i < n)$$

находим значения неизвестных x_i, записывая их в раздел С.

Например,

$$x_5 = \frac{y_5}{t_{55}} = \frac{0{,}371}{5{,}778} = 0{,}064; \qquad x_4 = \frac{y_4 - t_{45}x_5}{t_{44}} = \frac{2{,}017 - 6{,}038\cdot 0{,}064}{0{,}965} = 1{,}690;$$
$$x_3 = \frac{y_3 - t_{35}x_5 - t_{34}x_4}{t_{33}} = \frac{-7{,}710i - (-0{,}406i)\cdot 0{,}064 - 1{,}013i\cdot 1{,}690}{1{,}175i}$$
$$= -7{,}997;$$
$$x_2 = \frac{y_2 - t_{25}x_5 - t_{24}x_4 - t_{23}x_3}{t_{22}}$$
$$= \frac{-1{,}067i - (-0{,}267i)\cdot 0.064 - (-0{,}267i)\cdot 1{,}690 - (-0{,}535i)\cdot(-7{,}997)}{1{,}871i}$$
$$= -2{,}606;$$
$$x_1 = \frac{y_1 - t_{15}x_5 - t_{14}x_4 - t_{13}x_3 - t_{12}x_2}{t_{11}}$$
$$= \frac{4{,}049 - (-0{,}408)\cdot 0{,}064 - 0{,}408\cdot 1{,}690 - (-1{,}633)\cdot(-7{,}997) - 1{,}225\cdot(-2{,}606)}{2{,}449}$$
$$= -2{,}646.$$

Элементы $\overline{x_i}$ находим по формулам:

$$\overline{x_n} = \frac{\overline{y_n}}{t_{nn}},$$
$$\overline{x_i} = \frac{\overline{y_i} - \sum_{k=i+1}^{n} t_{ik}\overline{x_k}}{t_{ii}} \quad (i < n).$$

Проверка равенств $\overline{y_i} = \sum_{j=i}^{n} t_{ij} + y_{ki}$ и $\overline{x_i} = x_i + 1$ проведена.

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	b_i	$\overline{b_i}$	*Раздел*
6	3	-4	1	-1	9,919	14,919	
3	-2	-1	1	0	6,955	7,955	
-4	-1	1	-2	1	1,877	-3,123	**A**
1	1	-2	0	6	11,125	17,125	
-1	0	1	6	3	4,967	13,967	
t_{i1}	t_{i2}	t_{i3}	t_{i4}	t_{i5}	y_i	$\overline{y_i}$	
2,449	1,225	-1,633	0,408	-0,408	4,049	6,092	
	1,871i	-0,535i	-0,267i	-0,267i	-1,067i	-0,263i	
		1,175i	1,013i	-0,406i	-7,710i	-5,928i	**B**
			0,965	6,038	2,017	9,020	
				5,778i	0,371i	6,150i	
-2,646	-2,606	-7,997	1,690	0,064		x_i	
-1,646	-1,606	-6,997	2,690	1,064		$\overline{x_i}$	**C**

Задания к лабораторной работе № 3

Методом квадратного корня решить систему линейных уравнений, результаты расчета оформить в виде таблицы.

$$1\quad \begin{cases} x_1 & -3x_2 & +4x_3 & 5x_4 & -2x_5 & = -7{,}946 \\ -3x_1 & +2x_2 & -4x_3 & & +3x_5 & = 1{,}858 \\ 4x_1 & -x_2 & +5x_3 & -4x_4 & +2x_5 & = -16{,}777 \\ 5x_1 & & -4x_3 & +x_4 & -6x_5 & = 15{,}541 \\ -2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -6x_4 & & = -3{,}984 \end{cases}$$

$$2\quad \begin{cases} 2x_1 & +x_2 & & -x_4 & +3x_5 & = 7{,}443 \\ x_1 & -2x_2 & +2x_3 & & +2x_5 & = 9{,}445 \\ & 2x_2 & +3x_3 & +x_4 & -x_5 & = 5{,}356 \\ -x_1 & & +x_3 & +3x_4 & +x_5 & = 6{,}600 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & +3x_5 & = 4{,}876 \end{cases}$$

$$3\quad \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & & +3x_5 & = -2{,}186 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & +x_5 & = 0{,}966 \\ -x_1 & -x_2 & & +x_4 & +2x_5 & = 2{,}198 \\ 2x_2 & & +x_3 & +x_4 & -x_5 & = 9{,}901 \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & -x_4 & -x_5 & = -1{,}707 \end{cases}$$

$$8\quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4x_3 - x_4 - x_5 = 1{,}919 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0{,}018 \\ -4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 3x_5 = 1{,}733 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_5 = 7{,}322 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 3{,}982 \end{cases}$$

$$9\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 7{,}902 \\ 2x_1 - 8x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 6{,}955 \\ -x_1 - x_2 + 8x_3 + 4x_4 - 2x_5 = -4{,}651 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 11x_4 + 3x_5 = -0{,}690 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0{,}259 \end{cases}$$

$$10\quad \begin{cases} x_1 - 6x_2 + 12x_3 - x_4 - 5x_5 = 7{,}113 \\ -6x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 7{,}885 \\ 12x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 14x_4 = 10{,}203 \\ -x_1 + x_2 - 14x_3 + 4x_4 + x_5 = 2{,}243 \\ -5x_1 - x_2 + x_4 + 9x_5 = -6{,}945 \end{cases}$$

$$4\ \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_5 = 3{,}308 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 0{,}304 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 2{,}353 \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = -0{,}922 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 3{,}245 \end{cases}$$

$$5\ \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_5 = 1{,}272 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 2{,}567 \\ x_1 - 2x_3 + x_5 = 1{,}173 \\ 2x_2 + x_4 + x_5 = 0{,}364 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3{,}806 \end{cases}$$

$$6\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 7x_5 = 0{,}019 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 = 5{,}711 \\ -x_1 + x_2 + 8x_3 - 5x_4 + x_5 = 4{,}619 \\ x_1 - 8x_2 - 5x_3 + 6x_5 = 18{,}198 \\ 7x_1 + x_3 + 6x_4 + 12x_5 = 0{,}182 \end{cases}$$

$$7\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_5 = 0{,}543 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 - 3x_5 = 5{,}426 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 5{,}325 \\ x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 7{,}542 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 3{,}341 \end{cases}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Тест «Метод Гаусса»

Вариант № 1

1 К какому вычислительному методу линейной алгебры относится метод Гаусса?

a) к итерационному методу;

b) к методу накопления;

c) к точному методу;

d) к методу трапеции.

2 Как найти коэффициент $a_{44}^{(2)}$?

a) $a_{44}^{(2)}=a_{43}^{(2)}+a_{33}^{(2)}a_{34}^{(2)}$;

b) $a_{44}^{(2)}=a_{44}^{(1)}-a_{42}^{(1)}b_{24}$;

c) $a_{44}^{(2)}=a_{34}^{(1)}-a_{32}^{(1)}b_{24}$;

d) $a_{44}^{(2)}=b_{23}+a_{34}^{(1)}\dfrac{a_{32}^{(1)}}{b_{24}}$.

3 Какие строки разделов A, A_1, A_2, A_3 используются для нахождения значений неизвестных?

a) выделенные (последние);

b) первые;

c) третьи;

d) вторые.

4 Как вычисляется $x_1^{(0)}$ по схеме Гаусса?

a) $x_1^{(0)}=b_{16}-b_{14}x_4^{(0)}-b_{13}x_3^{(0)}-b_{12}x_2^{(0)}$;

b) $x_1^{(0)}=b_{15}-b_{14}x_4^{(0)}-b_{13}x_3^{(0)}-b_{12}x_2^{(0)}$;

c) $x_1^{(0)}=b_{16}-(b_{14}x_3^{(0)}+b_{13}x_4^{(0)}+b_{12}x_2^{(0)})$;

d) $x_1^{(0)}=b_{15}x_4^{(0)}-b_{25}x_3^{(0)}-b_{35}x_2^{(0)}$.

Вариант № 2

1 Какие разделы образуют прямой ход в вычислениях по компактной схеме Гаусса?

a) A, A_1, A_3;

b) A, A_1, A_2, A_3;

c) A_2, A_3, B;

d) A_1, A_2, A_3, B.

2 Как вычисляются контрольные суммы a_{i6}, i=1, 2, 3, 4?

a) $a_{i6} = a_{i1} - a_{i2} + a_{i3} - a_{i4} + a_{i5}$, i=1, 2, 3, 4;

b) $a_{i6} = a_{i1}a_{i2}a_{i3} + a_{i4}a_{i5}$, i=1, 2, 3, 4;

c) $a_{i6} = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + a_{i4} + a_{i5}$, i=1, 2, 3, 4;

d) $a_{i6} = a_{i1} - a_{i2} - a_{i3} - a_{i4} - a_{i5}$, i=1, 2, 3, 4.

3 Контроль обратного хода по компактной схеме Гаусса заключается в:

a) нахождении неизвестных $x_j^{(0)}$, j=1, 2, 3, 4;

b) нахождении невязок δ_i;

c) нахождении столбца контрольных сумм (Σ) в разделах A;

d) нахождении неизвестных $\overline{x_j^{(0)}}$, j=1, 2, 3, 4.

4 Как найти $a_{34}^{(1)}$?

a) $a_{34}^{(1)} = b_{14} + a_{34}a_{31}$;

b) $a_{34}^{(1)} = \dfrac{1}{a_{11}}$;

c) $a_{34}^{(1)} = a_{34} - a_{31}b_{14}$;

d) $a_{34}^{(1)} = a_{32}^{(1)}b_{12} + a_{33}^{(1)}b_{13}$.

Вариант № 3

1 Последние строки разделов A, A_1, A_2, A_3 и всех столбцов, кроме Σ и $\overline{\Sigma}$, это результат:

a) деления элементов первых строк этих разделов на ведущие элементы;

b) сложения ведущих элементов с элементами столбца свободных членов;

c) умножения элементов вторых строк этих разделов на ведущие элементы;

d) умножения первых строк этих разделов на ведущие элементы.

2 Как найти коэффициент b_{35} по компактной схеме Гаусса?

a) $b_{35} = a_{35}^{(2)} + a_{33}^{(2)}$;

b) $b_{35} = \dfrac{a_{35}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$;

c) $b_{35} = a_{33}^{(2)} - a_{33}^{(2)}b_{34}$;

d) $b_{35} = a_{33}^{(2)}a_{35}^{(2)}$.

3 С помощью чего производится текущий контроль прямого хода в схеме Гаусса?

a) с помощью столбцов j=1 и j=4;

b) с помощью столбцов j=2 и Σ;

c) с помощью выделенных строк;

d) с помощью контрольных сумм (столбцы Σ и Σ').

4 В чем заключается обратный ход в вычислениях по схеме единственного деления:

a) в нахождении невязок δ_i;

b) в проведении заключительного контроля;

c) в последовательном нахождении неизвестных x_j, j=1, 2, 3, 4;

d) в нахождении контрольных сумм.

Учебное издание

Михащенко Татьяна Николаевна

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Учебное-методическое пособие

Редактор В. С. Никифорова

Подписано в печать 27.06.2022	Формат 60x84 1/16	Бумага 80 г/м^2
Печать цифровая	Усл. печ. л. 4,25	Уч.-изд. л. 4,25
Заказ 52	Тираж 100	

Библиотечно-издательский центр КГУ.
640020, г. Курган, ул. Советская, 63, стр. 4.
Курганский государственный университет.

ISBN 978-5-4217-0619-9

9 785421 706199

Курганский
государственный
университет

Библиотечно-издательский
центр
65-48-12