Т. Н. Михащенко

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ISBN 978-5-4217-0623-6

Курганский государственный университет

Библиотечно-издательский центр

65-48-12

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курганский государственный университет»

Т. Н. Михащенко

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Учебное пособие

Курган 2022

УДК 519.61(075).8
ББК 22.193я73
М 69

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Прикладная механика» ФГБОУ ВО «Тюменский индустриальный университет», Юрий Евгеньевич Якубовский;

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Экономика» Курганского филиала РАНХиГС Вячеслав Михайлович Солодовников.

Печатается по решению методического совета Курганского государственного университета.

Михащенко Т. Н.

Уравнения с частными производными : учебное пособие / Т. Н. Михащенко. – Курган : Изд-во Курганского гос. ун-та, 2022. – 76 с.

Учебное пособие состоит из двух глав. Целью учебного пособия является знакомство студентов с методами решения уравнений с частными производными. В первой главе дается обзор методов решения уравнений с частными производными первого порядка. Во второй главе рассматриваются типы и методы решения уравнений с частными производными второго порядка. В каждой главе имеются задания для практических занятий, контрольных работ и вопросы для проверки знаний. Учебное пособие предназначено для студентов направления 01.03.01 и специальности 01.05.01.

ISBN 978-5-4217-0623-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения с частными производными достаточно сложная и серьезная дисциплина для студентов, обучающихся по направлению 01.03.01 «Математика» и по специальности 01.05.01 «Фундаментальная математика и механика». Данное учебное пособие содержит все необходимые для изучения сведения из теории уравнений с частными производными первого и второго порядков. В пособии приведены конспекты лекций по линейным, квазилинейным и нелинейным видам уравнений с частными производными первого и второго порядка, задания для практических занятий по каждой теме, варианты контрольных работ, алгоритмы решения основных видов уравнений с частными производными и контрольные вопросы к экзаменам.

1 УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1 Введение в теорию уравнений с частными производными. Основные понятия

Большинство явлений в самых разных областях физики (динамика жидкости, электричество, магнетизм, оптика, акустика и др.) может быть описано с помощью дифференциальных уравнений. Более простые случаи описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, полное описание процессов обычно приводит к дифференциальным уравнениям в частных производных. При решении дифференциальных уравнений в частных производных используется разнообразный математический аппарат: теория дифференциальных уравнений (ДУ), ряды Фурье, преобразования Фурье и Лапласа, теория функций комплексного переменного (ТФКП) и др.

Исторически математическая физика сводилась к краевым задачам для дифференциальных уравнений. Классическая матфизика развивалась со времен Ньютона параллельно с развитием физики и математики. В XVII веке исследуются дифференциальное и интегральное исчисление (И. Ньютон, Г. Лейбниц), основные законы классической механики и закон всемирного тяготения (И. Ньютон). В XVIII веке изучаются колебания струн, маятников, задачи, связанные с акустикой и гидродинамикой (Ж. Даламбер, Л. Эйлер, Д. Бернулли, Ж. Лагранж, К. Гаусс, П. Лаплас и др.). В XIX веке решаются задачи теплопроводности, диффузии, оптики, электродинамики (Ж. Фурье, С. Пуассон, Л. Больцман, О. Коши, П. Дирихле, С. Ковалевская, Д. Стокс и др.). В XX веке появляются новые разделы физики: квантовая механика, теория относительности (А. Пуанкаре, Д. Гильберт, А. Энштейн и др.). В настоящее время активно развивается физика лазеров, нанофизика и т. д.

Рассмотрим основные понятия теории дифференциальных уравнений в частных производных (ДУвЧП) [4].

Пусть имеется функция нескольких переменных
$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n), n \in N.$$

Уравнением с частными производными называется соотношение, связывающее независимые переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$, функцию u и все ее частные производные до некоторого порядка, т. е.

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial {x_1}^{k_1} \dots \partial {x_n}^{k_n}}\right) = 0,$$

где F – произвольная гладкая функция,

$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – искомая функция,

m $= k_1 + k_2 + \dots + k_n -$ порядок дифференциального уравнения в частных производных.

Порядок старшей частной производной в уравнении называется порядком ДУвЧП.

Решением ДУвЧП называется такая функция $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая при подстановке её в уравнение обращает его в тождество. Совокупность всех решений называется общим решением ДУвЧП.

Рассмотрим некоторые примеры ДУвЧП.

Пример 1. $\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = 0$ – ДУвЧП первого порядка. Решением этого уравнения является постоянная величина, не зависящая от переменной x, однако она может зависеть от переменных y и z. Иначе говоря, решением данного уравнения будет произвольная функция двух переменных $u(x, y, z) = f(y, z)$.

Пример 2. $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$ – ДУвЧП второго порядка. Пусть $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = w(x, y) \Rightarrow \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = 0$, получили уравнение, подобное первому. Его решением будет $w(x, y) = F(y)$. Вернувшись к прежним обозначениям, получим $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = F(y)$, проинтегрировав это равенство по переменной y, найдём решение исходного уравнения $u(x, y) = \int F(y) dy + f_1(x)$.

Так как интеграл берётся от произвольной функции, то он также есть функция произвольная, обозначим её $f_2(y)$, т. е. $u(x, y) = f_2(y) + f_1(x)$.

Таким образом, решение дифференциального уравнения второго порядка в частных производных зависит от двух произвольных функций.

Замечание. При решении обыкновенных дифференциальных уравнений общее решение содержало произвольные постоянные. Для ДУвЧП характерна зависимость общего решения от произвольных функций. При этом количество произвольных функций равно порядку уравнения m.

Общим решением ДУвЧП является такое его решение, которое зависит от некоторых произвольных функций.

Частным решением ДУвЧП называется решение, удовлетворяющее не только ДУвЧП, но и некоторым дополнительным условиям.

Как обычные ДУ, так и ДУвЧП могут не иметь решения или иметь несколько решений – общее решение (ОРДУвЧП). Реальные физические процессы описываются определённой (единственной) функцией – частное решение (ЧРДУвЧП).

Теорема Коши – Ковалевской. Дифференциальное уравнение, разрешённое относительно старшей производной по какой-либо переменной, т. е. представленное в виде

$$\frac{\partial^p u}{\partial x_1^p} = F(x_1, x_2, ..., x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x_1^{p-1}}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ...)$$

с дополнительными условиями при

$$x_1 = x_{10}: \quad \begin{aligned} u\Big|_{x_1 = x_{10}} &= f_0(x_2, x_3, ..., x_n), \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1 = x_{10}} &= f_1(x_2, x_3, ..., x_n), ..., \\ \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x_1^{p-1}}\bigg|_{x_1 = x_{10}} &= f_{p-1}(x_2, x_3, ..., x_n) \end{aligned}$$

имеет только одно решение, если функции f и F являются функциями аналитическими в окрестности начальных значений своих аргументов.

Эту теорему Ковалевская доказала, пользуясь методами, предложенными Коши. Потому теорема носит их совместное имя. Данную теорему мы будем использовать без доказательства.

1.2 Линейные однородные уравнения в частных производных

Для простоты рассмотрим уравнение в частных производных первого порядка для функции двух переменных $z = z(x, y)$.

$P(x,y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных (ЛОДУвЧП) первого порядка, функции P и Q зависят только от x и y и не зависят от функции z.

Характеристической системой ДУвЧП называется система вида

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=P(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=Q(x,y)\end{cases},$$

где t – некоторый параметр, а любое решение этой системы $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ называется **характеристикой ДУвЧП.** Из курса ДУ известно, что решение системы дифференциальных уравнений может быть представлено в виде первого интеграла, т. е. $\varphi(x,y)=C$, где C некоторая константа.

Теорема 1. *Первый интеграл системы характеристик* $\varphi(x,y)=C$, *является решением ДУвЧП в форме* $z=F(\varphi(x,y))$, *где F – любая гладкая функция* [4].

Доказательство. Пусть известен первый интеграл системы характеристик $\varphi(x,y)=C$, дифференциал этой функции будет равен нулю $\dfrac{d\varphi(x(t),y(t))}{dt}=0$, т. е. $\varphi'_x\dfrac{dx}{dt}+\varphi'_y\dfrac{dy}{dt}=0 \quad\to\quad \varphi'_xP(x,y)+\varphi'_yQ(x,y)=0$, получим исходное ДУвЧП первого порядка. Мы показали, что первый интеграл является решением ДУвЧП. Обратно, пусть функция $z=F(\varphi(x,y))$, где F – любая гладкая функция, является решением ДУвЧП, найдем дифференциал функции $\mathrm{d}F(\varphi(x,y))=F'_\varphi\varphi'_x\dfrac{dx}{dt}+F'_\varphi\varphi'_y\dfrac{dy}{dt}=F'_\varphi(\varphi'_x\dfrac{dx}{dt}+\varphi'_y\dfrac{dy}{dt}),\quad \mathrm{d}F(C)=0\ \to\ \varphi'_x\dfrac{dx}{dt}+\varphi'_y\dfrac{dy}{dt}=0$ следовательно $\varphi(x,y)$ является решением системы характеристик $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=P(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=Q(x,y)\end{cases}$, чтд.

Данная теорема устанавливает эквивалентность понятий первого интеграла системы дифференциальных уравнений и общего решения ЛОДУвЧП первого порядка.

Пример 3. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$ – ЛОДУвЧП первого порядка. Составим характеристическую систему $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\mathrm{x}\\ \frac{dy}{dt}=y\end{cases}$, ее решением является функция $\begin{cases}\mathrm{x}=\mathrm{c}_1e^t\\ y=\mathrm{c}_2e^t\end{cases}$, или ее первый интеграл имеет вид $\frac{x}{y}=C$, тогда решением ДУвЧП будет $z=F\left(\frac{x}{y}\right)$ или $z=F(\frac{y}{x})$.

Другой способ решения системы ДУ (СДУ) второго порядка состоит в исключении параметра t из системы и получении одного ДУ, например, $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$, тогда решением СДУ будет y = Cx, откуда $\mathrm{C}=\frac{x}{y}$. Геометрический смысл ДУвЧП $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$ заключается в равенстве нулю производной функции $z=z(x,y)$ по направлению вектора $\bar{a}$(x,y).

Приведем примеры частных решений ДУвЧП. Пусть $z_1=\frac{x}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}$, подставим в ДУвЧП $x\frac{1}{y}+y(-\frac{x}{y^2})=\frac{x}{y}-\frac{x}{y}=0.$ Аналогично функция $z_2=e^{\frac{x}{y}}$ или любая другая функция является решением ДУвЧП.

Задачей Коши для ЛОДУвЧП первого порядка называется задача о нахождении решения z = z(x; y) этого уравнения, удовлетворяющего условию $\mathrm{z}(x;y)_{(x;y)\in\gamma}=\varphi(x)$ или $\mathrm{z}(x;y)_{(x;y)\in\gamma}=\varphi(y)$, где γ – некоторая гладкая поверхность в (D), а $\varphi(x)$ или $\varphi(y)$ – заданная гладкая функция на этой поверхности.

Пример 4. Найти решения уравнения $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$. Из всех решений выделить то, которое удовлетворяет условию $z(0,y)=y^2$.

Решение. Составим уравнение $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}$, из которого находим характеристики $x^2+y^2=c$. Все решения исходного уравнения запишем в виде $z=F(x^2+y^2)$, где F – произвольная, непрерывно дифференцируемая функция. Последняя формула определяет поверхности вращения вокруг оси Oz. Найдем ту из поверхностей, которая проходит через параболу $z=y^2$ в плоскости $x=0$. Сделаем замену $a=x^2+y^2$, подставим начальные условия

$a = 0^2 + y^2 = y^2$, тогда $z = y^2 = a$, а уравнение искомой поверхности $z = x^2 + y^2$. Это уравнение определяет поверхность параболоида вращения (вокруг оси Oz).

Рассмотрим ЛОДУвЧП первого порядка функции n переменных $u = u(x_1, x_2, \dots x_n)$.

$$a_1(x_1, x_2, \dots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, x_2, \dots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$ – ЛОДУвЧП

первого порядка (или $a(x)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,\ a(x) = (a_1, a_2, \dots a_n),\quad x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ – n-мерные векторы, определенные в области D∈ R^n и не зависящие от искомой функции $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$).

Характеристическая система имеет вид $\dot{x} = a(x)$ (или $\dfrac{dx_i}{dt} = a_i(x_1, x_2, \dots x_n), i = \overline{1;n}$), ее решение имеет n первых интегралов, зависящих от параметра t, или (n-1) первый интеграл, вида $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_i$).

Теорема 2. *Функция* $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *является решением ЛОДУвЧП первого порядка тогда и только тогда, когда она является первым интегралом системы уравнений характеристик.*

Общее решение ДУвЧП можно построить в виде $u(x) = G(F(x)_1, F_2(x), \dots F_{n-1}(x))$, где система $F_i(x_1, x_2, \dots x_n) = C_i$ является полным интегралом характеристической системы.

Т. к. первые интегралы постоянны, $a(x)\dfrac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} \dot{x}_i \dfrac{\partial G}{\partial F_j}\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{\partial G}{\partial F_j}\dfrac{\mathrm{d}F_j}{\mathrm{dt}} = \sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{\partial G}{\partial F_j}\,0 = 0,$ таким образом, если возможно решить систему дифференциальных уравнений, значит, будет решено и ЛОДУвЧП первого порядка.

Задачей Коши для ЛОДУвЧП первого порядка называется задача о нахождении решения $u = u(x)$ этого уравнения, удовлетворяющего условию $u(x)_{x\in\gamma} = \varphi(x)$, где γ – некоторая гладкая гиперповерхность в D, а $\varphi(x)$ – заданная гладкая функция на этой гиперповерхности.

Гиперповерхность – это многообразие, размерность которого на единицу меньше, чем у всего пространства (n-1). Если в общее решение подставить начальную гиперповерхность, то получим функциональное уравнение, которое дает частное решение. Гиперповерхность γ называется начальной гиперповерхностью, а функция $\varphi(x)$ – начальным условием.

Точка x на начальной гиперповерхности γ называется **нехарактеристической**, если характеристика, проходящая через эту точку, не касательна к начальной гиперповерхности.

Теорема 3. *Пусть* x *– нехарактеристическая точка на начальной гиперповерхности* γ. *Тогда существует такая окрестность точки* x, *что задача Коши для линейного однородного уравнения в этой окрестности имеет единственное решение.*

Пример 5. Найти общее решение ЛОДУвЧП $(x-y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(y-z)\dfrac{\partial u}{\partial y}+2z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

Решение. Составим систему характеристик $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=y-z\\ \dfrac{dz}{dt}=2z\end{cases}$, или в симметрической форме $\dfrac{dx}{x-z}=\dfrac{dy}{y-z}=\dfrac{dz}{2z}$. Складывая первое и третье уравнения, а затем второе и третье, получим два первых интеграла (общий интеграл) $\dfrac{(x+z)^2}{z}=C_1$, $\dfrac{(y+z)^2}{z}=C_2$, тогда общее решение ЛОДУвЧП имеет вид $u=F(\dfrac{(x+z)^2}{z};\dfrac{(y+z)^2}{z})$.

Пример 6. Найти частное решение ЛОДУвЧП $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+2\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u(x;1;z)=xz$.

Решение. Составим систему характеристик $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=1\\ \dfrac{dy}{dt}=1\\ \dfrac{dz}{dt}=2\end{cases}$, и решим ее в виде $\begin{cases}x=t+C_1\\ y=t+C_2\\ z=2t+C_3\end{cases}$ или в виде общего интеграла $x-y=C_1$, $2x-z=C_2$.

ОРДУвЧП имеет вид $u=F(x-y;2x-z)$. Сделаем замену переменных $x-y=a,\quad 2x-z=b$, и применим начальные условия $u(x;1;z)=xz$, тогда $x-1=a,\quad x=a+1$, $2(a+1)-z=b,\quad z=2a+2-b$, следовательно $u=xz=(a+1)(2a+2-b)$ или $u=(x-y+1)(2(x-y)+2-(2x-z))$, частное решение ЛОДУвЧП имеет вид $u=(x-y+1)(2-2y+z))$.

Замечание. Основные свойства ЛОДУвЧП во многом аналогичны свойствам обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (ОЛДУ), например, линейная комбинация решений ЛОДУвЧП также является решением этого уравнения, а общее решение линейного неоднородного ДУвЧП (ЛНДУвЧП) может быть представлено в виде суммы некоторого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения (уон = уоо+учн).

1.3 Линейные неоднородные уравнения в частных производных

Линейным неоднородным уравнением первого порядка с частными производными называется уравнение вида $a_1(x_1,...,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+a_2(x_1,...,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+...+a_n(x_1,...,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_n}=b(x_1,...,x_n)$ или $a(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}=b(x)$.

Основные свойства ЛНДУвЧП аналогичны свойствам обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, т. е. общее решение ЛНДУвЧП может быть представлено в виде суммы некоторого частного решения и общего решения соответствующего ЛОДУвЧП ($у_{он}=у_{оо}+у_{чн}$). Дополним характеристическую систему еще одним уравнением, которое получается при подстановке найденных характеристик ($x_i=x_i(t)$) в исходное уравнение $a(x(t))\dfrac{du}{dt}=b(x(t))$, получим систему вида $\begin{cases}\dfrac{dx_i}{dt}=a_i(x_1,x_2,...x_n),\ i=\overline{1;n},\\ \dfrac{du}{dt}=b(x_1(t),x_2(t),...x_n(t)).\end{cases}$

Теорема 4. *Общее решение ЛНДУвЧП определяется формулой* $u(x)=G(F_1,F_2,...F_{n-1})+\int\limits_{t_0}^{t}b(x_i(t))\,dt$, *где Fi = C – первые (n-1) интегралы системы характеристик (общий интеграл)* [4].

Пример 7. Найти решение уравнения $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$, которое удовлетворяет условию $z(x,1)=x$.

Решение. Уравнения характеристик имеют вид $\frac{dx}{dt}=x,\ \frac{dy}{dt}=y, \frac{dz}{dt}=1$. Найдем решения этих уравнений: $x=c_1e^t,\ y=c_2e^t$, запишем их в виде общего интеграла $\frac{x}{y}=C$, ОРДУвЧП имеет вид $z=F(\frac{x}{y})$. Далее найдем общее решение ЛНДУвЧП $\frac{dz}{dt}=1, \quad z=t+C$, или $z=t+F(\frac{x}{y})$. Из системы характеристик выразим t через x и y: $z=\ln y$ (или $z=\ln x$), пусть $\frac{x}{y}=a$, подставим начальные условия $z(x,1)=x$ или $\frac{x}{1}=a$, значит, $z=a$, $z=\frac{x}{y}$ следовательно, $z(x,y)=\frac{x}{y}+\ln y$ – частное решение ЛНДУвЧП первого порядка.

1.4 Квазилинейные уравнения в частных производных

Квазилинейное уравнение имеет вид $a(x;u)\frac{\partial u}{\partial x}=b(x;u)$ или $a_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+...+a_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=b(x_1,...,x_n,u)$, оно отличается от линейного неоднородного уравнения наличием искомой функции u в коэффициентах при $\frac{\partial u}{\partial x}$. Термин «квазилинейное» означает, что по виду ДУвЧП похоже на линейное, но таковым не является (свойства линейности решений не выполняется). Система характеристик имеет вид $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=a(x;u)\\ \frac{du}{dt}=b(x;u)\end{cases}$ или

$\begin{cases}\frac{dx_i}{dt}=a_i(x_1,x_2,...x_n,u),\ i=\overline{1;n}\\ \frac{du}{dt}=b(x_1(t),x_2(t),...x_n(t),u)\end{cases}$, но теперь последнее уравнение нельзя решать отдельно, т. е. будем искать уже n независимых первых интегралов системы характеристик: $F_i(x_1,x_2,...x_n)=C_i$, где $i=\overline{1,n}$. Общее решение ДУвЧП будет иметь вид $G(F_1(x,u),F_2(x,u),...F_n(x,u))=0$. Докажем это $\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial G}{\partial F_к}(\frac{\partial F_к}{\partial x_i}+\frac{\partial F_к}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i})=0.$

Рассмотрим уравнение в частных производных первого порядка для функции двух переменных $P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)$. Будем считать, что функции P, Q, R не обращаются в нуль одновременно и непрерывны в некоторой рассматриваемой области.

Пусть искомая функция найдена, т. е. $z=z(x,y)$. Её полный дифференциал равен $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ или $\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy-dz=0$.

Вектор $d\vec{l}=dx\cdot i+dy\cdot j+dz\cdot k$ лежит в плоскости, касательной к поверхности, описываемой уравнением $z=z(x,y)$, а нормальный вектор $\frac{\partial z}{\partial x}i+\frac{\partial z}{\partial y}j-k=\vec{N}$ в скалярном произведении с вектором касательной даёт нуль, т. е. вектор с координатами $\vec{M}=(P,Q,R)$ перпендикулярен вектору нормали и, значит, тоже лежит в плоскости, касательной к поверхности.

Кривая, касательная в каждой точке которой совпадает с вектором $\vec{M}$, называется векторной линией. Для отыскания векторных линий можно составить уравнение, вытекающее из коллинеарности векторов $d\vec{l}$ и $\vec{M}$

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Это система характеристик для исходного уравнения. Её решение есть два интеграла $f_1(x,y,z)=c_1$ и $f_2(x,y,z)=c_2$ или неявно $F(c_1,c_2)=0$.

В том случае, когда нужно найти уравнение интегральной поверхности параметрически, нужно параметрически решать и систему характеристик, тогда $\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}=dt$. Решив эту систему, получим, три функции $x=x(t,c_1(s)),\quad y=y(t,c_2(s)),\quad z=z(t,c_3(s))$, каждая из которых зависит от двух параметров, а значит, вместе они определяют поверхность [2].

Разработаем **алгоритм** решения квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных функции двух переменных. Пусть требуется решить уравнение $P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)$.

1.1 Выписываем P, Q, R и составляем систему $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$.

1.2 Ищем решение системы в виде интегралов $f_1(x,y,z)=C_1$ и $f_2(x,y,z)=C_2$, составляем решение в явном виде $C_1=f(C_2)$ и выражаем, если возможно z = F(x, y).

1.3 Записываем начальные условия в виде: $\varphi_1(x, y, z) = 0,\ \ \varphi_2(x, y, z) = 0$ и решаем систему $\begin{cases} f_1(x, y, z) = C_1 \\ f_2(x, y, z) = C_2 \\ \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ (исключая переменные x, y, z, находим C_1, C_2).

1.4 Делаем проверку: $\frac{\partial z}{\partial x},\ \ \frac{\partial z}{\partial y},\ \ z.$

2.1 Выписываем P, Q, R и составляем систему $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$.

2.2 Ищем решение системы в виде интегралов $f_1(x, y, z) = c_1$ и $f_2(x, y, z) = c_2$, составляем решение в неявном виде $F(f_1, f_2) = 0$ или $F(c_1, c_2) = 0$.

2.3 Записываем начальные условия в виде: $\varphi_1(x, y, z) = 0,\ \ \varphi_2(x, y, z) = 0$ и решаем систему $\begin{cases} f_1(x, y, z) = C_1 \\ f_2(x, y, z) = C_2 \\ \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ (исключая переменные x, y, z, находим C_1, C_2).

2.4 Делаем проверку $F(c_1, c_2) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial C_1}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial C_2}\frac{\partial C_2}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial C_1}\frac{\partial C_1}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial C_2}\frac{\partial C_2}{\partial z}};\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial C_1}\frac{\partial C_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial C_2}\frac{\partial C_2}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial C_1}\frac{\partial C_1}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial C_2}\frac{\partial C_2}{\partial z}}.$$

3.1 Выписываем P, Q, R и составляем систему в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P, \\ \frac{dy}{dt} = Q, \\ \frac{dz}{dt} = R. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = P, \\ y' = Q, \\ z' = R. \end{cases}$$

3.2 Ищем решение системы в виде функций $\begin{cases} x = x(t, C_1) \\ y = y(t, C_2) \\ z = z(t, C_3) \end{cases}$. Далее вводим еще один параметр s так, чтобы $\begin{cases} C_1 = C_1(\mathrm{s}) \\ C_2 = C_2(\mathrm{s}) \\ C_3 = C_3(\mathrm{s}) \end{cases}$, т. е. получаем поверхность, заданную параметрически $\begin{cases} x = x(t, C_1(\mathrm{s})) \\ y = y(t, C_2(\mathrm{s})) \\ z = z(t, C_3(\mathrm{s})) \end{cases}$.

3.3 Решаем систему $\begin{cases} x = x(t, C_1(\mathrm{s})) \\ y = y(t, C_2(\mathrm{s})) \\ z = z(t, C_3(\mathrm{s})) \\ \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ при начальном условии t = 0, вводим параметр s, составляем частное решение.

3.4 Делаем проверку: находим зависимость между dt и ds при условии, что $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\frac{\partial z}{\partial t}dt + \frac{\partial z}{\partial s}ds}{\frac{\partial x}{\partial t}dt + \frac{\partial x}{\partial s}ds}, \quad y = 0, \; dy = 0;$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\frac{\partial z}{\partial t}dt + \frac{\partial z}{\partial s}ds}{\frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial y}{\partial s}ds}, x = 0, \; dx = 0.$

1.5 Нелинейные уравнения в частных производных

Нелинейным ДУвЧП первого порядка называется уравнение вида

F(x, p, u) = 0,

где x = x(x1; x2; ...xn), p = ($\frac{\partial u}{\partial x_1}$;$\frac{\partial u}{\partial x_2}$;...$\frac{\partial u}{\partial x_n}$), u = u(x1; x2; ...xn).

В этом уравнении использованы обозначения Монжа ($\frac{\partial z}{\partial \mathrm{x}} = p, \frac{\partial z}{\partial \mathrm{y}} = q$). Это уравнение задает гиперповерхность в (2n+1) – мерном расширенном фазовом пространстве (n – координат, n – импульсов и функция u). Нелинейное уравнение это и есть общее уравнение ДУвЧП первого порядка $F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0.$

Квазилинейное ДУвЧП ($a(x;u)\frac{\partial u}{\partial x} = b(x;u)$) является частным случаем нелинейного уравнения с линейной по частным производным функцией

$F = a(x;u)\dfrac{\partial u}{\partial x} - b(x;u)$. Выведем уравнения характеристик: продифференцируем F по хк, получим $\dfrac{\partial F}{\partial x_k} + \dfrac{\partial F}{\partial p_i}\dfrac{\partial p_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \dfrac{\partial F}{\partial x_k} + \dfrac{\partial F}{\partial p_i}\dfrac{\partial p_k}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F}{\partial u} p_k = 0$, т. е. получим систему квазилинейных уравнений относительно p: $\dfrac{\partial F}{\partial p_i}\dfrac{\partial p_k}{\partial x_i} = -\dfrac{\partial F}{\partial u} p_k - \dfrac{\partial F}{\partial x_k}$, для которой система характеристик имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial p_i}, \quad i = \overline{1;n}, \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_i} - \dfrac{\partial F}{\partial u} p_i, \quad i = \overline{1;n}, \\ \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial p_i} p_i. \end{cases}$$

или в векторном виде: $\dot{x} = F_p, \quad \dot{p} = -F_x - pF_u, \quad \dot{u} = pF_p$.

Последнее уравнение появилось из первого, с учетом определения p: $\dot{u} = u_x \dot{x}$, так как для общего решения необходимо n первых интегралов системы характеристик. Общее решение может иметь неявный вид $G(f_1, f_2, \dots f_{2n}) = 0$ или параметрический вид [4].

Рассмотрим функцию двух переменных $z = z(x;y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = p$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = q$, тогда нелинейное ДУвЧП примет вид $F(x,y,z,p,q) = 0$, а характеристическая система $x' = F'_p, \quad y' = F'_q, \quad p' = -F'_x - pF'_z, \quad q' = -F'_y - qF'_z, \quad z' = \dfrac{\partial z}{\partial x}x' + \dfrac{\partial z}{\partial y}y' = pF'_p + F'_q q.$

Решать систему можно как в параметрическом виде, так и в виде общего интеграла.

Более простой задачей является решение не одного нелинейного ДУвЧП, а системы двух совместных уравнений ДУвЧП первого порядка. Рассмотрим систему, $\begin{cases} F(x,y,z,p,q) = 0 \\ G(x,y,z,p,q) = 0 \end{cases}$, где $\dfrac{\partial z}{\partial x} = p, \dfrac{\partial z}{\partial y} = q$. Предположим, что она разрешима относительно частных производных $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = A(x,y,z), \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = B(x,y,z). \end{cases}$

Два уравнения, содержащие только одну функцию z = z(x, y) не являются совместными (это были бы совпадающие ДУвЧП), выясним условия совместности, т. е. условия, при которых система имеет бесконечное множество решений. Продифференцируем первое уравнение по y, а второе по x: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial A}{\partial y} + \dfrac{\partial A}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}$ или $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial A}{\partial y} + \dfrac{\partial A}{\partial z}B$, и соответственно $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial B}{\partial x} + \dfrac{\partial B}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}$ или

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial B}{\partial x} + \dfrac{\partial B}{\partial z} A$. Из равенства смешанных производных имеем $\dfrac{\partial A}{\partial y} + \dfrac{\partial A}{\partial z} B = \dfrac{\partial B}{\partial x} + \dfrac{\partial B}{\partial z} A$ или $A'_y + A'_z B - B'_x - B'_z A = 0.$

Пример 8. Решить систему $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = z + yz, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = z^2 + 2xz. \end{cases}$

Решение.

$$A'_y + A'_z B - B'_x - B'_z A = z + (1+y)(z^2 + 2xz) - 2z - (2z + 2x)(z + yz) = z(-1 - z(1+y)) = 0$$

Получаем или z = 0, или z = -1/(y+1). Проверка показывает, что z = 0 является решением системы ДУвЧП.

Для разработки алгоритма решения нелинейных уравнений рассмотрим уравнение Пфаффа для функции двух переменных. Уравнением Пфаффа называется уравнение, вида

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0,$$

где P, Q, R – непрерывные и дифференцируемые функции в области (D).

Геометрический смысл уравнения Пфаффа состоит в следующем. Рассмотрим пространство R^3, область (D), и векторное поле F (P, Q, R), пусть ни в одной точке области (D) не выполняется P = Q = R = 0 (это условие особых точек). Очевидно, что уравнению Пфаффа удовлетворяет решение $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, т. к. dx = dy = dz = 0 (тривиальное решение). Рассмотрим еще вектор l (dx, dy, dz), перпендикулярный вектору F (P, Q, R), т. к. их скалярное произведение равно нулю. Уравнение Пфаффа в векторном виде примет вид $\mathrm{F} \cdot \ell = 0$.

Предположим, что уравнению Пфаффа удовлетворяет функция z = z(x, y), выразим ее дифференциал из уравнения $dz = -\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}} dx + \dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}} dy,$ с другой стороны, дифференциал функции двух переменных равен $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x} dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} dy,$ следовательно, получим систему двух уравнений: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}$, такую систему мы рассматривали в предыдущем параграфе. При выполнении условия $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = A(x, y, z) \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = B(x, y, z) \end{cases}$ $A'_y + A'_z B - B'_x - B'_z A = 0.$ Говорят, что уравнение Пфаффа интегрируется одним соотношением. Вид условия следующий:

$$\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{P}{R})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{P}{R})\frac{Q}{R}+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{Q}{R})-\frac{\partial}{\partial z}(\frac{Q}{R})\frac{P}{R}=0,$$

получим:

$$(-\frac{\frac{\partial P}{\partial y}R-P\frac{\partial R}{\partial y}}{R^2})+(\frac{\frac{\partial P}{\partial z}R-\frac{\partial R}{\partial z}P}{R^2})\frac{Q}{R}+(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}R-Q\frac{\partial R}{\partial x}}{R^2})-(\frac{\frac{\partial Q}{\partial z}R-\frac{\partial R}{\partial z}Q}{R^2})\frac{P}{R}=0 \quad \Big|R^3,$$

$$-R^2\frac{\partial P}{\partial y}+PR\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}RQ-\frac{\partial R}{\partial z}PQ+\frac{\partial Q}{\partial x}R^2-QR\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial z}RP+\frac{\partial R}{\partial z}QP=0,$$

$$R^2(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})+PR(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})+RQ(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})=0 \quad \Big|\frac{1}{R},$$

$$P(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})+Q(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})+R(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})=0 \quad \Big|(-1),$$

$$P(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y})+Q(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z})+R(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})=0.$$

В теории поля есть понятие ротора (вихря) векторного поля (точечная характеристика существования вращательных движений векторного поля), тогда условие примет вид F•rotF = 0, где ротор вычисляется по формуле

$$\mathrm{rotF}=(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y})\vec{i}+(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z})\vec{j}+(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})\vec{k},$$

через определитель и оператор «набла» $\vec{\nabla}=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$,

$$\mathrm{rotF}=(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y})\vec{i}+(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z})\vec{j}+(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})\vec{k}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$ если ротор равен нулю, то поле потенциально, тогда можно найти его по формуле u(x, y, z) = $\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz.$ Таким образом, условие полной интегрируемости уравнения Пфаффа rotF = 0.

Рассмотрим случай, когда для уравнения Пфаффа не выполняется условие полной интегрируемости. Запишем его в виде $P(x,y,z)+Q(x,y,z)\frac{dy}{dx}+R(x,y,z)\frac{dz}{dx}=0$ и получим одно дифференциальное уравнение с двумя неизвестными функциями y = y(x) и z = z(x). Задача его интегрирования допускает высокую степень произвола, например, одну искомую функцию можно выбрать произвольным образом: z = f(x), получим одно дифференциальное уравнение с одной переменной:

$P(x,y,\mathrm{f(x)})+Q(x,y,\mathrm{f(x)})\dfrac{dy}{dx}+R(x,y,\mathrm{f(x)})\mathrm{f}'(\mathrm{x}))=0$, решая которое найдем и функцию y = g(x; C). Решением уравнения Пфаффа будет многообразие $\begin{cases}\mathrm{z=f(x)}\\ \mathrm{y=g(x(C)}\end{cases}$, что геометрически определяет произвольный цилиндр с образующими, параллельными оси Оу (z = f(x)), а второе уравнение определяет семейство кривых на этом цилиндре.

Рассмотрим полный, общий и особый интегралы нелинейного уравнения в частных производных первого порядка.

Пусть уравнение $F(x,y,z,p,q)=0$, где $z=z(x;y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=p$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=q$, можно разрешить относительно p (или q), тогда нелинейное ДУвЧП примет вид $p=f(x,y,z,q)$.

Полным интегралом будем называть такое решение ДУвЧП, которое зависит от двух произвольных постоянных a, b и трех переменных x, y, z, оно может иметь вид V(x, y, z, a, b) = 0 или z = φ(x, y, a, b). Тогда ДУвЧП эквивалентно системе $\begin{cases}\mathrm{V(x,y,z,a,b)}=0\\ \dfrac{\partial V}{\partial x}+\dfrac{\partial V}{\partial z}p=0\\ \dfrac{\partial V}{\partial y}+\dfrac{\partial V}{\partial z}q=0\end{cases}$ или $\begin{cases}\mathrm{z}=\varphi(\mathrm{x,y,a,b})\\ p=\varphi'_x(x,y,\mathrm{a,b})\\ q=\varphi'_y(x,y,\mathrm{a,b})\end{cases}$, если исключить из нее a и b, то получится исходное ДУвЧП. Решая ДУвЧП ранее, мы получали решения, зависящие от произвольной функции. Лагранж показал, что все ДУвЧП первого порядка могут быть получены из полного интеграла путем вариации постоянных a и b, при этом требуются только операции дифференцирования и исключения.

Пусть a и b – некоторые функции от x и y, тогда $\begin{cases}\dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial x}=\varphi'_x+\varphi'_a\dfrac{\partial a}{\partial x}+\varphi'_b\dfrac{\partial b}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial y}=\varphi'_y+\varphi'_a\dfrac{\partial a}{\partial y}+\varphi'_b\dfrac{\partial b}{\partial y}\end{cases}$,

следовательно a и b должны удовлетворять условиям $\begin{cases}\varphi'_a\dfrac{\partial a}{\partial x}+\varphi'_b\dfrac{\partial b}{\partial x}=0\\ \varphi'_a\dfrac{\partial a}{\partial y}+\varphi'_b\dfrac{\partial b}{\partial y}=0\end{cases}$, из

которых следует $\begin{cases}\varphi'_a(x,y,a,b)=0\\ \varphi'_b(x,y,a,b)=0\end{cases}$. Выразим из данной системы a = a(x, y) и b = b(x, y) и получим функцию z = z(x, y), не зависящую от произвольных постоянных и от произвольных функций, – это будет ***особое решение*** ДУвЧП.

Или имеем $\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$, здесь тоже возможны два исхода: либо все частные производные равны нулю и a = C_1, b = C_2, в этом случае решение выглядит как полный интеграл z = φ(x, y, a, b), либо равенство определителя нулю показывает некоторую функциональную связь между a и b, которая может быть представлена произвольной функцией b = u(a(x, y)), следовательно, приходим к виду решения ДУвЧП с одной произвольной функцией, называемой ***общим интегралом ДУвЧП.***

Аналогично для неявного вида решения ДУвЧП V(x, y, z, a, b) = 0, условия имеют вид $\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} p + \frac{\partial V}{\partial \mathrm{a}} \frac{\partial \mathrm{a}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial V}{\partial \mathrm{b}} \frac{\partial \mathrm{b}}{\partial \mathrm{x}} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} q + \frac{\partial V}{\partial \mathrm{a}} \frac{\partial \mathrm{a}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial V}{\partial \mathrm{b}} \frac{\partial \mathrm{b}}{\partial \mathrm{y}} = 0, \end{cases}$ значит, и $\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \mathrm{a}} \frac{\partial \mathrm{a}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial V}{\partial \mathrm{b}} \frac{\partial \mathrm{b}}{\partial \mathrm{x}} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \mathrm{a}} \frac{\partial \mathrm{a}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial V}{\partial \mathrm{b}} \frac{\partial \mathrm{b}}{\partial \mathrm{y}} = 0, \end{cases}$

откуда следуют те же три случая для a и b.

Лагранж доказал, что тремя видами (полным, общим или особым решениями) исчерпываются все решения ДУвЧП, более того одному ДУвЧП соответствует бесконечное множество полных интегралов.

Геометрическая интерпретация данных решений состоит в следующем. Полный интеграл представляет собой семейство интегральных поверхностей, зависящих от двух параметров. Общий интеграл геометрически определяет огибающую семейства поверхностей, зависящих от одного параметра, а особое решение – это огибающая семейства двух параметров, если она существует [1].

Пример 9. Рассмотрим семейство шаровых поверхностей радиуса R, центр которых лежит в плоскости z (x-a)2+(y-b)2+z_2 = R_2. Составим ДУвЧП, соответствующее этому семейству поверхностей как общему интегралу. Продифференцируем его по x и y из системы исключим a и b: $\begin{cases} 2(x-a) + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ 2(y-b) + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x - a + zp = 0 \\ y - b + zq = 0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x - a = -zp \\ y - b = -zq \end{cases}$. Получим ДУвЧП $z_2(1+p_2+q_2) = R_2$. Для получения общего интеграла введем дополнительное условие: пусть центры шаров лежат на кривой y = f(x), z = 0, тогда и огибающая поверхность будет решением ДУвЧП. Особым решением в данном случае будут две параллельные плоскости z = $\mp R$.

Рассмотрим **метод Лагранжа – Шарпи** для нахождения полного интеграла. Пусть дано уравнение: $F(x,y,z,p,q)=0,$ где $z=z(x;y),$ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=p,$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=q,$ постараемся найти второе уравнение: $\Phi(x,y,z,p,q)=a,$ где a = const, такое, чтобы система $\begin{cases}F(x,y,z,p,q)=0\\ \Phi(x,y,z,p,q)=a\end{cases}$ удовлетворяла условию полной интегрируемости и была разрешима относительно p и q. Приведем систему к виду $\begin{cases}p=A(x,y,z)\\ q=B(x,y,z)\end{cases}$, тогда условие полной интегрируемости ($A'_y+A'_zB-B'_x-B'_zA=0$) запишется как $\dfrac{\partial p}{\partial y}+\dfrac{\partial p}{\partial z}q-\dfrac{\partial q}{\partial x}-\dfrac{\partial q}{\partial z}p=0,$ через производные неявных функций:

$$\begin{cases}F'_z+F'_p\dfrac{\partial p}{\partial z}+F'_q\dfrac{\partial q}{\partial z}=0\\ \Phi'_z+\Phi'_p\dfrac{\partial p}{\partial z}+\Phi'_q\dfrac{\partial q}{\partial z}=0\end{cases};\quad \begin{cases}F'_x+F'_p\dfrac{\partial p}{\partial x}+F'_q\dfrac{\partial q}{\partial x}=0\\ \Phi'_x+\Phi'_p\dfrac{\partial p}{\partial x}+\Phi'_q\dfrac{\partial q}{\partial x}=0\end{cases};\quad \begin{cases}F'_y+F'_p\dfrac{\partial p}{\partial y}+F'_q\dfrac{\partial q}{\partial y}=0\\ \Phi'_y+\Phi'_p\dfrac{\partial p}{\partial y}+\Phi'_q\dfrac{\partial q}{\partial y}=0\end{cases};$$

и по формулам Крамера имеем: $\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial z}=-\dfrac{\begin{vmatrix}F'_z & F'_q\\ \Phi'_z & \Phi'_q\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_p & F'_q\\ \Phi'_p & \Phi'_q\end{vmatrix}}\\ \dfrac{\partial q}{\partial z}=-\dfrac{\begin{vmatrix}F'_p & F'_z\\ \Phi'_p & \Phi'_z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_p & F'_q\\ \Phi'_p & \Phi'_q\end{vmatrix}}\end{cases};\ \dfrac{\partial q}{\partial x}=-\dfrac{\begin{vmatrix}F'_p & F'_x\\ \Phi'_p & \Phi'_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_p & F'_q\\ \Phi'_p & \Phi'_q\end{vmatrix}};\ \dfrac{\partial p}{\partial y}=-\dfrac{\begin{vmatrix}F'_y & F'_q\\ \Phi'_y & \Phi'_q\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_p & F'_q\\ \Phi'_p & \Phi'_q\end{vmatrix}},$

тогда при условии, что знаменатель не равен нулю, имеем $-\begin{vmatrix}F'_y & F'_q\\ \Phi'_y & \Phi'_q\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}F'_z & F'_q\\ \Phi'_z & \Phi'_q\end{vmatrix}q+\begin{vmatrix}F'_p & F'_x\\ \Phi'_p & \Phi'_x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}F'_p & F'_z\\ \Phi'_p & \Phi'_z\end{vmatrix}p=0$ или $\begin{vmatrix}F'_p & F'_x+F'_zp\\ \Phi'_p & \Phi'_x+\Phi'_zp\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}F'_q & F'_y+F'_zq\\ \Phi'_q & \Phi'_y+\Phi'_zq\end{vmatrix}=0$.

Для производных от известной функции введем обозначения $F'_x=X,$ $F'_y=Y,$ $F'_z=Z,$ $F'_p=P, F'_q=Q,$ тогда, раскрывая определители в последнем равенстве, получим для неизвестной функции Φ(x, y, z, p, q) линейное ДУвЧП $P\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}+Q\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}+(Pp+Qq)\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}-(X+Zp)\dfrac{\partial \Phi}{\partial P}-(Y+Zq)\dfrac{\partial \Phi}{\partial q}=0,$ оно решается с помощью системы дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{P}=\dfrac{dy}{Q}=\dfrac{\mathrm{dz}}{\mathrm{Pp+Qq}}=-\dfrac{\mathrm{dp}}{\mathrm{X+Zp}}=-\dfrac{dq}{Y+Zq}.$ Найдем одно решение, содержащее произвольное постоянное, и получим $\Phi(x,y,z,p,q)=a,$ далее найдем p = p(x, y, z, a) и q = q(x, y, z, a), подставим их в уравнение Пфаффа

$dz = pdx + qdy$ и согласно нашему предположению проинтегрируем, в его общее решение войдет вторая константа b, получим полный интеграл уравнения V(x, y, z, a, b) = 0.

Если исходное ДУвЧП не содержит в своей форме искомой функции z, метод Лагранжа – Шарпи упрощается, поскольку ищем функцию Ф(x, y, p, q), получаем $\begin{vmatrix} F'_p & F'_x \\ \Phi'_p & \Phi'_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F'_q & F'_y \\ \Phi'_q & \Phi'_y \end{vmatrix} = 0$ и $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = -\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{X}} = -\frac{dq}{Y}$, тогда уравнение Пфаффа интегрируется в квадратурах $dz = pdx + qdy$.

Говорят, что функции F и Ф находятся в инволюции, т. е. первый шаг метода Лагранжа – Шарпи состоит в отыскании уравнения, находящегося в инволюции с первым.

Рассмотрим **частные случаи поиска полного интеграла и решения задачи Коши** [4; 5].

1 Уравнение вида F(p; q) = 0. Уравнение p = a находится в инволюции с данным, т. к. $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = -\frac{\mathrm{dp}}{0} = -\frac{dq}{0}$, определим из исходного уравнения q = f(a) и составим уравнение Пфаффа dz = adx+f(a)dy, тогда z = ax+f(a)y+b – полный интеграл.

Пример 10. Решить уравнение $(\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial y})^2 = 1$ или p2+q2 = 1, уравнение p = a, заменим на p = cosa, тогда q2 = 1-cos2a = sin2a, и полный интеграл имеет вид: z = xcosa+ysina+b.

2 Уравнение вида F(z; p; q) = 0, имеем $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{Pp+Qq}} = -\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{Zp}} = -\frac{dq}{Zq}$, откуда из двух последних равенств получим $\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{p}} = \frac{dq}{q}$, и дополнительное уравнение имеет вид $q = ap$. После подстановки в уравнение Пфаффа получаем F(z; p; ap) = 0, p = f(z, a), dz = f(z, a)dx+af(z, a)dy или $\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{f(z,a)}} = dx + ady$, откуда найдем z.

3 Уравнение вида f(x; p) = g(y; q). $\frac{dx}{f'_p} = -\frac{\mathrm{dp}}{f'_x}$, $f'_p dp + f'_x\,dx = 0$ вспомогательное уравнение имеет вид f(x; p) = a, тогда и g(y; q) = a. Выразим p через x, a (q через y, a), получим dz = F(x; a)dx+G(y; a)dy и

$$z = \int F(x;a)dx + \int G(y;a)dy + b.$$

4 Обобщенное уравнение Клеро z = px+qy+f(p, q). Его решением является z = ax+by+f(a, b).

Метод Коши при интегрировании уравнений первого порядка состоит в следующем: сначала ищем характеристики (характеристические полосы) и затем составляем из этих характеристик интегральную поверхность.

1 Определение характеристических линий. Пусть дано ДУвЧП $F(x,y,z,p,q)=0,$ где $z=z(x;y),\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=p,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=q.$ В дифференциальной геометрии при нахождении огибающей семейства поверхностей характеристики определяются как линии, вдоль которых огибаемая поверхность соприкасается с огибающей. При известном полном интеграле V(x, y, z, a, b) = 0, где $b=\omega(a)$, уравнения характеристик имеют вид: $V(x,y,z,a,\omega(a))=0,\ V'_a+V'_b\omega'(a)=0,$ т. е. по виду это те же уравнения, которые определяют общий интеграл, только рассматриваемые при постоянном значении a. Если придавать параметру a различные значения, то эти уравнения определяют семейство характеристических линий, зависящих от одного параметра. Вдоль характеристики огибающая и огибаемая поверхности имеют общие элементы соприкосновения (касательные плоскости), угловые коэффициенты которых равны $V'_x+V'_z p=0,\quad V'_y+V'_z q=0,$ уравнение одной из касательных плоскостей имеет вид $Z-z=p(X-x)+q(Y-y).$ Мы провели наше рассмотрение при условии, что a = const, определение же всех характеристических полос возможно из системы: $\begin{cases} V(x,y,z,a,b)=0 \\ V'_a+V'_b c=0 \end{cases}$, где a, b, c – произвольные постоянные, т. к. при фиксированном a = a_0, b = w(a_0) = b_0, $c=\omega'(a_0)=c_0$. Чтобы определить характеристики первого порядка (характеристические полосы) надо к этим уравнениям присоединить еще два: $V'_x+V'_z p=0,\quad V'_y+V'_z q=0.$

Таким образом, характеристики нелинейного ДУвЧП образуют семейство трех параметров.

Пусть полный интеграл ДУвЧП разрешен относительно z, т. е. $z=\varphi(x,y,a,b),\ \varphi'_a(x,y,a,b)+\varphi'_b(x,y,a,b)c=0,$ тогда дифференцирование второго уравнения (как функции двух переменных) дает $(\varphi''_{ax}+\varphi''_{bx}c)dx+(\varphi''_{ay}+\varphi''_{by}c)dy=0$. После преобразований (подставим $z=\varphi(x,y,a,b)$ в ДУвЧП и найдем производные по a, b) получим: $F(x,y,z,p,q)=0,\ z=\varphi(x,y,a,b),$

$$\begin{cases} F'_z\varphi'_a + F'_p\varphi''_{ax} + F'_q\varphi''_{ay} = 0, \\ F'_z\varphi'_b + F'_p\varphi''_{bx} + F'_q\varphi''_{by} = 0 \end{cases} \Big| \cdot c \quad \begin{cases} Z\varphi'_a + P\varphi''_{ax} + Q\varphi''_{ay} = 0, \\ Z\varphi'_b c + P\varphi''_{bx}c + Q\varphi''_{by}c = 0 \end{cases}$$

$$Z(\varphi'_a + \varphi'_b c) + P(\varphi''_{ax} + \varphi''_{bx}c) + Q(\varphi''_{ay} + \varphi''_{by}c\ ) = 0$$

или $Z \cdot 0 + P(\varphi''_{ax} + \varphi''_{bx}c) + Q(\varphi''_{ay} + \varphi''_{by}c\ ) = 0 \ \Rightarrow\ P(\varphi''_{ax} + \varphi''_{bx}c) + Q(\varphi''_{ay} + \varphi''_{by}c\ ) = 0.$

Из системы $\begin{cases} (\varphi''_{ax} + \varphi''_{bx}c)dx + (\varphi''_{ay} + \varphi''_{by}c\ )dy = 0 \\ P(\varphi''_{ax} + \varphi''_{bx}c) + Q(\varphi''_{ay} + \varphi''_{by}c\ ) = 0 \end{cases}$ можно найти дифференциальное уравнение для определения характеристик $\begin{vmatrix} dx & dy \\ P & Q \end{vmatrix} = 0,$ $Qdx - Pdy = 0,\quad \dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q}$, где на место входящих в P и Q переменных z, p, q подставлены $z = \varphi(x, y),\quad \varphi'_x,\quad \varphi'_y$.

Полученное уравнение дает нам первое равенство по методу Лагранжа – Шарпи. Продолжая рассуждения по методу Коши, в итоге придем к известному нам уравнению с пятью неизвестными $\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{Pp + Qq} = -\dfrac{dp}{X + Zp} = -\dfrac{dq}{Y + Zq}$, но по методу Коши необходимо будет решить всю систему.

2 Пусть общее решение системы найдено, оно имеет вид

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ y = \varphi_2(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ z = \varphi_3(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ p = \varphi_4(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ q = \varphi_5(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \end{cases},$$

причем начальные условия связаны соотношением $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0,$ полученные решения называются характеристиками первого порядка. Чтобы получить интегральную поверхность (в параметрическом виде), проходящую через эти характеристики надо ввести еще один параметр v, т. е. все $x_0 = x_0(v)$, $y_0 = y_0(v)$, $z_0 = z_0(v)$, $p_0 = p_0(v)$, $q_0 = q_0(v)$. По этим двум параметрам (u, v) должны выполняться следующие условия: $\dfrac{\partial z}{\partial u} = p\dfrac{\partial x}{\partial u} + q\dfrac{\partial y}{\partial u},\quad \dfrac{\partial z}{\partial v} = p\dfrac{\partial x}{\partial v} + q\dfrac{\partial y}{\partial v}.$ Из второго условия относительно v можно получить условие $\dfrac{\partial z_0}{\partial v_0} - p_0\dfrac{\partial x_0}{\partial v_0} - q_0\dfrac{\partial y_0}{\partial v_0} = 0$, геометрически это означает, что характеристики первого порядка будут «прилажены» на всем своем протяжении, если «прилажены» их начальные элементы.

3 Ищем пять функций $x_0 = x_0(v)$, $y_0 = y_0(v)$, $z_0 = z_0(v)$, $p_0 = p_0(v)$, $q_0=q_0(v)$, удовлетворяющих уравнениям $F(x,y,z,p,q)=0$ и $\frac{\partial z_0}{\partial v_0} - p_0\frac{\partial x_0}{\partial v_0} - q_0\frac{\partial y_0}{\partial v_0} = 0$. Имеем неопределенную задачу, т. е. можно выбрать произвольно три функции, по которым затем возможно найти оставшиеся две.

Путем исключения параметров u, v получим искомую интегральную поверхность $z = z(x, y)$.

Пример 11. Решить методом Коши ДУвЧП $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ или $xp + yq - pq = 0$.

Решение. Составим дифференциальное уравнение характеристик $\frac{dx}{x-q} = \frac{dy}{y-p} = \frac{dz}{-pq} = -\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q}$ и решим его при начальных условиях $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$: из уравнения $-\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q}$ получим $p = p_0e\text{-}t$, $q = q_0e\text{-}t$, подставляя их в систему, находим x, y, z: $\begin{cases} x = (x_0 - \frac{q_0}{2})e^u + \frac{q_0}{2}e^{-u} \\ y = (y_0 - \frac{p_0}{2})e^u + \frac{p_0}{2}e^{-u} \\ z = z_0 - \frac{p_0q_0}{2} + \frac{p_0q_0}{2}e^{-2u} \end{cases}$, причем начальные значения связаны соотношениями $x_0p_0 + y_0q_0 - p_0q_0 = 0$. Для построения интегральной поверхности, зададим функции от v, связанные соотношением $z_0'(v) - p_0(v)x_0'(v) - q_0(v)y_0'(v) = 0$. Пусть, например, $x = 0$, $z = y$, тогда $x_0 = 0$, $y_0 = v$, $z_0 = v$, определим p_0, q_0 из уравнений $vq_0 - p_0q_0 = 0$, $1 - q_0(v) = 0$, следовательно $q_0(v) = 1, p_0(v) = v.$

Получаем ответ в параметрической форме: $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) \\ y = \frac{v}{2}(e^u + e^{-u}) \\ z = \frac{v}{2}(1 + e^{-2u}) \end{cases}$.

Для получения решений в явной форме исключаем параметры u, v из систем: $z = \frac{v}{2}(\frac{1+e^{2u}}{e^{2u}}) = \frac{v}{2}(\frac{e^ue^{-u} + e^{2u}}{e^{2u}}) = \frac{v}{2}(\frac{e^{-u} + e^u}{e^u}) = ye^{-u}$, и $e^u - e^{-u} + 2x = 0,\quad e^{2u} - 1 + 2xe^u = 0,\quad e^u = -x + \sqrt{x^2+1},\quad e^{-u} = x + \sqrt{x^2+1}.$

Тогда частное решение имеет вид $z = yx + y\sqrt{x^2+1}$.

Разработаем **алгоритм** решения нелинейного уравнения в частных производных первого порядка методом Лагранжа – Шарпи.

Пусть дано уравнение $F(x, y, z, p, q) = 0$, где $z = z(x; y)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$.

1.1 Составляем систему дифференциальных уравнений $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{Pp+Qq}} = -\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{X+Zp}} = -\frac{dq}{Y+Zq}$ и находим одно её решение, содержащее произвольное постоянное a, в итоге получаем $\Phi(x, y, z, p, q) = a$.

1.2 Из системы $\begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0 \\ \Phi(x, y, z, p, q) = a \end{cases}$ выражаем p = p(x, y, z, a) и q = q(x, y, z, a) и подставляем их в уравнение Пфаффа $dz = pdx + qdy$, проинтегрируем его и найдем полный интеграл уравнения V(x, y, z, a, b) = 0, a, b = const.

1.3 Если заданы начальные условия x = x(t), y = y(t), z = z(t) и полный интеграл ДУвЧП V (x, y, z, a, b) = 0, то, считая b = b(a), определим функцию b из системы $\begin{cases} \mathrm{V}(x, y, z, a, b) = 0 \\ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} z'(t) = 0 \end{cases}$, а затем искомую интегральную поверхность определяем, исключая параметр a из системы $\begin{cases} \mathrm{V}(x, y, z, a, b(a)) = 0 \\ \frac{d}{da}\mathrm{V}(x, y, z, a, b(a)) = 0. \end{cases}$

1.4 Проверка. Конец алгоритма.

Разработаем **второй алгоритм** решения нелинейного уравнения в частных производных первого порядка методом Коши.

Пусть дано уравнение $F(x, y, z, p, q) = 0$, где $z = z(x; y)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$.

2.1 Составляем систему дифференциальных уравнений $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{Pp+Qq}} = -\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{X+Zp}} = -\frac{dq}{Y+Zq}$ и находим её решение в виде $\begin{cases} \mathrm{x} = \varphi_1(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ \mathrm{y} = \varphi_2(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ \mathrm{z} = \varphi_3(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ \mathrm{p} = \varphi_4(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ \mathrm{q} = \varphi_5(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \end{cases}$, удовлетворяющее начальному условию $u = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $p = p_0$, $q = q_0$.

2.2 Ищем пять функций $x_0 = x_0(v)$, $y_0 = y_0(v)$, $z_0 = z_0(v)$, $p_0 = p_0(v)$, $q_0=q_0(v)$, удовлетворяющих уравнениям $F(x, y, z, p, q) = 0$ и $\frac{\partial z_0}{\partial v_0} - p_0 \frac{\partial x_0}{\partial v_0} - q_0 \frac{\partial y_0}{\partial v_0} = 0$ (если начальные условия не даны, то три функции выбираем произвольно, по которым ищем еще две функции).

2.3 Получаем интегральную поверхность в параметрическом виде $\begin{cases} \mathrm{x} = x(u, v) \\ \mathrm{y} = y(u, v) \\ \mathrm{z} = z(u, v) \end{cases}$ или путем исключения параметров u, v получим искомую интегральную поверхность $z = z(x, y)$.

2.4 Проверка. Конец алгоритма.

Основные вопросы теории к первой главе

1 Основные понятия теории ДУвЧП. Теорема Коши – Ковалевской. Примеры ДУвЧП.

2 Задача Коши для ДУвЧП первого порядка функции двух переменных, геометрический смысл.

3 Задачи, приводящие к ДУвЧП первого порядка (о потенциальной энергии материальной точки, о распределении молекул жидкости).

4 Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка (ЛОДУвЧП) функции двух переменных.

5 Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка (ЛОДУвЧП) функции n переменных.

6 Линейное неоднородное уравнение в частных производных первого порядка (ЛНДУвЧП) функции n переменных.

7 Квазилинейные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка.

8 Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка.

9 Уравнение Пфаффа.

10 Полный интеграл нелинейного дифференциального уравнения в частных производных.

11 Метод Лагранжа – Шарпи решения нелинейного уравнения с двумя переменными.

12 Метод Коши для решения нелинейного уравнения с двумя переменными.

Задания для практических занятий к первой главе

Задание 1. Определить порядок дифференциального уравнения в частных производных, проверить, являются ли данные функции решениями уравнения в частных производных.

1 $z = y\varphi(x^2 - y^2)$; $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

2 $u = \frac{y}{y^2 - a^2x^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $a = const$.

3 $U = \varphi(x) + \psi(y) + (x - y)\frac{d\psi}{dy}$; $(x - y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Задание 2. Решите линейные однородные уравнения в частных производных, сделайте проверку.

1 $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ (ответ: $z=F(x^2-y^2)$.

2 $(x-2e^y)\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0, z(x,0)=x$ (ответ: $z=xe^y-e^{2y}+1$).

3 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial z}=0;\ u(x,1,z)=xz$ (ответ: $u=(1-y+x)z$).

4 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$ (ответ: $u=f(\frac{y}{x};\frac{z}{x})$).

5 $(x+2y)\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$ (ответ: $z=f(xy+y^2)$).

Задание 3. Решите линейные неоднородные уравнения в частных производных, сделайте проверку.

1 $xy\frac{\partial z}{\partial x}+x^2\frac{\partial z}{\partial y}=y; z(x,0)=x^2$

(ответ: $z=x^2-y^2-\frac{1}{2}\ln(x^2-y^2)\, lnx$).

2 $xy\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=x^2$ (ответ: $z=f(xy)+\frac{x^2}{3y}$).

3 $xy\frac{\partial z}{\partial x}+(x-2z)\frac{\partial z}{\partial y}=yz$ (ответ: $z=xf(2x-y^2)$).

4 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=y^2; y=1; z=\frac{1}{x}$ (ответ: $z=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+y$).

5 $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=x-y; x=1; z=x^2$ (ответ: $y^2-2xy+x^2+y-z=0$).

Задание 4. Решите квазилинейные уравнения в частных производных, сделайте проверку.

1 $(y+z)\frac{\partial u}{\partial x}+(z+x)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=u$.

2 $(u-x)\frac{\partial u}{\partial x}+(u-y)\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=x+y$.

Задание 5. Решите нелинейные уравнения в частных производных, сделайте проверку.

1 $(y^2+1)z\frac{\partial u}{\partial x}+(x^2-1)z\frac{\partial u}{\partial y}+(x^2-1)y\frac{\partial u}{\partial z}=0; u=z^2, y=x,$ $x>1, z>0$ (ответ: $u=\frac{(x^3-3x-y^3 3y)^2}{36}+z^2-y^2$).

2 $(x^3+3xy^2)\frac{\partial u}{\partial x}+2y^3\frac{\partial u}{\partial y}+2y^2z\frac{\partial u}{\partial z}=0$ (ответ: $u=f(\frac{y}{z},\frac{y+z}{y})$).

Задание 6. Решите уравнения Пфаффа в частных производных, сделайте проверку.

1 $(z^2 - y^2 + yz)dx + (xz - 2xy)dy + (2xz + 2z + xy)dz = 0.$

2 $(4x^2yz^2 - 2y^2z^3 - 3xyz)dx + (2x^3z^2 - 3xyz^3 - 2x^2z)dy +$ $(3x^3yz^3 - 4xy^2z^2 - 2x^2y)dz = 0$ (ответ: u $= x^3y^2z^3 - x^2y^3z^4 -$ $2x^3y^2z^2 + C$).

3 $3yzdx + 2xzdy + xydz = 0$ (ответ: u = x^3y^2z).

Задание 7. Решите нелинейные уравнения в частных производных методом Коши, сделайте проверку.

1 $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = xy.$

2 $p^2 = z^2(1 - pq).$

3 $z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}; x = 0, z = y^2.$

4 $px + qy - pq = 0.$

5 $z - px - qy - 3p^2 + q^2 = 0;\ x = 0, z = y^2.$

Задание 8. Решите нелинейные уравнения в частных производных методом Лагранжа – Шарпи, сделайте проверку.

1 $pq = 9z^2.$

2 $z = px + qy + p^3q^3$ (ответ: $z = ax + by + a^3b^3$).

3 $p = sinq$ (ответ: $z = ax + arcsinay + b$).

4 $z = p^2 + q^2$ (ответ: $z = \frac{(ax+y+b)^2}{4(a^2+1)}$).

5 $\frac{p}{y} - \frac{q}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (ответ: $z = aln|x| + x + aln|y| - y + b$).

6 $z = pq + 1; z = 2x + 1, z = 2$ (ответ: z = $(\frac{\sqrt{a}}{2}x + \frac{y}{2\sqrt{a}} + b)^2 + 1$).

Варианты контрольной работы по уравнениям в частных производных первого порядка

Вариант № 1

Определить вид ДУвЧП. Найти общее решение уравнений явным, неявным и параметрическим методом:

а) $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}$,

б) $-y\frac{\partial u}{\partial x}+4x\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{4x^2-y^2}{xy}\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad u=\frac{z}{x^4},\quad y=x, x>0, z>0$,

в) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$,

г) $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=x^2y^2.$

Вариант № 2

Определить вид ДУвЧП. Найти общее решение уравнений явным, неявным и параметрическим методом:

а) $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$,

б) $3z^2\frac{\partial u}{\partial x}+y^2e^x\frac{\partial u}{\partial y}+2zye^x\frac{\partial u}{\partial z}=0,\ u=e^xy^4,\ y^2z=1,\ y>0,$

в) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z$,

г) $z+x+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+\frac{\partial z}{\partial y}$

Вариант № 3

Определить вид ДУвЧП. Найти общее решение уравнений явным, неявным и параметрическим методом:

а) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=x^2$,

б) $x\frac{\partial u}{\partial x}-x^2\frac{\partial u}{\partial y}+(x^2-y-z)\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad u=(2-z)x,\quad y=x, x>0,$

в) $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z}$, г) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=-x^2y^2.$

Вариант № 4

Определить вид ДУвЧП. Найти общее решение уравнений явным, неявным и параметрическим методом:

а) $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=y$,

б) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}+z(x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\quad u=3y^2ze^{-3y},\ 2y=x,\ x>0,$

в) $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{z}$,

г) $(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2+(\dfrac{\partial z}{\partial y})^2-2\dfrac{\partial z}{\partial x}x-2\dfrac{\partial z}{\partial y}y+1=0.$

Вариант № 5

Определить вид ДУвЧП. Найти общее решение уравнений явным, неявным и параметрическим методом:

а) $\dfrac{1}{\sin x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\sin y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$,

б) $yz\dfrac{\partial u}{\partial x}+xz\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x-y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\quad u=z^2-3x^2-2x,\ \ y=2x,\ x>0,z>0$,

в) $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$,

г) $(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2+z\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2.$

Вариант № 6

Определить вид ДУвЧП. Найти общее решение уравнений явным, неявным и параметрическим методом:

а) $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{y}$,

б) $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}-z(x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\quad u=\dfrac{z}{x},\ 3y=x,\ x>0,z>0$,

в) $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$,

г) $z=(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2+(\dfrac{\partial z}{\partial y})^2.$

Вариант № 7

Определить вид ДУвЧП. Найти общее решение уравнений явным, неявным и параметрическим методом:

а) $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=x+y$,

б) $2x^2z\frac{\partial u}{\partial x}+2y^2z\frac{\partial u}{\partial y}-(x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=0,\ u=e^{z^2}, x=2y,\ y>0, x>0,$

в) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z$,

г) $(\frac{\partial z}{\partial x})^2+z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=z^2.$

Вариант № 8

Определить вид ДУвЧП. Найти общее решение уравнений явным, неявным и параметрическим методом:

а) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=x^2$,

б) $xz\frac{\partial u}{\partial x}+z(2x-y)\frac{\partial u}{\partial y}+(x^2+z^2-\mathrm{xy})\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad u=\frac{z^2}{x},\ x-y=0, x>0,$

в) $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z}$,

г) $(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2-2\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{x}-2\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{y}+1=0.$

Вариант № 9

Определить вид ДУвЧП. Найти общее решение уравнений явным, неявным и параметрическим методом:

а) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=y$,

б) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y^2(z+x)^2\frac{\partial u}{\partial y}-(2x+z)\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad u=z(x-z),\ xyz=1,$

в) $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z}$,

г) $z+x+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+\frac{\partial z}{\partial y}=0$

2 УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим задачи, приводящие к уравнениям в частных производных второго порядка. Первая задача это задача о колебании струны [3; 4]. Струной называется тонкая гибкая упругая нить, способная перемещаться в направлении перпендикулярном своей длине. «Тонкая» в данном случае означает, что поперечными размерами струны можно пренебречь. «Гибкая» означает, что её сопротивлением изгибу можно пренебречь. С точки зрения технической механики это означает, что изгибающие моменты сил равны нулю, а силы упругости, возникающие в струне, направлены только по касательной к струне. «Упругая» означает, что при растяжении струны возникают силы упругости, препятствующие растяжению. Струна обладает массой, которая в общем случае распределена по струне по какому-либо закону. Для характеристики массы струны вводят понятие линейной плотности. Линейной плотностью струны называется масса единиц её дины. Обозначается ρ и по определению $\rho = \dfrac{dm}{dl}$.

Пусть в некоторый момент времени струна отклонена от своего положения равновесия и имеет некоторую форму. Выделим на оси ox небольшой отрезок dx, которому соответствует малый участок струны длиной dl. К концам этого участка струны приложены силы со стороны других её участков. Обозначим эти силы $\vec{T}(x)$ на левом конце участка, они направлены влево, и $\vec{T}(x+dx)$ на правом конце, они направлены соответственно вправо. Кроме этих сил на выделенный участок струны действует сила со стороны окружающих тел, например, Земли. Для характеристики этой силы вводят понятие линейной плотности силы. Линейной плотностью силы называется сила, приходящаяся на единицу длины струны. Будем обозначать её $\vec{f}(x)$ и считать направленной перпендикулярно оси ox. Сама сила пропорциональна величине dx, а не dl, т. к. при движении струны участок dx растягивается, превращаясь в dl, а сила, которая действует на этот участок, по-прежнему остаётся $d\vec{F}$. Она может зависеть от массы, но масса участка неизменна. Сила Ампера пропорциональна длине проводника, но она направлена перпендикулярно проводнику. Если силу умножить на косинус угла отклонения участка струны, чтобы найти вертикальную составляющую силы, тем самым длина умножится на этот косинус, и снова получится dx, а сила тока от растяжения пружины не зависит, и, значит, модуль силы Ампера от растяжения не зависит. Так же можно рассмотреть другие силы. Все они будут пропорциональны элементу горизонтальной координаты точки струны, но не элементу длины струны.

Кроме этого на струну может действовать сила сопротивления со стороны окружающей среды, которая направлена перпендикулярно оси OX против скорости, а по величине пропорциональна модулю скорости движения этого участка и его длине. Обозначим коэффициент пропорциональности k, тогда сила сопротивления может быть записана в виде $\vec{f}_{mp} = -k\vec{v}dx$. Здесь снова сила пропорциональна элементу горизонтальной координаты точек струны, но не элементу длины. Обусловлено это тем, что движение идёт перпендикулярно оси ох и поэтому сопротивление пропорционально проекции элемента длины на ось ох, т. е. пропорционально dx. Запишем второй закон Ньютона для выделенного участка струны $dm\vec{a} = \vec{T}(x) + \vec{T}(x+dx) + \vec{f}(x)dx - k\vec{v}dx$. Спроецируем это векторное равенство на оси координат

$$dma_x = -T(x)\cos\alpha(x) + T(x+dx)\cos\alpha(x+dx)$$
$$dma_y = -T(x)\sin\alpha(x) + T(x+dx)\sin\alpha(x+dx) + +f(x)dx - kv_y dx$$

Вдоль оси абсцисс движения нет, поэтому ускорение вдоль этой оси равно нулю. Таким образом, горизонтальная составляющая натяжения струны одинакова во всех её точках. В тех точках, где угол наклона струны равен нулю, т. е. струна горизонтальна, проекция силы натяжения струны совпадает с модулем силы натяжения. Обозначим его T_0, тогда можно найти силу натяжения струны в любой её точке $\rho u_{tt} = T_0 u_{xx} + f(x) - ku_t$.

Полученное уравнение справедливо для любых движений струны. При этом натяжение струны в общем случае зависит от времени. Действительно, если концы струны закреплены, то в процессе колебания струна будет растягиваться, а значит, её натяжение будет меняться. Изменение длины струны можно найти интегрированием $\Delta l = l_0 - \int\limits_0^{l_0} \sqrt{1+u_x^2}\,dx$. Если k_0 – коэффициент упругости струны, то сила натяжения струны в процессе отклонения увеличится на некоторую величину, так что уравнение колебания струны в общем виде имеет вид:

$$\rho u_{tt} = (T_0 + k_0(l_0 - \int_0^{l_0} \sqrt{1+u_x^2}dx))u_{xx} + f(x) - ku_t$$

или

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} + f_1(x) - k_1 u_t.$$

Таким образом, мы получили уравнение колебания однородной струны, учитывающее внешние силы и силы сопротивления среды.

Если вместо струны рассматривать некоторую мембрану, то отклонение её от положения равновесия будет характеризоваться уже функцией двух переменных $u = u(x, y, t)$, а уравнение для отыскания отклонения будет иметь вид $u_{tt} = v^2(u_{xx} + u_{yy}) + f_1(x) - k_1 u_t$.

Выражение $u_{xx} + u_{yy}$ называют оператором Лапласа для функции двух переменных и обозначают Δ, т. е. $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$. Тогда уравнение мембраны можно записать как $u_{tt} = v^2 \Delta u + f_1(x) - k_1 u_t$. Это уравнение описывает распространение волн в плоской области. Аналогично можно записать уравнение для объёмной области, имея в виду, что искомая функция координат будет уже функцией 3 переменных.

Рассмотрим вторую задачу о выводе уравнения теплопроводности. Пусть в некотором теплопроводящем стержне распространяется тепло. Это может быть только тогда, когда температура в разных точках этого стержня разная. Будем считать, что стержень достаточно длинный, так что его поперечные размеры намного меньше продольных. В этом случае можно считать, что температура не зависит от поперечных координат точки, а только от продольных. Если ось ox направить вдоль стержня, то можно записать, что $T = T(x)$. Однако, кроме того, температура может зависеть и от времени, так что в общем случае нужно считать, что $T = T(x,t)$. Выделим в стержне малый участок длиной dx в пределах от x до $x + dx$. Тогда за некоторый малый промежуток времени dt внутрь этого участка втечёт тепло в количестве $q_1 = q(x)Sdt$. За это же время из выделенного участка через второе сечение вытечет тепло $q_2 = q(x + dx)Sdt$. Оставшееся внутри выделенного элемента тепло идёт на его нагревание. Обозначим удельную теплоёмкость материала, из которого сделан стержень через c, тогда теплота, которую он поглотит за то же время, будет определяться формулой

$Q = c\rho SdxdT$. Кроме теплоты, которая втекает в выделенный объём материала, к нагреванию материала может приводить источник тепла внутри самого выделенного элемента. Это может быть, например, электрический ток, который согласно закону Джоуля – Ленца приводит к выделению тепла. Обозначим q_0 объёмную плотность источника тепла, т. е. теплота, выделяющаяся в единице объёма за единицу времени. Тогда общий баланс тепла в выделенном объёме будет выглядеть следующим образом:

$$c\rho SdxdT = q(x)Sdt - q(x+dx)Sdt + q_0 Sdxdt \text{ или } T_t = aT_{xx} + q_0'.$$

Последнее уравнение называется уравнением теплопроводности на прямой. Если же тепло распространяется по некоторой плоскости или в пространстве, то вместо второй производной по координатам используется вновь оператор Лапласа $T_t = a\Delta T + q_0'$.

Аналогично выводится уравнение электростатического поля, уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$ и уравнение Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi k\rho$.

2.1 Классификация уравнений в частных производных второго порядка

В самом общем случае уравнение второго порядка имеет вид

$$F(x_i, u(x_i), u'_{x_i}(x_i), u''_{x_i x_j}(x_i)) = 0, \tag{2.1.1}$$

где $y(x_i)$ – искомая функция,

x_i – аргументы искомой функции.

Если уравнение (2.1.1) представимо в виде

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} u''_{x_i x_j}(x_i) + F(x_i, u(x_i), u'_{x_i}(x_i)) = 0, \tag{2.1.2}$$

где коэффициенты A_{ij} зависят только от аргументов функции и не зависят от искомой функции, то это уравнение называется линейным относительно старших производных или квазилинейным. Если функция

$$F(x_i, u(x_i), u'_{x_i}(x_i)) \tag{2.1.3}$$

в уравнении (2.1.2) также линейна относительно искомой функции и её производных, то уравнение называется линейным. Тогда оно представимо в виде

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} u''_{x_i x_j}(x_i) + \sum_{i=1}^{n} B_i u'_{x_i}(x_i) + Cu(x_i) = f(x_i), \qquad (2.1.4)$$

Если функция $f(x_i) = 0$, уравнение называется однородным, в противном случае – неоднородным.

В физике в основном встречаются только линейные или квазилинейные уравнения, поэтому мы будем рассматривать только квазилинейные уравнения, т. к. линейные – частный случай [3; 4].

В общем случае в квазилинейном уравнении (2.1.2) встречаются все слагаемые, соответствующие всем производным, в том числе и смешанным. Естественно возникает вопрос: нельзя ли упростить выражение (2.1.2), чтобы, например, не встречались те или иные производные? Для этого необходимо выполнить преобразование переменных таким образом, чтобы конечное выражение уравнения было проще.

В общем виде квазилинейное дифференциальное уравнение в частных производных выглядит следующим образом:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}) = 0. \qquad (2.1.5)$$

В этом уравнении встречаются в общем случае и смешанные производные. Естественно возникает вопрос: можно ли упростить это выражение таким образом, чтобы смешанные производные в нём отсутствовали?

Для этого необходимо сделать замену переменных $y_l = y_l(x_i)$. Найдём производные и подставим их в уравнение, получим первую производную $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i}$ и вторую производную

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} = \sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_k} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_l} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j}.$$

После подстановки в уравнение (2.1.5), получим уравнение $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_k} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_l} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}) = 0$.

В первом слагаемом поменяем суммы местами, второе слагаемое, поскольку оно не содержит вторых производных от искомой функции, включим в третье слагаемое, получим $\sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_k} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + F(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}) = 0$. Введём обозначения $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} = a_{lk}$, это будут новые коэффициенты в дифференциальном уравнении $\sum_{l,k=1}^{n} a_{lk} \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_k} + F(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}) = 0$.

Если зафиксировать значения аргументов x_i в некоторой точке для выражения $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} = a_{lk}$, то производные функций преобразования по аргументам можно считать постоянными и переобозначить как $\frac{\partial y_l}{\partial x_i} = \alpha_{li}$. Тогда формулы преобразования коэффициентов можно будет записать в виде $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \alpha_{li} \alpha_{kj} = a_{lk}$. Эти формулы преобразования совпадают с формулами преобразования коэффициентов квадратичной формы при переходе к другому набору переменных. Это значит, что преобразования дифференциального уравнения в некоторой фиксированной точке аналогичны преобразованию квадратичной формы. Но о квадратичной форме известно, что специальным выбором матрицы преобразований её можно привести к простейшему, так называемому каноническому виду, когда смешанные слагаемые отсутствуют. Применительно к нашему случаю можно сказать, что существует преобразование (вообще говоря, только в данной точке пространства), с помощью которого дифференциальное уравнение можно привести к виду, в котором отсутствуют смешанные производные. А именно согласно теореме о приведении квадратичной формы к каноническому виду, уравнение (2.1.5) можно привести к виду

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ii}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \sum_{i=r+1}^{m} a_{ii}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + F(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}) = 0. \tag{2.1.6}$$

В этом уравнении характерно то, что, во-первых, отсутствуют смешанные производные, а во-вторых, часть слагаемых со вторыми производными имеет знаки «+», другая часть имеет знаки «–». При этом $m \le n$. И, согласно закону инерции квадратичной формы, такое представление не зависит от формул преобразования, а определяется свойствами коэффициентов уравнения. В связи с этим все уравнения в частных производных второго порядка можно разделить на три типа.

1 Если $m = n$ и $r = 0$ или $r = n$, то все слагаемые с производными второго порядка одного знака. Такого рода уравнения называются эллиптическими

уравнениями, потому что им соответствует квадратичная форма, определяющая эллипсоид в гиперпространстве.

2 Если $m=n$ и $r>0$ и $r<n$, то уравнение называется уравнением гиперболического типа, т. к. квадратичная форма с такими коэффициентами соответствует гиперболоиду в гиперпространстве. При $r=1$ и $r=n-1$ уравнения называются нормально-гиперболическими.

3 Если $m<n$, то уравнения называются уравнениями параболического типа. Коэффициентам такого уравнения отвечает параболоид в гиперпространстве. При $m=n-1$ уравнения называются нормально-параболическими.

Остановимся подробнее на классификации уравнений в частных производных для функций двух переменных [2; 4].

$$A_{11}z''_{xx}+2A_{12}z''_{xy}+A_{22}z''_{yy}+F(x,y,z(x,y),z'_x(x,y),z'_y(x,y))=0\,. \quad (2.1.7)$$

Рассмотрим соответствующую приведенному уравнению квадратичную форму $d=A_{11}x^2+2A_{12}xy+A_{22}y^2$. Выделим в этом выражении полный квадрат

$$d=A_{11}(x^2+2\frac{A_{12}}{A_{11}}xy+(\frac{A_{12}}{A_{11}}y)^2-(\frac{A_{12}}{A_{11}}y)^2)+A_{22}y^2=A_{11}(x+\frac{A_{12}}{A_{11}}y)^2-\frac{A_{12}^2}{A_{11}}y^2+A_{22}y^2=$$

$$=A_{11}(x+\frac{A_{12}}{A_{11}}y)^2-(\frac{A_{12}^2}{A_{11}}-A_{22})y^2.$$

И заменой $\xi=x+\frac{A_{12}}{A_{11}}y$ и $\eta=y$ можно привести квадратичную форму к сумме квадратов. Согласно теореме об инерционности квадратичной формы эти условия не будут зависеть от способа приведения квадратичной формы к сумме квадратов.

1 $D=a_{12}^2-a_{22}a_{11}<0$. В этом случае коэффициенты перед квадратами имеют одинаковые знаки, и, значит, форма имеет эллиптический вид. Такой же вид имеет и уравнение, которому она соответствует.

2 $D=a_{12}^2-a_{22}a_{11}>0$. В этом случае коэффициенты перед квадратами имеют разные знаки, и, значит, форма имеет гиперболический вид. Такой же вид имеет и уравнение, которому она соответствует.

3 $D=a_{12}^2-a_{22}a_{11}=0$. В этом случае в квадратичной форме присутствует только квадрат одной переменной, квадрат второй переменной отсутствует. Поэтому она имеет параболический вид вместе с уравнением, которому она соответствует.

Рассмотрим второй способ классификации уравнений в частных производных для функций двух переменных.

Произведём замену переменных в уравнении (2.1.7)

$$\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y).$$

Найдём производные, входящие в уравнение (для простоты штрихи будем опускать, достаточно индексов).

$$z_x = z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x, z_y = z_\xi \xi_y + z_\eta \eta_y$$

$$z_{xx} = (z_{\xi\xi}\xi_x + z_{\xi\eta}\eta_x)\xi_x + z_\xi \xi_{xx} + (z_{\eta\xi}\xi_x + z_{\eta\eta}\eta_x)\eta_x + z_\eta \eta_{xx} =$$
$$= z_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2z_{\xi\eta}\eta_x\xi_x + z_{\eta\eta}\eta_x^2 + z_\xi\xi_{xx} + z_\eta\eta_{xx},$$
$$z_{yy} = (z_{\xi\xi}\xi_y + z_{\xi\eta}\eta_y)\xi_y + z_\xi \xi_{yy} + (z_{\eta\xi}\xi_y + z_{\eta\eta}\eta_y)\eta_y + z_\eta \eta_{yy} =$$
$$= z_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2z_{\xi\eta}\eta_y\xi_y + z_{\eta\eta}\eta_y^2 + z_\xi\xi_{yy} + z_\eta\eta_{yy}$$
$$z_{xy} = (z_{\xi\xi}\xi_y + z_{\xi\eta}\eta_y)\xi_x + z_\xi \xi_{xy} + (z_{\eta\xi}\xi_y + z_{\eta\eta}\eta_y)\eta_x + z_\eta \eta_{xy} =$$
$$= z_{\xi\xi}\xi_y\xi_x + z_{\xi\eta}(\eta_y\xi_x + \eta_x\xi_y) + z_{\eta\eta}\eta_y\eta_x + z_\xi\xi_{xy} + z_\eta\eta_{xy}$$

Подставим эти производные в уравнение и приведём подобные члены.

$$A_{11}(z_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2z_{\xi\eta}\eta_x\xi_x + z_{\eta\eta}\eta_x^2 + z_\xi\xi_{xx} + z_\eta\eta_{xx}) + 2A_{12}(z_{\xi\xi}\xi_y\xi_x + z_{\xi\eta}(\eta_y\xi_x + \eta_x\xi_y) +$$
$$+ z_{\eta\eta}\eta_y\eta_x + z_\xi\xi_{xy} + z_\eta\eta_{xy}) + A_{22}(z_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2z_{\xi\eta}\eta_y\xi_y + z_{\eta\eta}\eta_y^2 + z_\xi\xi_{yy} + z_\eta\eta_{yy}) +$$
$$+ F(\xi, \eta, z(\xi, \eta), z_\xi(\xi, \eta), z_\eta(\xi, \eta)) = 0$$

$$z_{\xi\xi}(A_{11}\xi_x^2 + 2A_{12}\xi_y\xi_x + A_{22}\xi_y^2) +$$
$$+ z_{\xi\eta}2(A_{11}\eta_x\xi_x + A_{12}(\eta_y\xi_x + \eta_x\xi_y) + A_{22}\eta_y\xi_y) +$$
$$+ z_{\eta\eta}(A_{11}\eta_x^2 + 2A_{12}\eta_y\eta_x + A_{22}\eta_y^2) + z_\xi(A_{11}\xi_{xx} + 2A_{12}\xi_{xy} + A_{22}\xi_{yy}) +$$
$$+ z_\eta(A_{11}\eta_{xx} + 2A_{12}\eta_{xy} + A_{22}\eta_{yy}) +$$
$$+ F(\xi, \eta, z(\xi, \eta), z_\xi(\xi, \eta), z_\eta(\xi, \eta)) = 0$$

Последнее равенство можно переписать следующим образом:

$$z_{\xi\xi}a_{11} + z_{\xi\eta}2a_{12} + z_{\eta\eta}a_{22}\eta_y^2 + F_1(\xi, \eta, z(\xi, \eta), z_\xi(\xi, \eta), z_\eta(\xi, \eta)) = 0, \quad (2.1.8)$$

введя обозначения

$$a_{11} = A_{11}\xi_x^2 + 2A_{12}\xi_y\xi_x + A_{22}\xi_y^2,$$
$$a_{12} = A_{11}\eta_x\xi_x + A_{12}(\eta_y\xi_x + \eta_x\xi_y) + A_{22}\eta_y\xi_y,$$
$$a_{22} = A_{11}\eta_x^2 + 2A_{12}\eta_y\eta_x + A_{22}\eta_y^2.$$

В этих уравнениях полученная функция не совпадает с прежней функцией $F(x_i, u(x_i), u'_{x_i}(x_i))$. Поскольку функции замены переменных ничем пока не ограничены, мы можем наложить на них дополнительные требования. Например, будем считать, что $\eta = \eta(y)$. Тогда $\eta_x = 0, \eta_y \neq 0$. При таком выборе якобиан преобразования равен $\xi_x \neq 0$, так что преобразование не вырождено. В этом случае коэффициент a_{12} будет выражаться следующим образом $a_{12} = A_{12}\xi_x + A_{22}\xi_y$. Наложим на функцию преобразования ещё одно условие, чтобы этот коэффициент был равен нулю, т. е. $A_{12}\xi_x + A_{22}\xi_y = 0$. Это и есть дифференциальное уравнение для определения функции кси, откуда $\xi_y = -\dfrac{A_{12}}{A_{22}}\xi_x$. Подставим это в первый и последний коэффициент:

$$a_{11} = A_{11}\xi_x^2 + 2A_{12}(-\frac{A_{12}}{A_{22}})\xi_x\xi_x + A_{22}(-\frac{A_{12}}{A_{22}}\xi_x)^2 = \xi_x^2(A_{11} - 2\frac{A_{12}^2}{A_{22}} + \frac{A_{12}^2}{A_{22}}) = \xi_x^2(A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}}),$$

$$a_{22} = \eta_y^2 A_{22}.$$

И найдём произведение этих коэффициентов $a_{11}a_{22} = -\xi_x^2\eta_y^2(A_{12}^2 - A_{11}A_{22})$. Сделаем вывод.

1 Если $D = A_{12}^2 - A_{22}A_{11} < 0$, то в этом случае коэффициенты перед вторыми производными имеют одинаковые знаки, и, значит, уравнение имеет эллиптический вид.

2 Если $D = A_{12}^2 - A_{22}a_{11} > 0$, то в этом случае коэффициенты перед вторыми производными имеют разные знаки, и, значит, уравнение имеет гиперболический вид.

3 Если $D = A_{12}^2 - A_{22}A_{11} = 0$, то в этом случае коэффициент a_{11} равен нулю и уравнение имеет параболический вид.

Таким образом, для отыскания второй функции F нужно составить уравнение для новых коэффициентов. Для гиперболических уравнений коэффициенты a_{11} и a_{22} должны быть равны с противоположным знаком. Для эллиптических уравнений они должны быть равны. Для параболических уравнений один из этих коэффициентов окажется равным нулю, а второй нужно приравнять к единице.

Получим канонический вид гиперболических уравнений, при условии $a_{12} \neq 0$, т. е. возможен такой выбор функций преобразования, при котором коэффициенты a_{11} и a_{22} равны нулю.

Запишем равенство нулю первого из этих коэффициентов.

$$A_{11}\xi_x^2 + 2A_{12}\xi_y\xi_x + A_{22}\xi_y^2 = 0$$

Считая производную по ординате известной, выразим из этого уравнения, как квадратного, производную по абсциссе:

$$\xi_x = \frac{-A_{12} \pm \sqrt{A_{12}^2 - A_{11}A_{22}}}{A_{11}}\xi_y .$$

Точно такое же уравнение получается и из равенства нулю третьего коэффициента. Это значит, что производные обеих функций преобразования связаны между собой корнями одного и того же квадратного уравнения. Чтобы преобразование было невырожденным, нужно, чтобы корни, связывающие производные для разных функций были разные. Для гиперболического типа уравнений корни буду разные и действительные. Обозначим их λ_1 и λ_2. Тогда для первой функции $\xi_x = \lambda_1\xi_y$, для второй функции $\eta_x = \lambda_2\eta_y$. Решив эти уравнения первого порядка, найдём функции преобразования, с помощью которых уравнение гиперболического типа представляется в виде $z''_{\xi\eta} + F(\xi,\eta,z(\xi,\eta),z'_\xi(\xi,\eta),z'_\eta(\xi,\eta)) = 0$.

Пример 12. Привести к каноническому виду уравнение.

$$u_{xx} + 2bu_{xy} + 3u_{yy} = 0$$

$$A_{11} = 1, A_{12} = 2b, A_{22} = 3$$

$$D = A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = b^2 - 3$$

1 Если $b = 2$, то дискриминант положителен и уравнение имеет гиперболический тип. Запишем формулы преобразования коэффициентов:

$$a_{11} = A_{11}\xi_x^2 + 2A_{12}\xi_x\xi_y + A_{22}\xi_y^2;$$

$$a_{12} = A_{11}\xi_x\eta_x + A_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + A_{22}\xi_y\eta_y;$$

$$a_{22} = A_{11}\eta_x^2 + 2A_{12}\eta_x\eta_y + A_{22}\eta_y^2.$$

Запишем ещё дополнительное слагаемое:

$$F_{доп} = u_\xi(A_{11}\xi_{xx} + 2A_{12}\xi_{xy} + A_{22}\xi_{yy}) + u_\eta(A_{11}\eta_{xx} + 2A_{12}\eta_{xy} + A_{22}\eta_{yy}).$$

Подставим сюда коэффициенты:

$$a_{11} = \xi_x^2 + 4\xi_x\xi_y + 3\xi_y^2;$$

$$a_{12} = \xi_x\eta_x + 2(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 3\xi_y\eta_y;$$

$$a_{22} = \eta_x^2 + 4\eta_x\eta_y + 3\eta_y^2.$$

Будем считать, что $\eta_x = 0, \eta_y \neq 0$.

И приравняем второй коэффициент к нулю:

$$a_{12}=\xi_x\eta_x+2(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+3\xi_y\eta_y=0{,}2\xi_x\eta_y+3\xi_y\eta_y=0\,.$$

Отсюда находим:

$$2\xi_x\eta_y+3\xi_y\eta_y=0\Rightarrow\xi_y=-\xi_x\frac{2}{3}\,.$$

В результате приходим к уравнению первого порядка:

$$\xi_x\frac{2}{3}+\xi_y=0\,.$$

Чтобы его решить, составляем характеристические уравнения:

$$\frac{dx}{2/3}=\frac{dy}{1}=\frac{d\xi}{0}\,.$$

Интегралы этой системы уравнений имеют вид:

$$\frac{3}{2}x-y=c_1,\xi=\tilde{n}_2.$$

Так что можно записать

$$\xi=3x-2y.$$

Подставим это в первое уравнение:

$$a_{11}=\xi_x^2-4\xi_x\xi_x\frac{2}{3}+3(\xi_x\frac{2}{3})^2=-\xi_x^2/3\,.$$

Из последнего находим: $a_{22}=3\eta_y^2$.

Для гиперболических уравнений нужно положить:

$$a_{22}=-a_{11}\Rightarrow\xi_x^2/3=3\eta_y^2\Rightarrow\xi_x=3\eta_y\,.$$

Подставим сюда значение функции кси: $3\eta_y=3\Rightarrow\eta=y$.

Найдём теперь новые коэффициенты уравнения:

$$a_{11}=\xi_x^2+4\xi_x\xi_y+3\xi_y^2=9+4\cdot3\cdot(-2)+3\cdot4=-3 \text{ и } a_{22}=3\eta_y^2=3\,.$$

Найдём теперь дополнительное слагаемое:

$$F_{доп}=u_\xi(A_{11}\xi_{xx}+2A_{12}\xi_{xy}+A_{22}\xi_{yy})+u_\eta(A_{11}\eta_{xx}+2A_{12}\eta_{xy}+A_{22}\eta_{yy})=0\,.$$

Т. к. функции преобразования линейны, значит, вторые производные от них равны нулю. Так что уравнение приобретает вид:

$$-3u_{\xi\xi}+3u_{\eta\eta}=0\Rightarrow u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}=0\,.$$

Для гиперболических уравнений есть ещё один вид канонической формы. Приравняем к нулю теперь первый и второй коэффициенты:

$$a_{11}=\xi_x^2+4\xi_x\xi_y+3\xi_y^2=0\,;$$

$$a_{22}=\eta_x^2+4\eta_x\eta_y+3\eta_y^2=0\,.$$

Из первого уравнения получим: $\xi_x=-3\xi_y$.

Из второго: $\eta_x = -\eta_y$.

Снова получили два уравнения первого порядка. Решим их:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{3} = \frac{d\xi}{0} \Rightarrow 3x - y = c_1, \xi = c_2 \Rightarrow \xi = 3x - y;$$

$$\eta_x = -\eta_y \Rightarrow \eta_x + \eta_y = 0 \Rightarrow \frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{d\eta}{0} \Rightarrow \eta = x - y.$$

Найдём коэффициент и дополнительное слагаемое. Дополнительное слагаемое снова равно нулю по той же причине.

$$a_{12} = \xi_x\eta_x + 2(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 3\xi_y\eta_y = 3 + 2(-3-1) + 3 = -2.$$

Так что уравнение будет иметь второй канонический вид: $u_{\xi\eta} = 0$.

Решением этого уравнения является функция

$$u = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(3x - y) + f_2(x - y)$$
$$u_x = f_1^{'}3 + f_2^{'}, u_y = -f_1^{'} - f_2^{'},$$
$$u_{xx} = f_1^{''}9 + f_2^{''}, u_{yy} = f_1^{''} + f_2^{''},$$
$$u_{xy} = -3f_1^{''} - f_2^{''}.$$

Проверим это на первоначальном уравнении:

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} = f_1^{''}9 + f_2^{''} + 3f_1^{''} + 3f_2^{''} - 12f_1^{''} - 4f_2^{''} = 0.$$

Таким образом, решение найдено верно.

2 Пусть $b = 1$.

Тогда дискриминант равен:

$$D = A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = b^2 - 3 = 1 - 3 = -2 < 0.$$

Уравнение имеет эллиптический тип. Снова выпишем новые коэффициенты:

$$a_{11} = \xi_x^2 + 2\xi_x\xi_y + 3\xi_y^2;$$

$$a_{12} = \xi_x\eta_x + \xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x + 3\xi_y\eta_y;$$

$$a_{22} = \eta_x^2 + 2\eta_x\eta_y + 3\eta_y^2.$$

Снова приравниваем к нулю второй коэффициент:

$$a_{12} = \xi_x\eta_x + \xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x + 3\xi_y\eta_y = 0.$$

Получаем уравнение, в котором две неизвестные функции, поэтому накладываем на них снова условие: $\eta_x = 0, \eta_y \neq 0$.

Тогда $a_{12} = \xi_x\eta_x + \xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x + 3\xi_y\eta_y = 0, \xi_x\eta_y + 3\xi_y\eta_y = 0$.

Откуда снова находим уравнение для первой функции: $\xi_x + 3\xi_y = 0$.

Решим это уравнение: $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{3}=\frac{d\xi}{0}\Rightarrow 3x-y=c_1, \xi=c_2\Rightarrow \xi=3x-y$.

Вторую функцию находим из условия, что для эллиптических уравнений первый и третий коэффициенты должны быть равны.

Найдём эти коэффициенты:

$$a_{11}=\xi_x^2+2\xi_x\xi_y+3\xi_y^2=9-6+3=6.$$

Третий коэффициент равен: $a_{22}=3\eta_y^2$.

Приравниваем их: $3\eta_y^2=6\Rightarrow \eta_y=\sqrt{2}\Rightarrow \eta=\sqrt{2}y$.

Дополнительное условие равно нулю. Так что уравнение будет иметь вид: $6u_{\xi\xi}+6u_{\eta\eta}=0\Rightarrow u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0.$

Одним из решений этого уравнения является функция:

$$u=\xi^2-\eta^2=(3x-y)^2-2y^2=9x^2-6xy-y^2.$$

Проверим это:

$$u_{xx}+2u_{xy}+3u_{yy}=18-12-6=0.$$

3 Пусть $b=\sqrt{3}$. Тогда дискриминант будет равен нулю, а уравнение будет иметь параболический тип.

Снова записываем коэффициенты:

$$a_{11}=\xi_x^2+2\sqrt{3}\xi_x\xi_y+3\xi_y^2;$$

$$a_{12}=\xi_x\eta_x+\sqrt{3}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+3\xi_y\eta_y;$$

$$a_{22}=\eta_x^2+2\sqrt{3}\eta_x\eta_y+3\eta_y^2.$$

И приравниваем к нулю второй коэффициент:

$$a_{12}=\xi_x\eta_x+\sqrt{3}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+3\xi_y\eta_y=0$$

Добавляем условие: $\eta_x=0, \eta_y\neq 0$, тогда: $\sqrt{3}\xi_x\eta_y+3\xi_y\eta_y=0\Rightarrow \xi_x+\sqrt{3}\xi_y=0$

Решаем $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{\sqrt{3}}=\frac{d\xi}{0}\Rightarrow \sqrt{3}x-y=c_1, \xi=c_2\Rightarrow \xi=\sqrt{3}x-y.$

Таким образом, первый коэффициент равен нулю, а второй должен быть равен единице: $a_{22}=3\eta_y^2=1\Rightarrow \eta_y=1/\sqrt{3}\Rightarrow \eta=y/\sqrt{3}.$

Следовательно, уравнение будет иметь канонический вид: $u_{\eta\eta}=0.$ Решением этого уравнения является функция:

$$u=k\eta+b+f(\xi)=ky/\sqrt{3}+f(\sqrt{3}x-y.)$$

Проверим на первоначальном уравнении:

$$u_{xx}+2\sqrt{3}u_{xy}+3u_{yy}=3f''-2\sqrt{3}\sqrt{3}f''+3f''=0$$

Таким образом, найденное решение удовлетворяет исходному уравнению.

2.2 Уравнения гиперболического типа

Как было отмечено ранее, для однозначного отыскания решения того или иного дифференциального уравнения необходимо задать дополнительные условия. Для уравнений гиперболического типа такими условиями являются начальные условия [2; 3].

Начальными условиями для уравнений гиперболического типа называются дополнительные функции, задающие значение самой функции и её производной в некоторый начальный момент времени во всех точках области определения функции. Для струны это будут функции, которым должна быть равна искомая функция и её производная по времени, если в её уравнение вместо текущего времени подставить начальный момент времени:

$$u(x,0) = p(x), \quad u_t(x,0) = q(x)\,. \tag{2.2.1}$$

Кроме начальных условий необходимо указать ещё так называемые граничные условия.

Граничными условиями для уравнений в частных производных называются функции времени и координат, которым должна быть равна искомая функция в любой момент времени на границе области исследования функции. Для струны эти условия задаются на её концах. При этом имеется несколько возможностей.

1 Концы струны движутся по заданному закону. Это значит, что смещаться эти точки не могут, следовательно

$$u(0,t) = f_1(t) \text{ и } u(l,t) = f_2(t)\,. \tag{2.2.2}$$

Это так называемая первая краевая задача.

2 На концы струны действуют силы, меняющиеся по заданному закону, в частности концы струны свободны:

$$u_x(0,t) = f_3(t) \text{ и } u_x(l,t) = f_4(t)\,. \tag{2.2.3}$$

Это так называемая вторая краевая задача.

На практике могут встретиться и различного рода комбинации этих условий. Однако нужно, чтобы дополнительные условия были согласованы. А именно. Если заданы начальные условия в виде функций, то на границе значение этих функций должно быть равно значению граничных функций в начальный момент времени. Например, для первой краевой задачи имеем: $p(0) = f_1(0), q(0) = f_1^{'}(0), p(l) = f_2(0), q(l) = f_2^{'}(0);$ для второй краевой задачи имеем: $p_x(0) = f_3(0), p_x(l) = f_4(0).$

Таким образом, задача для исследования колебания струны может быть сформулирована следующим образом. Требуется найти функцию

$$u(x,t), \tag{2.2.4}$$

характеризующую отклонение струны от положения равновесия, удовлетворяющую уравнению колебания струны

$$u_{tt} = v^2 u_{xx}, \tag{2.2.5}$$

начальным условиям

$$u(x,t) = p(x), u_t(x,t) = q(x) \tag{2.2.6}$$

и граничным условиям

$$u(0,t) = 0 \text{ и } u(l,t) = 0. \tag{2.2.7}$$

Рассмотрим метод Даламбера для бесконечной струны. Это значит, что граничные условия для неё не требуются, т. к. струна имеет конечную длину, кроме того, на неё не действуют внешние силы (ни объемные, ни трения).

Таким образом, необходимо решить следующую задачу.

Решить уравнение $u_{tt} = v^2 u_{xx}$, с начальными условиями

$$u(x,0) = p(x), \; u_t(x,0) = q(x,t) \tag{2.2.8}$$

Задачи, в которых требуется решить дифференциальное уравнение с начальными условиями, но без граничных, называются задачами Коши.

Решим задачу Коши для бесконечной струны. Приведем уравнение (2.2.5) ко второй канонической форме. Для этого запишем характеристическое уравнение $a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0$.

Определим коэффициенты $a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{22} = -v^2$, так что $\lambda = \pm v$. Это позволяет выбрать функции преобразования, исходя из уравнений

$$\xi_t = v\xi_x, \quad \eta_t = -v\eta_x.$$

Решим эти независимые уравнения методом характеристик.

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-v} = \frac{d\xi}{0}.$$

$$x + vt = c_1, \quad \xi = c_2.$$

$$\xi = f_1(x + vt).$$

$$\eta = f_2(x - vt).$$

Получим канонический вид $u_{\xi\eta} = 0$.

Такое уравнение мы уже решали в примере 12, следовательно, его решением является функция $u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$.

В этом выражении нужно вернуться к прежним переменным, тогда получим решение в виде

$$u = \varphi(f_1(x + vt)) + \psi(f_2(x - vt)).$$

Поскольку внутренние функции также произвольны, можно вместо двух произвольных функций в каждом слагаемом использовать по одной

$$u = f_1(x + vt) + f_2(x - vt).$$

Получили общее решение задачи Коши методом Даламбера.

Рассмотрим метод Фурье для струны конечной длины [2; 5].

В этом случае кроме начальных условий необходимо использовать и граничные условия. Будем считать, что струна на своих концах закреплена. Задачи, в которых требуется решить дифференциальное уравнение с начальными и граничными условиями, называются краевыми задачами. Решим уравнение (2.2.5) методом Фурье. Суть этого метода состоит в следующем. Искомую функцию представляем в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от своего аргумента. В нашем случае

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{2.2.9}$$

Подставим эту функцию в уравнение (2.2.5)

$$X(x)T''(t) = v^2 X''(x)T(t) \tag{2.2.10}$$

и разделим это равенство на функцию $\frac{1}{v^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$.

Если параметр v^2 есть величина постоянная, то, как видно из равенства, левая его часть зависит только от времени, правая только от координаты. Это значит, что равенство может быть тождеством только тогда, когда обе части равенства суть одна и та же постоянная величина. Обозначим её λ. Тогда получаем два уравнения

$$\begin{aligned} T''(t) &= \lambda v^2 T(t) \\ X''(x) &= \lambda X(x). \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Найдём решение второго уравнения. Этим решением будет функция:

$$X = Ce^{\sqrt{\lambda}x} + De^{-\sqrt{\lambda}x}. \tag{2.2.12}$$

Удовлетворим граничным условиям: $X(0)=Ce^{\sqrt{\lambda}0}+De^{-\sqrt{\lambda}0}=C+D=0$, получим $X(l)=Ce^{\sqrt{\lambda}l}+De^{-\sqrt{\lambda}l}=0$. Отсюда следует, что $D=-C$, тогда $X(l)=Ce^{\sqrt{\lambda}l}-Ce^{-\sqrt{\lambda}l}=0\Rightarrow e^{\sqrt{\lambda}l}-e^{-\sqrt{\lambda}l}=0\Rightarrow e^{2\sqrt{\lambda}l}=1$. В вещественной области справедливость такого равенства возможна лишь при условии, что константа равна нулю или она должна быть отрицательным числом, чтобы корень квадратный из неё был мнимым, т. е. $\lambda=-k^2\Rightarrow e^{2ikl}=1$, что возможно при условии $2kl=2n\pi\Rightarrow k=\frac{n\pi}{l}=k_n$, где $n=1,2,3...$

Таким образом, решением нашей задачи, удовлетворяющим граничным условиям, будет функция $u(x,t)=(A\cos(\frac{n\pi}{l}vt)+B\sin(\frac{n\pi}{l}vt))D\sin(\frac{n\pi}{l}x)$. Осталось удовлетворить начальным условиям. Для этого заметим, что уравнению и граничным условиям удовлетворяет бесконечно много функций, соответствующих различным значениям n. Составим из этих функций ряд

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(\frac{n\pi}{l}vt)+B_n\sin(\frac{n\pi}{l}vt))\sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

и подберём его коэффициенты так, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi}{l}x)=p(x);$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{l}vB_n\sin(\frac{n\pi}{l}x)=q(x).$$

Это приводит нас к стандартной задаче разложения функции в ряд Фурье. Находим коэффициенты A_n и B_n:

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l p(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad B_n\frac{n\pi v}{l}=\frac{2}{l}\int_0^l q(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

или

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l p(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad B_n=\frac{2}{n\pi v}\int_0^l q(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Рассмотрим физический смысл найденного решения. Полученное решение состоит из стоячих волн, когда каждая точка струны колеблется со своей амплитудой, но все они колеблются с одной и той же частотой. Частота стоячей волны определяется её длиной $w_n=\frac{n\pi v}{l}$. Частота, соответствующая наименьшему n, называется основной частотой или основным тоном. Колебания с этой частотой называется основной гармоникой. Все остальные колебания происходят с кратными частотами. Они называются обертонами. Их присутствие придаёт звучанию мелодичность и насыщенность. Однако частоты, отличающиеся от основной более чем в семь раз, создают наоборот диссонанс [3; 4].

2.3 Уравнения параболического типа

Самым известным уравнением параболического типа является уравнение теплопроводности $u_t = au_{xx} + q_0$, в котором мы для общности температуру будем обозначать $u(x,t)$ и у функции источника тепла опустим штрихи. Это уравнение описывает потоки тепла и распределение температуры по некоторой одномерной области, которую обычно называют стержнем. Пусть длина стержня l. Для однозначности определения температуры зададим ещё начальные и граничные условия.

Начальное условие $u(x,0) = f(x)$, а на концах стержня могут быть заданы разные условия, чаще других встречаются следующие.

1 На левом и правом конце стержня задано значение температуры, как функция времени

$$u(0,t) = p(t), \quad u(l,t) = q(t). \tag{2.3.1}$$

2 На левом конце задана температура, а на правом – её производная

$$u(0,t) = p(t), \quad u_x(0,t) = q(t). \tag{2.3.2}$$

3 На левом конце задана температура, а на правом – её производная по координате и температура

$$u(0,t) = p(t), \quad u(l,t) = q(t), \; u_x(0,t) = q(t). \tag{2.3.3}$$

Это связано с тем, что на правом конце не всегда известна температура, она иногда бывает искомой величиной, но задан закон теплообмена, который устанавливает количество тепла, отдаваемое стержнем в окружающую среду через правый конец. Согласно закону Фурье количество тепла, подходящего к правому концу стержня будет равно $q_1 = -\kappa \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=l}$, с другой стороны, всё это тепло рассеивается в окружающую среду за счёт теплообмена. Обычно считается, что количество тепла, отдаваемое за счёт теплообмена пропорционально разности температур конца стержня и окружающей среды $q_1 = \alpha(T - T_0)$. Сравнивая два предыдущих равенства, находим $-\kappa \dfrac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \alpha(T - T_0)$ или $-u_x\big|_{x=l} = \alpha(u - u_0)$.

Возможны и другие граничные условия, а также различные комбинации описанных выше условий [4].

Рассмотрим решение уравнения теплопроводности для бесконечного стержня. Будем считать, что в некотором бесконечно длинном стержне некоторым образом распределена начальная температура. Требуется установить закон её изменения с течением времени. В данном случае можно считать, что концы стержня столь далеки от середины, что их влиянием на температуру в средней части стержня можно пренебречь. По этой причине граничные условия можно не задавать, достаточно задать лишь начальные условия. Кроме того, будем считать, что источников тепла в стержне нет. Так что требуется решить следующее уравнение

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{2.3.4}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = f(x). \tag{2.3.5}$$

Будем искать решение этой задачи методом Фурье. Т. е. представим функцию в виде произведения двух неизвестных функций $u(x,t) = T(t)X(x)$.

Подставим эту функцию в уравнение $T'(t)X(x) = a^2T(t)X''(x)$ и разделим его на искомую функцию и параметр a: $\dfrac{T'(t)}{a^2T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)}$. Вновь замечаем, что левая часть равенства зависит только от времени, правая – только от координат. Поэтому они могут быть только константами, равными одной и той же величине:

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = -s^2, \tag{2.3.6}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -s^2. \tag{2.3.7}$$

Решением первого уравнения будет функция

$$T(t) = Ce^{-s^2a^2t}, \tag{2.3.8}$$

а второго

$$X(x) = A\cos(sx) + B\sin(sx). \tag{2.3.9}$$

Тогда решение исходного уравнения будет иметь вид

$$u(x,t) = e^{-s^2a^2t}(A\cos(sx) + B\sin(sx)). \qquad (2.3.10)$$

Данное решение удовлетворяет уравнению теплопроводности, но не удовлетворяет начальным условиям. В то же время, меняя параметр s, можно получить бесконечно много разных решений. Правда, в этот раз из-за бесконечной длины стержня на этот параметр не накладываются никакие условия, поэтому он может принимать значение от минус бесконечности до плюс бесконечности. Поэтому, как и в прошлый раз, скомбинируем из этих решений одно, но в отличие от предыдущего случая придётся не суммировать решения, а интегрировать по параметру s, т. к. он меняется непрерывно. Таким образом, составим интеграл

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2a^2t}(A(s)\cos(sx) + B(s)\sin(sx))ds \qquad (2.3.11)$$

и потребуем выбора коэффициентов $A(s)$ и $B(s)$ таким образом, чтобы выполнялось начальное условие, т. е.

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} (A(s)\cos(sx) + B(s)\sin(sx))ds = f(x). \qquad (2.3.12)$$

Это известная формула интеграла Фурье, являющегося аналогом ряда Фурье. Интеграл Фурье используется тогда, когда функция задана на всей числовой оси и не является периодической. Коэффициенты ряда Фурье преобразуются в коэффициенты интеграла Фурье следующим образом:

$$A(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(sx)dx, \quad B(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(sx)dx.$$

Подставив коэффициенты (2.3.12), получим решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2a^2t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos(sy)dy\cos(sx) + \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\sin(sy)dy\sin(sx)\right)ds. \qquad (2.3.13)$$

В данном случае в коэффициентах мы сменили обозначение переменной интегрирования во внутренних интегралах, чтобы не путать её с аргументом искомой функции. Объединив внутренние интегралы, предварительно поднеся под них тригонометрические функции, которые до этого в них не входили, получим

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2a^2t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)[\cos(sy)\cos(sx) + \sin(sy)\sin(sx)]dy\right)ds \qquad (2.3.14)$$

В последнем выражении воспользуемся формулой косинуса разности и поменяем интегралы местами:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2a^2t}\cos(s(y-x))ds\,. \qquad (2.3.15)$$

Это и есть решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее начальным условиям для бесконечно длинного стержня.

Рассмотрим процесс распространения тепла в стержне конечной длины. Пусть стержень имеет конечную длину, и на его концах заданы граничные условия. Для определённости будем полагать, что задана температура. Таким образом, нужно решить краевую задачу $u_t = a^2u_{xx}$ с начальным условием $u(x,0) = f(x)$ и граничными условиями $u(0,t) = u_1, u(l,t) = u_2$.

Для решения задачи снова будем пользоваться методом Фурье $u = X(x)T(t) + ax + b$. Решая это уравнение аналогично уравнению с бесконечно длинным стержнем, получим

$$u(x,t) = e^{-s^2a^2t}(A\cos(sx) + B\sin(sx)) + ax + b\,. \qquad (2.3.16)$$

Это решение должно удовлетворять еще и граничным условиям, тогда

$$u(0,t) = e^{-s^2a^2t}(A\cos(s0) + B\sin(s0)) + a0 + b = u_1,$$

$$u(l,t) = e^{-s^2a^2t}(A\cos(sl) + B\sin(sl)) + al + b = u_2.$$

Для удовлетворения этих условий положим

$b = u_1, a = (u_2 - u_1)/l$,

$u(0,t) = e^{-s^2a^2t}(A\cos(s0) + B\sin(s0)) = 0$,

$u(l,t) = e^{-s^2a^2t}(A\cos(sl) + B\sin(sl)) = 0$.

Откуда находим $A = 0, \sin(sl) = 0$, $sl = n\pi, s = \frac{n\pi}{l}$, тогда решение уравнения будет иметь вид

$$u(x,t) = e^{-s^2a^2t}(B_n\sin(\frac{n\pi}{l}x)) + ax + b\,. \qquad (2.3.17)$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям, составим ряд $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[e^{-s^2a^2t}B\sin(\frac{n\pi}{l}x)] + ax + b$ и подставим сюда начальное условие $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(\frac{n\pi}{l}x) + ax + b = f(x)$. Отсюда следует, что коэффициенты искомого ряда должны быть коэффициентами Фурье, но не для функции начальных условий, а для функции $f_1(x) = f(x) - ax - b$, $B_n = \frac{2}{l}\int_0^l [f(x) - ax - b]\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx$. С течением времени, каково бы ни было начальное распределение температуры, временная зависимость температуры затухает, и решение стремится к линейной зависимости температуры от координат.

Рассмотрим теперь задачу, в которой в качестве граничного условия на одном из концов задана производная от искомой функции по координатам:

$$u(0,t) = u_1, u_x(l,t) = u_2. \qquad (2.3.18)$$

В этом случае второе граничное условие будет выглядеть следующим образом:

$$u_x(l,t) = e^{-s^2a^2t}(-sA\sin(sl) + sB\cos(sl)) + a = u_2. \qquad (2.3.19)$$

Так что, если параметр a выбрать равным производной функции на правом конце стержня $a = u_2$, то получим $u_x(l,t) = e^{-s^2a^2t}(-sA\sin(sl) + sB\cos(sl)) = 0$. Далее получаем, что $A = 0$, $\cos(sl) = 0, sl = (n+0.5)\pi$, из этого равенства находим параметр s: $s = \frac{(n+0.5)\pi}{l}$. Запишем функцию в следующем виде

$$u(x,t) = e^{-\left[\frac{(n+0.5)\pi}{l}\right]^2 a^2 t}(B_n \sin(\frac{(n+0.5)\pi}{l}x)) + ax + b. \qquad (2.3.20)$$

Можно показать, что функции $\sin(\frac{(n+0.5)\pi}{l}x)$ ортогональны, и по ним можно раскладывать другие функции. Это позволит удовлетворить начальному условию $u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(\frac{(n+0.5)\pi}{l}x) + ax + b = f(x)$, откуда $\sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(\frac{(n+0.5)\pi}{l}x) = f(x) - ax - b$.

При этом коэффициенты определяются обычными формулами Фурье:

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l [f(x) - ax - b]\sin(\frac{(n+0.5)\pi}{l}x)dx. \qquad (2.3.21)$$

Решение этой задачи будет выглядеть следующим образом:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}[e^{-\left[\frac{(n+0.5)\pi}{l}\right]^2 a^2 t} B_n \sin(\frac{(n+0.5)\pi}{l}x)] + ax + b. \qquad (2.3.22)$$

Из последней формулы видно, что с течением времени, каково бы ни было начальное распределение температуры, временная зависимость температуры затухает, и решение стремится к линейной зависимости температуры от координат.

Рассмотрим ***принципы максимума и минимума*** для уравнения теплопроводности, а также единственность решения задач теплопроводности [3; 4; 5].

В предыдущих параграфах путём конструирования решений уравнения теплопроводности мы доказали существование его решения. Теперь докажем единственность. Для этого сформулируем и докажем так называемый принцип максимального и минимального значения температуры.

Если функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности без источников тепла $u_t = a^2 u_{xx}$ в некоторой области $0 \le x \le l$, то своего максимального и минимального значения эта функция достигает либо в начальный момент времени внутри области, либо на одном из её концов.

С точки зрения физических процессов этот принцип очевиден. Если внутри области нет источников тепла, то температура может меняться только за счёт перераспределения этого тепла внутри области. Причём изменение температуры идёт в сторону её выравнивания. Если в начальный момент времени максимальная температура достигалась внутри области, то с течением времени она будет уменьшаться, а в других точках увеличиваться. Но температура других точек не сможет превысить начального максимального значения. Это бы означало переток тепла от менее нагретых точек области к более нагретым точкам. Если есть приток тепла из-за границы, то внутри области температура не сможет принять значение больше чем на границе.

Для доказательства этого принципа предположим, что температура приняла максимальное значение M внутри области в некоторой точке (x_0, t_0), которое оказалось больше, чем максимальное значение температуры в начале процесса или в любой момент, но на концах (назовём это максимальное значение максимальным значением на границе и обозначим его m). Обозначим максимальное значение температуры внутри области и в любой момент времени $M > m$. Рассмотрим новую функцию

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{M - m}{2l^2}(x - x_0)^2 .$$

В точке максимума функции $u(x_0,t_0)$ данная функция имеет значение $v(x_0,t_0)=u(x_0,t_0)+\frac{M-m}{2l^2}(x_0-x_0)^2=u(x_0,t_0)=M$. С другой стороны, на границе области $u(x,t)\le m,(x-x_0)^2\le l^2$, поэтому $v(x,t)\le m+\frac{M-m}{2l^2}l^2=\frac{M+m}{2}<M$.

Это значит, что функция может иметь максимум только в некоторой внутренней точке области или в конце промежутка времени, в течение которого ведётся наблюдение. Пусть это будет точка (x_1,t_1). Тогда в этой точке должны выполняться условия максимума $v_t(x_1,t_1)=0,v_{xx}(x_1,t_1)\le 0$, поэтому $v_t(x_1,t_1)-a^2v_{xx}(x_1,t_1)\ge 0$, если же максимум функции достигается в конце промежутка наблюдения, то производная по времени может и не равняться нулю, но будет неотрицательна, т.к. температура может возрастать или быть постоянной, а производная по координате всё равно будет не положительна, т. е. $v_t(x_1,t_1)\ge 0,v_{xx}(x_1,t_1)\le 0.$

В то же время, можем получить, что

$$v_t(x_1,t_1)-a^2v_{xx}(x_1,t_1)=u_t(x_1,t_1)-a^2u_{xx}(x_1,t_1)-a^2\frac{M-m}{l^2}=-a^2\frac{M-m}{l^2}<0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему максимума, аналогично можно доказать и принцип минимума.

Из принципа максимума и минимума следует, что если функция удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности и однородным, и начальным, и граничным условиям, то она тождественно равна нулю. Поскольку максимум и минимум принимаются только на границе и они равны нулю, то все остальные значения функции будут между этими значениями, т. е. равны нулю. На основе этих принципов доказывается и теорема единственности решения уравнения теплопроводности.

Пусть требуется решить уравнение $u_t-a^2u_{xx}=F(x,t)$ с начальным условием $u(x,0)=f(x)$ и граничными условиями $u(0,t)=p(t),u(l,t)=q(t)$.

Требуется доказать единственность функции, удовлетворяющей этим требованиям. Предположим противное, что существует две функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, которые удовлетворяют одним и тем же условиям. Рассмотрим функцию разности $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$. Эта функция удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности и начальным и граничным условиям. По следствию из принципа максимума она тождественно равна нулю, следовательно, два имеющихся решения уравнения тождественно равны. Теорема доказана.

2.4 Уравнения эллиптического типа

К уравнениям эллиптического типа относится уравнение Пуассона

$$\Delta u = f(x, y, z) \tag{2.4.1}$$

или в частном случае уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0\,. \tag{2.4.2}$$

Как и для любых уравнений в частных производных, этим уравнениям требуются дополнительные условия. Однако в отличие от уравнений других типов в этих уравнениях время не встречается, и поэтому начальные условия не используются. В уравнениях используются только граничные условия.

Граничные условия могут быть трёх типов.

1 На границе области задана сама искомая функция. В этом случае задача называется задачей Дирихле.

2 На границе задана нормальная производная искомой функции. В этом случае задача называется задачей Неймана.

3 И, наконец, возможны смешанные граничные условия. Когда на границе задана связь между нормальной производной функции и её значением.

В зависимости от размерности области задачи могут подразделяться на трёхмерную, двумерную и одномерную. В трёхмерной задаче уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,. \tag{2.4.3}$$

Если выбрана сферическая система координат, то вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0\,. \tag{2.4.4}$$

Если выбрана цилиндрическая система координат, тогда

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,. \tag{2.4.5}$$

В двумерной задаче и декартовой системе координат уравнение Лапласа будет выглядеть следующим образом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,. \tag{2.4.6}$$

В полярной системе координат

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0\,. \tag{2.4.7}$$

Соответственным образом изменяются и граничные условия. В трёхмерных задачах значения функции или производной задаются на некоторой замкнутой поверхности, в двумерных задачах – на некоторой замкнутой кривой и в одномерном случае – в двух точках – концах промежутка, в которых ищется функция.

Рассмотрим решение плоской задачи Дирихле внутри и вне круга [5]. Пусть дано уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, решение которого нужно найти в некотором круге радиуса R, причём на окружности этого круга функция принимает заданные значения.

Решение задачи будем искать в полярной системе координат, начало которой поместим в центр исследуемого круга. В полярной системе координат $\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ и граничные условия $u(r,t)=f(t)$.

Будем искать решение этой задачи методом Фурье $u=R(r)T(t)$, далее $\frac{T}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial R}{\partial r})+\frac{R}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=0.$ Умножим это равенство на r и разделим на искомую функцию, после этого разведём слагаемые по разные стороны от равенства, получим $\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial R}{\partial r})=-\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}.$ В этом равенстве правая часть зависит только от угловой переменной, левая – от радиальной. Поэтому они могут быть равны только некоторой постоянной величине $\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial R}{\partial r})=s^2$ $-\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=s^2$. Второе уравнение имеет решение $T=A\cos(st)+B\sin(st)$. Первое уравнение приобретает вид $r^2R''+rR'-s^2R=0$. Это уравнение Эйлера, решение которого есть степенная функция $R=r^n$. Подставив ее в уравнение, получим $r^2n(n-1)r^{n-2}+rnr^{n-1}-s^2r^n=0$. Это равенство будет тождеством, если выполнится условие $n(n-1)+n-s^2=n^2-s^2 0$, откуда следует, что $n=\pm s$.

В результате получаем два решения

$$u=r^s(A\,cos(st)+B\,sin(st)) \qquad (2.4.8)$$

и

$$u=r^{-s}(A\,cos(st)+B\,sin(st)). \qquad (2.4.9)$$

Первое решение ограничено внутри круга, и поэтому может служить решением внутренней задачи Дирихле, второе решение, наоборот, не ограничено в центре круга и, значит, не может служить решением для внутренней задачи Дирихле. Для внешней задачи Дирихле требуется конечность решения на бесконечности. Этому требованию удовлетворяет второе решение и не удовлетворяет первое. Поэтому первое можно считать решением внутренней, а второе – внешней задачи Дирихле.

Для однозначности найденных решений необходимо, чтобы они были периодичны по углу с периодом 2π. Для этого нужно, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{aligned} u &= r^s(A\cos(s(t+2\pi)) + B\sin(s(t+2\pi))) = \\ &= r^s(A\cos(st+2\pi s) + B\sin(st+2\pi s))) \\ &= r^s(A\cos(st) + B\sin(st)) \end{aligned} \quad . \qquad (2.4.10)$$

Для этого необходимо, чтобы параметр s был целым числом. Обозначим его $n = 1, 2, 3...$ Тогда решение внутри будет

$$u_n = r^n(A_n\,cos(nt) + B_n\,sin(nt)), \qquad (2.4.11)$$

решение вне круга будет

$$u_n = r^{-n}(A_n\,cos(nt) + B_n\,sin(nt)). \qquad (2.4.12)$$

Здесь мы и решения и коэффициенты снабдили индексом n, т. к. от него могут, вообще говоря, зависеть и коэффициенты, и само решение.

При $n = 0$ решением уравнения (2.4.7) будут функции $T = A_0 + B_0 t$, $R = C_0 + D_0 \ln r$. Чтобы выполнить требование периодичности, нужно положить $B_0 = 0$. Так что и A_0 можно положить равным единице, поскольку при умножении на радиальную часть функции там всё равно останутся константы. Мы их снова обозначим буквами A_0 и B_0, т. е. $u_0(r) = A_0 + B_0 \ln r$.

Для внутренней области надо выбрать $u_0(r) = A_0$, а для внешней $u_0(r) = B_0 \ln r$.

Для удовлетворения граничным условиям сконструируем ряд для внутренней области

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)), \qquad (2.4.13)$$

и для внешней области:

$$u = \frac{B_0}{2}\ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)). \qquad (2.4.14)$$

При $r = R$ функция должна совпадать с граничной функцией, т. е.

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)) = f(t) \qquad (2.4.15)$$

для внутренней задачи и

$$\frac{B_0}{2}\ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)) = f(t) \qquad (2.4.16)$$

для внешней задачи.

Это значит, что коэффициенты ряда являются коэффициентами Фурье,

$$R^n A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt, \quad R^n B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin(ns)ds \qquad (2.4.17)$$

Эти формулы записаны для внутренней области. Из них получаем коэффициенты $A_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(ns)ds$, $B_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin(ns)ds$. Аналогично для внешней области получаются $B_0 \ln(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)ds$, $R^{-n} A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(ns)ds$, $R^{-n} B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin(ns)ds$. И из них выразим коэффициенты $B_0 = \frac{1}{\pi \ln(r)}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)ds$, $A_n = \frac{R^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(ns)ds$, $B_n = \frac{R^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin(ns)ds$. Этим и завершается решение задачи Дирихле внутри и вне круга.

От решения в виде ряда в данной задаче можно перейти к формуле, не содержащей ряда, но данный метод рассматривать в данном пособии не целесообразно, он достаточно подробно изложен в [4].

Подведем небольшой итог второй главы. Задачи, приводящие к уравнениям в частных производных, в основном встречаются в физике и описывают реальные физические процессы. Они должны отвечать некоторым требованиям:

1) существование решения. Если задача относится к реально протекающему процессу, она должна иметь решение, которое описывает этот процесс;

2) единственность решения. Реальные физические процессы протекают всегда одинаково, если заданы одинаковые исходные условия. Они не могут один раз протекать одним образом, другой раз другим, если исходные данные, от которых они зависят, неизменны, если только количество

исходных данных конечно, и они все учтены из тех, что влияют на данный процесс. Это значит, что и уравнения должны иметь единственное решение. По этой причине после нахождения того или иного решения мы всегда доказывали, что оно единственно;

3) поскольку на практике все исходные данные являются измеримыми в эксперименте величинами, они, как правило, содержат ошибку. Эта ошибка в исходных данных естественно приводит к ошибке в самом решении. При этом возможны два крайних случая. Малая ошибка исходных данных приводит к малой ошибке в решении. Такие решения называются устойчивыми. Именно такие решения и могут использоваться на практике, в том числе для исследования физического процесса виртуально (в модели). Но возможно и так, что малая ошибка в исходных данных приводит к большому отличию решения от истинного решения. Такое решение естественно не несёт никакой пользы для практики. Более того, оно может привести к катастрофе. Например, запуск баллистической ракеты. При старте естественно допускается погрешность в направлении полёта и скорости. Эти погрешности приводят к погрешности в точке приземления. Если эта погрешность невелика, то никакой опасности нет. Если же она достаточно велика, то могут пострадать объекты, которые не должны были попасть в зону поражения. Из этих рассуждений следует, что решение задачи должно непрерывно зависеть от исходных данных. Для формализации этого требования введём понятие нормы функции в нормированном пространстве.

Определение. Нормой функции $f(x)$ из данного класса называется число, однозначно сопоставленное с этой функцией, обозначаемое $\|f(x)\|$, удовлетворяющее следующим требованиям:

1) $\|f(x)\| \geq 0$. Причём $\|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$;

2) для любого числа a и любой функции $f(x)$ выполняется равенство $\|af(x)\| = a\|f(x)\|$;

3) выполняется неравенство треугольника
$\|f_1(x) + f_2(x)\| \leq \|f_1(x)\| + \|f_2(x)\|$.

В качестве такой нормы можно ввести максимальное значение функции на всех значениях её аргументов. При этом функция может быть, как одного, так и многих переменных. Тогда условие непрерывности решения можно сформулировать следующим образом: решение задачи непрерывно зависит от исходных данных, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta(\varepsilon)$, что как только норма погрешности исходных данных меньше δ, норма отклонения решения от истинного меньше ε.

Задачи, удовлетворяющие трём требованиям (существования, единственности, непрерывности), называются корректно поставленными задачами. Задачи, которые не удовлетворяют хотя бы одному из трёх требований корректности, называются некорректно поставленными задачами.

Впервые на возможность некорректной постановки задачи обратил внимание Адамар. Некорректно поставленными являются все задачи, в которых по имеющемуся решению задачи требуется установить исходные данные или распространить решение на моменты времени, предшествующие начальному. В этом случае, как правило, нарушается единственность. Пример некорректно поставленной задачи из-за нарушения третьего пункта привёл Адамар. Суть этого примера состоит в следующем. Требуется решить уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ с граничными условиями $u(0, y) = 0, u_x(0, y) = \frac{1}{k}\sin(ky)$. Решением этой задачи является функция $u(x, y,) = \frac{1}{k^2} sh(kx)\sin(ky)$.

Если задать другие граничные условия $u(0, y) = 0,\quad u_x(0, y) = 0$, то единственным решением задачи будет тождественный нуль $u(x, y,) \equiv 0$. Найдём норму отклонения граничных условий $\left\| \frac{1}{k}\sin(ky) - 0 \right\| = \frac{1}{k}$ и норму отклонения решения $\left\| \frac{1}{k^2} sh(kx)\sin(ky) - 0 \right\| = \frac{1}{k^2} sh(kx)$. Отсюда видно, что если параметр k выбрать достаточно большим, граничные условия будут отличаться мало, в то время как решения отличаются всё больше и больше по мере увеличения параметра k. Это говорит о том, что решение не является непрерывным по отношению к начальным данным. А это, в свою очередь, говорит о некорректности поставленной задачи.

Можно показать, что задачи Коши для гиперболических и параболических уравнений поставлены корректно, если к уравнениям добавлены начальные условия, когда в начальный момент времени задано значение функции, а для уравнений гиперболического типа ещё и значение производной от искомой функции по времени. Задачи с эллиптическими уравнениями поставлены корректно, если заданы граничные условия, т. е. на некоторой границе задана сама функция или её нормальная производная [4; 5]. Если требуется всё-таки решить задачу, которая поставлена некорректно, то к ней применяют метод регуляризации, который в данном учебном пособии не рассмотрен.

Основные вопросы теории ко второй главе

1 Основные понятия уравнений с частными производными второго порядка, примеры.

2 Классификация уравнений в частных производных второго порядка.

3 Уравнения гиперболического типа и методы их решения.

4 Уравнения параболического типа, метод Фурье решения уравнения параболического типа.

5 Уравнения эллиптического типа. Виды начальных и граничных условий.

Варианты контрольной работы по уравнениям в частных производных второго порядка

Вариант № 1

1 Проверить, являются ли функции $U1 = x^3y - 3xz + 4$, $U2 = xy^2 + 2xz - 5$ решениями уравнения $x^2U\text{xx} + U\text{yy} + y^2U\text{zz} - U\text{z} = 0$.

2 Определить тип уравнения с частными производными и привести его к каноническому виду: а) $2U\text{xx} + 3U\text{xy} - 9U\text{yy} + 5\,U\text{x} - 7U = 0$; б) $5U\text{xx} + U\text{xy} + \frac{U\text{yy}}{4} + 4\,U = 0$; в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0.$

3 Найти области на плоскости, в которых уравнение имеет параболический тип (эллиптический, гиперболический)

$$(y^2 + 1)^2U\text{xx} + 4(y^2 + 1)U\text{xy} + (2\text{x} - 6\text{y})U\text{yy} - U\text{y} = 0.$$

4 Привести математическую формулировку задачи о распространении тепла в тонком однородном стрежне длиной L = 4. Боковая поверхность стержня теплоизолирована, концы поддерживаются при постоянной температуре 100°C, начальное распределение температуры φ(x) = 100° + x(4 – x). Решить задачу методом Фурье.

5 Однородная струна, закрепленная на концах x = 0 и x = l, имеет в начальный момент времени форму u(x, 0), точкам струны сообщена скорость $u_t^{'}$. Найти отклонение струны для любого момента времени, если $u_{tt}^{''} = u_{xx}^{''}$, 0<x<1, 0<t<∞, u(x, 0) = x(x-1), $u_t^{'}(x,0) = x$, u(0,t) = 0, u(1, t) = 0.

6 Решить методом Фурье задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге с граничным значением $f(\varphi) = 2 + \sin 2\varphi$. Вычислить приближенно значение решения при $r = \frac{1}{3}, \varphi = \frac{\pi}{11}$.

Вариант № 2

1 Проверить, являются ли функции $U1 = x^2 + y + 3z^2$ и $U2 = x^2 + y^2 + z^2$ решениями уравнения $\Delta U = 6$.

2 Определить тип уравнения с частными производными и привести его к каноническому виду: а) $U\text{xx} - 2U\text{xy} + 10U\text{yy} + U = 0$; б) $2U\text{xx} + 4U\text{xy} + 2U\text{yy} - 2U\text{x} + 4U\text{y} = 0$; в) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial u^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

3 Найти области на плоскости, в которых уравнение имеет гиперболический тип (эллиптический или параболический)

$$(y^2+1)U\text{xx}-x(U\text{xy}+U\text{yy})+y(U\text{x}+U\text{y})=0.$$

4 Привести математическую формулировку задачи о колебании тонкой однородной струны длиной L = 10, жестко закрепленной на концах, если в начальный момент отклонение точек струны от положения равновесия определяется по формуле φ(x) = x(x – 10), а начальные скорости равны нулю. Решить задачу методом Фурье.

5 Для тонкого однородного изолированного стержня длиной 8, ось которого совпадает с осью Ox, температура u = u(x, t) в сечении с абсциссой x в момент времени t при отсутствии источников тепла удовлетворяет уравнению теплопроводности $u_t' = 16u_{xx}''$, 0<x<8, t>0. Определить распределение температуры для любого момента времени t, если известно начальное распределение температуры $u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, 0 \le x \le 4 \\ 8-x, 4 < x \le 8 \end{cases}$, u(0 ,t) = u(8, t)=0.

6 Решить методом Фурье задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге с граничным значением $f(\varphi)=100-\cos 3\varphi$. Вычислить приближенно значение решения при $r=\frac{1}{4}, \varphi=\frac{7\pi}{13}$.

Вариант № 3

1 Проверить, являются ли функции $U1 = 3xyz - \frac{1}{3}(x^3+y^3)$, $U2 = xy+3x^2-3y^2+5$ решениями уравнения

$$xy(U\text{xx}+U\text{yy}+U\text{zz}) - 2(yU\text{x}+xU\text{y}) = -2(x^2+y^2).$$

2 Определить тип уравнения с частными производными и привести его к каноническому виду: а) $2U\text{yy}-U\text{xy}+3U\text{x}-U=0$; б) $8U\text{xy}+5(U\text{xx}+U\text{x})-U\text{y}+4U_{yy}=0$, в) $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial u^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u^2}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

3 Найти области на плоскости, в которых уравнение имеет гиперболический тип (эллиптический, параболический)

$$y^2U\text{xx}+2yU\text{xy}+(x^2+y^2)U\text{yy}-2xyU=0.$$

4 Привести математическую формулировку задачи о распространении тепла в тонком однородном стержне длиной L = 15. Боковая поверх-

ность стержня и правый конец теплоизолированы, а левый конец поддерживается при постоянной температуре 0°, начальное распределение температуры φ(x) = $\frac{9}{2}x^2$. Решить задачу методом Фурье.

5 Однородная струна, закрепленная на концах x = 0 и x = 3/2, имеет в начальный момент времени форму u(x,0), точкам струны сообщена скорость u_t'. Найти отклонение струны для любого момента времени, если $u_{tt}'' = u_{xx}''$, 0<x<$\frac{3}{2}$,0<t<∞; u(x, 0) = x(x-$\frac{3}{2}$), $u_t'(x,0) = x$, u(0, t) = 0, u($\frac{3}{2}$, t) = 0.

6 Решить методом Фурье задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге с граничным значением $f(\varphi) = 10\sin\varphi - 2\cos 3\varphi$. Вычислить приближенно значение решения при $r = \frac{1}{2},\ \varphi = \frac{13\pi}{7}$.

Вариант № 4

1 Проверить, являются ли функции решениями уравнения
Uxx+ Uyy+ Uzz $= 0$, $U1 = xy(z+1) + (x+1)y - 2yz$,
$U2 = 3xy + x^2 - y + 4$.

2 Определить тип уравнения с частными производными и привести его к каноническому виду: а) $6U$xx$-4U$xy$-2U$yy$+3(U$x $+ U$y$) - U = 0$;

б) $5U$xx$-2\ U$xy$+\ U$yy$+4U = 0$;

в) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial u^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

3 Найти области на плоскости, в которых уравнение имеет эллиптический (гиперболический или параболический) типы

$$x^3U\text{xx} + 2xyU\text{xy} + y(1+x)U\text{yy} - U = 0.$$

4 Привести математическую формулировку задачи о колебании тонкой однородной струны длиной L = 5, жестко закрепленной на концах, если в начальный момент она находится в положении равновесия, а начальные скорости точек струны определяются по формуле Ψ(x) = x(5 – x). Решить задачу методом Фурье.

5 Для тонкого однородного изолированного стержня длиной 4, ось которого совпадает с осью Ox, температура u = u(x, t) в сечении с абсциссой x в момент времени t при отсутствии источников тепла удовлетворяет уравнению теплопроводности $u_t' = 4u_{xx}''$, 0<x<4, t>0. Определить распределение

температуры для любого момента времени t, если известно начальное распределение температуры $u(x,0)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}, 0\le x\le 2\\ 4-x, 2<x\le 4\end{cases}$, u(0, t) = u(4, t) = 0.

6 Решить методом Фурье задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге с граничным значением $f(\varphi)=1+3\sin 2\varphi$. Вычислить приближенно значение решения при $r=\frac{3}{5}, \varphi=\frac{11\pi}{3}$.

Вариант № 5

1 Проверить, являются ли функции решениями уравнения

$$U1= x^2-2xy+5x-4y+z, U2= x^2+y^2-3xyz+4x;$$

$$U\text{xx}+(x+y)\,U\text{yy}+(z+y)U\text{zz}-(U\text{x}+U\text{y}+U\text{z})-2y=0.$$

2 Определить тип уравнения с частными производными и привести его к каноническому виду: а) $3(U\text{xx}+U\text{xy})-6U\text{yy}-2(U\text{x}+U)=0$; б) $(U\text{xx}+5U\text{yy})-4U\text{xy}+2(U\text{x}+U\text{y})=0$; в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial u^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

3 Найти области на плоскости, в которых уравнение имеет эллиптический (гиперболический или параболический) типы

$$(x^2+y^2)U\text{xx}+(x+y)U\text{xy}+(x+y)^2U\text{yy}-6xU\text{x}+U=0.$$

4 Привести математическую формулировку задачи о распространении тепла в тонком однородном стержне длиной L = 6, боковая поверхность и концы которого теплоизолированы, а начальное распределение температуры задается формулой φ(x) = $10\sin\frac{\pi}{6}x$. Решить задачу методом Фурье.

5 Однородная струна, закрепленная на концах x = 0 и x = 2, имеет в начальный момент времени форму u(x,0), точкам струны сообщена скорость $u_t^{'}$. Найти отклонение струны для любого момента времени, если $u_{tt}^{''}=4u_{xx}^{''}$, 0<x<2, 0<t<∞, u(x, 0) = x(x-2), $u_t^{'}(x,0)=x-2$, u(0, t) = 0, u(2, t) = 0.

6 Решить методом Фурье задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге с граничным значением $f(\varphi)=50+3\cos\varphi$. Вычислить приближенно значение решения при $r=\frac{3}{4}, \varphi=\frac{\pi}{5}$.

Вариант № 6

1 Проверить, являются ли функции $U1=x^3y-3xz+4$ и $U2=xy^2+2xz-5$ решениями уравнения $x^2U\text{xx}+U\text{yy}+y^2U\text{zz}-U\text{z}=0$.

2 Определить тип уравнения с частными производными и привести его к каноническому виду: а) $2U$xx$+ 3U$xy$- 9U$yy$+ 5\ U$x$- 7U\ = 0$; б) Uxx$+ U$xy$+\ \frac{U\text{yy}}{4} +\ 4\ U\ = 0$; в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial u^2}{\partial x \partial y}+5\frac{\partial u^2}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

3 Найти области на плоскости, в которых уравнение имеет параболический (эллиптический, гиперболический) типы

$$(y^2+1)^2U\text{xx}+ 4(y^2+1)U\text{xy}+ (|x|+|x-4|)U\text{yy}-U\text{y}= 0.$$

4 Привести математическую формулировку задачи о распространении тепла в тонком однородном стрежне длиной L = 4. Боковая поверхность стержня теплоизолирована, концы поддерживаются при постоянной температуре 100 °C, начальное распределение температуры φ(x) = 100° + x(4 – x). Решить задачу методом Фурье.

5 Однородная струна, закрепленная на концах x = 0 и x = 3/2, имеет в начальный момент времени форму u(x, 0), точкам струны сообщена скорость $u_t^{'}$. Найти отклонение струны для любого момента времени, если $u_{tt}^{''}=\frac{1}{4}u_{xx}^{''}$, 0<x<$\frac{3}{2}$, 0<t<∞; u(x, 0) = x(x-$\frac{3}{2}$), $u_t^{'}(x,0)=x$, u(0, t) = 0, u($\frac{3}{2}$, t) = 0.

6 Решить методом Фурье задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге с граничным значением $f(\varphi)=2+\sin 2\varphi$. Вычислить приближенно значение решения при $r=\frac{1}{3}, \varphi=\frac{\pi}{11}$.

Вариант № 7

1 Проверить, являются ли функции $U1= x^2+y+3z^2$ и $U2= x^2+y^2+z^2$ решениями уравнения $\Delta U\ = 6$.

2 Определить тип уравнения с частными производными и привести его к каноническому виду: а) Uxx$-2U$xy$+10U$yy $+ U\ = 0$;
б) $2U$xx$+ 4U$xy$+ 2U$yy$-2U$x $+ 4U$y $= 0$; в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

3 Найти области на плоскости, в которых уравнение имеет гиперболический (эллиптический, параболический) типы

$$(y^2+1)U\text{xx}-x(U\text{xy}+U\text{yy})+y(U\text{x}+U\text{y})=0.$$

4 Привести математическую формулировку задачи о колебании тонкой однородной струны длиной L = 10, жестко закрепленной на концах,

если в начальный момент отклонение точек струны от положения равновесия определяется по формуле φ(x) = x(x – 10), а начальные скорости равны нулю. Решить задачу методом Фурье.

5 Для тонкого однородного изолированного стержня длиной 9, ось которого совпадает с осью Ох, температура u = u(x, t) в сечении с абсциссой x в момент времени t при отсутствии источников тепла удовлетворяет уравнению теплопроводности $u_t^{'} = 25u_{xx}^{''}$, 0<x<9, t>0. Определить распределение температуры для любого момента времени t, если известно начальное распределение температуры $u(x,0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{9}, 0 \le x \le \frac{9}{2} \\ 9 - x, \frac{9}{2} < x \le 9 \end{cases}$, u(0, t) = u(9, t) = 0.

6 Решить методом Фурье задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге с граничным значением $f(\varphi) = 100 - \cos 3\varphi$. Вычислить приближенно значение решения при $r = \frac{1}{4}, \varphi = \frac{7\pi}{13}$.

Вариант № 8

1 Проверить, являются ли функции $U1 = 3xyz - \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$, $U2 = xy + 3x^2 - 3y^2 + 5$ решениями уравнения

$xy(U\text{xx} + U\text{yy} + U\text{zz}) - 2(yU\text{x} + xU\text{y}) = -2(x^2 + y^2)$.

2 Определить тип уравнения с частными производными и привести его к каноническому виду: а) $2U\text{yy} - U\text{xy} + 3U\text{x} - U = 0$;

б) $8U\text{xy} + 5(U\text{xx} + U\text{x}) - U\text{y} + 4U_{yy} = 0$, в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = 0.$

3 Найти области на плоскости, в которых уравнение имеет гиперболический (эллиптический, параболический) типы

$$y^2U\text{xx} + 2yU\text{xy} + (x^2 + y^2)U\text{yy} - 2xyU = 0.$$

4 Привести математическую формулировку задачи о распространении тепла в тонком однородном стержне длиной L = 15. Боковая поверхность стержня и правый конец теплоизолированы, а левый конец поддерживается при постоянной температуре 0°, начальное распределение температуры φ(x) = $\frac{9}{2}x^2$. Решить задачу методом Фурье.

5 Однородная струна, закрепленная на концах x = 0 и x = 5, имеет в начальный момент времени форму u(x,0), точкам струны сообщена скорость u_t'. Найти отклонение струны для любого момента времени, если $u_{tt}'' = 36u_{xx}''$, 0<x<5, 0<t<∞; u(x, 0) = x(x-5), $u_t'(x,0) = x - 5$, u(0, t) = 0, u(5, t) = 0.

6 Решить методом Фурье задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге с граничным значением $f(\varphi) = 10\sin\varphi - 2\cos 3\varphi$. Вычислить приближенно значение решения при $r = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{13\pi}{7}$

Вариант № 9

1 Проверить, являются ли функции

$U1 = xy(z+1) + (x+1)y - 2yz$, $U2 = 3xy + x^2 - y + 4$ решениями уравнения Uxx+ Uyy+ Uzz $= 0$.

2 Определить тип уравнения с частными производными и привести его к каноническому виду: а) $6U$xx$-4U$xy$-2U$yy$+3(U$x $+ U$y$) - U = 0$; б) $3U$xx$+6U$xy$+3U$yy$-2(U$x $+ U) = 0$; в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

3 Найти области на плоскости, в которых уравнение имеет эллиптический (гиперболический, параболический) типы

$$x^3U\text{xx} + 2xyU\text{xy} + y(1+x)U\text{yy} - U = 0.$$

4 Привести математическую формулировку задачи о колебании тонкой однородной струны длиной L = 5, жестко закрепленной на концах, если в начальный момент она находится в положении равновесия, а начальные скорости точек струны определяются по формуле Ψ(x) = x(5 – x). Решить задачу методом Фурье.

5 Для тонкого однородного изолированного стержня длиной 3, ось которого совпадает с осью Ox, температура u = u(x, t) в сечении с абсциссой x в момент времени t при отсутствии источников тепла удовлетворяет уравнению теплопроводности $u_t' = u_{xx}''$, 0<x<3, t>0. Определить распределение температуры для любого момента времени t, если известно начальное распределение температуры $u(x,0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{3}, 0 \le x \le \frac{3}{2} \\ 3 - x, \frac{3}{2} < x \le 3 \end{cases}$, u(0, t) = u(3, t) = 0.

6 Решить методом Фурье задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге с граничным значением $f(\varphi) = 1 + 3\sin 2\varphi$. Вычислить приближенно значение решения при $r = \frac{3}{5}, \varphi = \frac{11\pi}{3}$.

Вариант № 10

1 Проверить, являются ли функции $U1 = x^2 - 2xy + 5x - 4y + z$, $U2 = x^2 + y^2 - 3xyz + 4x$ решениями уравнения

$$U_{xx} + (x+y)\,U_{yy} + (z+y)U_{zz} - (U_x + U_y + U_z) - 2y = 0.$$

2 Определить тип уравнения с частными производными и привести его к каноническому виду: а) $5U_{xy} + 3(U_{xx} + U_x) - U_y = 0$,

б) $3U_{xx} - U_{xy} + 2U_{yy} + 4U = 0$; в) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

3 Найти области на плоскости, в которых уравнение имеет эллиптический тип (гиперболический, параболический):

$$(x^2 + y^2)U_{xx} + (x+y)U_{xy} + (x+y)^2 U_{yy} - 6xU_x + U = 0.$$

4 Привести математическую формулировку задачи о распространении тепла в тонком однородном стержне длиной L = 6, боковая поверхность и концы которого теплоизолированы, а начальное распределение температуры задается формулой $\varphi(x) = 10\cos\frac{\pi}{6}x$. Решить задачу методом Фурье.

5 Однородная струна, закрепленная на концах x = 0 и x = 1/4, имеет в начальный момент времени форму u(x, 0), точкам струны сообщена скорость u_t'. Найти отклонение струны для любого момента времени, если $u_{tt}'' = \frac{1}{16}u_{xx}''$, $0 < x < \frac{1}{4}$, $0 < t < \infty$; $u(x, 0) = x(x - \frac{1}{4})$, $u_t'(x,0) = x$, $u(0, t) = 0$, $u(\frac{1}{4}, t) = 0$.

6 Решить методом Фурье задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге с граничным значением $f(\varphi) = 50 + 3\cos\varphi$. Вычислить приближенно значение решения при $r = \frac{3}{4}, \varphi = \frac{\pi}{5}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Алексеев А. Д. Уравнения с частными производными в примерах и задачах : учебное пособие / А. Д. Алексеев, С. Н. Кудряшов, Т. Н. Радченко. – Ростов-на-Дону : Издательство ЮФУ, 2009. – 80 с.

2 Владимиров В. С. Уравнения математической физики : учебник для вузов / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – 2-е изд., стер. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 400 с.

3 Олейник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными : учебник / О. А. Олейник. – 6-е изд. – Москва : Лаборатория знаний, 2020. – 260 с.

4 Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2022. – 512 с.

5 Торшина О. А. Уравнения математической физики : учебное пособие / О. А. Торшина. – Москва : ИНФРА-М, 2020. – 59 с.

Учебное издание

Михащенко Татьяна Николаевна

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Учебное пособие

Редактор В. С. Никифорова

Подписано в печать 29.07.2022	Формат 60х84 1/16	Бумага 80 г/м^2
Печать цифровая	Усл. печ. л. 4,75	Уч.-изд. л. 4,75
Заказ 63	Тираж 100	

Библиотечно-издательский центр КГУ.
640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.