

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра программного обеспечения автоматизированных систем

СЕМИНАРЫ СПЕЦИАЛИСТОВ

Методические указания
к выполнению практических работ
для студентов направления подготовки 09.03.04

Часть 3

Курган 2022

Кафедра: «Программное обеспечение автоматизированных систем».

Дисциплина: «Семинары специалистов».

Направление: 09.03.04 «Программная инженерия».

Составил: канд. техн. наук, доцент А. М. Семахин.

Печатается в соответствии с планом издания, утверждённым методическим советом университета «16» декабря 2021 г.

Утверждены на заседании кафедры «03» февраля 2022 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 СЕТЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТЕВОГО ГРАФИКА	5
1.1 Основные понятия и определения	5
1.2 Постановка задачи	5
1.3 Математическая модель оптимизации времени выполнения комплекса работ	6
1.4 Определение оптимального решения задачи	7
1.5 Алгоритм решения задачи	8
1.6 Алгоритм М-метода	8
1.7 Пример расчёта	8
1.8 Практическая работа № 1 «Безрезервный оптимальный сетевой график»	20
1.8.1 Варианты заданий	21
1.8.2 Методические указания	34
1.8.3 Контрольные вопросы	34
2 СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ	35
2.1 Математическая модель задачи стохастического программирования	35
2.2 Пример решения задачи	37
2.3 Практическая работа № 2 «М-постановка задачи стохастического программирования»	40
2.3.1 Варианты заданий	40
2.3.2 Методические указания	46
2.3.3 Контрольные вопросы	46
3 ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	47
3.1 Управление модельным временем	48
3.1.1 Изменение времени с постоянным шагом	48
3.1.2 Изменение времени по особым состояниям	49
3.2 Планирование модельных экспериментов	50
3.2.1 Стратегическое планирование имитационного эксперимента	50
3.2.2 Tактическое планирование имитационного эксперимента	51
3.3 Обработка и анализ результатов моделирования	52
3.4 Практическая работа № 3 «Прерывание обслуживания	

с возвратом в очередь»	53
3.4.1 Варианты заданий	53
3.4.2 Методические указания	56
3.4.3 Контрольные вопросы	57
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	57
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	57

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Семинары специалистов» (часть 3) имеет целью дать студентам теоретические знания и практические навыки в разработке математических моделей и формализации алгоритмов методов решения на объектно-ориентированном языке программирования Visual C++.

Предмет дисциплины – технология разработки математических моделей.

Задачи дисциплины – изучение теоретических основ математического моделирования процессов, явлений и объектов реального мира и приобретение практических навыков разработки программных приложений в интегрированной среде программирования Microsoft Visual Studio 2019 Community, отладке и документировании программ.

Практические занятия (28 часов).

Методические указания содержат теоретическое обоснование и варианты заданий для выполнения практических работ по дисциплине «Семинары специалистов».

Методические указания разработаны в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта по подготовке бакалавров по направлению 09.03.04 «Программная инженерия».

1 СЕТЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТЕВОГО ГРАФИКА

1.1 Основные понятия и определения

Оптимизация по стоимости комплекса работ, представленного сетевым графиком, выполняется за счёт увеличения времени выполнения операций с использованием резервов времени.

1.2 Постановка задачи

Разработать сетевую модель выполнения комплекса работ. Минимизировать сетевой график по стоимости за счёт увеличения времени выполнения операций комплекса. Определить время начала и окончания работ сетевого графика. Время выполнения операций сетевого графика не меньше, чем минимальная продолжительность выполнения работы. Время завершения комплекса работ не превышает заданного срока.

1.3 Математическая модель оптимизации времени выполнения комплекса работ

Пусть t_{ij}^{\min} – минимальное время выполнения работы i, j ; t_i – время начала выполнения работы i, j ; t_j – время окончания выполнения работы i, j ; c_{ij}^{\max} – максимальные затраты; k_{ij} – коэффициент дополнительных затрат;

$k_{ij} = \frac{c_{ij}^{\max} - c_{ij}^{\min}}{t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}}$, T_{cr} – время критического пути сетевого графика; T_{dir} – заданное

время выполнения комплекса работ сетевого графика; n – количество вершин сетевого графика. $T_{cr} < T_{dir}$ – время критического пути меньше заданного времени выполнения комплекса работ сетевого графика.

Стоимость выполнения работы i, j определяется по формуле:

$$c_{ij} = b_{ij} - k_{ij}(t_j - t_i), \quad (1.1)$$

где t_{ij}^{\min} – минимальное время выполнения работы i, j ;

k_{ij} – коэффициент дополнительных затрат;

t_j – время окончания выполнения работы i, j ;

t_i – время начала выполнения работы i, j ;

b_{ij} – величина, рассчитываемая по формуле:

$$b_{ij} = c_{ij}^{\max} + k_{ij}t_{ij}^{\min}, \quad (1.2)$$

где c_{ij}^{\max} – максимальные затраты;

k_{ij} – коэффициент дополнительных затрат;

t_{ij}^{\min} – минимальное время выполнения работы i, j .

Математическая модель имеет вид

$$\min \leftarrow Z = \sum_{i,j} c_{ij} = \sum_{i,j} b_{i,j} - k_{i,j}(t_j - t_i) \quad (1.3)$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} t_j - t_i \geq t_{ij}^{\min} \\ t_1 = 0 \\ Tcr \leq Tdir \\ t_n = Tdir \\ t_{ij}^o \geq 0, t_{ij}^H \geq 0, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{2, n}. \end{array} \right.$$

Ограничение 1 – ограничение по продолжительности выполнения работы. Ограничение 2 – ограничение по времени начала первой операции. Ограничение 3 – ограничение по времени выполнения комплекса работ. Ограничение 4 – ограничение по времени окончания последней операции сетевого графика. Ограничение 5 – ограничение неотрицательности искомым переменных [1, 2, 3].

1.4 Определение оптимального решения задачи

Оптимальное решение задачи минимизации времени выполнения комплекса работ, представленного сетевым графиком, определяется М-методом или двухэтапным методом. Эти методы используют искусственные переменные, играющие роль дополнительных остаточных переменных, от которых на последующих итерациях при определении оптимального решения освобождаются.

Алгоритм М-метода (метода больших штрафов)

Этап 1. Приведение математической модели к стандартной форме записи.

Этап 2. Ввод искусственных переменных в ограничения, не имеющие дополнительных остаточных переменных.

Этап 3. Добавление в целевую функцию штрафов.

Этап 4. Согласование целевой функции и ограничений системы ограничений математической модели.

Этап 5. Применение симплекс метода для определения оптимального решения.

Формула согласования целевой функции и ограничений системы ограничений для симплекс таблицы имеет вид:

$$\text{Новая } Z\text{-строка} = \text{старая } Z\text{-строка} + M * R_1 + \dots + M * R_n, \quad (1.4)$$

где M – большое число (штраф);

R_i – искусственная переменная, $i = \overline{1, n}$;

n – количество искусственных переменных [1].

1.5 Алгоритм решения задачи

Алгоритм решения задачи включает 7 этапов.

Этап 1. Разработка сетевого графика выполнения комплекса работ.

Этап 2. Определение временных параметров событий.

Этап 3. Определение критического пути сетевого графика.

Этап 4. Разработка математической модели оптимизации времени выполнения комплекса работ, представленного сетевым графиком.

Этап 5. Преобразование математической модели оптимизации времени выполнения комплекса работ, представленного сетевым графиком, в табличную форму записи.

Этап 6. Определение оптимального решения задачи линейного программирования.

Этап 7. Определение максимального объёма вложенных средств в комплекс работ, позволяющий сократить время критического пути сетевого графика.

1.6 Алгоритм М-метода

Алгоритм М-метода включает 6 этапов.

Этап 1. Приведение математической модели к стандартной форме записи.

Этап 2. Ввод искусственных переменных в систему ограничений математической модели.

Этап 3. Добавление штрафов в целевую функцию математической модели.

Этап 4. Преобразование математической формы записи в симплекс-таблицу начального допустимого решения.

Этап 5. Согласование Z-строки симплекс-таблицы начального допустимого решения со строками ограничений симплекс таблицы.

Этап 6. Определение оптимального плана задачи симплекс-методом [1].

1.7 Пример расчёта

Приведём пример расчёта.

1 Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Исходные данные

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент до-полнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	–	1	3	6	13	3,50	16,50
a2	–	1	4	12	19	2,33	21,33
a3	–	2	5	10	17	2,33	21,67
a4	a1	5	8	9	16	2,33	27,67
a5	a1	3	5	14	21	3,50	31,50
a6	a2, a3	6	9	8	16	2,67	32,00
a7	a3	3	6	13	19	2,00	25,00
a8	a2, a3, a4	5	8	11	18	2,33	29,67
a9	a3, a5, a6	2	4	15	22	3,5	29
a10	a7	4	6	14	20	3	32

2 Создание сетевого графика

Сетевые графики изображены на рисунках 1.1–1.2.

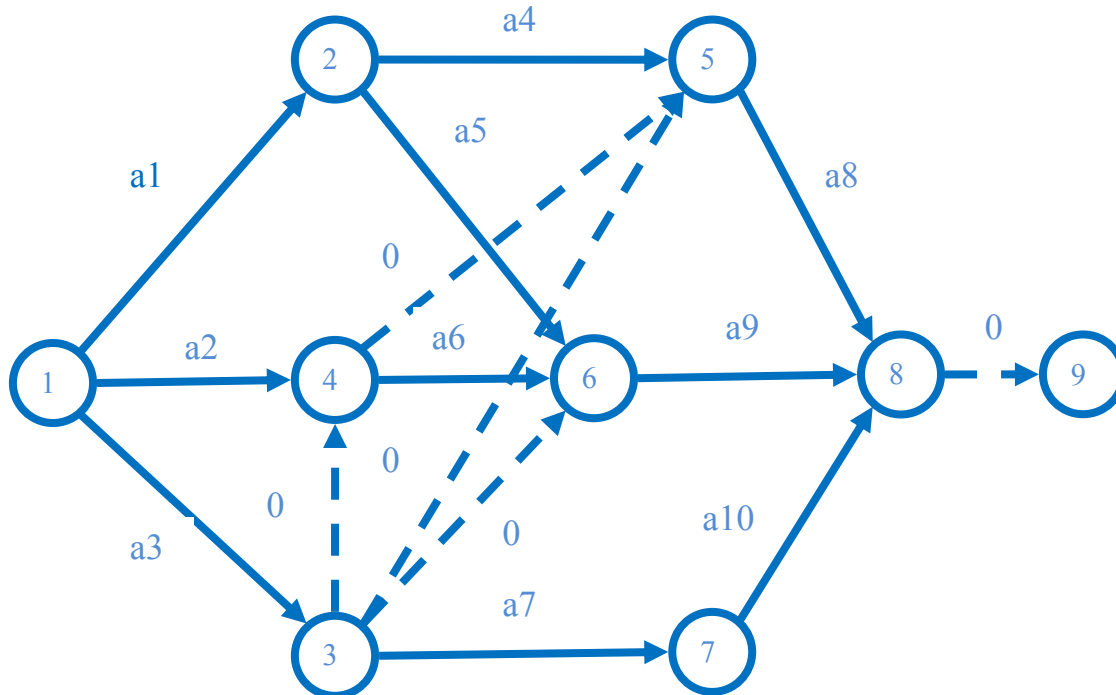


Рисунок 1.1 – Сетевой график

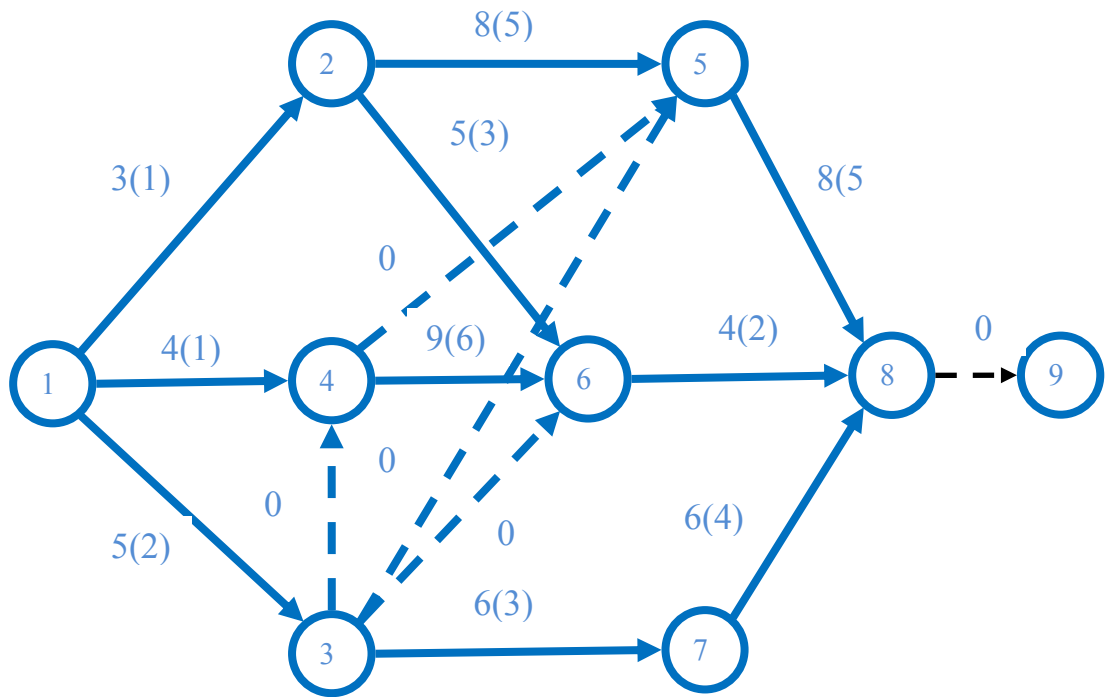


Рисунок 1.2 – Сетевой график задачи с подставленными данными

3 Расчёт временных параметров событий.

3.1 Ранний (ожидаемый) срок совершения события определяется по формуле:

$$ES_j = \max_{i,j} \{ES_i + t_{ij}\}, \quad (1.5)$$

где ES_j – ранний срок совершения события j ;

ES_i – ранний срок совершения события i ;

t_{ij} – время выполнения работы i, j .

$$ES_1 = 0$$

$$ES_2 = \max_{1,2} \{ES_1 + t_{12}\} = 3$$

$$ES_3 = \max_{1,3} \{ES_1 + t_{13}\} = 5$$

$$ES_4 = \max_{1,4} \{ES_1 + t_{14}\} = 4$$

$$ES_5 = \max_{1,2,1,3,1,4} \{ES_2 + t_{25}, ES_3 + t_{35}, ES_4 + t_{45}\} = 11$$

$$ES_6 = \max_{\substack{2,6 \\ 4,6 \\ 3,6}} \{ES_2 + t_{26}, ES_4 + t_{46}, ES_3 + t_{36}\} = 13$$

$$ES_7 = \max_{3,7} \{ES_3 + t_{37}\} = 11$$

$$ES_8 = \max_{\substack{5,8 \\ 6,8 \\ 7,8}} \{ES_5 + t_{58}, ES_6 + t_{68}, ES_7 + t_{78}\} = 19$$

$$ES_9 = \max_{8,9} \{ES_8 + t_{89}\} = 19$$

3.2 Поздний (предельный) срок совершения события определяется по формуле:

$$LC_i = \min_{i,j} \{LC_j - t_{ij}\}, \quad (1.6)$$

где LC_i – поздний срок совершения события i ;

LC_j – поздний срок совершения события j .

$$LC_9 = 19$$

$$LC_8 = \min_{8,9} \{LC_9 - t_{89}\} = 19$$

$$LC_7 = \min_{7,8} \{LC_8 - t_{78}\} = 13$$

$$LC_6 = \min_{6,8} \{LC_8 - t_{68}\} = 15$$

$$LC_5 = \min_{5,8} \{LC_8 - t_{58}\} = 11$$

$$LC_4 = \min_{\substack{4,5 \\ 4,6}} \{LC_5 - t_{45}, LC_6 - t_{46}\} = 6$$

$$LC_3 = \min_{\substack{3,4 \\ 3,5 \\ 3,6 \\ 3,7}} \{LC_4 - t_{34}, LC_5 - t_{35}, LC_6 - t_{36}, LC_7 - t_{37}\} = 6$$

$$LC_2 = \min_{\substack{2,5 \\ 2,6}} \{LC_5 - t_{25}, LC_6 - t_{26}\} = 3$$

$$LC_1 = \min_{\substack{1,2 \\ 1,3 \\ 1,4}} \{LC_2 - t_{12}, LC_3 - t_{13}, LC_4 - t_{14}\} = 0$$

4 Определение критического пути сетевого графика.

Алгоритм критического пути включает 3 этапа.

Этап 1. Ранний срок совершения i -го события равен позднему сроку совершения i -го события

$$ES_i = LC_i. \quad (1.7)$$

Этап 2. Ранний срок совершения j -го события равен позднему сроку совершения j -го события

$$ES_j = LC_j. \quad (1.8)$$

Этап 3. Разности ранних и поздних сроков совершения j -го и i -го событий равны между собой и равны времени выполнения работы t_{ij} [4]

$$ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = t_{ij}. \quad (1.9)$$

Критический путь сетевого графика:

- время критического пути $T_{кр} = 19$ дней;
- топология критического пути $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 9$.

Сетевой график с критическим путём изображён на рисунке 1.3. Значения ранних сроков совершения события изображены в квадратах красного цвета. Значения поздних сроков совершения события изображены в треугольниках зелёного цвета.

5 Расчёт временных параметров работ сетевого графика.

Раннее начало выполнения работы i, j определяется по формуле:

$$t_{ij}^{p.n.} = ES_i. \quad (1.10)$$

Раннее окончание работы определяется по формуле:

$$t_{ij}^{p.o.} = ES_i + t_{ij}. \quad (1.11)$$

Позднее начало выполнения работы определяется по формуле:

$$t_{ij}^{n.n.} = LC_j - t_{ij}. \quad (1.12)$$

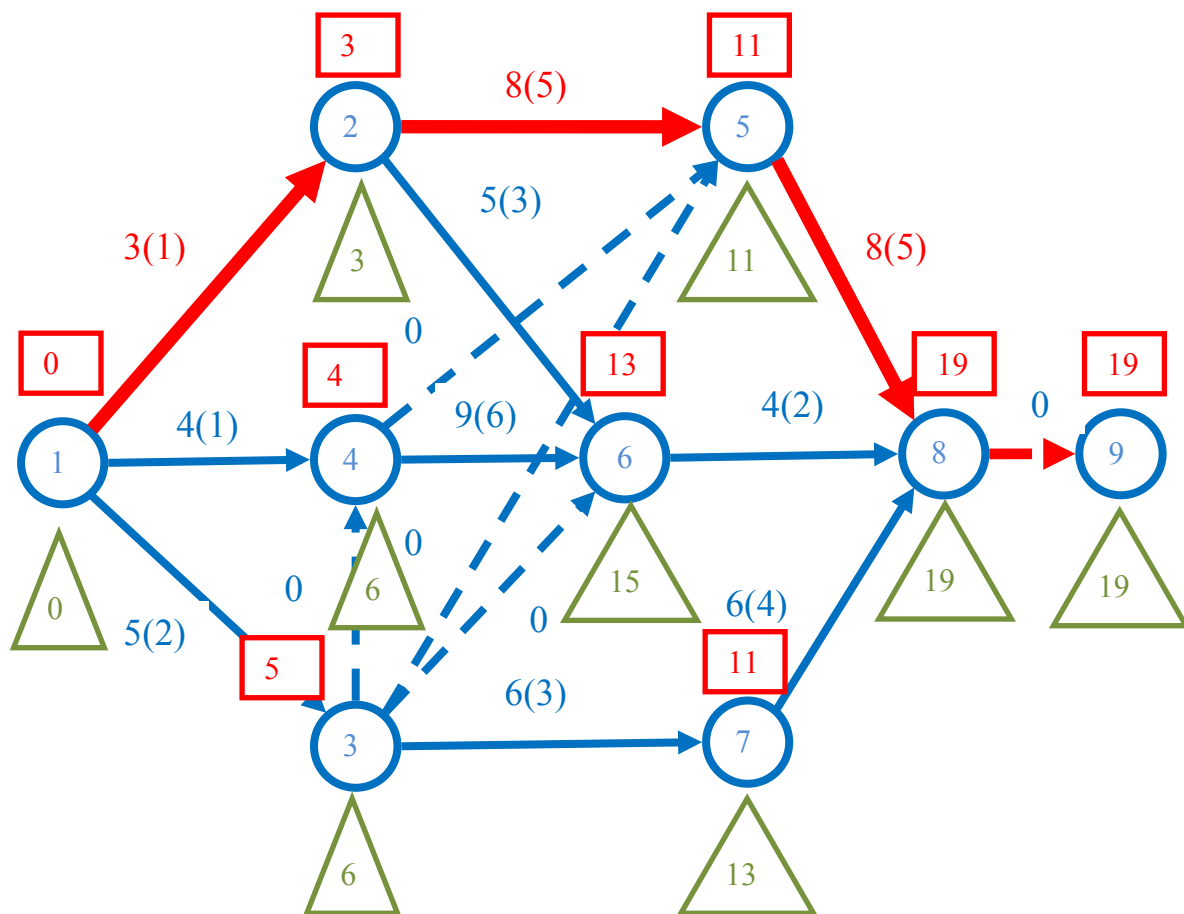


Рисунок 1.3 – Сетевой график с критическим путём

Позднее окончание выполнения работы определяется по формуле:

$$t_{ij}^{n.o.} = LC_j. \quad (1.13)$$

Результаты расчёта временных параметров работ приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Временные параметры работ

Работа i, j	Раннее начало выполнения работы $t_{ij}^{p.n.}$	Раннее окончание выполнения работы $t_{ij}^{p.o.}$	Позднее начало выполнения работы $t_{ij}^{n.n.}$	Позднее окончание выполнения работы $t_{ij}^{n.o.}$
1,2	0	3	0	3
1,3	0	5	1	6
1,4	0	4	2	6
2,5	3	11	3	11
2,6	3	8	10	15
3,4	5	5	6	6
3,5	5	5	11	11
3,6	5	5	15	15
3,7	5	1	7	13
4,5	4	4	11	11
4,6	4	13	6	15
5,8	11	19	11	19
6,8	13	17	15	19
7,8	11	17	13	19
8,9	19	19	19	19

6 Расчёт резервов времени событий сетевого графика.

Резерв времени рассчитывается по формуле:

$$R_i = LC_i - ES_i. \quad (1.14)$$

Резерв времени R_i события i показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без изменения срока наступления итогового события. Ранние и поздние сроки свершения критических событий совпадают. Резерв времени критического участка пути сетевого графика равен нулю. Результаты расчёта резервов времени R_i событий приведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3 – Резервы времени R_i событий

Номер события	Ранний срок свершения события ES_i	Поздний срок свершения события LC_i	Резерв времени R_i события
1	0	0	0
2	3	3	0
3	5	6	1
4	4	6	2
5	11	11	0
6	13	15	2
7	11	13	2
8	19	19	0
9	19	19	0

7 Расчёт резервов времени работ сетевого графика.

Для работы i, j определяются резервы времени:

- полный резерв времени PPt_{ij} ;
- частный резерв первого вида $ЧPt_{ij}$;
- свободный резерв CPt_{ij} ;
- независимый резерв времени HPt_{ij} .

Полный резерв времени PPt_{ij} определяется по формуле:

$$PPt_{ij} = LC_j - ES_i - t_{ij}. \quad (1.15)$$

Частный резерв первого вида $ЧPt_{ij}$ определяется по формуле:

$$ЧPt_{ij} = LC_j - LC_i - t_{ij}. \quad (1.16)$$

Свободный резерв CPt_{ij} определяется по формуле:

$$CPt_{ij} = ES_j - ES_i - t_{ij}. \quad (1.17)$$

Независимый резерв времени HPt_{ij} определяется по формуле:

$$HPt_{ij} = ES_j - LC_i - t_{ij}. \quad (1.18)$$

Результаты расчёта приведены в таблице 1.4.

Таблица 1.4 – Резервы времени работ сетевого графика

Работа i, j	t_{ij}	ES_i	LC_i	ES_j	LC_j	PPt_{ij}	$ЧPt_{ij}$	CPt_{ij}	HPt_{ij}
1,2	3	0	0	3	3	0	0	0	0
1,3	5	0	0	5	6	1	1	0	0
1,4	4	0	0	4	6	2	2	0	0
2,5	8	3	3	11	11	0	0	0	0
2,6	5	3	3	13	15	7	7	5	5
3,4	0	5	6	4	6	1	0	-1	-2
3,5	0	5	6	11	11	6	5	6	5
3,6	0	5	6	13	15	10	9	8	7
3,7	6	5	6	11	13	2	1	0	-1
4,5	0	4	6	11	11	7	5	7	5
4,6	9	4	6	13	15	2	0	0	-2
5,8	8	11	11	19	19	0	0	0	0
6,8	4	13	15	19	19	2	0	2	0
7,8	6	11	13	19	19	2	0	2	0
8,9	0	19	19	19	19	0	0	0	0

8 Математическая модель оптимизации сетевого графика по стоимости с получением безрезервного оптимального сетевого графика в общем виде.

Пусть t_{ij}^{\min} – минимальное время выполнения работы i, j ; t_i – время начала выполнения работы i, j ; t_j – время окончания выполнения работы i, j ; c_{ij}^{\max} – максимальные затраты; k_{ij} – коэффициент дополнительных затрат;

$$k_{ij} = \frac{c_{ij}^{\max} - c_{ij}^{\min}}{t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}}, T_{cr} - \text{время критического пути сетевого графика; } T_{dir} - \text{заданное}$$

время выполнения комплекса работ сетевого графика; n – количество вершин сетевого графика. $T_{sp} < T_{oup}$ – время критического пути меньше заданного времени выполнения комплекса работ сетевого графика.

Стоимость выполнения работы i, j определяется по формуле:

$$c_{ij} = b_{ij} - k_{ij}(t_j - t_i), \quad (1.19)$$

где t_{ij}^{\min} – минимальное время выполнения работы i, j ;

k_{ij} – коэффициент дополнительных затрат;

t_j – время окончания выполнения работы i, j ;

t_i – время начала выполнения работы i, j ;

b_{ij} – величина, рассчитываемая по формуле:

$$b_{ij} = c_{ij}^{\max} + k_{ij}t_{ij}^{\min}, \quad (1.20)$$

где c_{ij}^{\max} – максимальные затраты;

k_{ij} – коэффициент дополнительных затрат;

t_{ij}^{\min} – минимальное время выполнения работы i, j .

Математическая модель имеет вид

$$\min \leftarrow Z = \sum_{i,j} c_{ij} = \sum_{i,j} b_{i,j} - k_{i,j}(t_j - t_i) \quad (1.21)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} t_j - t_i \geq t_{ij}^{\min} \\ t_1 = 0 \\ T_{кк} \leq T_{\partial\partial u} \\ t_n = T_{oup} \\ t_{ij}^o \geq 0, t_{ij}^h \geq 0, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{2, n}. \end{cases}$$

Ограничение 1 – ограничение по продолжительности выполнения работы. Ограничение 2 – ограничение по времени начала первой операции. Ограничение 3 – ограничение по времени выполнения комплекса работ. Ограничение 4 – ограничение по времени окончания последней операции сетевого графика. Ограничение 5 – ограничение неотрицательности искомым переменных.

9 Математическая модель оптимизации сетевого графика с получением безрезервного оптимального сетевого графика с подставленными данными

$$\begin{aligned} \min \leftarrow Z = & 16,5 - 3,5(t_2 - t_1) + 21,33 - (t_4 - t_1) + 21,67 - \\ & - 2,33(t_3 - t_1) + 27,67 - 2,33(t_5 - t_2) + 31,5 - 3,5(t_6 - t_2) + \\ & + 32 - 2,67(t_6 - t_4) + 25 - 2(t_7 - t_3) + 29,67 - \\ & - 2,33(t_8 - t_5) + 29 - 3,5(t_8 - t_6) + 32 - 3(t_8 - t_7) \end{aligned} \quad (1.22)$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} (t_2 - t_1) \geq 1; (t_4 - t_1) \geq 1; (t_3 - t_1) \geq 2; (t_5 - t_2) \geq 5; (t_6 - t_2) \geq 3; (t_4 - t_3) \geq 0; \\ (t_5 - t_3) \geq 0; (t_6 - t_3) \geq 0; (t_7 - t_3) \geq 3; (t_6 - t_4) \geq 6; (t_5 - t_4) \geq 0; (t_8 - t_5) \geq 5; \\ (t_8 - t_6) \geq 2; (t_8 - t_7) \geq 4; (t_9 - t_8) \geq 0 \\ t_1 = 0; \\ T_{кр} \leq T_{дур}; T_{дур} = 22; \\ t_9 = 22; \\ t_{ij}^o \geq 0; t_{ij}^n \geq 0; i = \overline{1, n-1}, j = \overline{2, n}. \end{array} \right.$$

10 Приведённая математическая модель оптимизации сетевого графика с получением безрезервного оптимального сетевого графика

$$\begin{aligned} \min \leftarrow Z = & 266,34 - 3,5t_2 + 3,5t_1 - 2,33t_4 + 2,33t_1 - \\ & - 2,33t_3 + 2,33t_1 - 2,33t_5 + 2,33t_2 - 3,5t_3 + \\ & + 3,5t_2 - 2,67t_6 + 2,67t_4 - 2t_7 + 2t_3 - 2,33t_8 + \\ & + 2,33t_5 + 3,5t_8 + 3,5t_6 - 3t_8 + 3t_1 \end{aligned} \quad (1.23)$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} t_2 \geq 1; t_1 \geq 1; t_3 \geq 2; (t_5 - t_2) \geq 5; (t_6 - t_2) \geq 3; (t_4 - t_3) \geq 0; (t_5 - t_3) \geq 0; \\ (t_6 - t_3) \geq 0; (t_7 - t_3) \geq 3; (t_6 - t_4) \geq 6; (t_5 - t_4) \geq 0; (t_8 - t_5) \geq 5; (t_8 - t_6) \geq 2; \\ (t_8 - t_7) \geq 4; (t_9 - t_8) \geq 0; \\ t_1 = 0; \\ T_{KK} \leq T_{\text{опр}}; T_{\text{опр}} = 22 - \text{оптимизация за счёт всех операций} \\ t_9 = 22 - \text{оптимизация за счёт некритических операций} \\ t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9 \geq 0. \end{array} \right.$$

Математическая модель после приведения слагаемых имеет вид

$$\min \leftarrow Z = 266,34 + 2,33t_2 - 0,33t_3 + 0,34t_4 + 0t_5 - 2,67t_6 + 1t_7 - 1,83t_8 \quad (1.24)$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} t_2 \geq 1; t_1 \geq 1; t_3 \geq 2; (t_5 - t_2) \geq 5; (t_6 - t_2) \geq 3; (t_4 - t_3) \geq 0; (t_5 - t_3) \geq 0; \\ (t_6 - t_3) \geq 0; (t_7 - t_3) \geq 3; (t_6 - t_4) \geq 6; (t_5 - t_4) \geq 0; (t_8 - t_5) \geq 5; (t_8 - t_6) \geq 2; \\ (t_8 - t_7) \geq 4; (t_9 - t_8) \geq 0; \\ t_1 = 0; \\ T_{KK} \leq 22; \\ t_9 = 22; \\ t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9 \geq 0. \end{array} \right.$$

11 Математическая модель оптимизации сетевого графика с использованием искоемых переменных x_j .

Заменяем переменные t_j на переменные x_j , $j = \overline{1,9}$. Соответствие переменных t_j и x_j , $j = \overline{1,9}$ приведено в таблице 1.5.

Таблица 1.5 – Соответствие переменных t_j и x_j , $j = \overline{1,9}$, $t_1 = 0$.

Номер j	Переменная t_j	Переменная x_j
1	t_2	x_1
2	t_3	x_2
3	t_4	x_3
4	t_5	x_4
5	t_6	x_5
6	t_7	x_6
7	t_8	x_7
8	t_9	x_8
9	266,34	x_9

Математическая модель оптимизации сетевого графика после замены переменных t_j и x_j , $j=\overline{1,9}$ имеет вид

$$\min \leftarrow Z = 2,33x_1 - 0,33x_2 + 0,34x_3 + 0x_4 - 2,67x_5 + 1x_6 - 1,83x_7 + 266,34x_9 \quad (1.25)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 \geq 1; x_3 \geq 1; x_2 \geq 2; (x_4 - x_1) \geq 5; (x_5 - x_1) \geq 3; (x_3 - x_2) \geq 0; (x_4 - x_2) \geq 0; \\ (x_5 - x_2) \geq 0; (x_6 - x_2) \geq 3; (x_5 - x_3) \geq 6; (x_4 - x_3) \geq 0; (x_7 - x_4) \geq 5; (x_7 - x_5) \geq 2; \\ (x_7 - x_6) \geq 4; (x_8 - x_7) \geq 0; \\ x_8 = 22; \\ x_9 = 1; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0. \end{cases}$$

10 Определение оптимального решения.

Оптимальное решение определяется М-методом (таблица 1.6).

Таблица 1.6 – Оптимальное решение

Номер j	Переменная x_j	Переменная t_j	Величина
1	x_1	t_2	1
2	x_2	t_3	2
3	x_3	t_4	2
4	x_4	t_5	17
5	x_5	t_6	20
6	x_6	t_7	5
7	x_7	t_8	22
8	x_8	t_9	22
9	x_9	266,34	1
$Z = 177,03$; 17 итераций			

$$X^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\} = \{1, 2, 2, 17, 20, 5, 22, 22, 1\}, Z = 180,03.$$

Безрезервный оптимальный сетевой график приведён на рисунке 1.4.

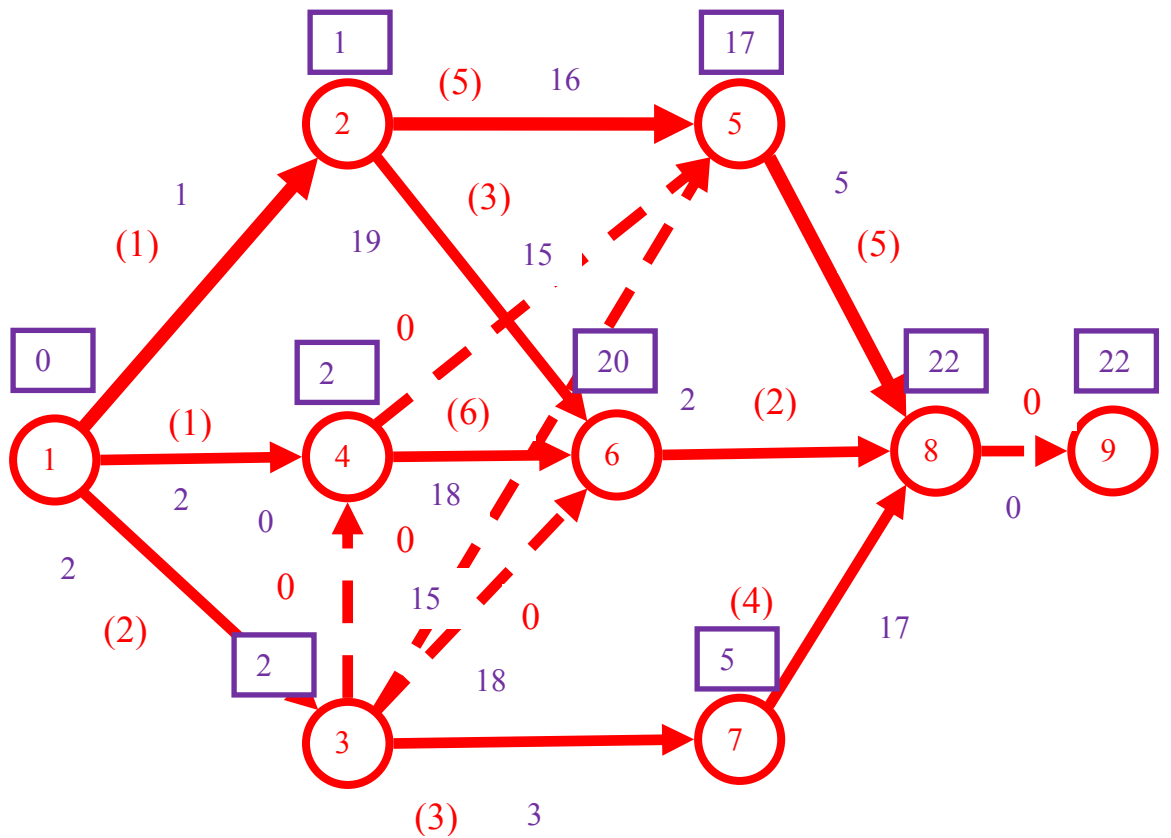


Рисунок 1.4 – Оптимальный безрезервный сетевой график

Расчётные значения приведены в таблице 1.7.

Таблица 1.7 – Расчётные значения t_j и t_{ij}

Время t_j	Величина t_j	Продолжительность t_{ij}	Величина t_{ij}
t_1	0	t_{12}	1
t_2	1	t_{13}	2
t_3	2	t_{14}	2
t_4	2	t_{25}	16
t_5	17	t_{26}	19
t_6	20	t_{37}	3
t_7	5	t_{58}	5
t_8	22	t_{68}	2
t_9	22	t_{78}	17

1.8 Практическая работа № 1 «Безрезервный оптимальный сетевой график»

Цель: получить теоретические знания и практические навыки в разработке программы, формализующей алгоритм решения задачи минимизации стои-

мости (прямых затрат) выполнения комплекса работ, представленного сетевым графиком с получением безрезервного сетевого графика.

Используемые приемы и технологии: интегрированная среда программирования Microsoft Visual Studio 2019 Community, технология визуального проектирования и событийного программирования, язык программирования Visual C++.

Ключевые термины: сетевой график, математическая модель, целевая функция, система ограничений, М-метод, оптимальное решение, допустимое решение, алгоритм, программа.

1.8.1 Варианты заданий

Разработайте визуальное приложение на языке C++, формализующее построение сетевого графика по приведенному перечню работ и их взаимной последовательности, определение раннего и позднего сроков совершения событий, критического пути, ранних и поздних сроков начала и окончания работ, резервов времени событий, полных, частных первого вида, свободных и независимых резервов времени работ. Проведите оптимизацию стоимости выполнения комплекса работ, представленного сетевым графиком с получением безрезервного сетевого графика.

Вариант 1

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.8.

Таблица 1.8 – Исходные данные варианта 1

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	–	7	10	8	16	2,67	34,67
a2	–	6	9	12	20	2,67	36,00
a3	–	8	12	14	18	1,00	26,00
a4	a1	4	7	9	15	2,00	23,00
a5	a1, a2	5	8	11	16	1,67	24,33
a6	a1, a2, a3	9	13	7	10	0,75	16,75
a7	a6	12	15	14	18	1,33	34,00
a8	a4, a5, a7	8	11	10	14	1,33	24,67
a9	a6	6	9	9	12	1,00	18,00

Вариант 2

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.9.

Таблица 1.9 – Исходные данные варианта 2

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	–	2	5	15	22	2,33	26,67
a2	–	3	6	10	16	2,00	22,00
a3	a1	6	9	12	18	2,00	30,00
a4	a1, a2	7	11	9	16	1,75	28,25
a5	a1, a2	1	4	19	25	2,00	27,00
a6	a3	2	6	22	26	1,00	28,00
a7	a3	6	10	13	18	1,25	25,50
a8	a1, a4, a6	5	8	10	15	1,67	23,33
a9	a1, a4, a5, a6	8	12	15	20	1,25	30,00

Вариант 3

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.10.

Таблица 1.10 – Исходные данные варианта 3

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	–	6	10	7	18	2,75	34,50
a2	–	9	12	6	14	2,67	38,00
a3	–	5	9	12	20	2,00	30,00
a4	a1	4	6	10	18	4,00	34,00
a5	a1, a3	3	7	9	16	1,75	21,25
a6	a2, a4	6	9	14	22	2,67	38,00
a7	a1, a2, a4, a5	2	5	13	18	1,67	21,33

Вариант 4

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.11.

Таблица 1.11 – Исходные данные варианта 4

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	–	1	3	12	20	4,00	24,00
a2	–	2	6	10	16	1,50	19,00
a3	–	1	4	9	18	3,00	21,00
a4	a1	3	6	14	22	2,67	30,00
a5	a1, a2, a3	2	4	11	20	4,50	29,00
a6	a3	4	7	8	18	3,33	31,33
a7	a1, a4, a5	3	5	10	16	3,00	25,00

Вариант 5

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.12.

Таблица 1.12 – Исходные данные варианта 5

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	–	6	11	12	16	0,80	20,80
a2	–	5	9	8	12	1,00	17,00
a3	–	4	7	10	15	1,67	21,67
a4	a2	3	5	11	16	2,50	23,50
a5	a1	2	6	14	20	1,50	23,00
a6	a3, a4	4	8	12	16	1,00	20,00
a7	a2, a3, a4, a5	6	10	9	13	1,00	19,00
a8	a6	9	13	13	18	1,25	29,25
a9	a1, a7, a8	12	15	15	22	2,33	50,00

Вариант 6

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.13.

Таблица 1.13 – Исходные данные варианта 6

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	–	3	6	14	22	2,67	30,00
a2	–	5	9	10	18	2,00	28,00
a3	–	6	8	12	16	2,00	28,00
a4	a1	2	5	13	18	1,67	21,33
a5	a3	1	3	8	16	4,00	20,00
a6	a3	4	7	10	19	3,00	31,00
a7	a3, a4	5	9	12	24	3,00	39,00
a8	a1, a2, a5, a6	7	11	14	17	0,75	22,25
a9	a6	6	10	8	15	1,75	25,50

Вариант 7

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.14.

Таблица 1.14 – Исходные данные варианта 7

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	–	1	3	5	9	2	11
a2	–	1	4	4	8	1,33	9,33
a3	–	2	5	8	12	1,33	14,66
a4	a1	5	8	9	14	1,67	22,35
a5	a1	3	5	6	10	2	16
a6	a2, a3	6	9	11	15	1,33	22,98
a7	a3	3	6	8	13	1,67	18,01
a8	a2, a3, a4	5	8	12	17	1,37	23,85
a9	a3, a5, a6	2	4	7	11	2	15
a10	a7	4	6	8	14	3	26

Вариант 8

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.15.

Таблица 1.15 – Исходные данные варианта 8

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	–	4	7	12	26	4,67	44,67
a2	–	8	11	16	24	2,67	45,33
a3	–	3	5	8	16	4,00	28,00
a4	a1	7	10	14	22	2,67	40,67
a5	a1, a2, a3	1	4	9	15	2,00	17,00
a6	a3	9	13	11	19	2,00	37,00
a7	a3, a4, a5	8	12	8	17	2,25	35,00
a8	a4	5	8	7	15	2,67	28,33

Вариант 9

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.16.

Таблица 1.16 – Исходные данные варианта 9

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	–	6	9	9	18	3,00	36,00
a2	–	2	5	12	20	2,67	25,33
a3	a1	8	11	8	16	2,67	37,33
a4	a1, a2	5	7	6	14	4,00	34,00
a5	a1, a2	2	4	12	18	3,00	24,00
a6	a3, a4	9	13	14	22	2,00	40,00
a7	a1, a5	12	15	11	16	1,67	36,00

Вариант 10

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.17.

Таблица 1.17 – Исходные данные варианта 10

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	–	2	5	11	21	3,33	27,67
a2	–	5	8	9	16	2,33	27,67
a3	–	7	11	12	18	1,50	28,50
a4	a1	4	6	15	20	2,50	30,00
a5	a1, a2	8	12	8	19	2,75	41,00
a6	a1, a2, a3	14	18	10	22	3,00	64,00
a7	a4, a5, a6	5	7	13	25	6,00	55,00

Вариант 11

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.18.

Таблица 1.18 – Исходные данные варианта 11

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	-	8	10	6	9	1,5	21
a2	-	10	12	11	16	2,5	41
a3	a1	11	14	9	13	1,33	27,63
a4	a1, a2	7	11	7	14	1,75	26,25
a5	a1, a2	5	7	5	10	2,5	22,5
a6	a1, a4	6	9	8	12	1,33	19,98
a7	a3	12	15	12	17	1,67	37,04
a8	a1, a4	9	11	15	18	2	36
a9	a5, a6	5	8	10	16	2	26

Вариант 12

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.19.

Таблица 1.19 – Исходные данные варианта 12

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент доп. затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	-	1	3	10	15	2,5	17,5
a2	-	1	2	8	11	3	41
a3	a1	3	5	6	10	2	16
a4	a1	4	6	11	16	2,5	26
a5	a1, a2	2	4	5	9	2	13
a6	a3	2	4	9	11	1,5	14
a7	a4, a5	3	6	7	12	1,67	17,01
a8	a6, a7	5	7	12	17	2,5	29,5
a9	a4, a5	3	5	13	19	3	28

Вариант 13

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.20.

Таблица 1.20 – Исходные данные варианта 13

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент доп. затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	-	8	11	7	12	1,67	25,36
a2	-	9	13	11	16	1,25	27,25
a3	-	7	10	12	17	1,37	26,59
a4	a1, a2	5	8	9	13	1,37	19,85
a5	a2, a3	4	6	10	14	2	14,5
a6	a2, a3	11	15	6	12	1,5	28,5
a7	a1, a2	4	6	7	11	2	19
a8	a2, a4 a5	6	9	10	15	1,67	25,02
a9	a6	8	12	12	18	1,5	30

Вариант 14

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.21.

Таблица 1.21 – Исходные данные варианта 14

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	-	3	5	6	9	1,5	13,5
a2	-	5	7	12	15	1,5	22,5
a3	-	6	8	11	14	1,5	23
a4	a3	5	8	13	17	1,33	23,65
a5	a2, a4	8	10	9	13	2	29
a6	a1, a2, a3	3	5	10	14	2	20
a7	a2, a5	4	7	13	17	1,33	22,32

Вариант 15

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.22.

Таблица 1.22 – Исходные данные варианта 15

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	-	6	8	12	15	1,5	24
a2	-	3	5	9	14	2,5	21,5
a3	-	4	6	8	11	1,5	17
a4	a1, a2	8	10	10	16	3	40
a5	a2	7	9	5	9	2	23
a6	a2, a3	6	8	5	10	2,5	25
a7	a3, a4, a5	3	5	11	17	3	26

Вариант 16

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.23.

Таблица 1.23 – Исходные данные варианта 16

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	-	4	6	5	9	2	17
a2	-	8	10	11	15	2	31
a3	a2	7	10	8	13	1,67	24,69
a4	a1, a2	5	8	7	11	1,33	17,65
a5	a3	4	6	10	14	2	22
a6	a2, a4, a5	2	4	12	17	2,5	22
a7	a2	1	3	6	10	2	10

Вариант 17

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.24.

Таблица 1.24 – Исходные данные варианта 17

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	-	5	8	4	8	1,33	14,65
a2	a1	2	4	9	15	3	21
a3	-	6	10	11	16	1,25	23,5
a4	-	9	11	8	12	2	30
a5	a1, a3	1	3	6	9	1,5	10,5
a6	a2, a4	4	6	12	17	2,5	27
a7	a1, a4, a5	3	5	7	11	2	17

Вариант 18

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.25.

Таблица 1.25 – Исходные данные варианта 18

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	-	2	4	8	11	1,5	14
a2	-	4	6	9	14	2,5	24
a3	a1, a2	7	10	12	16	1,33	25,31
a4	a1, a2	2	4	7	10	1,5	13
a5	a2	3	5	6	9	1,5	13,5
a6	a3, a4, a5	6	8	10	13	1,5	22
a7	a3	4	7	13	17	1,33	22,32

Вариант 19

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.26.

Таблица 1.26 – Исходные данные варианта 19

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	-	5	8	10	14	1,33	20,65
a2	-	8	10	8	11	1,5	23
a3	a1	6	8	12	15	1,5	24
a4	a1	4	6	7	10	1,5	16
a5	a1, a2	8	11	5	9	1,33	19,64
a6	a1, a2	12	14	6	9	1,5	27
a7	a3	7	9	11	16	1,25	24,75
a8	a4, a5	4	6	10	14	2	22
a9	a3, a4, a5, a6	3	5	9	13	2	19

Вариант 20

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.27.

Таблица 1.27 – Исходные данные варианта 20

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	-	2	4	11	14	1,5	17
a2	-	4	6	8	11	1,5	17
a3	-	6	8	9	13	2	25
a4	a1, a2	7	10	5	9	1,33	18,31
a5	a2, a3	5	7	8	12	2	22
a6	a2	4	6	10	14	2	22
a7	a4, a5	3	5	12	15	1,5	19,5
a8	a6	6	8	9	12	1,5	21
a9	a2, a3	4	6	13	16	1,5	22

Вариант 21

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.28.

Таблица 1.28 – Исходные данные варианта 21

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	-	2	5	4	8	1,33	10,66
a2	-	4	7	9	13	1,33	18,32
a3	-	6	10	10	15	1,25	22,5
a4	a1, a2	3	5	7	12	2,5	19,5
a5	a2, a3	4	7	12	16	1,33	21,32
a6	a3	5	8	8	12	1,33	18,65
a7	a3, a4, a5	2	5	13	17	2	21

Вариант 22

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.29.

Таблица 1.29 – Исходные данные варианта 22

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	-	3	5	8	11	1,5	15,5
a2	-	4	6	11	14	1,5	20
a3	a1	6	8	7	12	2,5	27
a4	a1, a2	7	10	13	17	1,33	26,31
a5	a2, a3	5	7	9	12	1,5	19,5
a6	a1, a3, a4	3	5	6	9	1,5	13,5
a7	a4	5	7	10	14	2	24

Вариант 23

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.30.

Таблица 1.30 – Исходные данные варианта 23

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент дополнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	-	3	5	7	11	2	17
a2	-	4	6	9	12	1,5	18
a3	-	6	8	12	15	1,5	24
a4	a3	2	5	11	15	1,33	17,66
a5	a2, a4	7	9	14	17	1,5	27,5
a6	a1, a2, a3	8	11	13	17	1,33	27,64
a7	a2, a5,	2	4	8	11	1,5	14

Вариант 24

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.31.

Таблица 1.31 – Исходные данные варианта 24

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент до-полнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	-	5	7	4	7	1,5	14,5
a2	-	6	8	9	13	1,5	22
a3	a1	6	8	12	16	2	28
a4	a1, a2	8	10	10	13	1,5	25
a5	a2	3	6	8	12	1,33	15,99
a6	a3, a4, a5	7	9	11	14	1,5	24,5
a7	a3, a4,	5	7	9	15	2	25

Вариант 25

Исходные данные для построения сетевого графика представлены в таблице 1.32.

Таблица 1.32 – Исходные данные варианта 25

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Минимальное время t_{ij}^{\min}	Максимальное время t_{ij}^{\max}	Минимальные затраты c_{ij}^{\min}	Максимальные затраты c_{ij}^{\max}	Коэффициент до-полнительных затрат k_{ij}	Величина b_{ij}
a1	-	1	3	6	13	3,50	16,50
a2	-	1	4	12	19	2,33	21,33
a3	-	2	5	10	17	2,33	21,67
a4	a1	5	8	9	16	2,33	27,67
a5	a1	3	5	14	21	3,50	31,50
a6	a2, a3	6	9	8	16	2,67	32,00
a7	a3	3	6	13	19	2,00	25,00
a8	a2, a3, a4	5	8	11	18	2,33	29,67
a9	a3, a5, a6	2	4	15	22	3,5	29
a10	a7	4	6	14	20	3	32

1.8.2 Методические указания

1 Разработайте алгоритм решения задачи.

2 Разработайте визуальное приложение, формализующее алгоритм решения задачи:

- создайте проект программы;
- настройте свойства формы Form1;
- добавьте компоненты на форму;
- создайте и определите функции обработчика событий.

3 Оформите отчет по практической работе, включающий разделы:

- 1) постановка задачи;
- 2) теоретическое обоснование;
- 3) этапы алгоритма решения задачи;
- 4) скриншоты программы;
- 5) код программы (функции обработчиков событий);
- 6) выводы.

1.8.3 Контрольные вопросы

1 Что понимается под оптимизацией стоимости выполнения комплекса работ, представленного сетевым графиком?

2 Какие виды резервов времени выполнения работ сетевого графика существуют?

3 Что показывает резерв времени для события сетевого графика? Как рассчитывается резерв времени для события?

4 Что показывает полный резерв времени для работы сетевого графика? Как рассчитывается полный резерв времени сетевого графика?

5 Что показывает частный резерв времени для работы сетевого графика? Как рассчитывается частный резерв времени сетевого графика?

6 Что показывает свободный резерв времени для работы сетевого графика? Как рассчитывается свободный резерв времени сетевого графика?

7 Что показывает независимый резерв времени для работы сетевого графика? Как рассчитывается независимый резерв времени сетевого графика?

8 Какие этапы алгоритма решения задачи?

9 Какую целевую функцию и систему ограничений имеет математическая модель оптимизации стоимости выполнения комплекса работ?

10 Какие ограничения имеет математическая модель оптимизации стоимости выполнения комплекса работ?

2 СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Стохастическое программирование – раздел теории исследования операций, разрабатывающий и исследующий методы решения задач, учитывающих неопределённость в оптимизационных моделях.

Стохастическая задача решается в условиях *риска*, если имеются статистические данные случайных параметров задачи и на основе статистической обработки можно установить их вероятностные характеристики (функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию).

Стохастическая задача решается в условиях *неопределённости*, если невозможно установить статистические закономерности изменения случайных параметров.

Задачи стохастического программирования подразделяются на *одноэтапные, двухэтапные и многоэтапные*.

Одноэтапные стохастические задачи – задачи, в которых решение принимается один раз и в последующем не изменяется.

Двухэтапные стохастические задачи – задачи, в которых решение, полученное на первом этапе, может быть изменено (скорректировано) на втором этапе.

Многоэтапные стохастические задачи – задачи, допускающие многократную корректировку решений с учётом случайных параметров, характеризующих управляющий процесс [2].

2.1 Математическая модель задачи стохастического программирования

Разработаем математическую модель стохастического программирования в М-постановке задачи. Пусть x_i – доли финансирования проектов информационной системы организации, $i = \overline{1, n}$. Математическая модель со случайными коэффициентами в целевой функции и вероятностными ограничениями имеет вид

$$\max \leftarrow Z = \sum_{i=1}^n M[c_i] * X_i \quad (2.1)$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} P\left(\sum_{i=1}^n a_{ij} * x_i \leq b_j\right) \geq \beta_j \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, i = \overline{1, n} \quad j = \overline{1, m} \end{array} \right.$$

где c_i – чистый приведённый эффект i проекта;

a_{ij} – финансовые затраты на i проект в i период времени;

b_j – финансовые средства в j периоде времени;

P, β_j – символы вероятности;

$i = \overline{1, n}$ номер проекта;

$j = \overline{1, m}$ – номер периода времени.

Параметры c_i, a_{ij}, b_j – случайные числа. Пусть случайные величины c_i, a_{ij}, b_j подчиняются нормальному закону распределения.

Математическое ожидание случайной величины определяется по формуле:

$$M[x] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.2)$$

где x_i – случайная величина;

n – количество случайных величин.

Среднеквадратическое отклонение случайной величины определяется по формуле:

$$\sigma[x] = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M[x])^2}{n}}, \quad (2.3)$$

где $M[x_i]$ – математическое ожидание случайной величины.

Коэффициент вариации определяется по формуле:

$$V[x] = \frac{\sigma[x]}{M[x]}, \quad (2.4)$$

где $\sigma[x_i]$ – среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Функция плотности вероятности для нормального закона распределения имеет вид

$$f[x] = \frac{1}{\sigma[x]\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-M[x])^2}{2\sigma^2[x]}} \quad (2.5)$$

Интегральная функция распределения имеет вид

$$F[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} f[x] dx \quad (2.6)$$

Значения нормально распределённой случайной величины лежат в интервале $(M[x] - 3\sigma[x]; M[x] + 3\sigma[x])$.

Алгоритм решения задачи

1. Преобразование математической модели стохастического программирования в детерминированный эквивалент.

2. Определение оптимального решения методом нелинейного программирования.

Детерминированный эквивалент математической модели имеет вид

$$\max \leftarrow Z = \sum_{i=1}^n M[c_i] * X_i \quad (2.7)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n M[a_{ij}]x_i \leq M[b_j] - t(\beta_j)W_j \\ W_j = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma^2[a_{ij}]x_i^2 + \sigma^2[b_j]} \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, \end{cases}$$

где β_j – заданный уровень вероятности выполнения j ограничения;

$t(\beta_j)$ – значение параметра t в нормальном распределении, соответствующее заданному уровню вероятности β_j ;

W_j – величина, зависящая от разброса a_{ij} , β_j ;

$t(\beta_j)W_j$ – величина дополнительного ресурса, требуемого для выполнения заданного уровня j вероятностного ограничения [2].

2.2 Пример решения задачи

Пусть количество проектов информационной системы организации равно 5. Математические ожидания параметров $M[c_i]$, $M[a_{ij}]$, $M[b_j]$ представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Математические ожидания параметров

Проект	Искомые переменные	Инвестиционные затраты $M[a_{ij}]$, млн руб				Чистый приведённый эффект $M[c_i]$, млн руб
		j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	
1	x_1	5,00	2,98	0,58	0,48	3,71
2	x_2	3,2	1,5	2,5	0,83	2,69
3	x_3	2,93	3,00	2,12	0,24	4,21
4	x_4	4,29	3,65	0,27	0,36	3,61
5	x_5	3,46	2,65	1,24	0,73	3,11
Средства финансирования $M[b_j]$, млн руб		6,50	3,00	3,00	1,50	$Z \rightarrow \max$

Математическая модель стохастического программирования имеет вид

$$\max \leftarrow Z = 3,71x_1 + 2,69x_2 + 4,21x_3 + 3,61x_4 + 3,11x_5 \quad (2.8)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} P(5x_1 + 3,2x_2 + 2,93x_3 + 4,29x_4 + 3,46x_5 \leq 6,5) \geq 0,8 \\ P(2,98x_1 + 1,5x_2 + 3x_3 + 3,65x_4 + 2,65x_5 \leq 3) \geq 0,8 \\ P(0,58x_1 + 2,5x_2 + 2,12x_3 + 0,27x_4 + 1,24x_5 \leq 3) \geq 0,8 \\ P(0,48x_1 + 0,83x_2 + 0,24x_3 + 0,36x_4 + 0,73x_5 \leq 1,5) \geq 0,8 \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \\ x_1 \leq 1, x_2 \leq 1, x_3 \leq 1, x_4 \leq 1, x_5 \leq 1. \end{cases}$$

Детерминированный эквивалент математической модели стохастического программирования имеет вид

$$\max \leftarrow Z = 3,71x_1 + 2,69x_2 + 4,21x_3 + 3,61x_4 + 3,11x_5 \quad (2.9)$$

при ограничениях

$$\begin{cases}
5x_1 + 3,2x_2 + 2,93x_3 + 4,29x_4 + 3,46x_5 \leq 6,5 - \\
-0,84\sqrt{0,69x_1^2 + 0,28x_2^2 + 0,24x_3^2 + 0,51x_4^2 + 0,33x_5^2} + 1,16 \\
2,98x_1 + 1,5x_2 + 3x_3 + 3,65x_4 + 2,65x_5 \leq 3 - \\
-0,84\sqrt{0,25x_1^3 + 0,06x_2^2 + 0,25x_3^2 + 0,37x_4^2 + 0,19x_5^2} + 0,25 \\
0,58x_1 + 2,5x_2 + 2,12x_3 + 0,27x_4 + 1,24x_5 \leq 3 - \\
-0,84\sqrt{0,01x_1^2 + 0,17x_2^2 + 0,12x_3^2 + 0,002x_4^2 + 0,004x_5^2} + 0,25 \\
0,48x_1 + 0,83x_2 + 0,24x_3 + 0,36x_4 + 0,73x_5 \leq 1,5 - \\
-0,84\sqrt{0,007x_1^2 + 0,02x_2^2 + 0,002x_3^2 + 0,004x_4^2 + 0,015x_5^2} + 0,06 \\
\sum_{i=1}^n x_i = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \\
x_1 \leq 1, x_2 \leq 1, x_3 \leq 1, x_4 \leq 1, x_5 \leq 1.
\end{cases}$$

Оптимальное решение определяется методом нелинейного программирования: $X^* = \{0; 0,36; 0,63; 0; 0\}$ и $Z^* = 3,65$ млн рублей. Из пяти проектов информационной системы организации выбирается проект с номером 3, имеющий наибольшую долю финансирования 0,63. Чистый приведённый эффект составит 3,65 млн рублей.

Определим влияние стохастических условий на показатели решения задачи. При коэффициенте вариации $V = 0,16$, определим решение задачи для вероятности $0,5 \leq \beta_j \leq 0,95$ с шагом 0,05. Расчётные данные приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Расчётные данные при $V = 0,16$ и $0,5 \leq \beta_j \leq 0,95$

Вероятность β_j	Целевая функция Z, млн руб.	Доли финансирования проектов					Коэффициент k
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0,50	4,21	0	0	1	0	0	1
0,55	4,12	0	0,06	0,94	0	0	0,98
0,60	4,03	0	0,12	0,88	0	0	0,96
0,65	3,94	0	0,17	0,83	0	0	0,94
0,70	3,85	0	0,24	0,77	0	0	0,92
0,75	3,76	0	0,3	0,7	0	0	0,89
0,80	3,65	0	0,37	0,63	0	0	0,87
0,85	3,53	0	0,45	0,56	0	0	0,84
0,90	3,37	0,08	0,53	0,4	0	0	0,80
0,95	3,13	0,24	0,63	0,13	0	0	0,76

Увеличение вероятности β_j уменьшает величину целевой функции Z.

Определим влияние коэффициента вариации на результат решения задачи. При вероятности $\beta_j = 0,8$ определим решение задачи для коэффициента вариации $0 \leq V \leq 0,35$. Расчётные данные приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3 – Расчётные данные при $\beta = 0,8$ и $0 \leq V \leq 0,35$

Коэффициент вариации V	Целевая функция Z , млн руб.	Доли финансирования проектов					Коэффициент k
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	4,21	0	0	1	0	0	1
0,05	4,03.	0	0,12	0,88	0	0	0,98
0,10	3,87.	0	0,23	0,77	0	0	0,96
0,15	3,70	0	0,33	0,67	0	0	0,94
0,20	3,55	0	0,44	0,57	0	0	0,92
0,25	3,38	0,07	0,52	0,41	0	0	0,89
0,30	3,21	0,18	0,60	0,22	0	0	0,87
0,35	3,05	0,29	0,67	0,04	0	0	0,84

С увеличением коэффициента вариации V значение целевой функции Z уменьшается.

2.3 Практическая работа № 2 «М-постановка задачи стохастического программирования»

Цель: получить теоретические знания и практические навыки в разработке программы, формализующей алгоритм решения задачи в М-постановке со случайными коэффициентами в целевой функции и вероятностными ограничениями в математической модели.

Используемые приемы и технологии: интегрированная среда программирования Microsoft Visual Studio 2019 Community, технология визуального проектирования и событийного программирования, язык программирования Visual C++.

Ключевые термины: стохастическое программирование, математическая модель, целевая функция, система ограничений, М-постановка задачи, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, дисперсия, коэффициент вариации, детерминированный эквивалент, оптимальное решение.

2.3.1 Варианты заданий

Разработайте визуальное приложение на языке C++, формализующее алгоритм решения задачи стохастического программирования в М-постановке со

случайными коэффициентами в целевой функции и вероятностными ограничениями в математической модели. Определите влияние стохастических условий на показатели решения задачи:

1) при неизменном коэффициенте вариации V и изменяемом значении вероятности β_j с заданным шагом;

2) при неизменном значении вероятности β_j и изменяемой величиной коэффициента вариации V с заданным шагом.

Постройте графики функций: $Z = f(\beta_j)$, $Z = f(V)$.

Вариант 1

Пусть количество проектов информационной системы организации равно 5. Математические ожидания параметров $M[c_i]$, $M[a_{ij}]$, $M[b_j]$ представлены в таблице 2.4.

Таблица 2.4 – Математические ожидания параметров

Проект	Искомые переменные	Инвестиционные затраты $M[a_{ij}]$, млн руб.				Чистый приведённый эффект $M[c_i]$, млн руб.
		j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	
1	x_1	4,00	3,98	0,60	0,37	3,85
2	x_2	2,20	5,50	2,40	0,25	2,47
3	x_3	3,93	2,00	2,10	0,31	4,32
4	x_4	2,29	3,45	0,45	0,28	2,87
5	x_5	2,46	2,30	1,25	0,82	3,12
Средства финансирования $M[b_j]$, млн руб.		8,50	4,00	4,00	2,80	$Z \rightarrow \max$

Вариант 2

Пусть количество проектов информационной системы организации равно 5. Математические ожидания параметров $M[c_i]$, $M[a_{ij}]$, $M[b_j]$ представлены в таблице 2.5.

Таблица 2.5 – Математические ожидания параметров

Проект	Искомые переменные	Инвестиционные затраты $M[a_{ij}]$, млн руб.				Чистый приведённый эффект $M[c_i]$, млн руб.
		j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	
1	x_1	3,85	2,36	1,18	0,34	3,43
2	x_2	3,10	1,65	2,56	0,69	2,54
3	x_3	2,15	3,24	2,50	0,54	4,10
4	x_4	4,11	3,45	0,31	0,31	3,49
5	x_5	3,29	2,38	1,42	0,82	3,75
Средства финансирования $M[b_j]$, млн руб.		6,95	4,00	3,47	1,67	$Z \rightarrow \max$

Вариант 3

Пусть количество проектов информационной системы организации равно 5. Математические ожидания параметров $M[c_i]$, $M[a_{ij}]$, $M[b_j]$ представлены в таблице 2.6.

Таблица 2.6 – Математические ожидания параметров

Проект	Искомые переменные	Инвестиционные затраты $M[a_{ij}]$, млн руб.				Чистый приведённый эффект $M[c_i]$, млн руб.
		j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	
1	x_1	5,32	2,78	0,83	0,56	3,91
2	x_2	3,84	1,68	2,70	0,73	2,79
3	x_3	2,79	3,48	2,47	0,36	4,41
4	x_4	4,35	3,80	0,87	0,48	3,81
5	x_5	3,68	2,74	1,38	0,76	3,51
Средства финансирования $M[b_j]$, млн руб.		6,90	4,24	3,84	1,90	$Z \rightarrow \max$

Вариант 4

Пусть количество проектов информационной системы организации равно 5. Математические ожидания параметров $M[c_i]$, $M[a_{ij}]$, $M[b_j]$ представлены в таблице 2.7.

Таблица 2.7 – Математические ожидания параметров

Проект	Искомые переменные	Инвестиционные затраты $M[a_{ij}]$, млн руб.				Чистый приведённый эффект $M[c_i]$, млн руб.
		j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	
1	x_1	4,81	2,72	0,98	0,54	3,98
2	x_2	3,50	1,90	2,70	0,87	2,89
3	x_3	2,63	2,68	2,32	0,35	4,51
4	x_4	4,99	3,35	0,87	0,49	3,71
5	x_5	3,76	2,45	1,64	0,86	3,41
Средства финансирования $M[b_j]$, млн руб.		6,27	3,12	3,60	1,85	$Z \rightarrow \max$

Вариант 5

Пусть количество проектов информационной системы организации равно 5. Математические ожидания параметров $M[c_i]$, $M[a_{ij}]$, $M[b_j]$ представлены в таблице 2.8.

Таблица 2.8 – Математические ожидания параметров

Проект	Искомые переменные	Инвестиционные затраты $M[a_{ij}]$, млн руб.				Чистый приведённый эффект $M[c_i]$, млн руб.
		j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	
1	x_1	5,20	2,47	0,73	0,64	3,41
2	x_2	3,70	1,70	2,48	0,87	2,79
3	x_3	2,83	3,10	2,35	0,35	4,61
4	x_4	4,39	3,21	0,74	0,49	3,91
5	x_5	3,56	2,75	1,49	0,94	3,71
Средства финансирования $M[b_j]$, млн руб.		6,70	3,50	3,40	1,95	$Z \rightarrow \max$

Вариант 6

Пусть количество проектов информационной системы организации равно 5. Математические ожидания параметров $M[c_i]$, $M[a_{ij}]$, $M[b_j]$ представлены в таблице 2.9.

Таблица 2.9 – Математические ожидания параметров

Проект	Искомые переменные	Инвестиционные затраты $M[a_{ij}]$, млн руб.				Чистый приведённый эффект $M[c_i]$, млн руб.
		j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	
1	x_1	6,00	2,98	0,58	0,48	4,71
2	x_2	4,20	1,50	3,50	1,83	2,69
3	x_3	2,13	4,00	2,12	0,24	4,21
4	x_4	4,59	3,65	1,27	0,36	3,71
5	x_5	3,76	2,65	1,24	0,63	3,11
Средства финансирования $M[b_j]$, млн руб.		7,50	4,80	4,00	2,50	$Z \rightarrow \max$

Вариант 7

Пусть количество проектов информационной системы организации равно 5. Математические ожидания параметров $M[c_i]$, $M[a_{ij}]$, $M[b_j]$ представлены в таблице 2.10.

Таблица 2.10 – Математические ожидания параметров

Проект	Искомые переменные	Инвестиционные затраты $M[a_{ij}]$, млн руб.				Чистый приведённый эффект $M[c_i]$, млн руб.
		j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	
1	x_1	5,31	2,78	0,68	1,48	3,91
2	x_2	3,24	1,80	2,50	0,83	2,89
3	x_3	2,89	3,00	2,32	0,24	4,41
4	x_4	4,18	3,95	0,27	1,36	3,91
5	x_5	3,66	2,65	1,34	0,73	3,31
Средства финансирования $M[b_j]$, млн руб.		7,25	3,25	3,45	2,65	$Z \rightarrow \max$

Вариант 8

Пусть количество проектов информационной системы организации равно 5. Математические ожидания параметров $M[c_i]$, $M[a_{ij}]$, $M[b_j]$ представлены в таблице 2.11.

Таблица 2.11 – Математические ожидания параметров

Проект	Искомые переменные	Инвестиционные затраты $M[a_{ij}]$, млн руб.				Чистый приведённый эффект $M[c_i]$, млн руб.
		j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	
1	x_1	5,00	2,98	0,58	0,48	3,71
2	x_2	3,20	1,50	3,50	1,83	2,69
3	x_3	2,93	3,00	2,12	0,24	4,21
4	x_4	4,29	3,65	0,27	1,36	3,61
5	x_5	3,46	2,65	2,24	0,73	3,11
Средства финансирования $M[b_j]$, млн руб.		6,93	3,41	4,27	2,73	$Z \rightarrow \max$

Вариант 9

Пусть количество проектов информационной системы организации равно 5. Математические ожидания параметров $M[c_i]$, $M[a_{ij}]$, $M[b_j]$ представлены в таблице 2.12.

Таблица 2.12 – Математические ожидания параметров

Проект	Искомые переменные	Инвестиционные затраты $M[a_{ij}]$, млн руб.				Чистый приведённый эффект $M[c_i]$, млн руб.
		j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	
1	x_1	5,84	2,98	0,80	0,84	3,71
2	x_2	3,16	1,21	2,56	0,38	2,69
3	x_3	2,37	3,42	2,21	0,42	4,21
4	x_4	4,93	3,58	0,72	0,63	3,61
5	x_5	3,66	2,56	1,42	0,37	3,11
Средства финансирования $M[b_j]$, млн руб.		6,90	3,87	3,93	2,68	$Z \rightarrow \max$

Вариант 10

Пусть количество проектов информационной системы организации равно 5. Математические ожидания параметров $M[c_i]$, $M[a_{ij}]$, $M[b_j]$ представлены в таблице 2.13.

Таблица 2.13 – Математические ожидания параметров

Проект	Искомые переменные	Инвестиционные затраты $M[a_{ij}]$, млн руб.				Чистый приведённый эффект $M[c_i]$, млн руб.
		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	
1	x_1	5,15	2,98	0,58	0,48	3,68
2	x_2	3,20	1,50	2,50	1,83	2,74
3	x_3	2,56	3,00	2,12	0,24	4,21
4	x_4	4,30	3,65	0,27	0,36	3,75
5	x_5	3,28	2,65	1,24	0,73	3,27
Средства финансирования $M[b_j]$, млн руб.		6,87	3,31	3,86	3,95	$Z \rightarrow \max$

2.3.2 Методические указания

1 Разработайте алгоритм решения задачи.

2 Разработайте визуальное приложение, формализующее алгоритм решения задачи:

- создайте проект программы;
- настройте свойства формы Form1;
- добавьте компоненты на форму;
- создайте и определите функции обработчика событий.

3 Оформите отчет по практической работе, включающий разделы:

- постановка задачи;
- теоретическое обоснование;
- этапы алгоритма решения задачи;
- скриншоты программы;
- код программы (функции обработчиков событий);
- выводы.

2.3.3 Контрольные вопросы

1 Что называется стохастическим программированием?

2 В каких случаях формулируется стохастическая задача в условиях риска?

3 В каких случаях формулируется стохастическая задача в условиях неопределённости?

4 Что такое одноэтапные, двухэтапные и многоэтапные стохастические задачи?

5 Какие виды стохастических задач в М-постановке существуют? Приведите математическое описание.

6 Какой вид имеет стохастическая задача в Р-постановке? Приведите математическое описание.

7 Каким образом рассчитываются характеристики случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение) и коэффициент вариации?

8 Какой вид имеет математическая модель определения оптимального варианта информационной системы при решении стохастической задачи в М-постановке?

9 Какие этапы алгоритма решения стохастической задачи в М-постановке определения оптимального варианта информационной системы?

10 Какой вид имеет детерминированный эквивалент математической модели определения оптимального варианта информационной системы при решении стохастической задачи в М-постановке?

3 ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В основе имитационной модели лежит описание динамики (поведения) системы. Концептуальная модель имитационной модели включает:

- 1) определение принадлежности моделируемой системы одному из известных классов;
- 2) описание рабочей нагрузки;
- 3) выбор уровня детализации представления системы в модели и её декомпозиция.

Формализация имитационной модели включает:

- 1) выбор метода представления динамики системы на основе событий, процессов или транзактов;
- 2) формальное (математическое) описание случайных факторов, подлежащих учёту в модели;
- 3) выбор механизма изменения и масштаба модельного времени.

Событие – мгновенное изменение элемента системы или состояния системы в целом. *Работа (активность)* – единичное действие системы по обработке (преобразованию) входных данных. *Процесс* – логически связанный набор работ. *Транзакт* – сообщение (заявка на обслуживание), поступающее извне на вход системы и подлежащее обработке.

3.1 Управление модельным временем

Имитационные эксперименты требуют для реализации затраты времени работы компьютера. Существуют три вида представления времени:

- реальное время – время, в котором происходит функционирование имитируемой системы;
- модельное (системное) время – время, в масштабе которого организуется работа модели;
- машинное время – время, отражающее затраты времени ЭВМ на проведение имитации.

Задачи, решаемые с помощью механизма модельного времени:

- переход моделируемой системы из одного состояния в другое;
- синхронизация работы компонент модели;
- изменение масштаба времени функционирования исследуемой системы;
- управление ходом модельного эксперимента;
- квазипараллельная реализация событий в модели.

Существуют два метода реализации механизма модельного времени:

- 1) с постоянным шагом;
- 2) по особым состояниям.

3.1.1 Изменение времени с постоянным шагом

Отсчёт системного времени ведётся через фиксированные, выбранные исследователем интервалы времени. События считаются наступившими в момент окончания интервала. Погрешность в измерении временных характеристик системы зависит от величины шага моделирования Δt .

Метод постоянного шага применяется в случаях:

- события появляются регулярно, распределение во времени равномерно;
- число событий велико, моменты появления близки;
- невозможно заранее определить моменты появления событий.

Алгоритм моделирования с общим шагом

Этап 1. Установка текущего значения модельного времени $t_m = 0$ и начального состояния $z(t_m)$.

Этап 2. Продвижение модельного времени $t_m = t_m + \Delta t$.

Этап 3. Если $t_m > T_m$ (T_m – заданный интервал моделирования), то переход на 7 этап. Иначе переход на 4 этап.

Этап 4. Определение нового состояния $Z(t_m)$.

Этап 5. Если события существуют, то переход на 6 этап. Иначе переход на 2 этап.

Этап 6. Обработка событий. Переход на 2 этап.

Этап 7. Конец.

Выбор величины шага моделирования производится по правилам:

1) величина шага – средняя интенсивность возникновения событий различных типов;

2) величина Δt – средний интервал между наиболее частыми (важными) событиями.

3.1.2 Изменение времени по особым состояниям

Особые состояния, влияющие на изменение модельного времени – события, определяющие смену состояний моделируемого процесса. Событие – это ввод сообщения, продвигающего модельное время на соответствующий интервал. Если интервалы между сообщениями подчиняются нормальному закону распределения с параметрами m и s , то модельное время t_{m_i} определяется по формуле:

$$t_{m_i} = t_{m_{(i-1)}} + \text{norm}(m, s), \quad (3.1)$$

где $\text{norm}(m, s)$ – функция, генерирующая случайные величины, распределённые по нормальному закону.

Системное время изменяется на величину строго соответствующую интервалу времени до момента наступления события. События обрабатываются в порядке наступления. Одновременно наступившими считаются события, которые являются одновременными в действительности.

Для реализации моделирования по особым состояниям требуется разработать календарь событий – процедура планирования событий.

Алгоритм моделирования по особым состояниям

Этап 1. Установка текущего значения модельного времени $t_m = 0$.

Этап 2. Прогнозирование ближайшего события.

Этап 3. Если $t_{\text{cob}.i} > T_m$, то переход на 8 этап. Иначе переход на 4 этап.

Этап 4. Продвижение модельного времени $t_m = t_{\text{cob}.i}$.

Этап 5. Если существуют одновременные события, то переход на 6 этап. Иначе переход на 7 этап.

Этап 6. Квазипараллельная обработка событий. Переход на 2 этап.

Этап 7. Обработка события. Переход на 2 этап.

Этап 8. Конец.

Преимущество метода моделирования по особым состояниям – экономия машинного времени при моделировании систем периодического времени, в которых события длительное время могут не наступать.

3.2 Планирование модельных экспериментов

Цели планирования модельного эксперимента:

1) сокращение общего объёма испытаний при соблюдении требований к достоверности и точности результатов;

2) повышение информативности экспериментов в отдельности.

Факторное пространство – множество внешних и внутренних параметров модели, значения которых исследователь может контролировать в ходе подготовки и проведения модельного эксперимента.

Интервал варьирования – число, прибавление которого к нулевому уровню даёт верхний уровень, а вычитание – нижний уровень.

Наблюдаемая переменная – основной (выходной) параметр, относительно которого строится план эксперимента. Значение наблюдаемой переменной, полученное в ходе эксперимента, определяется по формуле:

$$y = f(x) + e(x), \quad (3.2)$$

где $f(x)$ – функция отклика (неслучайная функция факторов);

$e(x)$ – ошибка эксперимента (случайная величина);

x – точка в факторном пространстве (сочетание уровней факторов).

Виды постановки задачи планирования имитационного эксперимента:

1) выбор плана, позволяющего получить наиболее достоверное значение функции отклика $f(x)$ при фиксированном числе опытов (стратегическое планирование имитационного эксперимента);

2) выбор плана, при котором статистическая оценка функции отклика может быть получена с заданной точностью при минимальном объёме испытаний (тактическое планирование имитационного эксперимента).

3.2.1 Стратегическое планирование имитационного эксперимента

Цель методов стратегического планирования имитационного эксперимента – получение максимального объёма информации об исследуемой системе в каждом эксперименте (наблюдении).

Решаются две задачи:

- идентификация факторов;
- выбор уровней факторов.

Идентификация факторов – ранжирование по степени влияния на значение наблюдаемой переменной (показатели эффективности).

Первичные факторы – факторы, в исследовании влияния которых экспериментатор заинтересован непосредственно.

Вторичные факторы – факторы, которые не являются предметом исследования, но влиянием которых нельзя пренебречь.

Способы построения стратегического плана:

- 1) полный факторный эксперимент (ПФЭ);
- 2) частичный факторный эксперимент (ЧФЭ).

Полный факторный эксперимент – эксперимент, в котором реализуются всевозможные сочетания уровней факторов. Общее число комбинаций уровней ПФЭ для k факторов определяется по формуле:

$$N = l_1 l_2 l_3 \dots l_k = \prod_{i=1}^k l_i \quad (3.3)$$

где l_i – число уровней i -го фактора.

Частичный факторный эксперимент – эксперимент, в котором взаимное влияние всех факторов отсутствует или их эффектом пренебрегают.

Виды построения планов ЧФЭ:

- 1) рандомизированный план;
- 2) латинский план;
- 3) эксперимент изменения факторов по одному;
- 4) дробный факторный эксперимент.

3.2.2 Тактическое планирование имитационного эксперимента

Тактическое планирование эксперимента – совокупность методов установления необходимого объёма испытаний. Основа методов тактического планирования имитационного эксперимента – понижение дисперсии.

Объём испытаний (величина выборки) – для получения оценок наблюдаемой переменной с заданной точностью зависит от факторов:

- вид распределения наблюдаемой переменной y ;
- коррелированности между собой элементов выборки;
- наличие и длительность переходного режима функционирования моделируемой системы.

Группы методов понижения дисперсии:

- 1) активные – формирование выборки специальным образом;
- 2) пассивные – применение после формирования выборки;
- 3) косвенные – использование значений вспомогательных величин для

получения оценок вспомогательных величин.

Методы уменьшения ошибок, обусловленные наличием переходного периода:

- 1) увеличение длительности прогона;
- 2) исключение из рассмотрения переходного периода;
- 3) инициализация модели при некоторых специально выбранных начальных условиях.

3.3 Обработка и анализ результатов моделирования

Требования к результатам имитационного моделирования:

- точность и достоверность;
- правильная интерпретация;
- правильное использование.

Цели оценки качества:

- 1) проверка соответствия модели её предназначению;
- 2) оценка достоверности и статистические характеристики результатов;

Оценка адекватности имитационной модели производится сравнением измерений на реальной системе и результатов экспериментов на модели.

Способы оценки адекватности имитационной модели:

- по средним значениям откликов модели и системы;
- по дисперсиям отклонений откликов модели от среднего значения откликов системы;
- по максимальному значению относительных отклонений откликов модели от откликов системы.

Оценка чувствительности модели к изменению параметров рабочей нагрузки и внутренних параметров системы проводится по каждому параметру X_k в отдельности.

1 Определяется величина относительного среднего приращения параметра X_k по формуле:

$$\Delta X_k = \frac{(X_{k \max} - X_{k \min})^2}{X_{k \max} + X_{k \min}} 100\% \quad (3.4)$$

2 Проводится пара модельных экспериментов при значениях $X_k = X_{k \max}$ и $X_k = X_{k \min}$ и средних фиксированных значений остальных параметров. Определяются значения откликов модели $Y_1 = f(X_{k \max})$ и $Y_2 = f(X_{k \min})$.

3 Вычисляется относительное приращение наблюдаемой переменной по формуле:

$$\Delta Y = \frac{2|Y_1 - Y_2|}{Y_1 + Y_2} 100\% \quad (3.5)$$

3.4 Практическая работа № 3 «Прерывание обслуживания с возвратом в очередь»

Цель: получить теоретические знания и практические навыки в имитационном моделировании систем.

Используемые приемы и технологии: технология визуального проектирования и событийного программирования, среда программирования Visual Studio 2019 Community, язык программирования Visual C++.

Ключевые термины: имитационная модель, генератор псевдослучайных чисел, модельное время, коэффициент масштабирования.

Постановка задачи: разработайте визуальное приложение, формализующее алгоритм решения задачи.

3.4.1 Варианты заданий

Задания поступают на n шт. обрабатывающих устройств с интенсивностью α , заявка/ч. Распределение величины интервала между заданиями экспоненциально. При нормальном режиме работы задания выполняются в порядке поступления. Время выполнения задания нормально распределено с математическим ожиданием β мин. и среднеквадратическим отклонением φ мин. Перед выполнением задания производится наладка станка, время которого распределено равномерно. Среднее значение времени наладки ψ мин. Максимальное отклонение времени наладки от среднего γ мин. Задания, выполненные на станке, направляются в другие отделы и считаются покинувшими рассматриваемую систему. Обрабатывающее оборудование иногда ломается. Интервалы времени между поломками распределены нормально. Среднее время безаварийной работы χ ч. Среднеквадратичное отклонение времени безаварийной работы η ч. Интенсивность одного этапа ремонта λ заявок/ч. Количество этапов ремонта τ . При поломке выполняемое задание удаляется со станка и поме-

щается в начало очереди заданий к станку. Выполнение задания возобновляется с того места, на котором оно было прервано. Когда станок ломается, начинается процесс устранения неисправности, состоящий из трёх фаз. Продолжительность каждой фазы распределена экспоненциально. Время устранения поломки имеет эрланговское распределение. Работа обрабатывающего оборудования анализируется в течение T ч. для получения информации о загрузке и времени выполнения задания. Схема работы обрабатывающего устройства с поломками приведена на рисунке 3.1.

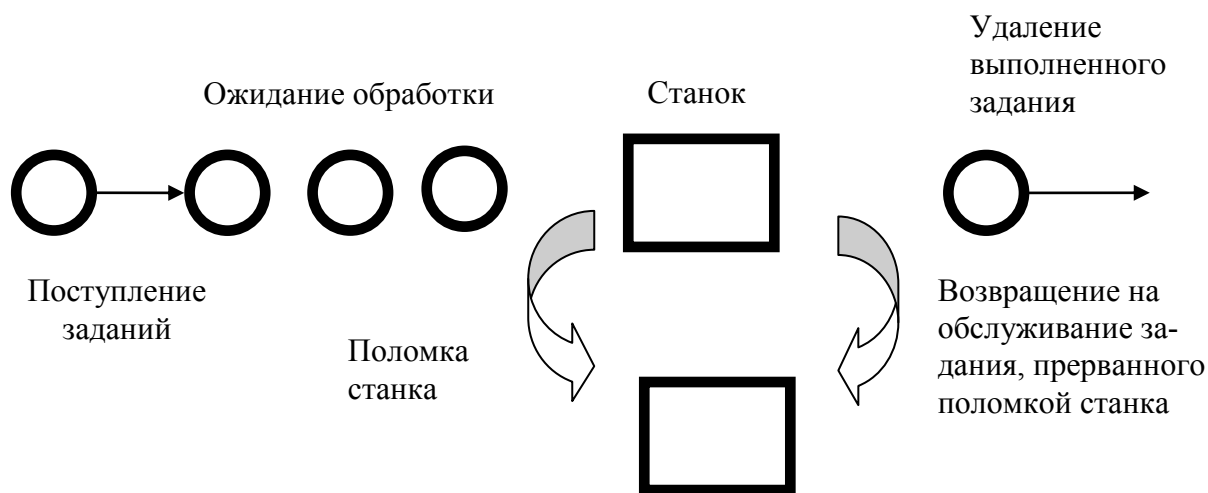


Рисунок 3.1 – Схема работы обрабатывающего задания устройства с поломками

Для оценки работы системы определяются статистические данные за период T единиц времени:

- всего поступило заявок;
- доля заявок, не прервавших обслуживание;
- доля заявок, прервавших обслуживание;
- средняя длина очереди;
- среднее время пребывания;
- коэффициент загрузки станка.

Построить графики зависимостей длины очереди от времени, времени пребывания заявок в системе от количества выполненных заданий [5, 6].

Исходные данные задачи по вариантам представлены в таблицах 3.1–3.2

Таблица 3.1 – Варианты исходных данных для пункта контроля

Вариант	Количество станков n , шт.	Интенсивность входного потока α , заявка/ч.	Среднее значение времени обслуживания β , мин.	Среднеквадратичное отклонение времени обслуживания, φ , мин.	Среднее значение времени наладки ψ , мин.	Максимальное отклонение времени наладки от среднего γ , мин.
1	4	2	45	5	25	8
2	5	3	50	6	32	9
3	6	1	60	9	28	7
4	2	5	58	8	26	6
5	7	6	59	7	33	4
6	8	10	64	6	34	3
7	3	15	79	5	29	2
8	1	8	48	8	24	4
9	10	7	63	6	23	5
10	15	4	62	4	22	6
11	12	9	67	5	33	3
12	9	10	58	3	36	5
13	17	13	72	7	34	2
14	16	12	73	8	37	4
15	20	7	71	4	28	6
16	21	5	67	6	27	7
17	8	3	63	7	36	5
18	19	9	64	8	34	6
19	12	2	65	5	35	4
20	7	14	68	6	25	3
21	15	11	73	4	26	2
22	14	10	72	8	27	5
23	13	13	75	9	24	3
24	22	15	76	7	31	4
25	21	16	77	6	30	6

Таблица 3.2 – Варианты исходных данных для пункта контроля

Вариант	Среднее время безаварийной работы χ , ч	Среднеквадратичное отклонение времени безаварийной работы η , ч	Интенсивность одного этапа ремонта λ , заявок/ч	Количество этапов ремонта τ ,	Время моделирования T , мин
1	24	2	0,75	5	850
2	15	3	0,78	4	900
3	22	3	0,86	3	1200
4	23	4	0,87	5	1150
5	25	2	0,92	6	950
6	19	3	0,76	4	890
7	20	5	0,77	3	1240
8	21	4	0,70	3	1160

Продолжение таблицы 3.2

9	24	3	0,80	5	1310
10	30	2	0,82	4	1425
11	31	4	0,86	6	975
12	32	2	0,52	3	1065
13	33	5	0,55	7	1179
14	24	3	0,60	5	1042
15	25	4	0,66	4	1278
16	26	5	0,67	6	1324
17	28	2	0,59	3	1095
18	29	3	0,49	5	938
19	30	4	0,52	8	894
20	25	5	0,62	7	1023
21	24	3	0,63	3	1245
22	21	5	0,64	6	1139
23	22	2	0,74	4	1237
24	23	4	0,75	3	1097
25	31	5	0,58	6	1027

3.4.2 Методические указания

1 Разработайте алгоритм решения задачи.

2 Разработайте визуальное приложение, формализующее алгоритм решения задачи:

- создайте проект программы;
- настройте свойства формы Form1;
- добавьте компоненты на форму;
- создайте и определите функции обработчика событий.

3 Оформите отчет по практической работе, включающий разделы:

- постановка задачи;
- теоретическое обоснование;
- этапы алгоритма решения задачи;
- скриншоты программы;
- код программы (функции обработчиков событий);
- выводы.

3.4.3 Контрольные вопросы

- 1 Что такое имитационное моделирование?
- 2 Что такое событие, процесс, работа, транзакт?
- 3 Каким образом производится отчёт системного времени?
- 4 От чего зависит погрешность в измерении временных характеристик системы?
- 5 Какие существуют виды представления времени?
- 6 Какие задачи решаются с помощью механизма модельного времени?
- 7 Какие условия требуются для реализации метода управления модельным временем?
- 8 Какие этапы включает алгоритм моделирования с общим шагом?
- 9 Какие правила необходимо выполнить для выбора величины шага моделирования?
- 10 Что понимается под особыми состояниями?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания содержат теоретическое обоснование, контрольные вопросы и варианты заданий для выполнения практических работ по дисциплине «Семинары специалистов» (часть 3). Методические указания разработаны в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта по подготовке бакалавров по направлению 09.03.04 «Программная инженерия».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Таха Х. А. Введение в исследование операций / Х. А. Таха ; пер. с англ. – Москва : Издательский дом «Вильямс», 2006. – 912 с.
- 2 Костевич Л. С. Математическое программирование: Информационные технологии оптимальных решений : учебное пособие / Л. С. Костевич. – Минск : Новое знание, 2003. – 424 с.
- 3 Семахин А. М. Линейное программирование в моделировании информационных систем : учебное пособие / А. М. Семахин. – Курган : Изд-во Курганского гос. ун-та, 2016. – 68 с.
- 4 Семахин А. М. Сетевое моделирование информационных систем : учеб. пособие / А. М. Семахин. – Курган : Изд-во Курганского гос. ун-та, 2016. – 62 с.
- 5 Шилдт Г. Искусство программирования на C++ / Г. Шилдт. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2005. – 496 с.
- 6 Боев В. Д. Имитационное моделирование систем / В. Д. Боев. – Москва : Юрайт, 2017. – 253 с.

Семахин Андрей Михайлович

СЕМИНАРЫ СПЕЦИАЛИСТОВ

Методические указания
к выполнению практических работ
для студентов направления подготовки 09.03.04

Часть 3

Редактор В. С. Никифорова

Подписано в печать 03.06.22	Формат 60×84 1/16	Бумага 80 г/см ²
Печать цифровая	Усл. печ. л. 3,625	Уч.-изд. л. 3,625
Заказ 47	Тираж 25	

Библиотечно-издательский центр КГУ.
640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.