

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Курганский государственный университет»

Кафедра «Физика»

## **Механика**

Методические указания к выполнению лабораторных работ по общему  
физическому практикуму для студентов направленности

03.03.02 «Физика»,  
44.03.05 «Педагогическое образование» («Физика и математика»)

Курган 2020

Кафедра: «Физика»

Дисциплина: «Общий физический практикум» (03.03.02 «Физика»,  
44.03.05 «Педагогическое образование» («Физика и математика»))

Составил: старший преподаватель Л. Н. Никифорова

Печатается в соответствии с планом издания, утвержденным методическим советом университета «Об» февраля 2020 г.

Утверждены на заседании кафедры «17» апреля 2020 г.

## Лабораторная работа № 1

### Погрешности при прямых измерениях

*Цель работы:* освоить методику расчета погрешности прямых измерений.

Прямым измерением называются такие измерения, в ходе которых исследуемая величина непосредственно сравнивается с эталоном при помощи измерительного прибора или инструмента. Значение измеряемой величины определяется, исходя из отсчета по шкале прибора или инструмента.

Произвести измерения физических величин абсолютно точно невозможно, так как всякое измерение сопровождается той или иной ошибкой или погрешностью (рисунок 1.1).

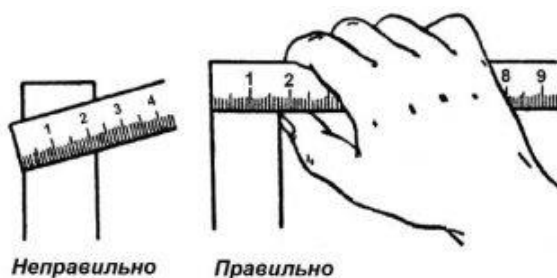


Рисунок 1.1 – Измерение физической величины

Погрешности измерений делятся на систематические, случайные и промахи.

Систематическими называются погрешности, которые сохраняются при повторных измерениях одной и той же величины или определяются по определенному закону. Чтобы убедиться в отсутствии систематических погрешностей, можно воспользоваться эталонными приборами или предварительно измерить известную физическую величину.

Погрешности, вносимые измерительными приборами, называются инструментальными. Данные погрешности порождаются: несовершенством приборов; неточной установкой прибора; смещением шкалы прибора; неточной установкой стрелки прибора в нулевом положении; недостаточной чувствительностью прибора; неучетом тепловых, электрических и магнитных полей, давлений, влажности и других внешних факторов, влияющих на результат измерений и так далее.

Инструментальные погрешности могут быть определены двумя способами:

$$\text{а) } \Delta_{ins} = \frac{1}{2} \text{ц.д.} \quad (1.1)$$

б) по классу точности прибора

$$\Delta_{ins} = \frac{\gamma \cdot x_{max}}{100}, \quad (1.2)$$

где  $\gamma$  – класс точности прибора (указывается на шкале или в паспорте прибора). Класс точности есть отношение предельно допустимого значения абсолютной погрешности к максимальному значению измеряемой величины  $x_{max}$ , выраженному в процентах.

Случайными называются погрешности, величина которых беспорядочно меняется при повторных измерениях одной и той же физической величины при одинаковых условиях.

На практике в случае многократных измерений в качестве истинного значения исследуемой величины принимается среднее арифметическое значение.

$$x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1.3)$$

где  $n$  – число измерений,  
 $x_i$  – результаты измерений.

За величину случайной погрешности принимают величину доверительного интервала, который определяет область вблизи среднего значения измеряемой величины и в котором содержится истинное значение этой величины с вероятностью  $\alpha$ . В случае небольшого количества измерений ( $n < 30$ ) доверительный интервал находят по формуле:

$$\Delta_d = S_n \cdot t(\alpha, n), \quad (1.4)$$

где  $S_n$  – среднее квадратичное отклонение среднего арифметического, определяемое выражением:

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x)^2}{(n-1)n}}, \quad (1.5)$$

$t(\alpha, n)$  – коэффициент Стьюдента.

Коэффициент Стьюдента  $t(\alpha, n)$  зависит от числа измерений  $n$  и выбранной доверительной вероятности  $\alpha$ . Значения коэффициентов Стьюдента приведены в таблице 1.1.

Промахи (грубые ошибки) появляются при нарушениях условий эксперимента в отдельных измерениях, при неисправности приборов, в результате ошибочной записи результата и т. д. Они, как правило, не укладываются в общую закономерность измеренных величин, и их из совокупности измерений следует исключить, т. е. не учитывать при обработке результатов эксперимента.

Полная погрешность прямого измерения определяется по формуле:

$$\Delta_m = \sqrt{\Delta_{ins}^2 + \Delta_d^2}. \quad (1.6)$$

Точность измерений можно также охарактеризовать относительной ошибкой.

Относительная ошибка измерения равна отношению абсолютной ошибки данного результата к среднему арифметическому значению

$$\delta = \frac{\Delta x}{x} . \quad (1.7)$$

Часто относительную ошибку выражают в процентах:

$$\delta = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\% . \quad (1.8)$$

#### *Порядок расчета ошибки прямых измерений*

Рассчитать инструментальную ошибку  $\Delta_{ins}$  по формулам (1.1) или (1.2). (Следует учитывать, что найденные таким образом инструментальные погрешности соответствуют доверительной вероятности  $\alpha = 0,997$ . Чтобы определить инструментальные погрешности для других значений доверительной вероятности, следует составлять соответствующие пропорции).

Рассчитать случайную ошибку  $\Delta_d$ :

- а) рассчитать среднее арифметическое  $x$  по формуле (1.3);
- б) найти среднеквадратичное отклонение  $S_n$  по формуле (1.5);
- в) задать доверительную вероятность  $\alpha$  в пределах от 0,7 до 0,95;
- г) по таблице 1.1 найти коэффициент Стьюдента для заданной  $\alpha$  и известного числа измерений;
- д) рассчитать доверительный интервал по формуле (1.4).

Рассчитать общую ошибку прямых измерений по формуле (1.6) (при этом  $\Delta_{ins}$  и  $\Delta_d$  должны быть найдены с одной и той же доверительной вероятностью).

Записать результат в виде  $x = x \pm \Delta_m$ .

Примечание: величина ошибки  $\Delta_m$  округляется всегда с избытком до двух значащих цифр, если первая цифра меньше трех; и до одной значащей цифры, если первая цифра три и больше. Среднее значение округляется до сомнительной цифры (с учетом ошибки). (Цифра называется верной, если половина единицы ее разряда превышает погрешность измерения. Первая неверная цифра называется сомнительной.)

#### *Варианты индивидуальных заданий*

Рассчитать случайную ошибку по методу Стьюдента. Результат записать в системе СИ.

#### Вариант 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	2,01	2,00	2,03	2,00	2,02	1,99	2,01	1,98	2,03	1,99

### Вариант 2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H, м	12,3	12,4	12,6	12,0	12,5	12,1	12,4	12,3	12,2	12,5

### Вариант 3

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m, г	21,18	21,09	21,24	21,17	21,03	21,23	21,00	20,98	21,36	21,15

### Вариант 4

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m, кг	0,184	0,190	0,181	0,195	0,187	0,185	0,191	0,196	0,188	0,193

### Вариант 5

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T, с	4,86	4,79	4,90	4,81	4,87	4,82	4,81	4,85	4,90	4,87

### Вариант 6

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l, м	6,03	5,95	6,08	5,99	6,01	6,09	5,97	6,05	6,11	5,93

### Вариант 7

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C, мкФ	0,512	0,506	0,508	0,504	0,507	0,509	0,505	0,506	0,510	0,505

### Вариант 8

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I, mA	100,8	99,5	101,0	98,7	100,9	101,5	99,3	100,3	99,1	100,6

### Вариант 9

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U, В	10,25	10,36	10,28	10,15	10,31	10,20	10,17	10,35	10,18	10,24

### Вариант 10

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R, Ом	1520	1525	1519	1524	1528	1515	1521	1524	1520	1526

### Вариант 11

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L, мГн	2,08	2,04	2,10	2,02	2,10	2,01	2,06	2,09	2,07	2,05

Таблица 1.1 – Коэффициенты Стьюдента  $t_{\alpha,n}$

n	$\alpha$						
	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	8	9	10	11	12	13	14
2	2	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	1,3	1,9	2,9	4,3	7	9,9	31,6
4	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	1,2	1,5	2	2,6	3,4	4	6,9
7	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6
8	1,1	1,4	1,9	2,4	3	3,5	5,4
9	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5
10	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
11	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3	4,2
15	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3	4,1
16	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	2,9	4
17	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	4
18	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	4
19	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
20	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9

## Лабораторная работа № 2

### Погрешности при косвенных измерениях

*Цель работы:* освоить методику расчета погрешностей при косвенных измерениях.

Косвенным измерением называется такой вид измерений, при котором исследуемая величина рассчитывается по результатам прямых измерений других величин с помощью известной функциональной зависимости между ними.

Пусть в общем случае искомая величина  $U$  является функцией параметров  $x, y, \dots, v$ , определяемых с помощью прямых измерений:

$$U = U(x, y, \dots, v). \quad (2.1)$$

Тогда среднее значение функции  $U$  может быть вычислено путем подстановки в соотношение (2.1) средних значений аргументов. Определив с помощью

прямых измерений  $x, y, \dots, v$  и подставив их средние значения в соотношении (2.1), получим:

$$\bar{U} = U(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{v}). \quad (2.2)$$

После вычисления среднего значения функции определяют по приведенным в лабораторной работе № 1 правилам значения общих ошибок аргументов  $\Delta_m x, \Delta_m y, \Delta_m z, \dots, \Delta_m v$ . При этом величины случайных ошибок (доверительные интервалы) должны быть рассчитаны при одной и той же выбранной доверительной вероятности  $\alpha$ , а затем высчитывают ошибку  $\Delta U$  для функции  $U$ , используя соотношение:

$$\Delta_m U = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 (\Delta_m x)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 (\Delta_m y)^2 + \dots + \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2 (\Delta_m v)^2}. \quad (2.3)$$

В формуле (2.3)  $\partial U / \partial x, \dots, \partial U / \partial v$  – так называемые частные производные функции  $U$  по соответствующим аргументам  $x, \dots, v$  в предположении, что остальные аргументы являются постоянными величинами.

#### ПРИМЕР

Вычисляемая величина  $f$  является комбинацией физических величин  $X, Y, Z$ :

$$f = k \frac{(X - Y)}{Z^n}. \quad (2.4)$$

Затем вычисляют частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{k}{Z^n}, \quad \frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{-k}{Z^n}, \quad \frac{\partial f}{\partial Z} = -kn \frac{X - Y}{Z^{n+1}}. \quad (2.5)$$

Пользуясь формулой (2.3), записывают погрешность косвенного измерения

$$\Delta_{mf} = \sqrt{\left(\frac{k}{Z^n} \Delta_m X\right)^2 + \left(\frac{-k}{Z^n} \Delta_m Y\right)^2 + \left(-kn \frac{X - Y}{Z^{n+1}} \Delta_m Z\right)^2}. \quad (2.6)$$

Умножив это выражение на  $1/f$  и преобразовав правую часть, получаем относительную погрешность:

$$\frac{\Delta_m f}{f} = \sqrt{\frac{(\Delta_m X)^2 + (\Delta_m Y)^2}{(X - Y)^2} + n^2 \left(\frac{\Delta_m Z}{Z}\right)^2}. \quad (2.7)$$



Из приведенного примера следует, что относительную погрешность можно записать для любой функции, не прибегая к вычислению частных производных. В конечном выражении, как легко видеть, исчезают постоянные коэффициенты. Показатель степени возводится в квадрат и умножается на относительную погрешность той величины, показателем которой он является. Погрешности величин, с какими бы знаками они не входили в исходное выражение, складываются. Перечисленные особенности можно использовать в качестве практических правил при нахождении погрешности.

*Упрощенные правила вывода формулы погрешности косвенного измерения*

- 1 Рабочая формула дифференцируется.
- 2 Знаки дифференциалов  $d$  заменяют на знаки  $\Delta$ , а все знаки минус на знак плюс.
- 3 Каждое слагаемое возводится в квадрат.
- 4 Вычисляются абсолютная и относительные погрешности.

*Задания*

Вывести формулы расчета погрешностей косвенных измерений:

$$\text{a) } E = \frac{mv^2}{2}; \quad \text{h) } u = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2};$$

$$\text{b) } a = \frac{2s}{t^2}; \quad \text{i) } \varepsilon_0 = \frac{r}{4\pi(l+r)\varphi};$$

$$\text{c) } T = 2\pi \frac{l}{g}; \quad \text{j) } g = \frac{4\pi^2(L-r)}{T^2}.$$

$$\text{d) } F = \mu\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi R}$$

$$\text{e) } v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)};$$

$$\text{f) } u = v \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2};$$

$$\text{g) } A = PV \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right);$$

Варианты индивидуальных заданий

Вывести формулу расчета погрешности при косвенных измерениях. Рассчитать искомую величину и ее погрешность.

Вариант 1

$$D = \frac{4m}{\pi d^2 L}$$

						$a_{max}$	$\gamma$	Ц.д.
$m, г$	74	73	71	75	72	500г	1,5	
$d, мм$	5,5	5,4	5,5	5,6	5,7			1 мм
$L, см$	37,0	37,5	38,0	38,5	38,8			1 см

Вариант 2

$$Q = \frac{U^2 t}{R}$$

						$a_{max}$	$\gamma$	Ц.д.
$U, В$	60	59	58	61	63	100 В	0,5	
$R, Ом$	99	100	101	103	97	500Ом	1,0	
$t, с$	36	39	35	38	34			1 с

Вариант 3

$$I = \frac{mglT^2}{4\pi^2}$$

$$g = 9,8 \frac{м}{с^2}$$

						$a_{max}$	$\gamma$	Ц.д.
$m, г$	50	52	51	49	54	100 г	0,5	
$T, с$	2,00	2,20	2,30	2,15	2,40			0,1 с
$l, м$	1,03	1,01	1,03	1,05	1,07			1 см

Вариант 4

$$f = \frac{\pi^2 m d^2}{2T^2}$$

						$a_{max}$	$\gamma$	Ц.д.
$T, с$	10,0	9,5	9,8	10,2	10,1	30 с	0,5	
$m, кг$	1,430	1,445	1,458	1,440	1,500			1 г
$d, см$	15,0	14,8	15,3	15,6	15,1			1 мм

Вариант 5

$$L = \frac{r^2 T^2 G}{8\pi J}$$

$$G = 8,5 \cdot 10^8 \text{ Н / м}^2$$

						$a_{max}$	$\gamma$	Ц.д.
$T, \text{ с}$	10,0	9,8	9,9	10,1	10,3	30 с	1,5	
$J, \text{ г}\cdot\text{см}^2$	200	209	203	207	31			4 гсм <sup>2</sup>
$r, \text{ см}$	0,020	0,018	0,017	0,025	0,022			0,001см

Вариант 6

$$\sigma = \frac{hpgr}{2}$$

$$g = 9,8 \text{ м / с}^2$$

						$a_{max}$	$\gamma$	Ц.д.
$P, \text{ г/см}^3$	1,000	0,987	0,990	1,010	1,030	10 г/см <sup>3</sup>	0,5	
$h, \text{ мм}$	30	28	27	32	31			1мм
$r, \text{ см}$	0,10	0,08	0,09	0,12	0,14			0,01см

Вариант 7

$$m = \frac{\mu_0^2 R^2 e H^2}{2U}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн / м.}$$

						$a_{max}$	$\gamma$	Ц.д.
$R, \text{ Ом}$	5,37	5,32	5,40	5,42	5,38			0,01см
$U, \text{ В}$	400	401	399	404	402	500В	1,5	
$H, \text{ А/м}$	1000	1004	1008	1002	1005	2000А/м	1,0	

Вариант 8

$$Q = \frac{(L/C)^{1/2}}{R}$$

						$a_{max}$	$\gamma$	Ц.д.
$R, \text{ Ом}$	70	68	69	72	75	100Ом	0,5	
$C, \text{ мкФ}$	4,00	3,95	3,85	3,90	4,00			0,01мкФ
$L, \text{ мГн}$	0,40	0,45	0,48	0,41	0,50	1 мГн	0,2	

Вариант 9

$$g = \frac{8\pi^2 n^2 H}{\varphi^2}$$

						$a_{max}$	$\gamma$	Ц.д
$H, \text{ см}$	49	50	51	48	52			1 см
$n, \text{ Об/с}$	0,31	0,37	0,29	0,32	0,34	1 об/с	1,5	
$\varphi, ^\circ$	230	225	235	240	220			5,00

Вариант 10

$$v = 2v(n_2 - n_1)$$

						$a_{max}$	$\gamma$	Ц.д
$v, \text{ кГц}$	1,700	1,698	1,690	1,75	1,702	5 кГц	0,1	
$n_1, \text{ см}$	22,0	21,0	23,0	22,5	21,5			0,5 см
$n_2, \text{ см}$	32,0	31,0	33,0	32,6	31,8			0,5 см

Вариант 11

$$J = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2$$

						$a_{max}$	$\gamma$	Ц.д.
$m_1, \text{ кг}$	0,342	0,34	0,345	0,341	0,342	0,5 кг	1,0	
$m_2, \text{ кг}$	0,678	0,670	0,672	0,680	0,660	1 кг	1,0	
$l_1, \text{ м}$	1,00	1,01	1,03	0,99	0,98			1,0 см
$l_2, \text{ м}$	0,60	0,61	0,59	0,58	0,62			1,0 см

### Лабораторная работа № 3

#### Изучение второго закона Ньютона с помощью машины Атвуда

*Цель работы:* ознакомиться с основными кинематическими и динамическими характеристиками, описывающими поступательное движение; экспериментально проверить основной закон динамики поступательного движения (второй закон Ньютона).

*Оборудование:* машина Атвуда, перегрузки, электронный секундомер.

*Краткая теория*

Изучение законов движения является одной из главных задач механики. Опыт показывает, что любое сложное движение тела можно разделить на поступательное и вращательное. Движение тела называется *поступательным*, если

любая прямая, жестко связанная с телом, остается параллельной своему первоначальному положению. При поступательном движении все точки тела движутся одинаковым образом, поэтому движение всего тела может быть описано движением одной любой его точки. В качестве такой точки обычно выбирают центр масс тела. Часто для описания движения реальных тел используют физические модели. Одной из таких моделей является *материальная точка* – тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

Основными кинематическими характеристиками движения материальной точки и поступательного движения твердого тела являются радиус-вектор, траектория, путь, перемещение, скорость и ускорение.

*Радиус-вектор материальной точки* – вектор, проведенный из начала координат в данную точку:  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , где  $x, y, z$  – координаты,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные орты координатных осей.

*Траектория* – линия, которую описывает материальная точка при своем движении в пространстве.

*Путь (длина пути)* – расстояние между начальной и конечной точками движения, измеренное вдоль траектории (длина траектории).

*Перемещение* – вектор, соединяющий начальное и конечное положения материальной точки.

Для характеристики направления и быстроты движения вводится векторная физическая величина, называемая скоростью.

*Мгновенная скорость материальной точки (скорость)* – векторная физическая величина, равная первой производной радиус-вектора материальной точки по времени

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (3.1)$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории движения точки. Модуль мгновенной скорости материальной точки равен первой производной пути по времени

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (3.2)$$

В случае неравномерного движения важно знать, как быстро изменяется скорость с течением времени. Физической величиной, характеризующей быстроту изменения скорости по модулю и направлению, является ускорение. *Мгновенное ускорение  $a$  (ускорение)* материальной точки в момент времени  $t$  есть векторная величина, равная первой производной скорости по времени

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (3.3)$$

Наблюдение и опыт указывают, что изменение движения тела происходит в результате взаимодействия тел. Чтобы описать взаимодействие, вводят понятие силы. *Сила ( $\vec{F}$ )* – это векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело получает ускорение или изменяет свою форму и размеры. В любой момент вре-

мени сила характеризуется: а) числовым значением; б) направлением в пространстве; в) точкой приложения. Чаще всего на тело действует не одна, а несколько сил.

На основании обобщения опытных фактов был сформулирован принцип независимости действия сил: **если на материальную точку (тело) одновременно действуют несколько сил, то каждая из них сообщает телу ускорение так, будто другие силы отсутствуют.** Следовательно, при одновременном действии нескольких сил тело получит такое же ускорение, какое приобретает под действием одной силы, равной векторной сумме всех приложенных к телу сил. В этом заключается принцип суперпозиции сил. Силу, равную геометрической сумме всех сил, приложенных к данной материальной точке (телу), называют *резльтирующей (или равнодействующей)*

$$\vec{F}_p = \vec{F}_{p1} + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad (3.4)$$

Опыт показывает, что при одинаковых воздействиях различные тела неодинаково изменяют скорость своего движения, т. е. иными словами, приобретают различные ускорения. Ускорение зависит не только от величины воздействия, но и от свойств самого тела, от его массы. Из опыта известно, что ни одно тело нельзя мгновенно заставить двигаться и ни одно движущееся тело невозможно мгновенно остановить. Тела «сопротивляются» подобным действиям. В этом проявляется свойство тел, называемое инертностью.

*Инертность* – свойство тел оказывать сопротивление попыткам изменения их скорости. Следствием наличия у тел такого свойства является их стремление к сохранению состояния покоя или равномерного прямолинейного движения. Отсюда еще одно определение инертности. Инертность – свойство тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Опыт показывает, что инертность разных тел может быть различной. Поэтому возникает задача ее количественной оценки.

*Масса* – физическая величина для количественной оценки инертности тела. Кроме инертной массы, существует также гравитационная масса, определяющая силу гравитационного взаимодействия между телами. В настоящее время установлено, что инертная и гравитационная массы равны друг другу (с точностью, не меньшей  $10^{-12}$ ). Таким образом, можно сказать, что масса – физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные (инертная масса) и гравитационные (гравитационная масса) свойства. В классической механике масса тел остается постоянной при любых движениях и взаимодействиях. Масса – величина аддитивная, т. е. масса тела (или системы тел) равна сумме масс всех составляющих его частей. Векторная величина, равная произведению массы тела на его скорость называется импульсом (количеством движения) этого тела (материальной точки)

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (3.5)$$

Так как масса – величина всегда положительная, то очевидно, что вектор импульса всегда совпадает по направлению с вектором скорости. Опыт показывает, что если на тело действовать различными по величине силами, то ускорение, приобретаемое телом, будет прямо пропорционально действующей силе.

Если на тело действует несколько сил, то ускорение будет прямо пропорционально результирующей силе, т. е. при  $m=const$ ,  $a \sim F_p$

Если на разные тела воздействовать с одной и той же силой, то ускорения тел будут обратно пропорциональны их массам, т. е. при  $\vec{F} = const$ ,  $a \sim \frac{1}{m}$ .

Таким образом, обобщая опытные факты, можно записать:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_p}{m} \quad (3.6)$$

Соотношение (3.6) является математической записью второго закона Ньютона. Ускорение, приобретаемое телом (материальной точкой), прямо пропорционально результирующей силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе тела (материальной точки). Из уравнения (3.6), используя выражение (3.5), можно записать

$$\vec{F}_p = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (3.7)$$

Таким образом, мы получили более общую формулировку второго закона Ньютона. Скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее результирующей силе:

$$\vec{F}_p = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (3.8)$$

#### *Описание установки*

Экспериментальная установка представляет собой машину Атвуда, схема которой представлена на рисунке 3.1.

К нерастяжимой невесомой гибкой нити, перекинутой через лёгкий блок, прикреплены платформы одинаковой массы (4). На эти платформы могут устанавливаться дополнительные перегрузки различных масс. Если масса одного из перегрузков больше, чем масса другого, обе платформы начинают ускоренно двигаться. В работе эксперимент выполняется всегда таким образом, что масса правого перегрузка больше массы левого. Поэтому правая платформа движется вниз, а левая – вверх. Для определения ускорения платформ необходимо измерить время прохождения платформами некоторого расстояния. С этой целью лабораторная работа снабжена электронным секундомером, который запускается и останавливается по команде фотодатчиков 5 и 6. Когда правая платформа проходит мимо фотодатчика 6, секундомер запускается, когда платформа проходит мимо фотодатчика 5, секундомер останавливается. Таким образом, время, которое показывает секундомер, есть время движения правой платформы от верхнего фотодатчика до нижнего. Расстояние между фотодатчиками измеряется с помощью мерной линейки 3, расположенной за установкой.

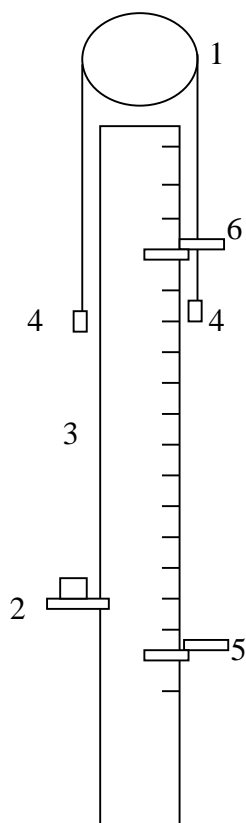


Рисунок 3.1 – Машина Атвуда

В исходном состоянии левая платформа касается магнита 2 и удерживается его магнитным полем. При выключении магнита обе платформы начинают движение.

Рассмотрим движение такой системы под действием приложенных к ней сил (рисунок 3.2). Будем считать, что нить нерастяжима, масса блока равна нулю, а трение на его оси отсутствует. Расчеты показывают, что такое предположение приводит к небольшим относительным погрешностям в определении кинематических и динамических характеристик системы.

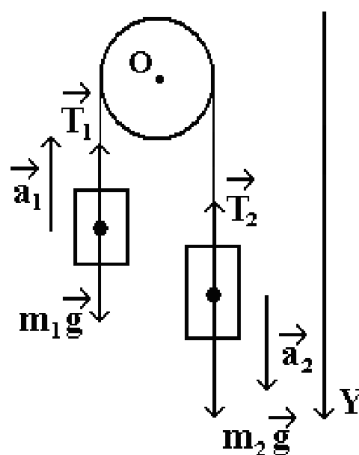


Рисунок 3.2 – К расчету ускорения и результирующей силы, действующей на систему грузов



Согласно второму закону Ньютона можно записать:

$$\begin{aligned}m_1 \vec{a}_1 &= m_1 \vec{g} + \vec{T}_1, \\m_2 \vec{a}_2 &= m_2 \vec{g} + \vec{T}_2\end{aligned}$$

где  $m_1$  – суммарная масса левого подвеса,

$a_1$  – его ускорение,

$T_1$  – сила натяжения нити, действующая на левый подвес.

Аналогичные величины с индексом 2 относятся к правому подвесу.

В проекциях на ось  $Y$  (рисунок 3.2) эти уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned}-m_1 a_1 &= m_1 g - T_1, \\m_2 a_2 &= m_2 g - T_2\end{aligned}$$

Так как нить нерастяжима, то ускорения  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  равны по модулю  $a_1 = a_2 = a$ . В свою очередь предположение о том, что масса блока близка к нулю и ею можно пренебречь, приводит к равенству модулей сил натяжения нити  $T_1 = T_2 = T$ .

С учетом приведенных обозначений, получим следующие уравнения

$$\begin{aligned}-m_1 a_1 &= m_1 g - T, \\m_2 a_2 &= m_2 g - T\end{aligned}$$

Вычитая из одного уравнения другое, найдем ускорение системы

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g = \frac{m_2 - m_1}{M} g$$

Очевидно, что движение системы в нашем случае будет осуществляться под действием результирующей силы

$$F_p = (m_2 - m_1)g \quad (3.9)$$

Формула (3.9) определяет теоретическое значение ускорения. Экспериментально его можно найти, используя кинематические закономерности. Так как каждый груз движется прямолинейно с постоянным ускорением, проходя расстояние  $h$  за время  $t$ , то ускорение

$$a = \frac{2h}{t^2} \quad (3.10)$$

Проверка второго закона Ньютона сводится к проверке двух утверждений.

1 При постоянной массе системы ускорение прямо пропорционально результирующей силе.

2 При постоянной силе ускорение обратно пропорционально массе всей системы.

Изменение результирующей силы и массы системы производится с помощью перегрузков.

### *Ход работы*

Задание 1. Определение ускорений движения системы.

- 1 Соберите установку в соответствии с рисунком 3.1 (на левом подвесе перегрузок Д, на правом – перегрузки В и Д).
- 2 Установите расстояние между фотодатчиками  $h$ .

- 3 Нажмите кнопку «Пуск» электронного секундомера. Результат измерения запишите в таблицу 3.1.
- 4 Повторите измерения времени движения (п. п. 2, 3) не менее 5 раз.
- 5 Рассчитайте среднее время движения  $t_{cp}$ .
- 6 По формуле (3.10) рассчитайте ускорение системы  $a_1$ .
- 7 Установите на правый подвес все перегрузки (перегрузок В и два перегрузка Д).
- 8 Пять раз измерьте время движения системы (п. п. 2, 3). Результаты измерений занесите в таблицу 3.1.
- 9 Рассчитайте среднее время движения  $t_{cp}$  и ускорение  $a_2$ .
- 10 Установите на правый подвес только перегрузок В.
- 11 Пять раз измерьте время движения системы (п. п. 2, 3). Результаты измерений занесите в таблицу 3.1.
- 12 Рассчитайте среднее время движения  $t_{cp}$  и ускорение  $a_3$ .

Таблица 3.1 – Результаты измерения ускорения а

h, м	t <sub>1</sub> , с	t <sub>2</sub> , с	t <sub>3</sub> , с	t <sub>4</sub> , с	t <sub>5</sub> , с	t <sub>cp</sub> , с	a, м/с <sup>2</sup>

Задание 2. Проверка второго закона Ньютона.

- 1 Рассчитайте силы, действующие на систему, по формулам:

$$F_1 = F_3 = m_b g \quad (3.10)$$

$$F_2 = (m_b + 2m_d)g \quad (3.11)$$

- 2 Найдите отношение  $\frac{F_1}{F_2}$

- 3 Используя результаты таблицы 3.1, найдите отношение  $\frac{a_1}{a_2}$ . Сравните полученные значения.

ните полученные значения.

- 4 Рассчитайте массы движущейся системы

$$M_1 = M_2 = 2m_a + 2m_d + m_b \quad (3.12)$$

$$M_3 = 2m_a + m_b \quad (3.13)$$

- 5 Найдите отношения  $\frac{a_1}{a_3}$  и  $\frac{M_3}{M_1}$ . Сравните полученные значения.

- 6 Сделайте вывод по работе.

Второй закон Ньютона можно считать экспериментально подтвержденным, если в результате опыта установлено, что в пределах погрешности измерений

$$\frac{a_1}{a_2} \approx \frac{F_1}{F_2}$$

$$\frac{a_1}{a_3} \approx \frac{M_3}{M_1}$$

### Контрольные вопросы

- 1 Дайте определения скорости и ускорения материальной точки.
- 2 Что такое инертность?
- 3 Что такое сила? Что представляет собой сила в 1 Ньютон?
- 4 Сформулируйте принцип независимости действия сил.
- 5 Сформулируйте принцип суперпозиции. Дайте определение результирующей силы.
- 6 Дайте определение импульса.
- 7 Сформулируйте и запишите основной закон динамики в двух возможных формах.
- 8 Как в данной работе проверяется второй закон Ньютона?
- 9 Выведите формулу (3.9) для теоретического расчета ускорения движущейся системы.

### Лабораторная работа № 4

#### Проверка основного закона динамики вращательного движения

*Цель работы:* проверить выполнимость основного закона динамики вращательного движения.

*Оборудование:* маятник Обербека, набор грузов, электронный секундомер.

#### *Краткая теория*

Основным законом динамики является второй закон Ньютона, устанавливающий связь между силой, массой и ускорением тел (при поступательном движении):

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}, \quad (4.1)$$

при  $m = \text{const}$ , закон принимает вид:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (4.2)$$

Таким образом, второй закон Ньютона связывает кинематические характеристики (скорость, ускорение) с динамическими (силой и массой).

При вращательном движении роль кинематических и динамических характеристик играют другие величины.

Кинематические характеристики – угловое перемещение, угловая скорость и угловое ускорение.

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}; \quad (4.3 \text{ а})$$

$$\varepsilon = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (4.3 \text{ б})$$

Связь между линейными и угловыми величинами устанавливают следующие формулы:

$$d\vec{s} = [d\vec{\varphi} * \vec{r}]; \quad (4.4 \text{ а})$$

$$\vec{v} = [\vec{\omega} * \vec{r}]; \quad (4.4 \text{ б})$$

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} * \vec{r}]. \quad (4.4 \text{ в})$$

Динамические характеристики – момент силы  $M$  и момент инерции  $J$ . Момент силы является причиной вызывающей ускорение при вращении:

$$\vec{M} = [\vec{r} * \vec{F}]. \quad (4.5)$$

Момент инерции ( $J$ ) является мерой инертности при вращении тела (величина, аналогичная массе при поступательном движении). Основной закон динамики вращательного движения связывает характеристики вращательного движения:

$$\vec{M} = \frac{d(J * \vec{\omega})}{dt} \quad (4.6)$$

где  $M$  – суммарный момент внешних сил, действующих на тело;

$J$  – момент инерции тела, относительно оси вращения;

$\omega$  – угловая скорость вращения тела.

Если  $J = \text{const}$ , а это бывает всегда, когда при вращении не меняется положение оси вращения и не происходит перераспределения массы тела относительно оси вращения, тогда уравнение (4.6) принимает вид:

$$\vec{M} = J * \vec{\varepsilon}. \quad (4.7)$$

Это и есть основной закон динамики вращательного движения. Проверка закона и является целью работы.

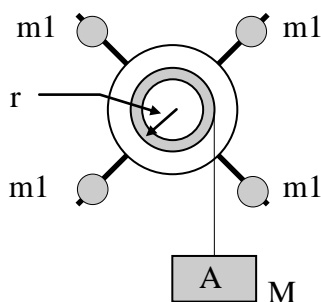


Рисунок 4.1 – Маятник Обербека

#### Описание установки

Маятник Обербека состоит из шкива с крестовиной, вращающегося вокруг горизонтальной оси (рисунок 4.1). На стержень крестовины могут надеваться грузы одинаковой массы  $m_1$ . Изменяя число грузов (2 или 4), можно изменять момент инерции системы ( $J$ ). На шкив радиуса  $r$  наматывается нить, на конце нити платформа (А), на которую можно устанавливать грузы разной

массы. Эти грузы создают вращающий момент  $M$ . При падении груза  $m$  с ускорением  $a$  на нить действует сила:  $F = m(g - a)$ . Тогда вращательный момент равен:

$$M = Fr = m(g - a)r. \quad (4.8)$$

При этом угловое ускорение  $\varepsilon$  связано с линейным ускорением  $a$  соотношением:

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{r} = \frac{a}{r}. \quad (4.9)$$

Ускорение  $a$ , с которым движется груз  $m$ , можно найти, измерив путь  $h$  и время  $t$ , за которое груз пройдет этот путь:

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (4.10)$$

Момент инерции маятника определяется по формуле:

$$J = J_0 + nm_1l^2, \quad (4.11)$$

где  $J_0$  – момент инерции крестовины без груза;

$n$  – число грузов;

$m_1$  – масса одного груза;

$l$  – расстояние грузов от оси вращения.

*Ход работы:*

Задание 1. Проверка зависимости углового ускорения от момента силы.

Основной закон динамики связывает три величины. Для его проверки удобно оставить одну величину постоянной, установить связь между двумя другими. Для проверки первой зависимости оставим постоянным момент инерции системы (пусть это будет  $J_0$  – момент инерции крестовины без груза), тогда

а) ставим груз массой  $m$ ,

б) измеряем время движения системы  $t$ ,

в) вычисляем ускорение  $a$  и  $\varepsilon$ .

Каждое измерение проводить не менее 3-х раз и для расчета  $a$  использовать  $t_{cp}$  по формуле (4.10). Данные занести в таблицу. По результатам таблицы построить график.

Момент силы вычисляется по формуле (4.8).

Задание 2. Проверка зависимости углового ускорения от момента инерции.

Оставим постоянным момент силы ( $M$ ), который будет создаваться одним грузом  $m$ . Изменение момента инерции  $J$  осуществляется установлением на крестовину грузов  $m_1$ . Сначала проводят опыт с крестовиной без груза, затем симметрично ставят 2 груза, затем 4 груза. Таким образом, получают 3 значения момента инерции  $J$ . Расчет вести по формуле (4.11). Данные занести в таблицу и построить график.

Задание 3. Определение силы трения прибора.

С учетом силы трения второй закон Ньютона принимает вид;

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M} - \vec{M}_{тр}. \quad (4.12)$$

Момент силы трения  $M_{тр}$  можно определить опытным путем. Если график из первого задания продолжать до оси моментов, то точка пересечения его с осью М дает значение  $M_{тр}$ .

### Контрольные вопросы

- 1 Дать вывод закона динамики для вращательного движения.
- 2 Сформулировать, что такое момент силы, момент инерции, угловая скорость, угловое ускорение.
- 3 Являются ли графики, выполненные при решении заданий, прямыми линиями? Почему?

## Лабораторная работа № 5

### Определение момента инерции тела методом трифилярного подвеса

*Цель работы:* измерение момента инерции тел и исследование зависимости его от конфигурации тела.

*Оборудование:* трифилярный подвес, секундомер, штангенциркуль, набор тел, подлежащих измерению.

#### Краткая теория

Величина  $mr^2$  – называется моментом инерции материальной точки массой  $m$  относительно оси вращения, находящейся на расстоянии  $r$  от материальной точки.

Моментом инерции тела относительно оси вращения называется величина, являющаяся мерой инертности тела во вращательном движении и равная сумме моментов инерции всех точек тела относительно этой оси:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (5.1)$$

Для твердого тела:

$$J = \int r^2 dm. \quad (5.2)$$

Из формулы (5.2) видно, что момент инерции тел одинаковой массы, но различной конфигурации будет различен в зависимости от распределения массы относительно оси вращения. Согласно теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции  $J$  можно выразить следующим образом:

$$J = J_0 + mr^2, \quad (5.3)$$

где  $J_0$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести и направленной также, как исследуемая ось;  $m$  – масса тела;  $r$  – расстояние от центра тяжести до той оси, относительно которой определяется  $J$ .

Из приведенной формулы видно, что момент инерции тела минимален, если ось вращения проходит через центр тяжести. Получается  $r=0$ , следовательно,  $mr^2=0$  и  $J = J_0$ .

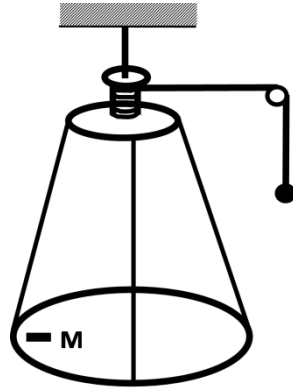


Рисунок 5.1 – Трифилярный подвес

В работе момент инерции определяется методом трифилярного подвеса. Установка представляет собой круглую платформу, которая с помощью трех симметрично расположенных нитей крепится к диску меньшего диаметра (рисунок 5.1).

Приложив силу к верхнему диску, выводим его из состояния равновесия. Силовое воздействие по нитям будет передаваться нижнему диску. Количество совершаемых диском крутильных колебаний можно подсчитать, наблюдая за меткой  $M$ , имеющейся на диске.

Двигаясь в одном направлении, платформа, закручиваясь, поднимается на высоту  $h$ , при этом потенциальная энергия возрастает на  $mgh$ . В момент, когда нижний диск проходит положение равновесия, потенциальная энергия переходит в кинетическую:

$$mgh = \frac{J\omega^2}{2}, \quad (5.4)$$

где  $J$  – момент инерции платформы;

$\omega$  – угловая скорость.

Если не учитывать силы трения, то колебания платформы можно считать гармоническими:

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega t = \alpha_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)t,$$

где  $\alpha_0$  – максимальный угол отклонения платформы;

$T$  – период колебаний.

По определению

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d(\alpha_0 \cos(2\pi/T)t)}{dt} = \frac{-2\pi\alpha_0}{T} \sin(2\pi/T)t. \quad (5.5)$$

Из рисунка 5.2 найдем высоту, на которую поднимается платформа при своем движении:

$$\begin{aligned} h &= h_1 - h_2, \\ h_1^2 &= l^2 - (R - r)^2, \\ h_2^2 &= l^2 - (A_1C_1)^2 = l^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha_0). \end{aligned}$$

$A_1C_1$  – найдена с применением теоремы косинусов из треугольника  $A_1C_1O_1$ .

$$\begin{aligned} h = h_1 - h_2 &= \frac{(h_1 - h_2)(h_1 + h_2)}{h_1 + h_2} = \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1 + h_2} = \\ &= \frac{2Rr(1 - \cos \alpha_0)}{h_1 + h_2} = \frac{4Rr \sin^2(\alpha_0/2)}{h_1 + h_2}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

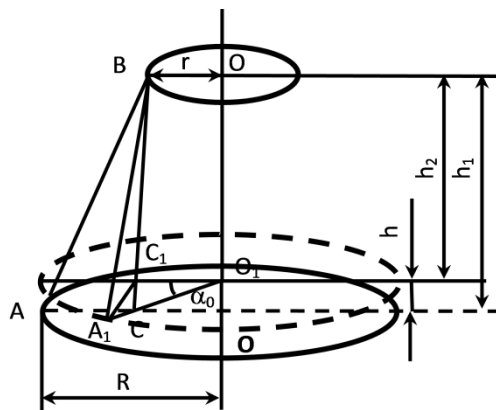


Рисунок 5.2 – Трифилярный подвес

При небольших углах поворота можно считать, что  $\sin(\alpha_0/2) \approx \alpha_0/2$  и  $h_1 + h_2 \approx 2l$ ,

$$h = \frac{Rr\alpha_0^2}{2l}. \quad (5.7)$$

Из соотношений (5.4) - (5.7) получим

$$J = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 l}. \quad (5.8)$$



Для того чтобы определить момент инерции любого тела, его помещают на платформу так, чтобы ось вращения проходила через геометрический центр платформы. Тогда, определив момент инерции  $J_0$  и  $J_n$  пустой и нагруженной платформы, можно найти момент инерции тела:

$$J_{\text{тела}} = J_n - J_0. \quad (5.9)$$

Задание 1. Определение момента инерции пустой платформы

*Ход работы:*

- сообщить платформе колебания с амплитудой 6–8°;
- найти время  $t_0$  полных 40-50 колебаний;
- найти период  $T_0 = t_0 / n$  колебаний платформы, где  $n$  – число колебаний.

Повторить опыт 3 раза;

- вычислить среднее значение периода колебаний  $\langle T_0 \rangle$ ;
- рассчитать момент инерции платформы по формуле:

$$J_0 = \frac{m_0 g R r \langle T_0 \rangle^2}{4\pi^2 l}. \quad (5.10)$$

- результаты занести в таблицу 5.1.

Задание 2. Определение момента инерции тела правильной формы

*Ход работы:*

- поместить на платформу исследуемое тело и повторить действия алгоритма задания 1;
- рассчитать момент инерции нагруженной платформы по формуле:

$$J_n = \frac{(m_0 + m) g R r \langle T \rangle^2}{4\pi^2 l}, \quad (5.11)$$

- где  $m_0$  – масса платформы;  
 $m$  – масса тела;  
 $R$  – радиус платформы;  
 $r$  – радиус верхнего диска;  
 $l$  – длина нитей.

- рассчитать момент инерции тела по формуле (5.9)
- рассчитать момент инерции тела  $J_{\text{теор}}$ , исходя из его геометрической формы;
- результаты занести в таблицу 5.2;
- рассчитать погрешность измерения момента инерции тела.

Таблица 5.1– Определение момента инерции платформы

$t_0, c$	$n$	$T_0, c$	$\langle T_0 \rangle, c$	$J_0, кг \cdot м^2$

Таблица 5.2 – Определение момента инерции тела правильной формы

$t, c$	$n$	$T, c$	$\langle T \rangle, c$	$J_{н}, кг \cdot м^2$	$J_{т}, кг \cdot м^2$	$J_{теор}, кг \cdot м^2$

### Контрольные вопросы

- 1 Что называется абсолютно твердым телом?
- 2 Выведите формулы для вычисления моментов инерции тел правильной геометрической формы (цилиндр, стержень).
- 3 Выведите рабочую формулу для определения момента инерции методом трифилярного подвеса.

## Лабораторная работа № 6

### Определение момента инерции твердого тела

*Оборудование:* диск с отверстиями, штатив, секундомер.

#### *Краткая теория*

Стальной диск массой  $m$  (рисунок 6.1) может совершать колебания вокруг оси, закрепленной на штативе и проходящей через одно из трех отверстий в диске выше его центра тяжести в точке  $C$ . Расстояние от оси до центра тяжести диска равно  $l$ . При отклонении диска от положения равновесия на угол  $\varphi$  возникает вращательный момент  $\vec{M}$ , возвращающий диск в положение равновесия, т. е. диск представляет собой физический маятник.

Величина момента возвращающей силы  $F = mg$  равна:

$$M = Fr = -mgl \sin \varphi \quad (6.1)$$

Основное уравнение динамики вращательного движения имеет вид:

$$M = J\varepsilon \quad (6.2)$$

где  $J$  – момент инерции тела,  $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$  – угловое ускорение. Подставив (6.1) в (6.2) получаем:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi \quad (6.3)$$

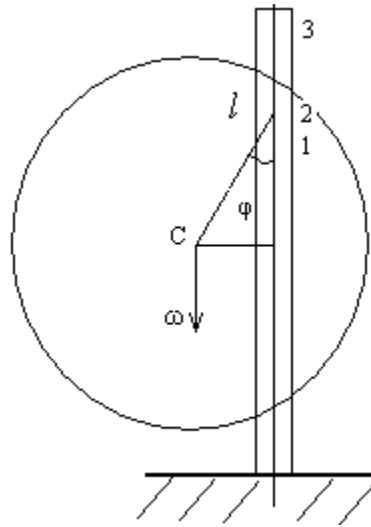


Рисунок 6.1 – Установка для определения момента импульса стального диска

В случае отклонения маятника на малые углы  $\varphi \leq 10^\circ$  из (6.3) получаем уравнение:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (6.4)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}$ . Уравнение (6.4) имеет решения вида:

$$\varphi = \begin{cases} A \sin \omega_0 t \\ A \cos \omega_0 t \end{cases} \quad (6.5)$$

где  $A$  – амплитуда,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$  – угловая частота колебаний. Период колебаний физического маятника определяется выражением:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} \quad (6.6)$$

Зная период  $T$  из (6.6) находим момент инерции диска относительно  $i$ -ой оси подвеса

$$J_i = T_i^2 \frac{mgl_i}{4\pi^2} \quad (6.7)$$

Момент инерции диска относительно центра симметрии т. С, совпадающего с центром масс, может быть найден с помощью интеграла:

$$J_c = \int_0^m x^2 dm = \rho \int_0^V x^2 dV \quad (6.8)$$

где  $x$  – координата,  $\rho$  – плотность,  $V = \pi R^2 b$  – объем,  $R$  – радиус,  $b$  – толщина диска. Разобьем диск на кольцевые слои толщиной  $dx$ , находящиеся на расстоянии  $x$  от оси. Тогда,  $dV = 2\pi b x dx$  и из (6.8) получаем

$$J_c = 2\pi b \rho \int_0^R x^3 dx = 2\pi b \rho \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2} \quad (6.9)$$

т. к.  $m = \rho V = \rho \pi R^2 b$

Согласно теореме Штейнера момент инерции тела относительно оси, не проходящей через центр масс, равен:

$$J = J_c + ml^2 \quad (6.10)$$

где  $l$  – расстояние от оси до центра масс.

*Опыт*

Найти момент инерции диска относительно двух осей  $l_1, 2$  подвеса диска, измеряя время  $t_i$  качаний  $N_i$  диска с помощью секундомера и вычисляя период качаний по формуле:

$$T_i = \frac{t_i}{N_i}$$

Число качаний на первой оси брать  $N_1=8$ , на второй  $N_2=6$ . Измерение  $T$  производить по 5 раз. Для каждого значения  $T_i$  вычислить  $J_i$  по (6.7), а затем найти  $J$  из (6.10) в трех случаях. Экспериментальные результаты сравнить с теоретическим значением. Данные занести в таблицу, которую необходимо составить самостоятельно.

### **Контрольные вопросы**

- 1 Угловая скорость, угловое ускорение.
- 2 Момент силы.
- 3 Момент инерции.
- 4 Основное уравнение динамики вращательного движения.
- 5 Теорема Штейнера.

## Лабораторная работа № 7

### **Определение ускорения свободного падения тел**

*Цель работы:* измерить ускорение свободного падения тел.

*Оборудование:* вертикальная штанга со шкалой для измерения высоты падения тела, электронный секундомер, фотодатчик запуска и остановки секундомера, стальной шарик.

#### *Краткая теория*

Опыт показывает, что все тела, поднятые над поверхностью Земли и предоставленные самим себе, начинают двигаться к Земле с ускорением. Наличие ускорения означает, что на тела вблизи Земли действует сила. Эта сила направлена перпендикулярно средней поверхности Земли.

Сила, действующая на все тела вблизи поверхности Земли, направленная перпендикулярно средней поверхности Земли, называется *силой тяжести*.

*Замечание.* Средняя поверхность Земли не учитывает неровности и близка к сфероиду.

Движение тел только под действием силы тяжести называется *свободным падением тел*.

Эксперименты Галилео Галилея по изучению падения тел, опыты с колбой Ньютона, а также повседневный опыт показывает, что ускорение, которое приобретают тела в свободном падении, одинаково для всех тел. Согласно второму закону Ньютона:

$$\frac{F_1}{m_1} = \frac{F_2}{m_2} = \dots = \frac{F_n}{m_n} \quad (7.1)$$

Ускорение, которое приобретают тела в свободном падении, называется *ускорением свободного падения*.

Обозначается ускорение свободного падения  $g$ . Так что:

$$\frac{F_1}{m_1} = \frac{F_2}{m_2} = \dots = \frac{F_n}{m_n} = g. \quad (7.2)$$

Отсюда можно заключить, что для любого тела:

$$\frac{F_{\text{тяж}}}{m} = g. \quad (7.3)$$

Из этого равенства можно найти силу тяжести:

$$F_{\text{тяж}} = mg. \quad (7.4)$$

Поскольку ускорение свободного падения направлено так же, как сила тяжести, связь между ними можно записать в векторной форме.

$$\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g}. \quad (7.5)$$

Сила тяжести обусловлена, прежде всего, силой гравитационного взаимодействия между Землёй и телами на ней:

$$\vec{F}_{\text{тяж}} = -\gamma \frac{Mm}{R^3} \vec{R}, \quad (7.6)$$

где  $\vec{R}$  – радиус вектор тела относительно центра Земли,

$M, m$  – масса Земли и тела, соответственно,

$\gamma$  – гравитационная постоянная, равная  $6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$ .

Эта сила носит название гравитационной силы или силы тяготения.

Кроме силы тяготения, на тела вблизи поверхности Земли действуют силы инерции, обусловленные неинерциальностью систем отсчёта, связанных с Землёй. Земля участвует в суточном вращении, это и обуславливает неинерциальность связанных с ней систем отсчёта. В частности, на все тела, покоящиеся относительно Земли, действует центробежная сила.

$$\vec{F}_{\text{ц.б.}} = -m\omega^2 \vec{r}, \quad (7.7)$$

где  $\vec{r}$  – вектор от оси вращения Земли к данной точке поверхности и перпендикулярный оси вращения,

$\omega$  – угловая скорость суточного вращения Земли.

Модуль вектора  $\vec{r}$  можно выразить через широту местности  $\varphi$  и радиус Земли:

$$r = R \cos \varphi \quad (7.8)$$

и найти с его помощью модуль центробежной силы:

$$F_{ц.б.} = m\omega^2 R \cos \varphi \quad (7.9)$$

Отсюда следует, что центробежная сила зависит от широты местности. На экваторе она самая большая, на полюсах равна нулю. Оценим её величину на экваторе для тела массой 1 кг. Угловую скорость суточного вращения земли можно оценить из того факта, что за 24 часа Земля поворачивается на  $2\pi$  радиан. Подставим все необходимые данные в (7.9):

$$F_{ц.б.} = \left( \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \right)^2 6.4 \cdot 10^6 = (7.27 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6.4 \cdot 10^6 = 3.38 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \quad (7.10)$$

Как видно из этого выражения, центробежная сила на Земле достаточно мала, и существенно не влияет на механические явления на поверхности Земли.

Если тело покоится относительно Земли, то никаких других сил инерции на него не действует. Таким образом, сила тяжести покоящегося относительно Земли тела равна сумме двух сил: силы тяготения и центробежной силы:

$$\vec{F}_{\text{тяж}} = \vec{F}_{\text{тяг}} + \vec{F}_{ц.б.} = -\gamma \frac{Mm}{R^3} \vec{R} - m\omega^2 \vec{r} \quad (7.11)$$

Несмотря на то, что центробежная сила мала по сравнению с силой тяготения, её наличие приводит к тому, что сила тяжести не направлена к центру Земли, как это показано на рисунке 7.1.

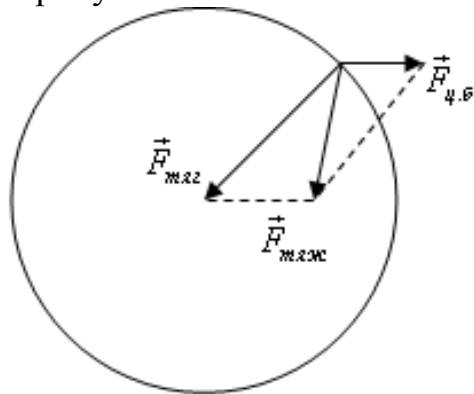


Рисунок 7.1 – Направление силы тяжести для Земли

На этом рисунке центробежная сила увеличена по сравнению с действительной её величиной.

Поскольку силы инерции на Земле достаточно малы, ими можно пренебречь по сравнению с силой тяготения при расчётах, в которых не требуется особая точность. Можно, таким образом, считать, что:

$$\vec{F}_{\text{тяж}} = -\gamma \frac{Mm}{R^3} \vec{R} = m\vec{g} \quad (7.12)$$

Откуда можно найти ускорение свободного падения:

$$g = \gamma \frac{M}{R^2} . \quad (7.13)$$

Радиус Земли достаточно большой, поэтому при малых удалениях от поверхности Земли можно считать, что ускорение свободного падения не меняется. Неизменным можно считать и вектор ускорения свободного падения при малых перемещениях по поверхности Земли. По этой причине вблизи поверхности Земли и на достаточно малых площадях её поверхности поле силы тяжести можно считать однородным, а свободное падение тел – равнопеременным.

#### *Экспериментальная установка*

Установка по измерению ускорения свободного падения тел представляет собой штангу с мерными делениями, прикрученную к стене. На верхнем конце штанги прикреплен электромагнит, предназначенный для удержания стального шарика в начале эксперимента. На некотором расстоянии от магнита установлен первый фотодатчик, электрически соединённый с секундомером. Когда шарик проходит мимо первого фотодатчика, секундомер запускается. На некотором расстоянии от первого фотодатчика расположен второй фотодатчик, также соединённый с секундомером. Когда шарик пролетает мимо второго фотодатчика, секундомер останавливается. Таким образом, время, которое показывает секундомер, представляет собой время движения шарика от первого фотодатчика до второго. Электромагнит управляется секундомером. В начале эксперимента он включен и удерживает стальной шарик в неподвижном состоянии. После нажатия кнопки «Пуск» на секундомере электромагнит отключается, шарик начинает падать. По времени прохождения шарика между двумя фотодатчиками и определяется ускорение свободного падения.

Обозначим время движения шарика от начальной точки до первого фотодатчика  $t_1$ , высоту магнита над первым фотодатчиком –  $h_1$ . Время движения шарика до второго фотодатчика обозначим  $t_2$ , высоту магнита над вторым фотодатчиком –  $h_2$

Тогда можно записать следующие кинематические уравнения:

$$h_1 = g \frac{t_1^2}{2}, h_2 = g \frac{t_2^2}{2} . \quad (7.14)$$

В этих формулах три неизвестных:  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $g$ . При этом уравнений только два. Однако можно использовать ещё тот факт, что разность времени полёта шарика до второго и первого фотодатчиков равна показаниям секундомера  $t$ :

$$t_2 - t_1 = t . \quad (7.15)$$

Выразим из первого уравнения системы (7.14) время  $t_1$  из второго –  $t_2$  и подставим в (7.15):

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}, t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}. \quad (7.16)$$

$$\sqrt{\frac{2h_2}{g}} - \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = t. \quad (7.17)$$

В результате получаем одно уравнение с одним неизвестным. Из него легко найти ускорение свободного падения:

$$g = 2 \frac{(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1})^2}{t^2}. \quad (7.18)$$

С помощью этой формулы и определяется ускорение свободного падения в данной лабораторной работе. Поскольку в этой формуле используется разность двух величин, отличие которых не слишком велико, результат подвержен погрешности. Чтобы уменьшить погрешность, необходимо, во-первых, выполнять минимум три измерения с одними и теми же высотами падения шарика, во-вторых, выполнять измерения для разных высот второго фотодатчика, его высота может меняться, как предусмотрено конструкцией, в-третьих, измерения проводить по нескольким высотам для второго фотодатчика и результат усреднять.

#### *Ход работы*

- 1 Установить второй фотодатчик на расстоянии 1,20 м от магнита.
- 2 Поднести шарик к магниту, он должен зафиксироваться, если магнит включен. Если шарик не фиксируется, посмотрите, остановлен ли секундомер.
- 3 Произведите сброс секундомера.
- 4 Нажмите кнопку «Пуск».
- 5 Показания секундомера занесите в таблицу 7.1

Таблица 7.1 – Экспериментальные данные

Номер эксперимента	$h_2$	$t$

Высота  $h_1$  в эксперименте не меняется. Её можно записать отдельно.

6 Рассчитать погрешность в измерении ускорения свободного падения как среднее значение абсолютной величины отклонения результатов вычисления ускорения от его среднего значения.

#### *Виртуальная модель работы*

Указания к работе: необходимо открыть архив «ускорение св. падения» (файл прилагается), далее открыть файл «gg.exe», нажать «эксперимент».

Ход работы:

- 1 Установите отметку на 0.1м.



- 2 Определите время падения шарика («пуск», «стоп»). Полученное в опыте время разделить на коэффициент  $k=4$ .
- 3 Выполнить опыт для высот 0.2 м, 0.3 м, 0.4 м, 0.5 м, 0.6, 0.7 м, 0.9 м, 1.0 м, 1.2 м.
- 4 Данные занести в таблицу 7.2
- 5 Построить график зависимости  $t(h)$ .
- 6 Найти значения  $t^2$  для каждого опыта, занести в таблицу.
- 7 Построить график зависимости  $h$  от  $t^2$ .
- 8 Из графика найти ускорение свободного падения: *Удвоенная величина тангенса угла наклона прямой к оси  $t^2$  даст значение ускорения свободного падения.  $g = 2tg\alpha$ .*
- 9 Сделать вывод.

Таблица 7.2 – Экспериментальные данные

№	h, м	$t' = t/4, c$	$(t')^2, c^2$	g, м/с <sup>2</sup>
1	0,1			
2	0,2			
3	0,3			
4	0,4			
5	0,5			
6	0,6			
7	0,7			
8	0,9			
9	1,0			
10	1,2			

### Контрольные вопросы

- 1 Природа силы тяжести. Как направлена сила тяжести по отношению к направлению на центр Земли?
- 2 Что называется свободным падением тел? Что такое ускорение свободного падения?
- 3 Рассчитать для широты Кургана (55 градусов) центробежную силу для тела массой 1 кг.
- 4 Влияет ли масса шарика на точность в определении ускорения свободного падения? Если да, то каким образом?
- 5 Как объяснить тот факт, что пушинка падает медленнее, чем дробина, если ускорение свободного падения для них должно быть одинаковым? Рассказать опыт с колбой Ньютона.

## Лабораторная работа № 8

### Определение ускорения силы тяжести с помощью математического маятника

*Цель работы:* определить ускорение силы тяжести с помощью математического маятника.

*Оборудование:* математический маятник, секундомер, штангенциркуль.

#### *Краткая теория*

Наиболее распространенным и точным методом определения ускорения силы тяжести является метод, основанный на измерении периода колебаний физического или математического маятника. В нашей работе для этой цели используется математический маятник.

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити (рисунок 8.1). Им может служить тяжелый небольшой шарик, подвешенный на длинной тонкой нити. Если длина нити  $l$  много больше радиуса шарика  $R$ , то шарик можно считать материальной точкой, а если шарик тяжел, т. е. его масса  $m$  много больше массы нити, то нить можно считать невесомой.

Период колебания математического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (8.1)$$

Из формулы (8.1) выразим ускорение силы тяжести:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \quad (8.2)$$

Измерив опытным путем длину математического маятника и период его колебаний, по формуле (8.2) можно рассчитать ускорение силы тяжести.

#### *Ход работы*

С помощью штангенциркуля определите радиус шарика  $r$ , длину нити  $l'$ , определите длину математического маятника  $l=l'+r$  (расстояние от точки подвеса до центра шарика). Значения  $r$ ,  $l'$  и  $l$  запишите перед таблицей 8.1.

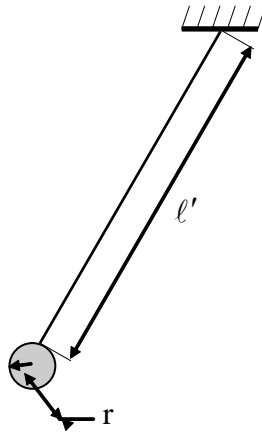


Рисунок 8.1 – Математический маятник

Приведите маятник в колебание, отклонив его на небольшой угол. В момент прохождения им одного из крайних положений включите секундомер и определите  $t$  – время 50 колебаний. Поделив время на число полных колебаний, определите период колебаний маятника  $T=t/50$ .

По известному периоду  $T$  и длине маятника  $l$ , пользуясь формулой (8.2), подсчитайте ускорение силы тяжести  $g$ .

Опыт, описанный в пункте 2, проделайте 5–7 раз и все измерения занесите в первые четыре столбца таблицы 8.1.

Таблица 8.1 – Определение ускорения свободного падения

Радиус шарика  $r =$

Длина нити  $l =$

Длина математического маятника  $l=l'+r =$

№	Число колебаний	Время колебаний	Период колебаний	$\bar{T}$	$\bar{g}$	$\Delta T$	$\Delta g$
1							
2							
3							

Из формулы (8.2), воспользовавшись правилами вывода погрешности косвенных измерений, найдем погрешность  $\frac{\Delta g}{\bar{g}}$ :

$$\frac{\Delta g}{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T}{\bar{T}}\right)^2}. \quad (8.3)$$

Итак, погрешность  $\Delta g$  определяется погрешностями измерения  $\Delta l$  и  $\Delta T$ . Погрешность  $\Delta T$  определяется из измерений периода стандартным образом нахождения погрешности прямого измерения.

Порядок  $\Delta l$  оцените сами. Найдите из формулы (8.3)  $\Delta g$ .

Окончательный ответ запишите в виде:  $g = \bar{g} \pm \Delta g$ .

## Контрольные вопросы

- 1 Что называется математическим маятником?
- 2 Влияет ли масса маятника на точность измерения?
- 3 Как зависит период колебаний одного и того же математического маятника от широты местности?
- 4 За счет чего возникают ошибки при измерении ускорения свободного падения данным способом?
- 5 Какие в данной работе проводятся прямые измерения и какие косвенные?
- 6 Можно ли измерить ускорение свободного падения, если вместо математического маятника использовать пружинный?

## Лабораторная работа № 9

### Изучение гармонических колебаний

*Цель работы:* исследовать колебания пружинного и математического маятника.

*Оборудование:* пружинный и математический маятник, секундомер, измерительная линейка, набор грузов.

#### *Краткая теория*

Периодическим движением материальных тел называется такое их движение, при котором их положение в пространстве повторяется через равные промежутки времени, называемые периодами периодического движения.

Период обозначается  $T$  и измеряется в секундах.

Определение. Величина, обратная периоду, называется циклической частотой или просто частотой.

Обозначается  $\nu$  и по определению равна:

$$\nu = 1/T . \quad (9.1)$$

Данная величина называется циклической по той причине, что показывает, сколько полных циклов периодического движения совершается в единицу времени.

Измеряется частота в Герцах (Гц).

$$1 \text{ Гц} = 1/с . \quad (9.2)$$

Траекторией движения точек материальных тел в периодическом движении является некоторая замкнутая кривая линия.

Среди периодических движений особую роль играют колебания, которые выделяются из всех периодических движений тем, что траектория движения точек материальных тел в них есть отрезок какой-либо кривой, по которой они движутся в прямом и обратном направлении.

Колебанием материальных тел называется такое их периодическое движение, при котором траектории всех точек тел в прямом и обратном направлении совпадают.

Материальное тело, способное совершать колебания, называется маятником.

Положение маятника, в котором он может оставаться в покое сколько угодно долго, называется положением равновесия.

Как следует из определения положения равновесия, силы, действующие на маятник в этом положении, скомпенсированы.

Пружинным маятником называется материальное тело, связанное пружиной с некоторой неподвижной опорой.

При отклонении маятника от положения равновесия, он начнёт совершать колебания.

Согласно второму закону Ньютона:

$$\vec{a} = \vec{F} / m, \quad (9.3)$$

где  $\vec{a}$  – ускорение тела,

$m$  – его масса,

$\vec{F}$  – сила упругости пружины, действующая на маятник. Она направлена всегда в сторону положения равновесия и пропорционально по величине смещению маятника.

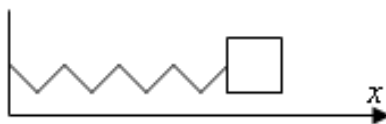


Рисунок 9.1 – Пружинный маятник

Направим ось  $Ox$  вдоль оси пружины в сторону её удлинения, как показано на рисунке 9.1. Начало координат совместим с положением равновесия маятника. Спроецируем уравнение (9.3) на выбранную ось

$$a_x = F_x / m. \quad (9.4)$$

Будем считать, что, кроме упругих сил, на маятник больше никаких сил не действует. Тогда:

$$a_x = F_x / m = F_{упр} / m = -kx / m. \quad (9.5)$$

Поскольку ускорение есть вторая производная по времени от координаты маятника, то:

$$\ddot{x} = -kx / m. \quad (9.6)$$

Это и есть уравнение движения пружинного маятника. Введём обозначение:

$$\frac{k}{m} = \omega^2. \quad (9.7)$$

Тогда уравнение (9.6) можно будет записать следующим образом:

$$\ddot{x} = -\omega^2 . \quad (9.8)$$

Это уравнение называется также уравнением упругих колебаний.

Иногда движение тел под действием сил, природа которых отлична от природы упругих сил, подчиняются уравнению, подобному (9.8) для упругих колебаний. В этом случае силы называются квазиупругими. Таковым является движение так называемого математического маятника.

Математическим маятником называется математическая точка, подвешенная на тонкой невесомой нерастяжимой нити в поле силы тяжести.

На математический маятник в поле силы тяжести действует только две силы: сила натяжения нити и сила тяжести (рисунок 9.2). Для установления уравнения движения математического маятника воспользуемся теоремой об изменении момента импульса материальной точки:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} . \quad (9.9)$$

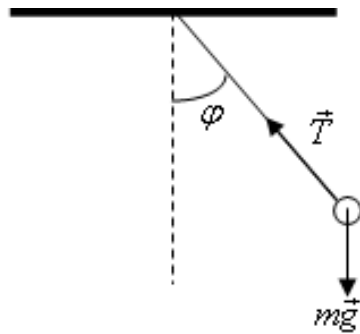


Рисунок 9.2 – Математический маятник

Начало системы отсчёта поместим в точку подвеса нити, ось  $Oz$  направим к наблюдателю от рисунка и спроецируем равенство (9.9) на эту ось:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z . \quad (9.10)$$

При этом имеем в виду, что момент силы натяжения нити будет равен нулю, так что:

$$M_z = -mgl \sin \varphi , \quad (9.11)$$

где  $l$  – длина нити.

$$L_z = I\omega_z = ml^2 \frac{d\varphi}{dt} , \quad (9.12)$$

Подставим это в уравнение (9.10):

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi . \quad (9.13)$$

Сократив на массу и длину нити:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi, \quad (9.14)$$

получим уравнение движения математического маятника. Оно справедливо для любых углов отклонения маятника. Однако часто его используют для описания так называемых малых колебаний, когда отклонения маятника от вертикали невелико. В этом случае согласно первому замечательному пределу синус и его аргумент эквивалентны:

$$\sin \varphi \approx \varphi, \quad (9.15)$$

поэтому

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \varphi. \quad (9.16)$$

Это есть уравнение малых колебаний математического маятника. Как видно из этого уравнения, оно по форме совпадает с уравнением упругих колебаний, если обозначить:

$$\omega^2 = \frac{g}{l}. \quad (9.17)$$

*Решение уравнения упругих колебаний*

Движение, которое описывает уравнение (9.16), как было отмечено выше, является периодическим движением. Значит, его решением должна быть периодическая функция. Самыми простыми периодическими функциями являются тригонометрические функции синуса и косинуса. Попробуем подобрать функцию косинуса так, чтобы она удовлетворяла уравнению (9.16). Иначе говоря, будем искать решение уравнения упругих колебаний в виде:

$$x = A_1 \cos \alpha t. \quad (9.18)$$

Чтобы проверить, удовлетворяет ли данная функция уравнению (9.16), нужно найти вторую производную от этой функции:

$$\dot{x} = -\alpha A_1 \sin \alpha t, \quad \ddot{x} = -\alpha^2 A_1 \cos \alpha t \quad (9.19)$$

и подставить в уравнение:

$$-\alpha^2 A_1 \cos \alpha t = -\omega^2 A_1 \cos \alpha t. \quad (9.20)$$

Это равенство должно быть тождеством, если функция (9.18) его решение. Поэтому:

$$\alpha^2 = \omega^2 \Rightarrow \alpha = \omega. \quad (9.21)$$

Таким образом, решением уравнения упругих колебаний может быть функция:

$$x = A_1 \cos \omega t. \quad (9.22)$$

Аналогично можно показать, что решением уравнения упругих колебаний может быть функция:

$$x = A_2 \sin \omega t. \quad (9.23)$$

Поэтому в общем случае или, как говорят, общим решением уравнения (9.16) будет составная функция:

$$x = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t. \quad (9.24)$$

Функции  $\cos \omega t$ ,  $\sin \omega t$  называют гармоническими функциями, поэтому и колебания, которые они описывают, называют гармоническими колебаниями.

Функцию (9.24) можно записать одной тригонометрической функцией, если воспользоваться формулами тригонометрических тождеств. А именно:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (9.25)$$

Сюда входит также две константы  $A$  и  $\varphi_0$ , которые с константами (9.24) связаны простыми соотношениями:

$$A_1 = A \cos \varphi_0, A_2 = A \sin \varphi_0. \quad (9.26)$$

В выражении (9.26) константа  $A$  называется амплитудой колебания. Она показывает, каково максимальное отклонение материальной точки от положения равновесия в процессе колебания.

Величина

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \quad (9.27)$$

называется фазой колебания материальной точки. Она показывает, в какой стадии колебания находится в данный момент времени колеблющаяся точка: в положении равновесия, в стадии максимального отклонения в положительную сторону, в стадии максимального отклонения в отрицательную сторону и т. п. Измеряется фаза колебания в единицах угла, в радианах.

Параметр  $\varphi_0$  называется начальной фазой колебания. Он показывает, какова была фаза колебания в начальный момент времени.

Сама тригонометрическая функция  $\cos(\omega t + \varphi_0)$  называется фазовым множителем. Он показывает, какую часть от максимального составляет в данный момент времени отклонение точки от положения равновесия.

Найдём скорость изменения фазы колебания. Для этого найдём производную от фазы (9.27) по времени:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega. \quad (9.28)$$

Отсюда следует, что параметр  $\omega$ , который был введён ранее при выводе уравнений упругих и квазиупругих колебаний для различных случаев движения, представляет собой скорость изменения фазы колебания. Она характеризует, насколько быстро совершаются колебания. Этот параметр называется круговой частотой. Это название связано со следующим обстоятельством. Если материальная точка движется по окружности равномерно со скоростью  $\omega$ , то её проекция на ось, проходящую в плоскости окружности через её центр, совершает гармонические колебания, и быстрота изменения фазы этих колебаний совпадает с угловой скоростью движения точки по окружности.



Частота циклическая и частота круговая описывают одни и те же колебания, значит, между ними должна быть связь. Если время колебания увеличится на один период  $T$ , то фаза колебания должна увеличиться на один период косинуса, т. е. на  $2\pi$  радиан

$$\omega(t+T) + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0 + 2\pi. \quad (9.29)$$

Отсюда следует, что

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (9.30)$$

Используя связь между периодом и циклической частотой, находим:

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (9.31)$$

Через круговую частоту период выражается следующим образом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (9.32)$$

С помощью этой формулы можно найти периоды различных колебаний. Период пружинного маятника можно найти из формулы (9.7):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (9.33)$$

Для математического маятника из (9.17):

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (9.34)$$

Постоянные величины  $A$  и  $\varphi_0$  находятся из начальных условий.

Пусть в начальный момент времени  $t=0$ , отклонение материальной точки от положения равновесия было равно  $x_0$ , а скорость была равна  $V_{x0}$ . Подставив это в формулу (9.25) и формулу производной, получим два уравнения:

$$\begin{aligned} x_0 &= A \cos \varphi_0; \\ V_{x0} &= -\omega A \sin \varphi_0. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Решая эти два уравнения совместно, найдём:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_0 &= \frac{V_{x0}}{x_0 \omega}; \\ A &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{V_{x0}}{\omega}\right)^2}. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Возведём формулу для периода пружинного маятника (9.33) в квадрат

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}. \quad (9.37)$$

Отсюда видно, что квадрат периода линейно зависит от массы пружинного маятника. Если построить график этой зависимости в координатах  $(m, T^2)$ ,

то получится прямая линия. Причём коэффициент наклона этой прямой, согласно формуле (9.37), должен быть равен:

$$K = \frac{4\pi^2}{k}. \quad (9.38)$$

Таким образом, построив график зависимости (9.37), по коэффициенту его наклона можно найти коэффициент жёсткости пружины.

Аналогично для математического маятника график, построенный в координатах  $(l, T^2)$ , будет прямой линией. Коэффициент наклона этой прямой будет равен:

$$K = \frac{4\pi^2}{g}. \quad (9.39)$$

И значит, из графика зависимости (9.34) в координатах  $(l, T^2)$  можно найти ускорение свободного падения.

#### *Экспериментальная установка*

Экспериментальная установка представляет собой штатив, в котором закреплена пружина с подвешенным грузом. Массу груза можно менять путём подвешивания дополнительных грузов. Это позволяет проверить зависимость периода колебаний пружинного маятника от его массы. Масса отдельных грузов 100 г. Требуется измерить период колебания маятника. Для этого нужно измерить время нескольких полных колебаний. При выполнении эксперимента пружину оттягивают вертикально вниз и отпускают, одновременно включая секундомер. Когда груз поднимется вверх и вернётся в первоначальное нижнее положение, он совершит одно полное колебание. Необходимо дождаться, когда груз совершит 20 полных колебаний и выключить секундомер. Время, показанное секундомером, будет временем двадцати колебаний. Чтоб найти период колебания, нужно время секундомера разделить на 20.

Аналогично находится период математического маятника, который представляет собой небольшой стальной шарик, подвешенный на тонкой нити. Длина нити может меняться, это позволяет проверить зависимость периода колебания математического маятника от длины нити.

#### *Ход работы*

1 Подвесить к пружине один груз и найти период колебания такого маятника.

2 Поочередно подвешивая новые грузы, измерить периоды колебаний маятника для нескольких различных масс маятника. Измерения провести для пяти различных грузов.

3 По результатам эксперимента построить график. При этом по вертикальной оси откладывать квадрат периода, а по горизонтальной оси – массу маятника. Показать, что графиком будет прямая линия.

4 Вычислить угловой коэффициент наклона прямой в задании 3 и оценить коэффициент упругости пружины.

5 Подвешивая поочерёдно грузы к пружине, измерить растяжение пружины относительно положения нерастянутой пружины (без грузов). Вычислить коэффициент жёсткости пружины из непосредственных измерений. Для этого силу тяжести подвешенного груза разделить на соответствующее растяжение пружины. Усреднить полученные результаты по экспериментам с несколькими грузами. Показать, что значение коэффициента жёсткости совпадает в пределах погрешности с найденным в задании 4.

6 Найти период колебаний математического маятника.

7 Меняя длину нити и измеряя её каждый раз, найти периоды колебаний маятника для разных длин нити.

8 По результатам эксперимента построить график. При этом по вертикальной оси откладывать квадрат периода, а по горизонтальной оси – длину нити маятника. Показать, что графиком будет прямая линия.

9 Вычислить угловой коэффициент наклона прямой в задании 8 и оценить величину ускорения свободного падения.

### **Контрольные вопросы**

1 Что называется пружинным и математическим маятниками?

2 Уравнение колебаний пружинного и математического маятников.

3 Каким образом по начальным условиям находятся константы в функции колебания маятников?

4 Алгоритм выполнения эксперимента по изучению пружинного маятника.

5 Алгоритм выполнения эксперимента по изучению математического маятника.

## Лабораторная работа № 10

### **Проверка закона сохранения энергии методом баллистического маятника**

*Цель работы:* изучить метод баллистического маятника для определения скорости тела.

*Оборудование:* баллистический маятник, наклонный жёлоб, измерительная линейка.

#### *Краткая теория*

Если с некоторой высоты скатывается шарик, он приобретает линейную и угловую скорость. Для определения этих скоростей необходимо воспользоваться законом изменения полной энергии:

$$\Delta E = A_n, \quad (10.1)$$

где  $E$  – полная энергия шарика.

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + U, \quad (10.2)$$

где  $A_n$  – работа неконсервативных сил, в частности работа сил трения.

Подставим выражение для полной энергии в формулу (10.1):

$$\Delta \left( \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + U \right) = A_n. \quad (10.3)$$

В результате получаем одно уравнение с двумя неизвестными. Для вычисления скоростей нужно воспользоваться связью между ними. Если шарик скатывается без скольжения, то связь между скоростями линейной и угловой выражается формулой:

$$v = \omega R, \quad (10.4)$$

где  $v$  – линейная скорость шарика,

$\omega$  – угловая скорость шарика,

$R$  – радиус шарика.

Подставив это выражение в формулу (10.3), получим уравнение с одним неизвестным:

$$\Delta \left( \frac{mv^2}{2} + \frac{Iv^2}{2R^2} + U \right) = A_n, \quad (10.5)$$

где  $I$  – момент инерции шарика. Он равен:

$$I = \frac{2}{5} mR^2. \quad (10.6)$$

Подставим это выражение в (10.5):

$$\Delta \left( \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{5} + U \right) = A_n \Rightarrow \Delta \left( \frac{7mv^2}{10} + U \right) = A_n. \quad (10.7)$$

Пусть шарик скатывается с высоты  $h$ , тогда изменение потенциальной энергии равно:

$$U = -mgh. \quad (10.8)$$

Если шарик скатывается без начальной скорости, изменение его кинетической энергии равно кинетической энергии в конце движения. Тогда формула (10.7) принимает вид:

$$\frac{7mv^2}{10} - mgh = A_n. \quad (10.9)$$

Из этой формулы и находим скорость движения шарика:

$$v = \sqrt{\frac{10(A_n + mgh)}{7m}}. \quad (10.10)$$

В том случае, когда силы трения ничтожно малы, скорость шарика можно найти по формуле:

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}}. \quad (10.11)$$

Эта формула одновременно может быть способом проверки закона сохранения энергии. Для проверки этой формулы используется баллистический маятник. Схема экспериментальной установки представлена на рисунке 10.1.

После того как шарик скатывается с желоба, он попадает в маятник, сообщая ему некоторый импульс. Поскольку на маятник вместе с шариком в момент их взаимодействия действует сила тяжести, перпендикулярная их общему движению, то суммарный импульс шарика и маятника в горизонтальном направлении не меняется:

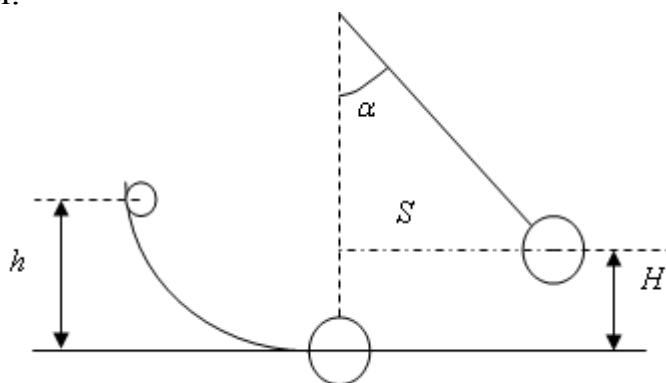


Рисунок 10.1 – Схема установки

$$mv = (M + m)V. \quad (10.12)$$

Из этого выражения находим скорость шарика:

$$v = \frac{(M + m)V}{m}. \quad (10.13)$$

#### *Экспериментальная установка*

Таким образом, для определения скорости шарика после скатывания необходимо найти скорость маятника после попадания в него шарика. Для этого нужно воспользоваться законом изменения энергии (10.1), в котором работа неконсервативных сил равна нулю, закон изменения энергии переходит в закон сохранения энергии:

$$\frac{(m + M)V^2}{2} = (m + M)gH \Rightarrow V = \sqrt{2gH}. \quad (10.14)$$

Однако экспериментально измерить высоту подъёма маятника очень трудно по той причине, что нить подвеса маятника достаточно длинная, а угол отклонения его от вертикали невелик. Поэтому и подъём очень маленький. Однако можно измерить отклонение маятника в горизонтальном положении  $S$ , как показано на рисунке 10.1. Тогда высота подъёма маятника может быть найдена по формуле:

$$H = l - l \cos \alpha \quad (10.15)$$

Для нахождения угла отклонения измеряется горизонтальное смещение маятника:

$$\sin \alpha = \frac{S}{l} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{S}{l}\right)^2}. \quad (10.16)$$

Поскольку смещение маятника в горизонтальном направлении гораздо меньше длины нити, формулу (10.16) можно заменить приближённой формулой:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{S}{l}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{S}{l}\right)^2. \quad (10.17)$$

После этого найдём формулу расчёта высоты подъёма маятника из (10.15):

$$H = l - l \left[ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{S}{l}\right)^2 \right] = \frac{S^2}{2l}. \quad (10.18)$$

И наконец, можно найти скорость маятника после попадания в него шарика по формуле (10.14):

$$V = S \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (10.19)$$

а из неё и формулу скорости шарика из (10.13):

$$v = \frac{M + m}{m} S \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (10.20)$$

Скорость шарика, найденную по формуле (10.11), можно считать теоретической, поскольку она найдена только исходя из теоретических соображений. Скорость, определяемая по формуле (10.20), есть экспериментальная скорость. Совпадение этих величин будет подтверждением закона сохранения механической энергии при отсутствии трения. Однако трения полностью избежать нельзя, поэтому скорость найденная экспериментально, должна быть несколько меньше скорости теоретической.

### *Ход работы*

1 Установить на жёлоб стальной шарик и зафиксировать его с помощью магнита, включив ток его питания. Измерить высоту шарика относительно срединной линии баллистического маятника. Отметить положение маятника по горизонтальной шкале. При этом необходимо тщательно следить за тем, чтоб маятник не двигался. Выключить магнит, запустив тем самым шарик. После попадания шарика в маятник заметить отклонение маятника в горизонтальном направлении по горизонтальной шкале. Выполнить эксперимент три раза.

2 Вычислить экспериментальную скорость шарика по формуле (10.20).

3 Вычислить скорость шарика по формуле (10.11). Сравнить полученное значение с найденным в предыдущем пункте. Объяснить расхождение в результатах.

### Контрольные вопросы

- 1 Сформулировать закон изменения и сохранения полной энергии материальной точки.
- 2 Что называется потенциальным полем, консервативными силами?
- 3 Вывести формулу момента инерции шара.
- 4 Вычислить момент инерции стержня.
- 5 Сформулировать закон сохранения импульса. Каковы условия его выполнения?
- 6 Рассказать алгоритм выполнения заданий лабораторной работы.

## Лабораторная работа № 11

### Определение скорости полёта пули методом баллистического маятника

*Цель работы:* изучить законы сохранения момента импульса и энергии на примере вычисления скорости полёта пули.

*Оборудование:* баллистический маятник, пневматическая винтовка, мерная линейка, секундомер.

#### *Краткая теория*

Для определения скорости равномерного движения тел достаточно измерить расстояние, которое они прошли за измеренное время. Однако если скорость тела достаточно велика (например, скорость пули), то измерить время прохождения телом некоторого расстояния весьма затруднительно. В этом случае для измерения скорости используют баллистический маятник. В данной работе используется крутильно-баллистический маятник. Он представляет собой твёрдое тело, подвешенное на упругой нити и способное вращаться вокруг вертикальной оси. Момент инерции этого тела относительно оси вращения намного больше момента инерции тела, скорость которого измеряется. На некотором расстоянии от оси вращения закрепляется мишень, в которую должна попасть пуля. После попадания пули маятнику передаётся некоторый момент импульса, и маятник приходит во вращательное движение. Однако, благодаря упругости его подвеса, движение маятника является колебанием.

Согласно закону сохранения момента импульса:

$$mvr = (I + mr^2)\omega, \quad (11.1)$$

где  $m$  – масса пули,

$v$  – её скорость,

$r$  – прицельное расстояние – расстояние от прямой, по которой летит пуля до оси вращения,

$I$  – момент инерции маятника,

$\omega$  – его угловая скорость непосредственно сразу после попадания пули.

При этом считается, что момент инерции маятника столь велик, а время взаимодействия пули с маятником столь мало, что за это время маятник не успевает повернуться на заметный угол. Только в этом случае закон сохранения момента импульса может быть записан в виде (11.1). По этой же причине моментом инерции пули в формуле (11.1) можно пренебречь по сравнению с моментом инерции маятника и записать формулу (11.1) в виде:

$$mvr = I\omega. \quad (11.2)$$

Согласно закону сохранения энергии, вся кинетическая энергия пули перейдёт в кинетическую энергию вращательного движения маятника. А кинетическая энергия маятника, если не учитывать трение в подвесах и о воздух, перейдёт в энергию упругой связи маятника:

$$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{k\varphi^2}{2}, \quad (11.3)$$

где  $k$  – коэффициент жёсткости упругих связей (подвесов) маятника,  
 $\varphi$  – максимальный угол закручивания маятника.

В этих двух уравнениях в эксперименте измеряются масса пули, прицельное расстояние и максимальный угол поворота маятника. Однако этого недостаточно, чтобы найти скорость пули. Нужно ещё знать момент инерции самого маятника и коэффициент жёсткости связей. Действительно, исключим из уравнений (11.2) и (11.3) угловую скорость:

$$\omega = \varphi\sqrt{\frac{k}{I}} \Rightarrow mvr = \varphi\sqrt{Ik}. \quad (11.4)$$

Для определения трёх неизвестных:  $v, I, k$ , требуется ещё два уравнения. Эти уравнения записываются, исходя из формулы периода крутильных колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \quad (11.5)$$

Для этого измеряется период крутильных колебаний маятника. Затем к маятнику добавляется дополнительный груз известной массы  $m_1$  и на известном расстоянии  $r_1$ . Тогда момент инерции маятника возрастает, и возрастает период в соответствии с формулой:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I + m_1r_1^2}{k}}. \quad (11.6)$$

Полученных три уравнения достаточно для отыскания скорости пули. А именно, выразим из уравнения (11.5) коэффициент жёсткости:

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2} I \quad (11.7)$$

и подставим в (11.6):



$$T_1 = T \sqrt{\frac{I + m_1 r_1^2}{I}} = T \sqrt{1 + \frac{m_1 r_1^2}{I}}. \quad (11.8)$$

Возведём это уравнение в квадрат:

$$T_1^2 = T^2 + T^2 \frac{m_1 r_1^2}{I}. \quad (11.9)$$

Откуда и находим момент инерции самого маятника:

$$I = T^2 \frac{m_1 r_1^2}{T_1^2 - T^2}. \quad (11.10)$$

Подставим теперь (11.10) и (11.7) в последнее уравнение (11.4):

$$\nu = 2\pi\varphi T \frac{m_1 r_1^2}{mr(T_1^2 - T^2)}. \quad (11.11)$$

Эта формула и является расчётной формулой для данной лабораторной работы.

#### *Экспериментальная установка*

Схема экспериментальной установки показана на рисунке 11.1.

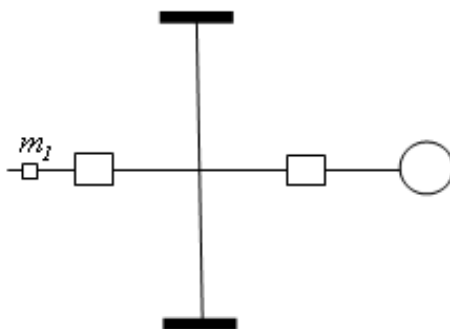


Рисунок 11.1 – Схема установки

При попадании пули в мишень маятник начинает поворачиваться. Чтобы измерить максимальное отклонение маятника, используется круговая шкала, на которую направляется луч света, отражённый от зеркальца, прикреплённого к маятнику на оси вращения. При этом необходимо помнить, что угол поворота отражённого луча в два раза больше угла поворота самого маятника. Поэтому при определении максимального угла повороте маятника нужно угол поворота луча делить на два.

#### *Ход работы*

1 Вручную запустить малые колебания маятника и подсчитать двадцать колебаний, запустив вместе с началом колебаний секундомер. По результатам определить период колебаний маятника  $T$  как результат деления общего времени двадцати колебаний на 20. Эксперимент повторить три раза, для определения погрешности.

2 Повторить эксперимент пункта 1, прикрепив к маятнику дополнительный груз.

3 Снять дополнительный груз, произвести выстрел по мишени, заметить максимальный угол отклонения маятника. При этом нужно иметь в виду, что шкала проградуирована в сантиметрах. Поэтому для определения угла нужно измерить расстояние от оси вращения маятника до шкалы в сантиметрах. Тогда угол будет находиться как отношение величины, отсчитанной по шкале, к расстоянию от оси вращения до шкалы. Этот угол будет выражаться в радианах.

4 По формуле (11.11) вычислить скорость движения пули. Рассчитать погрешность определения скорости пули.

### **Контрольные вопросы**

1 Что называется прицельным расстоянием пули?

2 Сформулировать закон изменения и сохранения момента импульса материальной точки.

3 Сформулировать закон изменения и сохранения энергии тела при вращательном движении.

4 Вывести формулу скорости пули (11.11).

5 Рассказать алгоритм выполнения заданий лабораторной работы.

## Лабораторная работа № 12

### **Определение ускорения свободного падения методом физического маятника**

*Цель работы:* изучить явление колебания физического маятника и определить с его помощью ускорение свободного падения.

*Оборудование:* оборотный маятник, секундомер, измерительная линейка.

#### *Краткая теория*

*Физическим маятником* называется любое твёрдое тело, способное совершать колебания вокруг некоторой оси.

Движение физического маятника подчиняется основному уравнению динамики вращательного движения:

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z, \quad (12.1)$$

где  $I_z$  – момент инерции маятника вокруг оси, вокруг которой он колеблется. Она обозначена  $OZ$ , о чём и информирует индекс справа внизу обозначения;

$\omega_z$  – проекция угловой скорости движения маятника на ту же ось;

$M_z$  – проекция момента сил, действующих на маятник, на ось  $OZ$ .

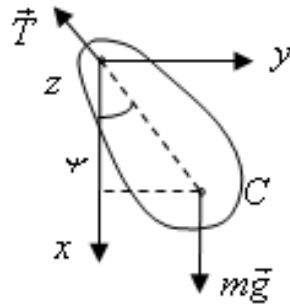


Рисунок 12.1 – Силы, действующие на физический маятник

Для определения проекции момента сил на выбранную ось рассмотрим рисунок 12.1. На этом рисунке ось  $Oz$  направлена к наблюдателю перпендикулярно плоскости рисунка, остальные оси направлены, как показано на рисунке. Буквой  $C$  обозначена точка центра масс маятника. Точка подвеса маятника помещена в начало координат. Расстояние от точки подвеса до центра масс обозначим  $l_c$ . Если не учитывать силу сопротивления воздуха, на маятник действует две силы: сила тяжести и сила реакции опоры в точке подвеса маятника.

По определению момента силы:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}], \quad (12.2)$$

где  $\vec{r}$  – радиус вектор точки приложения силы,

$\vec{F}$  – сила, действующая на маятник.

Для вычисления проекции момента силы на ось  $Oz$  используется представление векторного произведения в виде определителя:

$$[\vec{r}, \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (12.3)$$

Для проецирования векторного произведения на ту или иную ось с помощью этого определителя нужно вычеркнуть верхнюю строку и столбец, соответствующий оси, на которую выполняется проецирование. Оставшийся минор и будет искомой проекцией. В нашем случае нужно вычеркнуть первую строку и последний столбец. Тогда получим:

$$[\vec{r}, \vec{F}]_z = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = xF_y - yF_x. \quad (12.4)$$

Как видно из рисунка 12.1, для силы тяжести:

$$F_y = 0, F_x = mg. \quad (12.5)$$

Так что проекция момента силы тяжести на ось  $Oz$  равна:

$$M_z = -ymg. \quad (12.6)$$

Для силы реакции опоры координаты точки приложения равны нулю (сила реакции опоры приложена к телу в начале координат), поэтому и момент этой силы равен нулю.

Таким образом, из основного уравнения динамики вращательного движения следует:

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = -y mg . \quad (12.7)$$

Как видно из рисунка 12.1:

$$y = l_c \sin \varphi , \quad (12.8)$$

поэтому уравнение (10.7) приобретает вид:

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = -l_c \sin \varphi mg . \quad (12.9)$$

Полученное уравнение содержит две неизвестные функции: проекцию угловой скорости на ось  $OZ$  и угловую координату маятника. Заменив угловую скорость производной от угловой координаты по времени, получим уравнение для одной переменной:

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -l_c \sin \varphi mg . \quad (12.10)$$

Это уравнение и представляет собой уравнение движения физического маятника для произвольных величин углов отклонения маятника от вертикали. Однако чаще это уравнение используют для описания так называемых малых колебаний, когда углы отклонения маятника от вертикали малы. В этом случае согласно следствию из первого замечательного предела синус угла примерно равен самому углу:

$$\sin \varphi \approx \varphi . \quad (12.11)$$

В таком случае уравнение колебания физического маятника примет вид:

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -l_c mg \varphi . \quad (12.12)$$

Это уравнение и называется уравнением малых колебаний физического маятника.

Решением этого уравнения является функция:

$$\varphi = A \cos(\omega t + \alpha) , \quad (12.13)$$

где  $\omega$  – круговая частота колебаний маятника.

Подставив эту функцию в уравнение малых колебаний физического маятника, найдем, что:

$$\omega^2 = \frac{mgl_c}{I_z} . \quad (12.14)$$

Откуда находим саму круговую частоту:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl_c}{I_z}} . \quad (12.15)$$

Пользуясь этой формулой, можно найти период колебания маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgl_c}}. \quad (12.16)$$

В лабораторной работе физический маятник состоит из трёх частей: штанги и двух грузов, способных перемещаться по штанге. В эксперименте используется один из этих грузов. В связи с этим момент инерции маятника можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$I_z = I_0 + I_1, \quad (12.17)$$

где  $I_0$  – момент инерции штанги относительно точки подвеса.

Штанга выполнена в виде стержня, подвешенного в точке, расположенной ближе к одному из концов.  $I_1$  – момент инерции подвижного груза относительно точки подвеса. Поэтому формула периода колебания маятника может быть записана следующим образом:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_1}{mgl_c}}. \quad (12.18)$$

Для определения моментов инерции грузов нужно воспользоваться теоремой Штейнера:

$$I_1 = I_{1c} + m_1 l_1^2, \quad (12.19)$$

где  $l_1$  – расстояние груза до оси колебания,

$m_1$  – масса груза.

С учётом формулы (12.19) формула периода изменится следующим образом:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_{1c} + m_1 l_1^2}{mgl_c}}. \quad (12.20)$$

Для определения ускорения свободного падения нужно измерить период колебания физического маятника для двух положений груза. В результате получаем два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{T_1^2 mgl_{c1}}{4\pi^2} &= I_0 + I_{1c} + m_1 l_1^2; \\ \frac{T_2^2 mgl_{c2}}{4\pi^2} &= I_0 + I_{1c} + m_1 l_2^2, \end{aligned} \quad (12.21)$$

где  $l_1$  и  $l_2$  – расстояния груза до точки подвеса маятника в двух экспериментах.

Вычтя из первого уравнения второе, получим уравнение для определения ускорения свободного падения:

$$\frac{mg}{4\pi^2} (T_1^2 l_{c1} - T_2^2 l_{c2}) = m_1 (l_1^2 - l_2^2). \quad (12.22)$$

Однако тут нужно учесть, что при смещении груза смещается и центр масс всего маятника:

$$l_{c1} = \frac{l_0 m_0 + l_1 m_1}{m}, \quad (12.23)$$

где  $l_0$  – расстояние от точки подвеса до центра масс стержня. (Поскольку стержень однороден, его центр масс находится в его середине);

$m_0$  – масса стержня.

Таким образом, определив в двух экспериментах период колебания маятника и измерив расстояния грузов до точки подвеса, можно найти ускорение свободного падения.

#### *Экспериментальная установка*

Установка представляет собой стержень длиной около метра. На стержне располагаются два груза, которые могут перемещаться по нему. В эксперименте используется один из грузов. Стержень подвешен на кронштейне с помощью стальной призмы и может колебаться в вертикальной плоскости.

Для определения периода колебания маятника работа снабжена электронным секундомером. Для измерения расстояний грузов от точки подвеса маятника в лабораторной работе имеется измерительная линейка.

#### *Ход работы*

- 1 Измерить расстояние  $l_0$  от середины стержня маятника до его точки подвеса.
- 2 Измерить расстояние  $l_1$  от центра груза до точки подвеса маятника.
- 3 Измерить расстояние двадцати колебаний маятника и рассчитать его период колебания  $T_1$ .
- 4 Изменить положение груза на стержне и повторить эксперимент, начиная с пункта 2. Тем самым будут найдены параметры  $l_2$  и  $T_2$ .
- 5 Вычислить по формуле (12.22) ускорение свободного падения.

#### **Контрольные вопросы**

- 1 Что называется физическим маятником?
- 2 Период колебания физического маятника.
- 3 Вывести формулу уравнения колебания физического маятника.
- 4 Рассказать алгоритм выполнения работы.

## Определение скорости звука в воздухе методом резонанса

*Цель работы:* определить скорость звука в воздухе с помощью звукового резонанса.

*Оборудование:* стеклянный цилиндр, соединенный резиновой трубкой с резервуаром, наполненным водой, звуковой генератор.

### *Краткая теория*

Звуковые волны в воздухе представляют собой последовательные сгущения и разрежения частиц воздуха, то есть они являются продольными волнами. Звуковая волна, как и любая волна, распространяясь в какой-либо среде, дойдя до границы раздела с другой средой, частично отражается в первую среду и частично проходит во вторую среду.

При интерференции (сложении) прямой и отраженной волн возникают участки, где колебательное движение отсутствует (узлы), и участки, где колебания могут проходить с наибольшей амплитудой (пучность), то есть образуются стоячие волны.

Для того, чтобы амплитуды колебаний частиц в пучностях были максимальными, необходимо волнам, образующим стоячую волну, приходиться в пучность в одинаковой фазе. В этом случае наблюдается акустический резонанс – резкое увеличение амплитуды колебаний звуковой волны (резкое усиление звука).

В данной работе будет наблюдаться усиление звука, создаваемого динамиком, под влиянием колебаний столба воздуха в трубе.

### *Описание установки и метод измерений*

Длинная стеклянная трубка открыта с одного конца, другой ее конец соединен резиновой трубкой с резервуаром, наполненным водой. Поднимая или опуская резервуар, можно менять уровень воды в цилиндре и тем самым изменять длину воздушного столба. В качестве источника звука используется звуковой генератор с телефоном. Звуковой генератор вырабатывает электромагнитные колебания звуковой частоты, которые телефоном преобразуются в механические (рисунок 13.1).

Звуковая волна, идущая от мембраны телефона, и волна, отраженная от поверхности воды, интерферируют в столбе воздуха над водой. У поверхности воды при отражении всегда образуется узел, у открытого конца трубы – пучность. В зависимости от высоты воздушного столба, а также от частоты колебаний звукового генератора между уровнем воды и верхним концом трубы расположится то или иное число узлов и пучностей стоячих волн. Длина самого короткого столба воздуха, которая резонирует на данной частоте, имеет узел у поверхности воды и пучность у открытого конца трубы. Следовательно, длина этого столба равна четверти длины звуковой волны в воздухе.

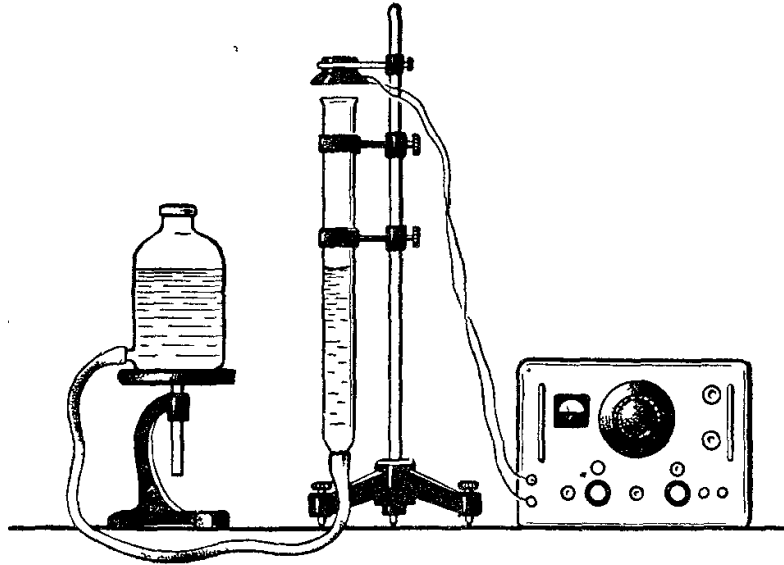


Рисунок 13.1 – Установка для определения скорости звука в воздухе

Если труба достаточно длинная, то при дальнейшем понижении уровня воды в трубке резонанс может повториться, когда высота столба воздуха будет равна  $\frac{3}{4}\lambda$ ,  $\frac{5}{4}\lambda$  или любому нечетному числу  $n$  четвертей длины звуковой волны в воздухе  $n\frac{\lambda}{4}$ .

Положим, что  $l_1$  – длина первого самого короткого столба воздуха, дающего резонанс,  $l_2$  – длина столба, дающего второй резонанс,  $\nu$  – частота колебаний, задаваемая звуковым генератором,  $U$  – скорость звука, при температуре опыта.

Тогда для определения скорости звука можно получить следующую формулу:

$$U = \nu \cdot \frac{2(l_2 - l_1) + 4l_1}{2} = \nu \cdot (l_1 + l_2) \quad (13.1)$$

Задание: определить скорость звука в воздухе

*Ход работы*

Для получения звукового сигнала надо (с разрешения преподавателя или лаборанта) включить генератор в сеть, затем поставить тумблер «сеть» на панель генератора в положение «Вкл», спустя 2–3 мин установить определенную частоту колебаний, указанную преподавателем. Задание и изменение частот производится ручкой, снабженной круглым лимбом, на котором нанесены деления от 20 до 200.

Если множитель частот (рукоятка «частота») стоит в положении \*1, то частота генерируемых колебаний соответствует значению, нанесенному на лимбе. При постановке этой ручки в положение \*10 или \*100 значения частоты,



указанной на лимбе, увеличивается, соответственно, в 10 или 100 раз. Регулировка громкости звука производится поворотом ручки «рег.- вых.- напр.». Остальные ручки управления генератора трогать запрещается.

Поднять уровень воды почти до верхнего края трубки и начать медленно понижать его, отмечая по шкале положение уровня воды в стеклянной трубке, когда звук достигнет максимума.

Отметить первые две точки резкого усиления звука.

Провести такие же измерения для двух других частот и выключить генератор.

По формуле (13.1) вычислить скорость распространения звука для каждого опыта.

Найти среднюю скорость звука в воздухе. Результаты измерений и вычислений записать в таблицу 13.1.

Определить погрешность нахождения скорости звука в воздухе.

Таблица 13.1 – Определение скорости звука в воздухе

№	$\nu$ , Гц	$l_1$ , м	$l_2$ , м	$\nu$ , м/с	$\nu_{cp}$ , м/с
1					
2					
3					

### *Виртуальная модель работы*

Указания к работе: необходимо открыть архив «звук» (файл прилагается), далее открыть файл «zvuk.exe», нажать «эксперимент». Ход работы описан выше.

### **Контрольные вопросы**

- 1 Какие волны называются звуковыми и как их получить? Дать характеристику звуковых волн.
- 2 Как возникают стоячие волны.
- 3 В чем состоит явление резонанса и как оно используется в данной работе.

## Интерференция звуковых волн

Опыт по сложению звуковых волн от двух источников.

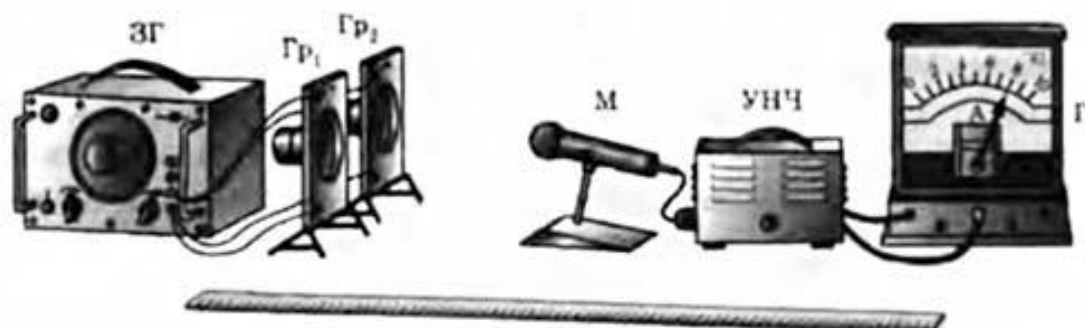


Рисунок 14.1 – Установка

Есть два громкоговорителя, подключенные к звуковому генератору ЗГ. Звук попадает в микрофон М, где преобразуется в электрические колебания. Эти колебания регистрируются гальванометром Г. Генератор настроен на определенную частоту. Громкоговорители установили на фиксированном расстоянии от микрофона. Если каждый громкоговоритель поочередно подключать к генератору, то показания гальванометра будут одинаковы. Значит звуковые волны одинаковой частоты имеют одинаковые амплитуды. Если подключить оба громкоговорителя одновременно, то показания гальванометра увеличатся в два раза. Здесь волны, складываясь, усиливают друг друга. При этом амплитуда колебаний в суммарной звуковой волне увеличивается в 2 раза. Один из громкоговорителей начинают приближать к микрофону. При этом попеременно возникают такие его местоположения, когда показания гальванометра будут равны нулю или они будут максимальны. Когда показания гальванометра равны нулю, значит, волны гасят друг друга. Когда показания гальванометра максимальны, значит, волны усиливают друг друга.

*Разность расстояний  $d$ , пройденных когерентными волнами от источников до одной и той же точки, называется разностью хода двух волн. Если разность хода равна нечетному числу полуволн, то в любой момент времени волны будут приходить в точку М в противоположных фазах и гасить друг друга (амплитуда суммарной волны равна нулю).*

Если же разность хода равна целому числу длин волн, то в любой момент времени волны будут приходить в точку М в одинаковых фазах и усиливать друг друга (амплитуда суммарной волны равна удвоенной амплитуде одной из волн).

Если источники волн колеблются с одной и той же частотой и разность фаз их колебаний не меняется со временем, то такие источники и излучаемые ими волны называются **когерентными**.

Не меняющаяся со временем картина распределения в пространстве максимумов и минимумов амплитуд колебаний называется **интерференционной**

**картиной.** Интерференционная картина может получиться только при сложении волн от когерентных источников.

Явление сложения в пространстве волн, при котором образуется постоянное во времени распределение амплитуд результирующих колебаний, называется **интерференцией.**

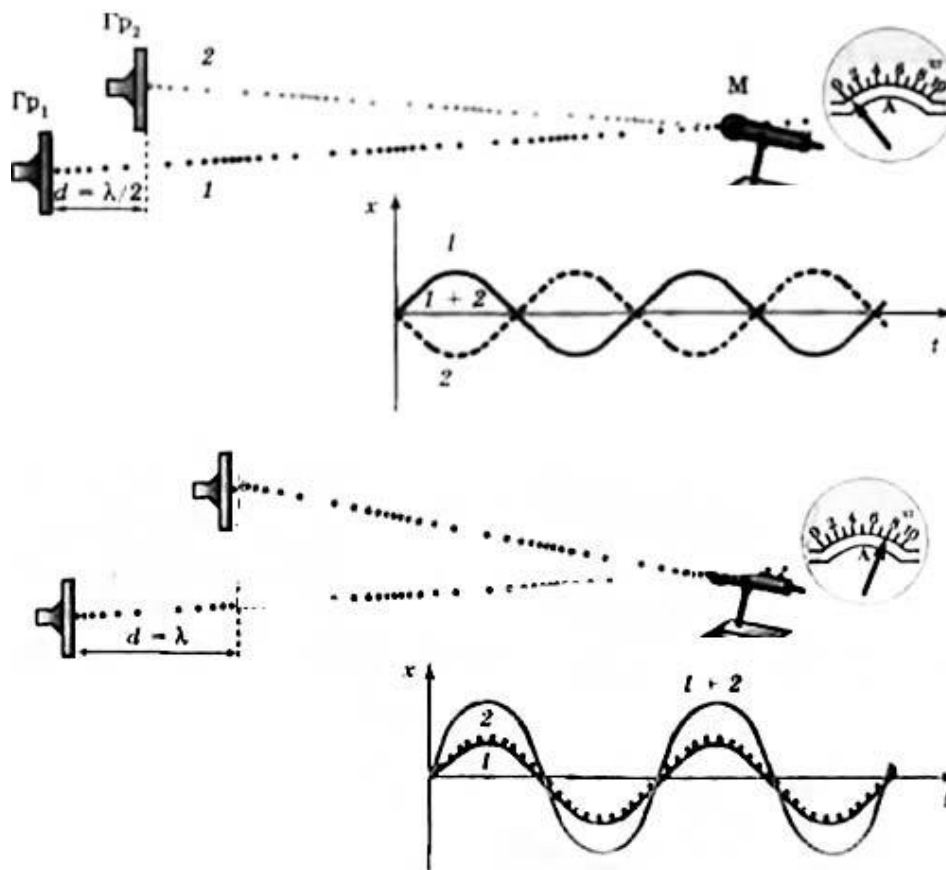


Рисунок 14.2 – Интерференция звуковых волн

Как на слух можно убедиться в образовании интерференционной картины? В том, что при сложении двух когерентных звуковых волн в пространстве образуется интерференционная картина, можно убедиться и на слух. Для этого поворачивают оба излучающих звук громкоговорителя в сторону человека. Прикрыв одно ухо рукой и медленно наклоняясь то влево, то вправо, он будет слышать либо усиление, либо ослабление громкости звука в зависимости от того, в какую зону попадает его открытое ухо – в область интерференционного максимума или минимума.

Явление интерференции характерно для волн любых видов: упругих, электромагнитных, волн на поверхности воды.

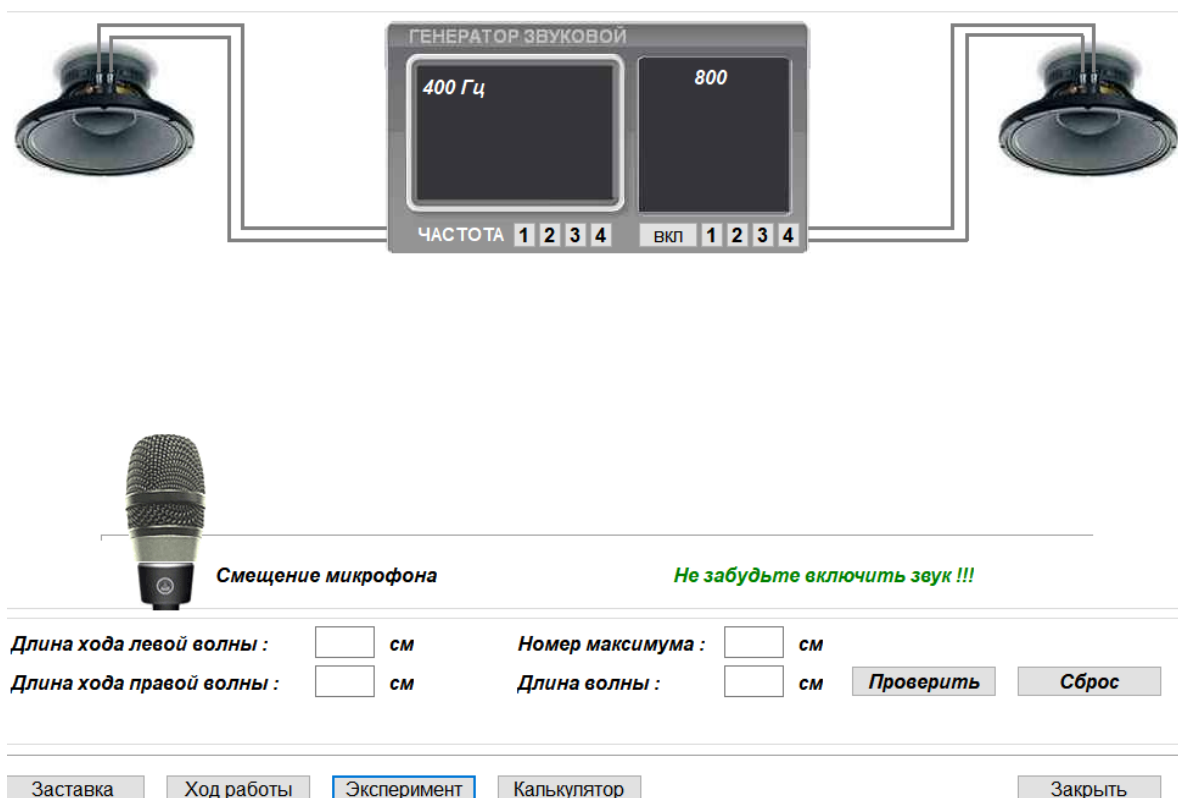


Рисунок 14.3 – Рабочее поле работы

### Ход работы

1 Включить звуковой генератор (нажать «вкл»).

2 Установить частоту 400 Гц

3 Смещая микрофон влево и вправо, найти положение нулевого максимума, он расположен посередине. Если двигать микрофон в сторону от центра, то можно фиксировать максимумы усиления звука (максимумы интерференции). Найдите положение первого максимумов (в ячейке номера максимума появится цифра 1). Записать, чему равны «длина хода левой волны» и «длина хода правой волны».

4 Максимум интерференции можно рассчитать по формуле  $\Delta = \lambda k$ , где  $\Delta$  – это разность хода волн от двух разных источников звука.  $\Delta = d_2 - d_1$ ;  $k$  – это порядок максимума,  $d_1$  и  $d_2$  – это «длина хода левой волны» и «длина хода правой волны».

Рассчитать длину звуковой волны по формуле  $\lambda = \frac{|d_2 - d_1|}{k}$  и занести все значения в таблицу.

5 Двигая микрофон найти положение 3 и 5 максимумов. Рассчитать длину звуковой волны для 3 и 5 максимумов.

6 Рассчитать теоретическое значение длины звуковой волны по формуле  $\lambda = \frac{v}{\nu}$ , где  $v = 330 \text{ м/с}$  это скорость звука в воздухе,  $\nu$  – это частота звука (частота которую задаем на генераторе).

7 Установить частоту звукового генератора 800 Гц (нажать на левой части генератора на цифру «3»). Включить звук. Установить микрофон в положение центрального максимума. Двигая микрофон, определить положения третьего, седьмого и двенадцатого максимумов. Записать в таблицу значения «длина хода левой волны» и «длина хода правой волны» для данных максимумов. Рассчитать длины звуковых волн для этих максимумов по формуле  $\lambda = \frac{|d_2 - d_1|}{k}$ . Рассчитать теоретическое значение длины звуковой волны при данной частоте звука. Все результаты занести в таблицу 14.1.

8 Аналогично выполнить расчеты на частоте 1000 Гц, для максимумов 5, 9, 15.

Таблица 14.1 – Исходные данные

Частота звука $\nu$ , Гц	Длина хода левой волны $d_1$ , м	Длина хода правой волны $d_2$ , м	Номер максимума $k$	Длина звуковой волны $\lambda$ , м	Теоретическое значение длины звуковой волны $\lambda$ , м
400					
800					
1000					

9 Сделать вывод по работе.

### Контрольные вопросы

- 1 Что такое звуковая волна?
- 2 Какие волны называются когерентными? Как их получить.
- 3 Что такое интерференция звука? В чем она проявляется.
- 4 Записать условие максимума и минимума интерференции.

## Лабораторная работа № 15

### Определение коэффициента силы трения качения

*Цель работы:* определение коэффициента трения качения путем использования колебательного движения математического маятника по наклонной плоскости.

*Оборудование:* специальная установка.

### *Краткая теория*

Сила трения при соприкосновении поверхностей двух тел препятствует их взаимному перемещению. Эта сила приложена к телам вдоль поверхности их соприкосновения и всегда направлена против относительной скорости перемещения.

Внешнее, или сухое, трение обеспечивает неподвижность соприкасающихся тел относительно друг друга (трение покоя), либо проявляется при скольжении (трение скольжения) и качении (трение качения) тел.

Внутреннее, или вязкое, трение характеризует взаимодействие между слоями жидкости или газа, движущимися один относительно другого, или при движении твердого тела в жидкой и газообразной средах. Внутреннее трение возникает и в твердых телах при деформациях (например, в стальных рессорах и др.).

Сухое трение обусловлено зацеплениями микровыступов и межмолекулярным взаимодействием соприкасающихся поверхностей твердых тел. Трение покоя связано с упругим деформированием микровыступов, а трение скольжения и качения – с их пластическим деформированием и даже разрушением. Поэтому следствием трения скольжения и качения являются нагревание и износ трущихся поверхностей, а также возникающий при этом шум. Природа сил трения качения связана с неупругой деформацией реальных тел. При упругой деформации результирующая  $\vec{N}$  (рисунок 15.1) всех сил реакции деформированной поверхности качения вертикальна. Никаких сил трения качения в этом случае не возникает.

В реальной ситуации (рисунок 15.2) силы, действующие на тело вращения со стороны поверхности качения, уже не будут симметричны относительно вертикальной плоскости: сила  $\vec{F}$ , возникающая в передней части тела вращения, будет больше силы  $\vec{F}'$ . Результирующая сила  $\vec{N}$  уже не вертикальна; она имеет горизонтальную составляющую, направленную назад. Ее называют силой трения качения.

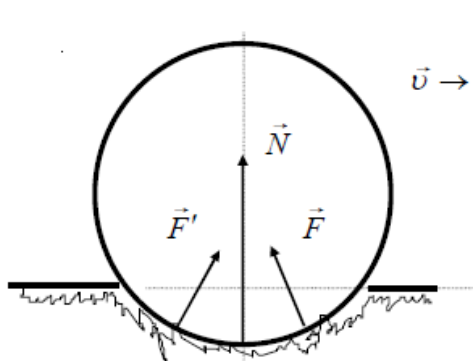


Рисунок 15.1 – Упругая деформация

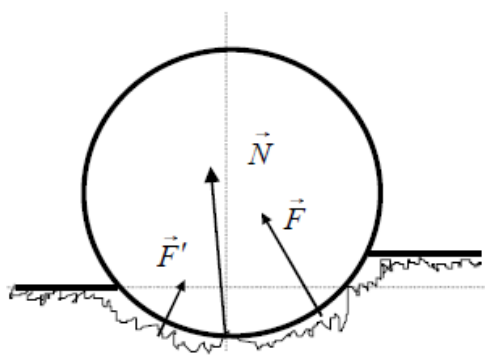


Рисунок 15.2 – Реальная ситуация

Вязкое трение при смазке трущихся поверхностей резко снижает износ и шум. Покрытие соприкасающихся поверхностей полимером типа политетрафторэтилен (фторопласт) резко снижает силу трения даже без применения смазки.

В данной работе коэффициент трения определяем методом колебаний наклонного математического маятника. Рассмотрим для начала основные понятия и закономерности колебательного движения. Общая черта всех колебательных движений состоит в том, что они представляют собой движения, многократно повторяющиеся или приблизительно повторяющиеся через определенные промежутки времени.

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0 \quad (15.1)$$

Примером гармонического осциллятора является математический маятник.

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити в поле силы тяжести. Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику может служить небольшой груз, подвешенный на длинной тонкой нити.

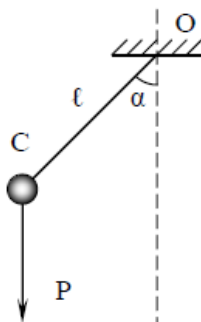


Рисунок 15.3 – Математический маятник

Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом  $\alpha$ , образованным нитью с вертикалью (рисунок 15.3). При отклонении груза из положения равновесия возникает возвращающая сила  $P_\tau = -mgsin\alpha$ , стремящаяся вернуть груз в положение равновесия. Момент этой силы относительно оси вращения определится из соотношения:

$$M = -mgl\sin\alpha . \quad (15.2)$$

Запишем для маятника основное уравнение динамики вращательного движения:

$$M = J\varepsilon , \quad (15.3)$$

где  $J = ml^2$  – момент инерции математического маятника,  $\varepsilon$  – угловое

ускорение, равное второй производной от угла отклонения по времени  $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ .

Уравнение (15.3) примет вид:  $ml^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl\sin\alpha$  или

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0 \quad (15.4)$$

Ограничимся рассмотрением малых колебаний. В этом случае можно положить  $\sin \alpha = \alpha$ . Обозначив  $g/l = \omega^2$ , приходим к следующему уравнению

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0 \quad (15.5)$$

Решение этого уравнения можно записать в виде:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (15.6)$$

В этом уравнении  $\alpha_0$  – амплитуда колебаний, то есть максимальное угловое смещение, маятника от положения равновесия.

Аналогичные рассуждения можно провести не только для углового смещения математического маятника от положения равновесия, но и для смещения его по дуге  $S$  или хорде, так как при малых углах отклонения  $\alpha$  дуга приблизительно равна хорде.

В этом случае дифференциальное уравнение (15.5) будет иметь вид

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0 \quad (15.7)$$

И его решение можно записать в виде:

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (15.8)$$

где  $s$  – смещение материальной точки от положения равновесия;  $A$  – амплитуда колебаний, то есть максимальное смещение маятника от положения равновесия, которое достигается при  $\sin(\omega_0 t + \varphi) = 1$ . Величина  $(\omega_0 t + \varphi)$  называется *фазой колебания* и характеризует положение колеблющейся точки в момент времени  $t$ ;  $\varphi$  – *начальная фаза* колебаний, то есть величина, которая определяет положение колеблющейся точки в момент времени  $t = 0$ ;  $\omega$  – циклическая частота, определяет собою число полных колебаний за  $2\pi$  секунд;  $\omega = 2\pi / T$ ;  $T$  – период колебаний, то есть время, в течение которого точка совершает одно полное колебание.

Рассматриваемое колебательное движение может быть описано с помощью всего лишь одной периодически изменяющейся со временем величины, например,  $s(t)$ . В механике о таких движениях говорят как о движениях *с одной степенью свободы* или *одномерных движениях*.

Пользуясь выражениями для  $\omega^2$  и  $\omega$ , получим:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (15.9)$$

Эта формула для периода колебаний математического маятника



## Методика эксперимента и описание установки

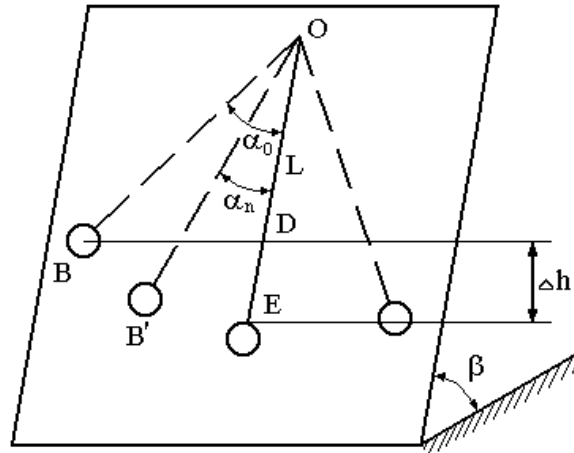


Рисунок 15.4 – Схематическое изображение наклонного маятника

За  $n$  циклов колебаний при переходе из положения  $B$  в положение  $B^1$  (рисунке 15.4) маятник теряет энергию  $\Delta E_p = mg\Delta h$ , равную работе сил сопротивления на пройденном пути  $S$ :

$$\Delta E_p = \Delta A + \Delta A_1, \quad (15.10)$$

где  $\Delta A$  – работа силы трения,

$\Delta A_1$  – работа по преодолению сопротивления среды и трения в подвесе маятника,

$\Delta h$  – потеря высоты центром тяжести.

Пренебрегая  $\Delta A_1$ , ввиду ее малости, имеем

$$mg\Delta h = F_{TP}S. \quad (15.11)$$

Учитывая то, что нормальная составляющая силы тяжести создает нормальное давление  $N = mg \cos \beta$ , а составляющая силы тяжести, направленная вдоль нити, равна  $mg \sin \beta$ , имеем

$$mg\Delta h \sin \beta = \mu mg \cos \beta \frac{S}{R}. \quad (15.12)$$

Отсюда

$$\mu = \frac{R\Delta h \sin \beta}{S \cos \beta}. \quad (15.13)$$

Если  $\alpha_0$  – амплитудное значение угла отклонения маятника в начальный момент,

$\alpha_n$  – амплитуда отклонения маятника через  $n$  колебаний (рисунке 15.4),

$L$  – длина маятника,

$R$  – радиус шарика,

то путь, который проходит центр тяжести маятника за  $n$  колебаний, равен

$$S = 4L_n \alpha_{CP}, \quad \text{где} \quad \alpha_{CP} = \frac{\alpha_o + \alpha_n}{2}.$$

Из рисунка 15.4 очевидно, что

$$\Delta h = OE - OD = L(\cos \alpha_n - \cos \alpha_o) = \frac{L}{2}(\alpha_o - \alpha_n)(\alpha_o + \alpha_n).$$

(Использовано, что  $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ ).

После подстановки выражений для  $S$  и  $\Delta h$  в (13) окончательно имеем:

$$\mu = R \operatorname{tg} \beta \left( \frac{\alpha_o - \alpha_n}{4n} \right). \quad (15.14)$$

Здесь  $\alpha_n$  и  $\alpha_o$  – углы, выраженные в радианах.

В лабораторной работе экспериментально определяют число  $n$  полных периодов колебания маятника, в течение которых амплитуда угла отклонения маятника  $\alpha$  изменится на целое число градусов ( $\alpha_o - \alpha_n$ )

Лабораторная установка включает в себя вертикальную стойку, основание, элемент подвеса, математический маятник, шарик которого катится по наклонной плоскости. Математический маятник представляет собой шарик радиусом  $R$ , подвешенный на длинной нити. Периоды колебаний маятника отсчитываются визуально.

#### *Ход работы*

- 1 Определить число  $n$  полных колебаний, в течение которых максимальный угол отклонения маятника изменится на  $\alpha_o - \alpha_1 = 4^\circ$ .
- 2 Проверить, что шарик катится по плоскости без проскальзывания.
- 3 Отклонить маятник на угол  $\alpha_o = 5^\circ$ . Отпустить шарик. Подсчитать число  $n$  полных колебаний маятника за время уменьшения амплитуды до  $1^\circ$ . Измерения повторить 5 раз.
- 4 Рассчитать коэффициент силы трения качения по формуле

$$\mu = R \operatorname{tg} \beta \left( \frac{\alpha_o - \alpha_n}{4n} \right).$$

#### **Контрольные вопросы**

- 1 Какова причина возникновения сил трения?
- 2 Чему равна сила сухого трения, когда тело покоится, и как она направлена?
- 3 Зависит или нет сила трения покоя от площади соприкосновения тел?
- 4 Почему отсутствует трение качения для абсолютно твердых тел?
- 5 От каких факторов зависит сила трения качения?
- 6 Пусть катящийся без скольжения цилиндр останавливается из-за потерь энергии на преодоление сил трения качения. В какие формы энергии и каким путем превратилась кинетическая энергия катящегося цилиндра?

## Лабораторная работа № 16

### Определение коэффициента вязкости жидкости (по методу Стокса)

*Цель работы:* определить вязкость глицерина методом Стокса.

*Оборудование:* стеклянный сосуд, секундомер, железные шарики радиусом 1–2 мм, глицерин, микрометр, линейка.

#### *Краткая теория*

Вязкостью или внутренним трением в качественном смысле называется свойство всех веществ оказывать сопротивление деформации сдвига, пропорциональное градиенту скорости.

Возникновение сопротивления, обусловленного вязкостью жидкости, объясняется следующим образом.

Рассмотрим жидкость, движущуюся в направлении оси  $X$  (рисунок 16.1). Мысленно разобьем жидкость на тончайшие слои, движущиеся с разными скоростями. При движении жидкости между ее слоями возникают силы внутреннего трения, действующие таким образом, чтобы уравнивать скорости всех слоев.

Природа этих сил заключается в том, что, кроме движения, вместе с жидкостью в целом (направленное движение) молекулы участвуют в тепловом (хаотическом) движении и переходят из одного слоя в другой. Молекулы, попавшие из быстрого слоя в медленный, обладают некоторым избытком импульса и ускоряют медленный слой. Наоборот, молекулы, пришедшие из медленно движущегося слоя в более быстрый, имеют недостаток импульса и, следовательно, будут тормозить более быстро движущийся слой.

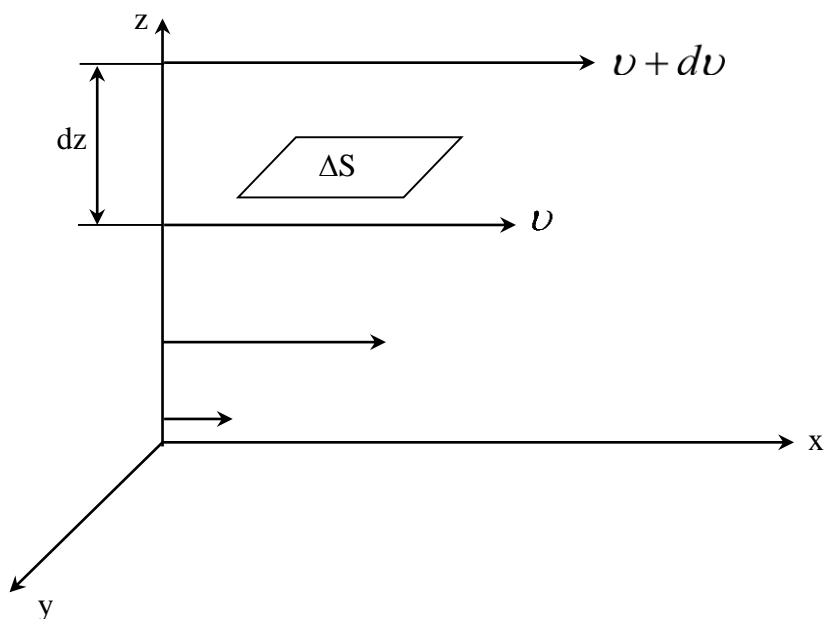


Рисунок 16.1 – Движение слоев жидкости

Чем больше меняется скорость жидкости при переходе от слоя к слою, тем больше величина вязкого сопротивления. Чтобы охарактеризовать величину изменения скорости, измерим разность скоростей  $(v + dv) - v$  двух слоев жидкости и расстояние  $dz$  между этими слоями, отсчитываемое по нормали к направлению скорости. Изменение скорости потока, приходящееся на единицу длины в направлении, перпендикулярном скорости, называется градиентом скорости  $\frac{dv}{dz}$ .

Сила внутреннего трения, действующая между двумя слоями, пропорциональна площади соприкосновения слоев  $\Delta S$  и градиенту скорости

$$\frac{dv}{dz}:$$

$$F = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S \text{ (формула Ньютона),} \quad (16.1)$$

где  $\eta$  – множитель пропорциональности, зависящий от природы жидкости, называемый коэффициентом внутреннего трения или динамической вязкостью.

Из формулы (16.1) коэффициент внутреннего трения равен силе внутреннего трения, возникающей на каждой единице поверхности соприкосновения двух слоев, движущихся один относительно другого с градиентом скорости, равным единице.

В системе СИ единицей динамической вязкости является Н·с/м. Вязкость жидкости зависит от температуры: она резко уменьшается с повышением температуры.

Сопротивление среды движению тела возникает главным образом благодаря вязкости жидкости и (при малых скоростях движения) пропорционально первой степени скорости.

$$F = C_x * v,$$

где  $C_x$  зависит от вязкости жидкости, размеров и формы тела.

Ученый Стокс вычислил теоретически для случая движения сферического тела радиуса  $r$  в безграничной среде значение коэффициента сопротивления и получил:

$$C_x = 6\pi\eta r.$$

Значение силы в этом случае –

$$F = 6\pi\eta r v.$$

#### *Описание установки, метод измерения*

Для измерения коэффициента внутреннего трения Стокс предложил использовать измерение скорости равномерно падающего в среде тела.

Пусть небольшой шарик падает в столбе жидкости. На шарик действуют силы (рисунок 16.2):

- сила тяжести:

$$F_m = mg = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g , \quad (16.2)$$

где  $r$  – радиус шарика,  $\rho$  – плотность шарика,  $g$  – ускорение свободного падения;

- выталкивающая сила (по закону Архимеда):

$$F_a = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g \quad (16.3)$$

где  $\rho_0$  – плотность жидкости;

- сила сопротивления движению, обусловленная силами внутреннего трения между слоями жидкости:

$$F = 6\pi\eta r v . \quad (16.4)$$

Здесь играет роль не трение шарика о жидкость, а трение отдельных слоев жидкости друг о друга, так как при соприкосновении твердого тела с жидкостью к поверхности тела тотчас же прилипают молекулы жидкости. Непосредственно прилегающий к телу слой жидкости движется вместе с телом со скоростью  $v$ . Этот слой увлекает в своем движении соседние слои жидкости, которые на некоторый период времени приходят в плавное безвихревое движение.

Равнодействующая всех сил, действующих на шарик, вычисляется по формуле:

$$R = F_m - (F_a + F).$$

В начале скорость движения шарика будет возрастать, но так как по мере увеличения скорости шарика сила сопротивления будет также возрастать, то наступит такой момент, когда сила тяжести будет уравновешена суммой сил  $F_a$  и  $F$ . Равнодействующая сила станет равной нулю.

$$F_m = F_a + F . \quad (16.5)$$

С этого момента движение шарика становится равномерным с некоторой скоростью  $v$ .

Подставляя в формулу (16.5) соответствующие значения  $F_m$ ,  $F_a$  и  $F$ , получим для коэффициента вязкости выражение

$$\eta = \frac{2}{9} (\rho - \rho_0) \frac{gr^2}{v} . \quad (16.6)$$

*Задание:* определить коэффициент вязкости глицерина.

Экспериментальная установка состоит из стеклянного цилиндра, наполненного исследуемой жидкостью (рисунок 16.2). На цилиндре нанесены две горизонтальные метки, расположенные на расстоянии  $l$ .

- 1) измерить диаметр шарика микрометром (таких измерений диаметра шарика делают три, меняя ориентацию шарика относительно микрометра);

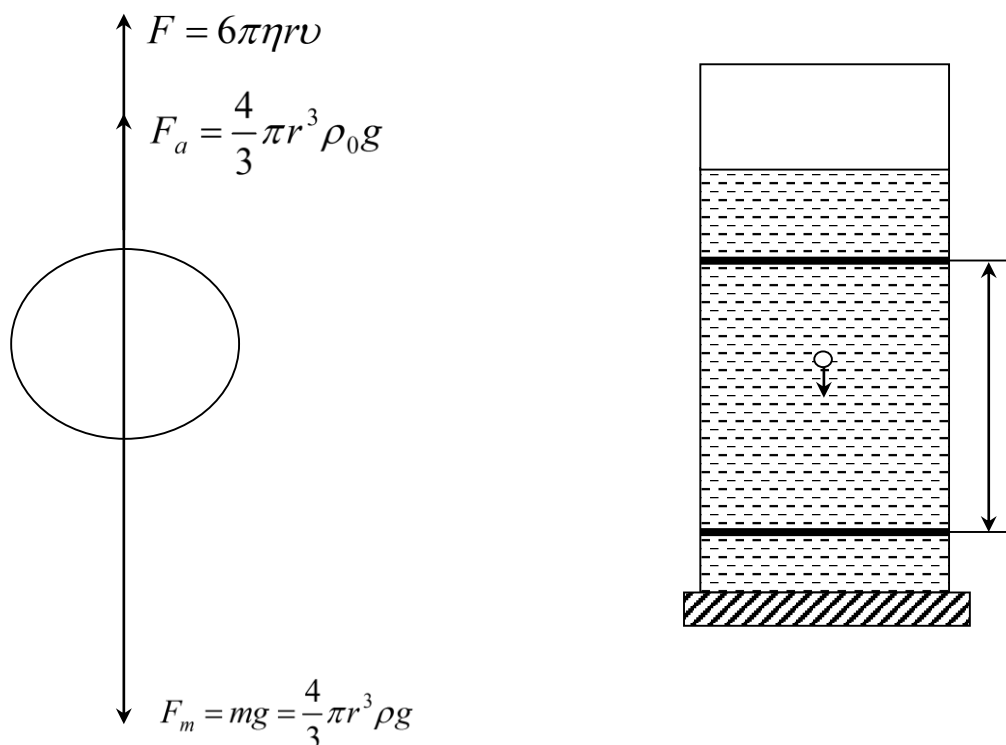


Рисунок 16.2 – Экспериментальная установка и направление сил действующих на шарик внутри жидкости

- 2) измерив диаметр шарика, опустить шарик в жидкость, как можно ближе к оси цилиндра. В момент прохождения шариком верхней метки пустить в ход секундомер. В момент прохождения шариком нижней метки секундомер остановить. Отсчет по секундомеру дает время  $t$  прохождения шариком пути  $l$ ;
  - 3) опыт повторить для трех-пяти шариков;
- в расчетной формуле:

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{\rho - \rho_0}{l} gr^2 t = Cr^2 t \quad (16.7)$$

величина  $C$  имеет одно и тоже значение для всей серии измерений в данной жидкости. Вычислить постоянную прибора  $C$ . Затем, пользуясь измерениями  $r$  и  $t$ , вычислить для каждого шарика коэффициент внутреннего трения исследуемой жидкости и найти его среднее значение;

результаты измерений заносят в таблицу (16.1).

Таблица 16.1 – Определение коэффициента внутреннего трения

№	Наименование жидкости	$d_{cp}$ , м	$r_{cp}$ , м	$t$ , с	$l$ , м	$C$	$\eta$ , $кгм^{-1}с^{-1}$	$\eta_{cp}$ , $кгм^{-1}с^{-1}$
1								
2								
3								

## Контрольные вопросы

- 1 В чем состоит явление внутреннего трения, и как оно объясняется на основе молекулярно-кинетической теории?
- 2 Каков физический смысл коэффициента вязкости?
- 3 В чем состоит метод Стокса – определения коэффициента вязкости жидкости?
- 4 Приведите примеры применения метода вискозиметра в биологии и медицине.

## Лабораторная работа № 17

### Определение модуля Юнга из деформации изгиба стержня

*Цель работы:* определение модуля Юнга из деформации изгиба стержня.

*Оборудование:* установка для определения модуля упругости растяжения стержня, индикатор, штангенциркуль, масштабная линейка.

#### Краткая теория

Под действием внешних сил твердые тела изменяют свою форму: удлиняются, сжимаются, изгибаются, сдвигаются, скручиваются, другими словами, деформируются. Различают следующие виды деформации – растяжение (сжатие), сдвиг, кручение, изгиб. Основными являются деформации растяжения (сжатия) и сдвига, остальные виды деформации могут быть сведены к растяжению (сжатию) или сдвигу.

Рассмотрим деформацию изгиба.

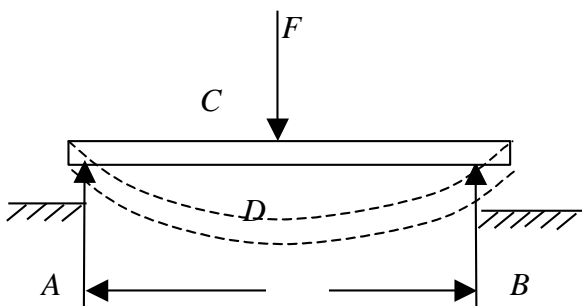


Рисунок 17.1 – Стержень на опорах

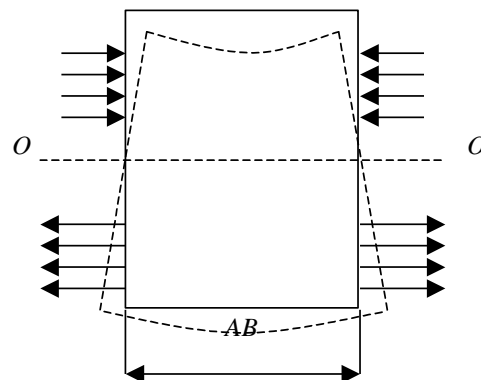


Рисунок 17.2 – Изгиб стержня

Если упругий стержень положить на опоры (рисунок 17.1) и подействовать в середине стержня силой  $\vec{F}$ , то стержень прогнется. Если мысленно вырезать небольшой участок стержня и сравнить его форму до изгиба и после изгиба (рисунок 17.2), то можно заметить, что слои участка, лежащие выше оси  $O-O$ , будут

сжаты, а слои, расположенные ниже  $O - O$ , растянуты. Слой, лежащий на оси  $O - O$ , не будет ни растянут, ни сжат, он только изогнется.

Перемещение  $CD = f$ , которое получает середина стержня под действием приложенной силы  $\vec{F}$ , принято называть прогибом, а точнее стрелой прогиба.

Опыты показывают, что стрела прогиба  $f$  зависит от приложенной силы  $\vec{F}$ , расстояния между опорами,  $AB = l$ , формы и размера стержня и от модуля упругости  $E$ , растяжения. Для стержня прямоугольной формы (в поперечном сечении) (рисунок 17.3) стрела прогиба равна

$$f = \frac{Fl^3}{4ab^3E}, \quad (17.1)$$

откуда модуль  $E$  растяжения определится как:

$$E = \frac{Fl^3}{4ab^3f} \quad (17.2)$$

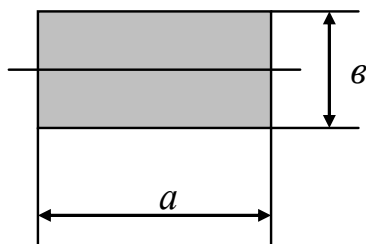


Рисунок 17.3 – Линейные размеры стержня

#### *Описание установки*

В данной установке стержень устанавливается на опоры, находящиеся на одном монорельсе. Расстояние между опорами « $l$ » можно менять.

Для измерения стрелы прогиба служит индикатор (перед началом измерений необходимо ознакомиться с принципом действия индикатора и определить цену деления шкалы).

В качестве нагрузки (силы  $F$ ) служат гири.

#### *Задание:*

1 Измерить линейные размеры стержня:

$a$  – ширина стержня,

$b$  – толщина стержня,

$l$  – длина стержня.

2 Данные занести в таблицу 17.1.



Таблица 17.1 – Измерение линейных размеров стержня

№	$l$	$\Delta l$	$a$	$\Delta a$	$b$	$\Delta b$
1						
2						
3						
Ср. значение						

3 Нагружая стержень подвеса гириями в порядке возрастания, отмечают соответствующие показания индикатора.

$n$  – количество делений индикатора, при соответствующей массе,

$F=mg$  – сила тяжести приложенная к стержню,

$f=0,00001*n$  – перемещение середины стержня под действием силы  $F$  (иначе величина  $f$  называется стрелой прогиба).

4 Расчет модуля Юнга производится по формуле  $E = \frac{Fl^3}{4ab^3 f}$

5 Данные измерений занесите в таблицу 2.

6 Вычислите ошибку измерений.

$$7 \gamma = \frac{\Delta E}{E_{\text{ср}}} = \frac{\Delta(F/f)}{(F/f)_{\text{ср}}} + \frac{\Delta a}{a} + 3 \frac{\Delta l}{l} + 3 \frac{\Delta b}{b}$$

Таблица 17.2 – Результаты эксперимента

№	Масса груза, $m$ , кг	Количество делений, $n$	$f$ , м	$F=m*g$ , Н	$\frac{F}{f}$ , Н/м	$\left  \left( \frac{F}{f} \right)_{\text{ср}} - \left( \frac{F}{f} \right)_i \right $ , Н/м	$\left  \left( \frac{F}{f} \right)_{\text{ср}} - \left( \frac{F}{f} \right)_i \right ^2$ , (Н/м) <sup>2</sup>	$E$ , Н/м <sup>2</sup>	$E_{\text{ср}}$ , Н/м <sup>2</sup>
1									
2									
3									
4									
5									
$\left( \frac{F}{f} \right)_{\text{ср}}$									

## Контрольные вопросы

- 1 Расскажите о явлении деформации. Приведите примеры.
- 2 Какие виды деформации вы знаете? Чем они отличаются друг от друга?
- 3 Что называется абсолютной величиной деформации и относительной деформацией для различных видов деформаций?
- 4 Физический смысл коэффициента упругости и модуля упругости?
- 5 Какие деформации называются упругими?
- 6 Что называется пределом пропорциональности и пределом прочности? Нарисуйте диаграмму напряжений для какого-нибудь вещества и на нем покажите области, соответствующие пределу пропорциональности, пределу упругости, пределу текучести и пределу прочности.
- 7 Что называется стрелой прогиба?

## Лабораторная работа № 18

### Определение модуля упругости резины

*Цель работы:* научиться измерять модуль Юнга, используя закон Гука.

*Оборудование:* резиновый шнур, штатив с муфтой и лапкой, грузы по 50 грамм, измерительная линейка, микрометр.

#### *Краткая теория*

Если к однородному стержню, закрепленному на одном конце, приложить силу  $F$  вдоль оси стержня, то стержень подвергнется деформации растяжения. Деформацию растяжения характеризуют абсолютным удлинением  $\Delta l = l - l_0$ ; относительным удлинением  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ . В деформированном теле возникает механическое напряжение  $\sigma$ , равное отношению модуля силы  $F$  к площади поперечного сечения тела  $S$ :

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (18.1)$$

На упруго деформированные тела распространяется закон Гука: при малых деформациях механическое напряжение  $\sigma$  прямо пропорционально относительному удлинению:  $\sigma = E|\varepsilon|$ . Коэффициент пропорциональности  $E$ , входящий в закон Гука, называется модулем упругости или модулем Юнга. Модуль Юнга показывает, какое механическое напряжение возникает в материале при относительной деформации равной единице, т.е. при увеличении длины образца вдвое. В данной работе надо определить модуль упругости  $E$  (модуль Юнга) резинового шнура. При выполнении работы надо учесть, что сила упругости в деформированном теле численно равна силе тяжести груза, подвешен-

ного к резиновому шнуру:  $F=mg$ . Резиновый шнур имеет круглое сечение, поэтому  $S = \frac{\pi D^2}{4}$ , где  $D$  – диаметр сечения шнура. Окончательная формула для расчета модуля Юнга имеет вид:

$$E = \frac{mgl_0}{S\Delta l}. \quad (18.2)$$

*Ход работы*

- 1 Измерить длину шнура без нагрузки:  $l_0 = \dots$  см =  $\dots$  м.
- 2 Закрепить шнур в лапке штатива одним концом, а к другому концу подвесить груз массой  $m_1 = \dots$  г =  $\dots$  кг.
- 3 Снова измерить длину шнура  $l_1 = \dots$  см =  $\dots$  м. Рассчитайте абсолютное удлинение шнура  $\Delta l_1 = l_1 - l_0 = \dots$  см =  $\dots$  м.
- 4 Пользуясь формулой  $E_1 = \frac{m_1gl_0}{S_1\Delta l_1}$ , рассчитать модуль упругости резины.
- 5 Повторить опыт с грузами другой массы и снова рассчитать модуль Юнга.  $m_2 = \dots$  г =  $\dots$  кг.  $l_0 = \dots$  см =  $\dots$  м.  $l_2 = \dots$  см =  $\dots$  м.  $\Delta l_2 = l_2 - l_0 = \dots$  см =  $\dots$  м.

$$E_2 = \frac{m_2gl_0}{S_2\Delta l_2}.$$

- 6 Повторить опыт для других масс.  
Все данные занести в таблицу 18.1.

Таблица 18.1 – Экспериментальные данные

№	Измерено				Рассчитано				
	$l_0$ , м	$l$ , м	$D$ , м	$m$ , кг	$F=mg$ , Н	$S$ , м <sup>2</sup>	$\Delta l$ , м	$E$ , Па	$E_{ср}$ , Па
1									
2									
3									
4									
5									
6									

Построить диаграмму растяжения резинового шнура, т. е. зависимость  $F(\Delta l)$ .

**Контрольные вопросы**

- 1 Какие виды деформации существуют?
- 2 От чего зависит коэффициент жесткости в законе Гука?
- 3 Что такое предел прочности?
- 4 Чем отличаются упругие материалы от пластичных?
- 5 Что такое хрупкость?

### Реакция струи жидкости

*Цель работы:* исследовать зависимость реактивной силы струи жидкости от её расхода.

*Оборудование:* установка по измерению реактивной силы струи жидкости, мерный стакан, набор разновесов, секундомер.

#### Краткая теория

При протекании жидкости по некоторой изогнутой трубе со стороны слоёв жидкости на трубу действует сила, которая называется силой реакции струи. Чтобы оценить эту силу, предположим, что по некоторой трубе течёт жидкость.

Расходом жидкости, текущей по некоторой трубе, называется величина, численно равная объёму жидкости, проходящему через поперечное сечение трубы за единицу времени.

Предположим, что скорость течения жидкости по трубе равна  $\nu$ . Обозначим  $\vec{v}_1$  – вектор скорости течения жидкости вблизи входного сечения трубы,  $\vec{v}_2$  – вектор скорости течения жидкости вблизи выходного сечения трубы. Тогда внутри трубы за время  $dt$  войдёт жидкость с импульсом:

$$d\vec{p}_1 = \rho S \vec{v}_1 \nu dt . \quad (19.1)$$

За это же время из трубы через выходное отверстие вытечет вода с импульсом:

$$d\vec{p}_2 = \rho S \vec{v}_2 \nu dt . \quad (19.2)$$

Изменение импульса жидкости внутри трубы можно найти как разность между импульсом втекающей воды и вытекающей:

$$d\vec{p} = d\vec{p}_1 - d\vec{p}_2 = \rho S (\vec{v}_1 \nu - \vec{v}_2 \nu) dt . \quad (19.3)$$

Поскольку сечение трубы одинаковое, согласно уравнению непрерывности течения жидкости скорость течения жидкости по абсолютной величине в разных сечениях трубы одинаковое. Тогда формулу изменения импульса (19.3) можно переписать следующим образом:

$$d\vec{p} = \rho S (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \nu dt . \quad (19.4)$$

Тогда сила, действующая на трубу со стороны жидкости, согласно второму закону Ньютона равна скорости изменения импульса:

$$\vec{F}_{реак} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \rho S (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \nu . \quad (19.5)$$

Это и есть формула расчёта силы реакции струи.

#### Экспериментальная установка

Экспериментальная установка представляет собой трубку, изогнутую под прямым углом, как показано на рисунке 19.1.

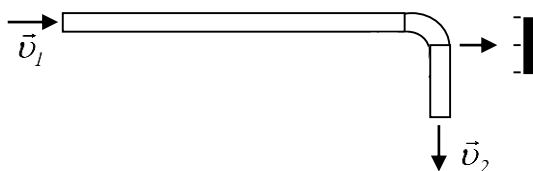


Рисунок 19.1 – Экспериментальная установка

К входному сечению подключается шланг с втекающей водой. Напротив изогнутого вниз колена трубки укрепляется чашка, подвешенная к неподвижной точке с помощью резинки (на рисунке не показана). На первом этапе трубку заполняют водой, но течение её исключается. При этом разновесками уравнивают трубку таким образом, чтобы указатель указывал на нуль шкалы.

После этого включают воду, под действием реакции струи трубка поднимается. Её снова уравнивают разновесками. Сила тяжести дополнительных разновесок и есть сила реакции струи.

На третьем этапе с помощью мерного стакана измеряют расход жидкости. Для этого включают секундомер в момент начала наполнения мерного стакана. По окончании заполнения стакана выключают секундомер. По результатам вычисляют расход жидкости.

По расходу жидкости и площади поперечного сечения трубы находят скорость течения жидкости.

Проверяют формулу реакции струи (19.5).

#### *Ход работы*

1 Заполнить трубку водой и с помощью разновесок установить указатель шкалы на нулевое положение.

2 Включить воду и с помощью разновесок вновь установить указатель шкалы в нулевое положение. Повторить эксперимент три раза, не меняя напора воды. Найти среднее значение массы добавленных разновесок. Будучи умноженное на ускорение свободного падения оно даёт значение реактивной силы струи.

3 Измерить расход жидкости, как указано в описании лабораторной работы и рассчитать скорость течения воды.

4 По формуле (19.5.) рассчитать силу реакции струи воды и сравнить её с найденной в п. 2.

5 Изменить напор воды и повторить задания 1–4.

#### **Контрольные вопросы**

1 Сформулировать закон изменения и сохранения полного импульса системы материальных точек.

2 Вывести уравнение Мещерского и формулу Циолковского.

3 Вывести формулу силы реакции струи жидкости.

4 Рассказать алгоритм выполнения заданий лабораторной работы.

### **Библиографический список**

- 1 Вводный практикум. Методические рекомендации и контрольные задания к выполнению лабораторных работ для студентов специальности 010400 / сост. В. М. Овсянов, Т. Н. Новгородова. – Курган, 1997.
- 2 Лабораторные работы по физике с вопросами и заданиями : учеб. пособие / О. М. Тарасов. – Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2011.
- 3 Механика : Методические указания к выполнению лабораторных работ по механике для студентов направления 010000 «Физико-математические науки», специальности 010701 «Физика» / сост. А. С. Парахин. – Курган, 2012.
- 4 Физический практикум для классов с углубленным изучением физики для 10-11 классов / под ред. Ю. И. Дика, О. Ф. Кабардина. – Москва : Просвещение, 2002.
- 5 Физика : Методические указания по выполнению лабораторных работ для студентов направлений 06.03.01 «Биология»; 05.03.02 «География»; 05.03.06 «Экология и природопользование» / сост. Л. Н. Никифорова. – Курган, 2018.

Никифорова Лидия Николаевна

## Механика

Методические указания к выполнению лабораторных работ по общему  
физическому практикуму для студентов направленности  
03.03.02 «Физика»,  
44.03.05 «Педагогическое образование» («Физика и математика»)

Редактор Л. П. Чукомина

---

Подписано в печать 15.02.21	Формат 60x84 1/16	Бумага 80 г/м <sup>2</sup>
Печать цифровая	Усл. печ. л. 4,94	Уч.-изд. л. 4,94
Заказ № 15	Тираж 25	

---

Библиотечно-издательский центр КГУ.  
640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.  
Курганский государственный университет.