МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Курганский государственный университет»

Кафедра «Программное обеспечение автоматизированных систем»

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Методические указания к выполнению практических работ для студентов направлений 10.05.03, 10.03.01 – «Информационная безопасность автоматизированных систем»

Курган 2019

Кафедра: «Программное обеспечение автоматизированных систем»

Дисциплина: «Математическая логика и теория алгоритмов» (10.05.03, 10.03.01 – «Информационная безопасность автоматизированных систем»)

Составитель: канд. физ.-мат. наук, О.С. Черепанов

Утверждены на заседании кафедры «23» ноября 2018 г.

Рекомендованы методическим советом университета «20» декабря 2017 г.

Содержание

Введение

Методические указания предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов» у студентов специальности 10.05.03 – «Информационная безопасность автоматизированных систем».

Каждая практическая работа проводится после изучения соответствующих тем дисциплины. Выполнение обучающимися практических работ позволяет закрепить теоретический материал и сформировать практические умения и навыки решения задач.

Материал разбит на два раздела:

1 Математическая логика.

2 Теория алгоритмов.

Каждое практическое занятие содержит условия задач и минимальный теоретический материал для их решения.

Математическая логика

Практическое занятие № 1

Тема. Высказывания и операции над высказываниями. Формулы алгебры высказываний. Классификация формул алгебры высказываний.

Теоретический материал

Высказывание – это всякое повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чем-либо, при этом непременно истинное или ложное.

Функция $\lambda(P)$ называется функцией истинности:

$$\lambda(P) = \begin{cases} 1, & \text{если высказывание } P \text{ истинно;} \\ 0, & \text{если высказывание } P \text{ ложно.} \end{cases}$$

Логические операции над высказываниями

Отрицанием высказывания P называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание P ложно, и ложным, если P истинно.

Конъюнкцией двух высказываний P и Q называется новое высказывание, которое истинно лишь в единственном случае, когда истинны оба высказывания P и Q, и ложно во всех остальных случаях.

Дизъюнкцией двух высказываний P и Q называется новое высказывание, которое истинно в тех случаях, когда хотя бы одно из высказываний P или Q истинно.

Импликацией двух высказываний P и Q называется новое высказывание, которое ложно в единственном случае, когда высказывание P истинно, а Q ложно, а во всех остальных случаях – истинно.

Эквивалентностью двух высказываний P и Q называется высказывание, которое истинно в том и только в том случае, когда одновременно оба высказывания P и Q либо истинны, либо ложны, а во всех остальных случаях – ложно.

Формулы алгебры высказываний

Формулы алгебры высказываний обладают следующими признаками.

1 Каждая отдельная пропозиционная переменная есть формула алгебры высказываний.

2 Если A и B - формулы, то $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$ также являются формулами алгебры высказываний.

3 Если A – формула, то (A) – формула алгебры высказываний.

4 Других формул нет.

Для определения истинности сложного суждения необходимо анализировать значение истинности каждого составного высказывания и формировать последовательность значений истинности каждой подформулы, входящей в формулу сложного высказывания. Логическое значение формулы логики высказываний полностью определяются логическими значениями входящих в нее пропозиционных переменных.

$$\lambda(F(A_1, ..., A_N)) = G(\lambda(A_1), ..., \lambda(A_N)).$$

Классификация формул алгебры высказываний

Формулы алгебры высказываний подразделяют на следующие типы: выполнимые, тавтологии, опровержимые и тождественно ложные формулы.

Формула алгебры высказываний $F(x_1, ..., x_N)$ называется *выполнимой*, если некоторая ее конкретизация является истинным высказыванием, то есть существуют такие конкретные высказывания, которые, будучи подставлены в эту формулу, превращают ее в истинное высказывание.

Формула $F(x_1, ..., x_N)$ называется *тавтологией* или *тождественно истинной* формулой, если она превращается в истинное высказывание при всякой подстановке вместо переменных конкретных высказываний.

Формула $F(x_1, ..., x_N)$ называется *опровержимой*, если существуют такие конкретные высказывания $A_1, ..., A_N$, которые превращают данную формулу в ложное высказывание.

Формула $F(x_1, ..., x_N)$ называется *тождественно ложной* формулой или *противоречием*, если она превращается в ложное высказывание при всякой подстановке вместо переменных конкретных высказываний.

Задачи

1 Какие из следующих предложений являются высказываниями:

а) «Москва – столица мира»;

б) «Студент технологического факультета»;

в) «Треугольник ABC подобен треугольнику DEF»;

г) «Луна есть спутник Юпитера»;

д) 2+5-3;

е) 2+6=3;

ж) «Да здравствуют музы»;

з) «Сегодня плохая погода»;

и) «Если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний».

2 Определите значения истинности высказываний, если высказывания а) - в) являются ложными, а высказывания г) - д) - истинными:

а) Если 4 – четное число, то ;

б) Если B, то 6 – четное число;

в) Если $2 \cdot 2 = 4$, то $\neg C$;

г) Если $\neg D$, то $2 \cdot 2 = 5$;

д) Если 3 – четное число, то E.

3 Определите значения истинности высказываний, если высказывания а) - б) истинны, а высказывания в) - д) ложны:

а) $A \leftrightarrow (2 < 3)$;

б) $(6 \leq 7) \leftrightarrow \neg G$;

в) $C \leftrightarrow (2 < 3)$;

г) $(6 \geq 4) \leftrightarrow \neg D$;

д) $(6 \cdot 2 = 4) \leftrightarrow \neg E$.

4 Пусть через A обозначено высказывание «9 делится на 3», а через B – высказывание «8 делится на 3». Определите значение истинности следующих высказываний:

а) $A \rightarrow B$;

б) $\neg A \to \neg B$;

в) $\neg A \leftrightarrow \neg B$;

г) $\neg A \leftrightarrow B$;

д) $\neg B \to \neg A$.

5 Пусть через A обозначено высказывание «Это число – целое», а через B – высказывание «Это число положительное», через C – высказывание «Это число простое», через D – высказывание «Это число делится на 3». Прочитайте следу-ющее высказывания:

а) $(A \vee B) \to \neg C$;

б) $(B \wedge \neg B) \leftrightarrow (A \vee D)$;

в) $(A \vee C) \to D$;

г) $(A \wedge D) \to \neg C$;

д) $(A \wedge B \wedge C) \vee D$.

6 Следующие составные высказывания расчлените на простые и запишите символически, введя буквенные обозначения для простых и составляющих:

а) «Если число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6»;

б) «Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна и линии их пересечения»;

в) «Если какие-либо два из трех векторов коллинеарны, то их смешанное произведение равно нулю»;

г) «Логарифм некоторого положительного числа будет положительным, если основание логарифма и логарифмируемое число будут больше 1, или если основание логарифма и логарифмируемое число будут заключены между 0 и 1»;

д) «Если в треугольнике любая его медиана не является высотой и биссектрисой, то этот треугольник не равнобедренный и не равносторонний».

7 Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений всех высказываний:

а) $\lambda(A \to B) = 1$, $\lambda(A \leftrightarrow B) = 0$, $\lambda(B \to A) =?$;

б) $\lambda(A \vee B) = 1$, $\lambda(A \to B) = 1$, $\lambda(B \to \neg A) =?$;

в) $\lambda((A \vee B) \to A) = 1$, $\lambda(A \to B) = 1$, $\lambda(\neg A \leftrightarrow \neg B) =?$;

8 Определите, является ли последовательность символов формулой:

а) $((P \to Q) \to (R \wedge (Q \vee S)))$;

б) (PQ);

в) $(P \to Q \to R)$;

г) $\neg\neg P \to P$;

д) $((O \wedge (\neg Q \to R)) \vee ((\neg P \to R) \wedge \neg Q))$.

9 Составьте таблицы истинности для следующих формул и укажите, какие из формул являются выполнимыми, какие – опровержимыми, какие – тождественно истинными, какие – тождественно ложными:

а) $(P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \to P) \vee Q)$;

б) $(((P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee R)) \vee \neg R) \vee Q$;

в) $\neg((\neg R \to \neg(P \to \neg(Q \to R))) \to \neg(P \to \neg Q))$.

10 Докажите, что следующие формулы выполнимы, не составляя для них таблицы истинности, а указав какие-нибудь значения входящих в них пропозиционных переменных, при которых эти формулы обращаются в истинные высказывания:

а) $(P \to Q) \to (Q \to P)$;

б) $\neg((P \leftrightarrow \neg Q) \vee R) \wedge Q$;

в) $((P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)) \leftrightarrow (P \wedge R)$.

Практическое занятие № 2

Тема. Тавтологии алгебры высказываний. Основные равносильности и законы алгебры высказываний. Нормальные формы формул алгебры высказываний.

Теоретический материал

Две формулы высказываний A и B называются *равносильными*, если они принимают одинаковые логические значения при любом наборе значений, входящих в формулу элементарных высказываний. Равносильность обозначается знаком $\equiv$. Между понятием равносильности и знаком эквивалентности существует связь: если формулы A и B равносильны, то формула $A \leftrightarrow B$ – тождественно истинная формула, и обратно: если формула $A \leftrightarrow B$ тождественно истинна, то $A \equiv B$.

Основные равносильности:

1) $A \wedge A \equiv A$ – закон идемпотентности конъюнкции;

2) $A \vee A \equiv A$ – закон идемпотентности дизъюнкции;

3) $A \wedge 1 \equiv A$;

4) $A \vee 1 \equiv 1$;

5) $A \wedge 0 \equiv 0$;

6) $A \vee 0 \equiv A$;

7) $A \wedge \neg A \equiv 0$ – закон противоречия;

8) $A \vee \neg A \equiv 1$ – закон исключающего третьего;

9) $\neg\neg A \equiv A$ – закон снятия двойного отрицания;

10) $A \wedge (B \vee A) \equiv A$ – первый закон поглощения;

11) $A \vee (B \wedge A) \equiv A$ – второй закон поглощения;

12) $A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$ – первая формула расщепления;

13) $A \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ – вторая формула расщепления.

Равносильности, выражающие одни логические операции через другие:

1) $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \equiv \neg((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))$;

2) $A \to B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$;

3) $A \vee B \equiv \neg A \to B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$;

4) $A \wedge B \equiv \neg(A \to \neg B) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$;

5) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ – первый закон де Моргана;

6) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ – второй закон де Моргана.

Основные законы алгебры высказываний:

1) $A \wedge B \equiv B \wedge A$ – коммутативный закон конъюнкции;

2) $A \vee B \equiv B \vee A$ – коммутативный закон дизъюнкции;

3) $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ – ассоциативность конъюнкции;

4) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ – ассоциативность дизъюнкции;

5) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции;

6) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.

Для каждой формулы алгебры высказываний можно указать равносильную ей формулу, содержащую из логических связок лишь отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию. Для этого нужно, используя равносильности, выразить все имеющиеся в формуле импликации и эквивалентности через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию. Выразить так формулы возможно не одним способом, а многими.

В алгебре высказываний используются две нормальные формы: дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы (ДНФ и КНФ).

Конъюнктивным одночленом от переменных $X_1, ..., X_N$ называется конъюнкция этих переменных или их отрицаний.

Дизъюнктивным одночленом от переменных $X_1, ..., X_N$ называется дизъюнкция этих переменных или их отрицаний.

Дизъюнктивной нормальной формой называется дизъюнкция конъюнктивных одночленов.

Конъюнктивной нормальной формой называется конъюнкция дизъюнктивных одночленов.

Алгоритм приведения к нормальной форме.

1 Устранить логические связки $\leftrightarrow$ и $\rightarrow$ всюду по правилам: $F_1 \leftrightarrow F_2 \equiv (F_1 \rightarrow F_2) \wedge (F_2 \rightarrow F_1) \equiv (\neg F_1 \vee F_2) \wedge (\neg F_2 \vee F_1) \equiv \neg((\neg F_2 \wedge F_2) \vee (\neg F_1 \wedge F_2))$;
$F_1 \rightarrow F_2 \equiv \neg F_1 \vee F_2 \equiv \neg(F_1 \wedge (\neg F_2))$.

2 Продвинуть отрицание до элементарной формулы по правилам:
$\neg(\neg F) \equiv F$;
$\neg(F_1 \wedge F_2) \equiv \neg F_1 \vee \neg F_2$;
$\neg(F_1 \vee F_2) \equiv \neg F_1 \wedge \neg F_2$.

3 Применить закон дистрибутивности:

а) для КНФ: $F_1 \vee (F_2 \wedge F_3) \equiv (F_1 \vee F_2) \wedge (F_1 \vee F_3)$;

б) для ДНФ: $F_1 \wedge (F_2 \vee F_3) \equiv (F_1 \wedge F_2) \vee (F_1 \wedge F_3)$.

Одночлен (конъюнктивный или дизъюнктивный) от переменных $X_1, ..., X_n$ называется *совершенным*, если в него от каждой пары $X_i, \neg X_i$ входит только один представитель.

Нормальная форма (дизъюнктивная или конъюнктивная) от переменных $X_1, ..., X_n$ называется *совершенной* от этих переменных, если в нее входят лишь совершенные одночлены (конъюнктивные или дизъюнктивные соответственно) от $X_1, ..., X_n$.

Алгоритм преобразования ДНФ к совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ)

1 Если в элементарную конъюнкцию F не входит подформула F_i или $\neg F_i$, то дополнить элементарную конъюнкцию высказыванием $F_i \vee \neg F_i$ и выполнить преобразование формулы по закону дистрибутивности: $F \wedge (F_i \vee F_i) \equiv F \wedge F_i \vee F \wedge \neg F_i$.

2 Если в элементарную конъюнкцию F не входит подформула F_j или $\neg F_j$, то повторить шаг 1, иначе – конец.

Алгоритм преобразования КНФ к совершенной конъюнктивой нормальной форме (СКНФ).

1 Если в дизъюнктивный одночлен F не входит подформула F_i или $\neg F_i$, то дополнить данный дизъюнктивный одночлен высказыванием $(F_i \wedge \neg F_i)$ и выполнить преобразование формулы по закону дистрибутивности:
$F \vee (F_i \wedge \neg F_i) \equiv (F \vee F_i) \wedge (F \vee \neg F_i)$.

2 Если в элементарную дизъюнкцию F не входит подформула F_j или $\neg F_j$, то повторить шаг 1, иначе – конец.

Алгоритм отыскания СДНФ по таблице истинности:

1 Нужно выбрать все те наборы значений переменных, на которых формула принимает значение 1.

2 Для каждого такого набора выписать совершенный конъюнктивный одночлен, принимающий 1 на этом наборе и только на нем.

3 Полученные совершенные конъюнктивные одночлены соединить знаком дизъюнкции.

Алгоритм отыскания СКНФ по таблице истинности:

1 Нужно выбрать все те наборы значений переменных, на которых формула принимает значение 0.

2 Для каждого такого набора выписать совершенный дизъюнктивный одночлен, принимающий 0 на этом наборе и только на нем.

3 Полученные совершенные дизъюнктивные одночлены соединить знаком конъюнкции.

Задачи

1 Составьте таблицы истинности следующих формул, докажите, что они являются тавтологиями:

а) $((P \wedge Q) \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$;

б) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$;

в) $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$;

г) $(P \to Q) \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R)$;

д) $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$;

е) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$.

2 Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями:

а) $((P \wedge \neg Q) \to (R \wedge \neg R)) \to (P \to Q)$;

б) $((P \to Q) \wedge (Q \to P)) \to (P \to R)$;

в) $P \to (Q \to ((P \vee Q) \to (P \wedge Q)))$.

3 Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы они содержали только логические связки $\neg, \wedge, \vee$:

а) $((X \to Y) \wedge (\neg X \to \neg Y)) \to ((X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y))$;

б) $((X \wedge \neg Y) \to Y) \to (X \to \neg Y)$;

в) $(X \to Z) \to ((X \to \neg Y) \to (\neg Z \vee Y))$.

4 Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы отрицание было отнесено только к пропозицинным переменным и не стояло перед скобками:

а) $\neg(\neg(\neg(X \wedge Y) \to Y) \to (\neg X \wedge Z))$;

б) $\neg((\neg X \leftrightarrow \neg Y) \vee Z) \wedge Y$;

в) $(X \to Y) \to \neg(X \leftrightarrow \neg Z)$.

5 Применяя равносильные преобразования, приведите следующие формулы к более простой форме:

а) $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \wedge (P \vee Q)$;

б) $(P \leftrightarrow Q) \to (\neg P \to Q)$;

в) $\neg((P \leftrightarrow \neg Q) \vee R) \wedge Q$.

6 С помощью равносильных преобразований докажите, что следующие формулы являются тождественно ложными:

а) $\neg(((X \to Y) \wedge (X \to Z)) \to (X \to Z))$;

б) $(Z \to \neg(X \wedge \neg Z)) \to (\neg(X \vee Z) \wedge X \wedge Y)$;

в) $(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \to \neg Q))$.

7 Приведите равносильными преобразованиями каждую из следующих формул к дизъюнктивной нормальной форме:

а) $(X \leftrightarrow Y) \wedge \neg(Z \to T)$;

б) $((X \to Y) \to (Z \to \neg X)) \to (Y \to \neg Z)$;

в) $\neg(X \vee Z) \wedge (X \to Y)$.

8 Приведите равносильными преобразованиями каждую из следующих формул к конъюнктивной нормальной форме:

а) $(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to \neg Z) \to (X \to \neg Y)$;

б) $(X \to Y) \to Z$;

в) $(X \leftrightarrow Y) \to (X \wedge Z)$.

9 По данному набору значений переменных постройте конъюнктивный одночлен, принимающий значение 1 только на этом наборе значений:

а) (0,1);

б) (0,0,1);

в) (0,1,0,0);

г) (1,1,1,0);

10 Используя СДНФ, найдите формулу, принимающую значение 1 на следующих наборах значений переменных, и только на них:

а) $F(0,0) = F(1,1) = 1$;

б) $F(0,1,0) = F(1,0,1) = F(1,1,1) = 1$;

в) $F(1,0,1) = F(0,1,0) = F(0,0,0) = 1$.

11 Используя СКНФ, найдите формулу, принимающую значение 0 на следующих наборах значений переменных:

а) $F(0,1) = F(1,1) = 0$;

б) $F(0,1,1) = F(1,1,1) = 0$;

в) $F(0,1,1) = F(0,0,0) = F(0,1,0) = 0$.

12 Для каждой из следующих формул алгебры высказываний найдите СДНФ с помощью ее таблицы истинности:

а) $X \leftrightarrow Z \to (X \wedge \neg Y)$;

б) $((X \vee Y) \to Z) \leftrightarrow \neg X$;

в) $((X \vee \neg Z) \wedge Y) \leftrightarrow ((Y \vee \neg X) \wedge Z)$.

13 Для каждой из следующих формул алгебры высказываний найдите СКНФ с помощью ее таблицы истинности:

а) $X \vee (Y \to (Z \leftrightarrow (X \wedge Y)))$;

б) $(X \leftrightarrow Y) \wedge (\neg Z \to (T \wedge \neg X))$;

в) $\neg(X \wedge Y) \to \neg(X \vee Z)$.

Практическое занятие № 3

Тема. Исчисление высказываний. Дедуктивный метод. Метод резолюций.

Теоретический материал

Исчисление высказываний – это аксиоматическая логическая система, описывающая тождественно истинные схемы, а ее интерпретация – алгебра выска-зываний.

Секвенциями называются выражения следующего вида:

1) $A_1, ..., A_n \vdash A$, где $n > 0, A_1, .., A_n$ – любые формулы;

2) $\vdash B$;

3) $A_1, ..., A_n \vdash, n > 0$.

Правилом вывода называется выражение вида $\frac{E_1,...,E_k}{E}$, где $E_1, ..., E_k, E$ – произвольные формулы. E называется непосредственным следствием посылок $E_1, ..., E_k$ по данному правилу вывода.

Основные правила вывода:

1) $\frac{F_1,F_2}{F_1 \wedge F_2}$.

2) $\frac{F_1 \wedge F_2}{F_1}$ и $\frac{F_1 \wedge F_2}{F_2}$.

3) $\frac{F_1,\neg(F_1 \wedge F_2)}{\neg F_2}$.

4) $\frac{F_1}{F_1 \vee F_2}$.

5) $\frac{(F_1 \vee F_2),\neg F_1}{F_2}$.

6) $\frac{F_2}{F_1 \to F_2}$.

7) $\frac{\neg F_1}{F_1 \to F_2}$.

8) $\frac{F_1 \to F_2}{\neg F_2 \to \neg F_1}$.

9) $\frac{F_1 \to F_2}{(F_1 \vee F_3) \to (F_2 \vee F_3)}$.

10) $\frac{F_1 \to F_2}{(F_1 \wedge F_2) \to (F_2 \wedge F_3)}$.

11) $\frac{(F_1 \to F_2),(F_2 \to F_3)}{F_1 \to F_3}$.

12) $\frac{F_1,(F_1 \to F_2)}{F_2}$.

13) $\frac{\neg F2,(F_1 \to F_2)}{\neg F_1}$.

14) $\frac{F_1 \to F_2, F_2 \to F_1}{F_1 \leftrightarrow F_2}$.

15) $\frac{F_1 \leftrightarrow F_2}{F_1 \to F_2}$ и $\frac{F_1 \leftrightarrow F_2}{F_2 \to F_1}$.

16) $\frac{\neg\neg F}{F}$.

Вывод – последовательность формул, которая начинается с исходных посылок и заканчивается следствием, а промежуточные формулы – формулы, полученные с использованием правил вывода.

Дедуктивный метод

Теорема $F_1, ..., F_b \vdash B$ равносильна доказательству $\vdash F_1 \to (F_2 \to ... \to (F_n \to B)...)$. Так формируется система дедуктивного вывода от посылок до заключения. Построение вывода опирается на два правила вывода Modus Ponens (MP) и Modues Tolens (MT).

Метод резолюций

Существует эффективный алгоритм вывода – алгоритм резолюций. Этот алгоритм основан на том, что выводимость формулы B из множества посылок $F_1, ..., F_n$ равна доказательству теоремы: $\vdash (\neg(F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_N) \wedge \neg B)$. Заключение B истинно тогда и только тогда, когда формула $(\neg(F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_N) \wedge \neg B)$ имеет значение «ложь». Так как данная формула есть КНФ, то все F_i и $\neg B$ должны быть приведены также к виду КНФ. Так может быть сформировано множество элементарных дизъюнктов $K = (D_1, D_2, ..., D_m)$.

Два дизъюнкта D_i и D_j, содержащие одинаковые пропозиционные переменные, но с противоположными знаками, объединяют в третий дизъюнкт $D_k = (D_i \vee D_j)$ – резольвенту, из которого удаляются эти переменные. Пропозиционные переменные с противоположными знаками называют контрарными атомами. Если $D_i = A$, $D_j = \neg A$, то $D_k = (D_i \vee$

$D_j) = (A \vee \neg A)$ есть пустая резольвента, которую обозначают символом $\square$. Многократно применяя процедуру объединения дизъюнктов множества K с контрарными атомами, стремятся получить пустую резольвенту. Наличие пустой резольвенты есть доказательство теоремы.

Алгоритм вывода по методу резолюций.

1 Принять отрицание заключения, т. е. $\neg B$.

2 Привести все формулы посылок и отрицания заключения в конъюнктивную нормальную форму.

3 Выписать множество дизъюнктов всех посылок и отрицания заключения: $K = (D_1, ..., D_k)$.

4 Выполнить анализ пар множества K по правилу: если существуют дизъюнкты D_i и D_j, один из которых D_i содержит атом A, а другой D_j – атом $\neg A$, то соединить эту пару логической связкой дизъюнкции $D_i \vee D_j$ и сформировать новый дизъюнкт – резольвенту, исключив контрарные атомы и $\neg$, а резольвенту включить в множество K.

5 Если в результате соединения дизъюнктов будет получена пустая резольвента (пустой дизъюнкт), то конец (доказательство подтвердило истинность заключения), иначе включить резольвенту в множество дизъюнктов K и перейти к шагу 4. По закону идемпотентности любой дизъюнкт и любую резольвенту можно использовать неоднократно, т. е. из множества не следует удалять использованные в соединении дизъюнкты.

Задачи

1 Я бы заплатил за работу по ремонту телевизора, если бы он стал работать. Он работает. Доказать, что я заплатил.

2 Если бы он ей не сказал, она ни за что не узнала бы. А не спроси она его, он и не сказал ей. Он ей сказал. Доказать, что она его спросила.

3 Или Петр и Иван – братья, или они однокурсники. Если Петр и Иван братья, то Сергей и Иван – не братья. Если Петр и Иван – однокурсники, то Иван и Михаил также однокурсники. Доказать, что Сергей и Иван не братья, или Иван и Михаил – однокурсники.

4 Наша футбольная команда А либо выигрывает матч, либо проигрывает, либо сводит к ничьей. Если в матче команда выигрывает или проигрывает, то он не переносится. Команда матч не выиграла и не свела к ничьей. Доказать, что матч не перенесен и не выигран.

5 Джон утверждает, что не встречал этой ночью Смита. Если Джон не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джон лжет. Если Смит не был убийцей, то Джон не встречал его ночью, а убийство было совершено после полуночи. Если убийство было совершено после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джон лжет. Доказать, что убийцей был Смит.

6 Если мы не будем продолжать политику сохранения цен, то мы потеряем голоса фермеров. Если же мы будем продолжать эту политику, то продолжится перепроизводство, разве что мы прибегнем к контролю над производством. Без голосов фермеров нас не переизберут. Доказать, что если нас переизберут, и мы не прибегнем к контролю над производством, то будет продолжаться перепроизводство.

7 Если он автор этого слуха, то он глуп или беспринципен. Он не глуп и не лишен принципов. Доказать, что, не он автор этого слуха.

8 В бюджете возникнет дефицит, если не повысят пошлины. Если в бюджете имеется дефицит, то государственные расходы на общественные нужды сократятся. Правда ли, что если повысят пошлины, то государственные расходы на общественные нужды не сократятся.

9 Если наступит мир, то возникнет депрессия, разве что страна проведет программу перевооружения либо осуществит грандиозную программу внутренних капиталовложений в области образования, охраны окружающей среды, борьбы с бедностью и т. д. Невозможно договориться о целях такой грандиозной программы внутренних капиталовложений. Доказать, что если наступит мир и не будет депрессии, то непременно будет осуществляться программа перевооружения.

Практическое занятие № 4

Тема. Алгебра предикатов. Предикаты. Множество истинности предикатов. Равносильность и следование предикатов. Классификация предикатов. Логические операции над предикатами.

Теоретический материал

Определенным на множествах $M_1, ..., M_n$ n-местным *предикатом* называется предложение, содержащее n переменных $x_1, .., x_n$, превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных любых конкретных элементов из множеств $M_1, ..., M_n$, соответственно.

Предикат $P(x_1, ..., x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, называется

1) *тождественно истинным*, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, ..., x_n$ любых конкретных предметов $a_1, ..., a_n$ из множеств $M_1, .., M_n$, соответственно, он превращается в истинное высказывание $P(a_1, ..., a_n)$;

2) *тождественно ложным*, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, ..., x_n$ любых конкретных предметов из множеств $M_1, ..., M_n$, соответственно, он превращается в ложное высказывание;

3) *выполнимым (опровержимым)*, если существует по меньшей мере один набор конкретных предметов $a_1, ..., a_n$ из множеств $M_1, ..., M_n$, соответственно, при подстановке которых вместо соответствующих предметных переменных в предикат $P(x_1, ..., x_n)$, последний превратится в истинное (ложное) высказывание $P(a_1, ..., a_n)$.

Множеством истинности предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданного на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$ называется совокупность всех упорядоченных n-систем $(a_1, ..., a_n)$, в которых $a_1 \in M_1, ..., a_n \in M_n$ таких, что данный предикат обращается в истинное высказывание $P(a_1, ..., a_n)$ при подстановке $x_1 = a_1, ..., x_n = a_n$. Это множество будем обозначать P^+.

Два n-местных предиката $P(x_1, ..., x_n)$ и $Q(x_1, ..., x_n)$, заданных над одними и теми же множествами $M_1, ..., M_n$, называются *равносильными*, если набор предметов $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$ превращает первый предикат в истинное высказывание $P(a_1, ..., a_n)$ в том и только в том случае, когда этот набор предметов превращает второй предикат в истинное высказывание $Q(a_1, ..., a_n)$. Другими словами, предикаты $P(x_1, ..., x_n)$ и $Q(x_1, ..., x_n)$ равносильны тогда и только тогда, когда их множества истинности совпадают.

Предикат $Q(x_1, ..., x_n)$, заданный над множествами $M_1, .., M_n$, называется *следствием* предиката $P(x_1, ..., x_n)$, заданного над теми же множествами, если он превращается в истинное высказывание на всех тех наборах значений предметных переменных из соответствующих множеств, на которых в истинное высказывание превращается предикат $P(x_1, ..., x_n)$.

Отрицанием n-местного предиката $P(x_1, .., x_n)$, определенного на множествах $M_1, ..., M_n$, называется новый n-местный предикат, определенный на тех же самых множествах, обозначаемый $\neg P(x_1, ..., x_n)$, который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых исходный предикат превращается в ложное высказывание.

Конъюнкцией n-местного предиката $P(x_1, ..., x_n)$, определенного на множествах $M_1, ..., M_n$ и m-местного предиката $Q(y_1, ..., y_m)$, определенного на множествах $N_1, ..., N_m$, называется новый $(n+m)$-местный предикат, определенный на множествах $M_1, ..., M_n, N_1, ..., N_m$, обозначаемый $P(x_1, ..., x_n) \wedge Q(y_1, ..., y_m)$, который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых оба исходных предиката превращаются в истинное высказывание.

Дизъюнкцией n-мерного предиката $P(x_1, ..., x_n)$, определенного на множествах $M_1, ..., M_n$ и m-местного предиката $Q(y_1, ..., y_m)$, определенного на множествах $N_1, ..., N_m$, называется новый $(n+m)$-местный предикат, определенный на множествах $M_1, ..., M_n$, $N_1, ..., N_m$, обозначаемый $P(x_1, ..., x_n) \vee Q(y_1, ..., y_m)$, который превращается в истинное высказывание при тех и только тех значениях предметных переменных, при которых в истинное высказывание превращается по меньшей мере один из исходных предикатов.

Импликацией $P(x_1, ..., x_n) \to Q(y_1, ..., y_m)$ двух предикатов $P(x_1, ..., x_n)$ и $Q(y_1, ..., y_m)$, определенных на множествах $M_1, ..., M_n$ и $N_1, ..., N_m$, соответственно, называют предикат, определенный на множествах $M_1, ..., M_n, N_1, ..., N_m$ такой, что для любых предметов $a_1 \in M_1, ..., a_n \in M_n$ и $b_1 \in N_1, ..., b_m \in N_m$ высказывание $P(a_1, ..., a_n) \to Q(b_1, ..., b_m)$ является импликацией высказываний $P(a_1, ..., a_n)$ и $Q(b_1, ..., b_m)$.

Эквивалентностью $P(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow Q(y_1, ..., y_m)$ двух предикатов $P(x_1, ..., x_n)$ и $Q(y_1, ..., y_m)$, определенных на множествах $M_1, ..., M_n$ и $N_1, ..., N_m$ соответственно, называют предикат, определенный на множествах $M_1, ..., M_n, N_1, ..., N_m$ такой, что для любых предметов $a_1 \in M_1, ..., a_n \in M_n$ и $b_1 \in N_1, ..., b_m \in N_m$ высказывание $P(a_1, ..., a_n) \leftrightarrow Q(b_1, ..., b_m)$ является эквивалентностью высказываний $P(a_1, ..., a_n)$ и $Q(b_1, ..., b_m)$.

Операцией связывания квантором всеобщности по переменной x_1 называется правило, по которому каждому n-местному $(n \geq 2)$ предикату $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенному на множествах $M_1, ..., M_N$, ставится в соответствие новый $(n-1)$- местный предикат, обозначаемый $(\forall x_1)P(x_1, ..., x_n)$, который для любых предметов $a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$ превращается в высказывание $(\forall x_1)P(x_1, a_2, ..., a_n)$, истинное в том и только в том случае, когда одноместный предикат $P(x_1, a_2, ..., a_n)$, определенный на множестве M_1, тождественно истинен, и в ложное – в противном случае.

Операцией связывания квантором существования по переменной x_1 называется правило, по которому каждому n-местному $(n \geq 2)$ предикату $P(x_1, ..., x_n)$, определенному на множествах $M_1, ..., M_n$, ставится в соответствие новый $(n-1)$-местный предикат, обозначаемый $(\exists x_1)(P(x_1, ..., x_n))$, который для любых предметов $a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$ превращается в высказывание $(\exists x_1)(P(x_1, a_2, ..., a_n))$, ложное в том и только в том случае, когда одноместный предикат $P(x_1, a_2, ..., a_n)$, определенный на множестве M_1, тождественно ложен, и истинное – в противном случае.

Задачи

1 Какие из следующих выражений являются предикатами:

а) x делится на 5 ($x \in N$);

б) Река x впадает в озеро Байкал (x пробегает множество названий рек);

в) $x^2 + 2x + 4$ ($x \in R$);

г) x есть брат y (x, y пробегает множество всех людей);

д) $ctg\frac{\pi}{2} = 1$;

е) Для всех вещественных чисел x выполняется равенство $x^2+x-6 = 0$.

2 Прочитайте следующие высказывания и определите, какие из них истинные, а какие ложные, считая, что все переменные пробегают множество действительных чисел.

а) $(\forall x)(\exists y)(x + y = 7)$;

б) $(\exists y)(\forall x)(x + y = 7)$;

в) $(\exists x)(\forall y)(x + y = 7)$;

г) $(\forall x)(\forall y)(x + y = 7)$;

д) $((\forall x)(\forall y)(x + y = 3)) \to (3 = 4)$;

е) $(\forall x)((x^2 > x)) \leftrightarrow ((x > 1) \vee (x < 0)))$;

ж) $(\exists b)(\forall a)(\exists x)(x^2 + ax + b = 0)$.

3 Из следующих предикатов с помощью кванторов постройте всевозможные высказывания и определите, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in R$):

а) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$;

б) $(x - 3)(x + 3) < x^2$;

в) $(x^2 + 1 = 0) \to ((x = 1) \vee (x = 2))$;

г) $sin(x) = sin(y)$;

д) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;

е) $|x - y| < 3$;

ж) $x^2 = 25$.

4 Найдите множества истинности следующих предикатов, заданных над указанными множествами:

а) x кратно 3, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

б) x кратно 3, $M = \{3, 6, 9, 12\}$;

в) x кратно 3, $M = \{2, 4, 5, 13\}$;

г) $x^2 + 4 > 0$, $M = R$;

д) $x^2 + x - 6 = 0$, $M = R$;

е) $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $M_1 = M_2 = R$;

ж) x_1 делит x_2, $M_1 = M_2 = \{2, 3, 4, 6\}$;

з) $|x_1| + x_2 > 12$, $M_1 = \{-2, 4, 8\}, M_2 = \{0, 7, 9, 11\}$.

5 Изобразите на координатной прямой или на координатной плоскости множества истинности следующих предикатов:

а) $(x > 2) \wedge (x < 2)$;

б) $(x > 2) \vee (x < 2)$;

в) $(x > 2) \leftrightarrow (x < 2)$;

г) $(x \geq 0) \wedge (y \leq 0)$;

д) $(x \geq 0) \vee (y \leq 0)$;

е) $(x \geq 0) \rightarrow (y \leq 0)$;

ж) $(x^2 + y^2 > 1) \leftrightarrow (xy < 0)$.

6 Зная множество P^+ и $\neg P^+$ истинности предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\neg P(x_1,\ x_2, ..., x_n)$, соответственно, заданных над одними и теми же множествами, найдите множество истинности следующих предикатов:

а) $P(x) \vee \neg P(x)$;

б) $P(x) \rightarrow \neg P(x)$;

в) $(P(x) \rightarrow \neg P(x)) \rightarrow \neg P(x)$;

г) $(P(x) \rightarrow \neg P(x)) \rightarrow P(x)$;

д) $(P(x) \vee \neg P(x)) \leftrightarrow (P(x) \rightarrow \neg P(x))$;

е) $\neg P(x) \rightarrow (P(x) \wedge \neg P(x))$.

7 Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – такие одноместные предикаты, заданные над одним и тем же множеством , что высказывание:

а) $(\exists x)(P(x) \rightarrow (\neg P(x) \vee \neg(\neg Q(x) \rightarrow P(x))))$ – истинно; докажите, что высказывание $(\forall x)P(x)$ – ложно;

б) $(\forall x)(\neg P(x) \rightarrow (P(x) \vee \neg(\neg Q(x) \rightarrow P(x))))$ – ложно; докажите. что первое из высказываний $(\forall x)P(x)$ и $(\exists x)Q(x)$ – ложно, а второе – истинно.

8 Выясните, равносильны ли следующие предикаты, если их рассматривать над множеством действительных чисел R, над множеством рациональных чисел Q, над множеством целых чисел Z и над множеством натуральных чисел:

а) $5x^2 - 11x + 2 = 0$, $(x^2 - 3)(3x^2 - 7x + 2) = 0$;

б) $x^2 = 0$, $|x| \leq 0$;

в) $\sqrt{x}\sqrt{y} = 15$, $\sqrt{xy} = 15$;

г) $2^x 2^y = 4$, $2^{x+y} = 4$;

д) $lg(xy) = lg(x) + lg(t)$, $2^x 2^y = 2^{x+y}$.

9 Задайте множество так, чтобы над ним следующие предикаты были равносильны:

а) x кратно 3. x кратно 7.

б) Город x находится на берегу реки Волги. Город x находится на берегу реки Свияги.

в) Диагонали в четырехугольнике x равны. Четырехугольник x – ромб.

г) x – треугольник. Биссектриса одного из внутренних углов треугольника x является его медианой.

д) x – цилиндр. x – конус.

10 Определите, является ли один из следующих предикатов, заданных на множестве действительных чисел, следствием другого.

а) $|x| < 3$, $x^2 - 3x + 2 = 0$;

б) $x - 1 > 0$,$(x - 2)(x + 5) = 0$;

в) $sinx = 3$, $x^2 + 5 = 0$;

г) $-5 < x$, $x < 5$;

д) $x^2 < y$, $y \geq 0$.

Практическое занятие № 5

Тема. Формулы алгебры предикатов. Основные равносильности и законы алгебры предикатов. Нормальные формы. Исчисление предикатов.

Теоретический материал

Формула алгебры предикатов

1 Каждая нульместная предикатная переменная есть формула.

2 Если $P(x_1, ..., x_n)$ – n-местная предикатная переменная, то она есть формула, в которой все переменные $x_1, .., x_n$ свободные.

3 Если F – формула, то $\neg F$ – также формула. Свободные (связанные) предметные переменные в формуле $\neg F$ те и только те, которые являются свободными (связанными) в F.

4 Если F_1, F_2 – формулы и, если предметные переменные, входящие одновременно в обе эти формулы, свободны в каждой из них, то выражения $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ также являются формулами. При этом предметные переменные, свободные (связанные) хотя бы в одной из формул F_1; F_2, называются свободными (связанными) и в новых формулах.

5 Если F – формула и x – предметная переменная, входящая в F, свободна, то выражения $(\exists x)F$ и $(\forall x)F$ также являются формулами, в которых переменная x связанная, а все остальные предметные переменные, входящие в формулу F свободны или связанны, остаются и в новых формулах, соответственно, такими же.

6 Никаких других формул алгебры предикатов нет.

Классификация формул логики предикатов

Формула логики предикатов называется *выполнимой* (*опровержимой*) на множествах $M_1, ..., M_n$, если при некоторой постановке вместо предикатных переменных конкретных предикатов из этих множеств она превращается в выполнимый (опровержимый) предикат.

Формула логики предикатов называется *тождественно истинной* (*тождественно ложной*) на множествах $M_1, ..., M_n$, если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов из этих множеств она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

Формула логики предикатов называется *общезначимой*, или *тавтологией* (*тождественно ложной или противоречием*), если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на каких угодно множествах, она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

Тавтологии логики предикатов

Теорема. Всякая формула, получающаяся из тавтологии алгебры высказываний заменой входящих в нее пропозиционных переменных произвольными предикатными переменными, является тавтологией логики предикатов.

Следующие формулы являются тавтологиями:

1) $\neg(\forall x)P(x) \leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x))$;

2) $\neg(\exists x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x))$;

3) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(P(x)) \wedge (\forall x)(Q(x))$;

4) $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow (\exists x)(P(x)) \vee (\exists x)(Q(x))$;

5) $(\forall x)(P(x) \vee Q) \leftrightarrow (\forall x)(P(x)) \vee Q$;

6) $(\exists x)(P(x) \wedge Q) \leftrightarrow (\exists x)(P(x)) \wedge Q$;

7) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q) \leftrightarrow (\exists x)(P(x)) \rightarrow Q$;

8) $(\exists x)(P(x) \rightarrow Q) \leftrightarrow (\forall x)(P(x)) \rightarrow Q$;

9) $(\forall x)(P \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow P \rightarrow (\forall x)(Q(x))$;

10) $(\exists x)(P \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow P \rightarrow (\exists x)(Q(x))$;

11) $(\exists x)(\exists y)P(x,y) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)(P(x;y))$;

12) $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)(P(x;y))$.

Нормальные формы

Приведенной формой для формулы логики предикатов называется такая равносильная ей формула, в которой имеются только операции $\neg, \vee, \wedge$, причем знаки отрицания относятся лишь к предикатным переменным и к высказываниям.

Предваренной нормальной формой для формулы логики предикатов называется такая ее приведенная форма, в которой все кванторы стоят в ее начале, а область каждого из них распространяется до конца формулы, т. е. это формула вида $(K_1 x_1), ..., (K_m x_m)(F(x_1, ..., x_n))$, где K_i есть один из кванторов, причем формула F не содержит кванторов и является приведенной формулой.

Алгоритм приведения формулы алгебры предикатов к виду предваренной нормальной форме.

1 Исключить всюду логические связки $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$ по правилам:
$(F_1 \leftrightarrow F_2) \equiv (F_1 \rightarrow F_2) \wedge (F_2 \rightarrow F_1) \equiv (\neg F_1 \vee F_2) \wedge (\neg F_2 \vee F_1)$;
$F_1 \rightarrow F_2 \equiv (\neg F_1 \vee F_2)$.

2 Продвинуть отрицание до элементарной формулы по правилам:
$\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)(\neg F)$;
$\neg(\exists x)F \equiv (\forall x)(\neg F)$;
$\neg(F_1 \wedge F_2) \equiv (\neg F_1 \vee \neg F_2)$;
$\neg(F_1 \vee F_2) \equiv (\neg F_1 \wedge \neg F_2)$.

3 Переименовать связанные переменные по правилу: «найти самое левое вхождение предметной переменной такое, что это вхождение связано некоторым квантором, но существует еще одно вхождение этой же переменной; затем сделать замену связанного вхождения на вхождение новой переменной». Операцию повторять пока возможна замена связанных переменных.

4 Вынести кванторы влево по законам алгебры предикатов.

5 Преобразовать бескванторную матрицу к виду КНФ.

Формула F называется $\forall$-*формулой*, если она представлена в ПНФ и содержит только кванторы всеобщности.

Для устранения кванторов существования из префикса формулы разработан алгоритм Сколема, вводящий сколемовскую функцию для связывания предметной переменной квантора существования с другими предметными переменными.

Алгоритм Сколема

1) Представить формулу в виде ПНФ.

2) Найти в префиксе самый левый квантор существования:

   а) если квантор находится на первом месте префикса, то вместо переменной, связанной квантором существования, подставить всюду предметную постоянную, отличную от встречающихся предметных постоянных в матрице формулы, а квантор существования удалить;

   б) если квантор находится не на первом месте префикса, т. е. $(\forall x_1), ..., (\exists x_i)...$, то выбрать $(i-1)$-местный функциональный символ, отличный от функциональных символов матрицы M, и выполнить замену предметных переменных x_i, связанных квантором существования, на функцию $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1})$ и квантор существования удалить.

3) Найти следующий справа квантор существования и перейти к исполнению шага 2, иначе – конец.

Исчисления предикатов

Если выполнить подстановку вместо пропозиционных переменных исчисления высказываний формулы алгебры предикатов, то каждая схема доказательств теоремы и каждая схема вывода заключения сохраняются в исчислении предикатов. Однако для кванторных операций можно выделить свои правила вывода:

1) $\frac{(\forall x)F(x)}{F(t)}$.

2) $\frac{F(t)}{(\forall x)F(x)}$.

3) $\frac{F_1(t)\to F_2(x)}{F_1(t)\to(\forall x)(F_2(x))}$.

4) $\frac{F(t)}{(\exists x)F(x)}$.

5) $\frac{F_1(x)\to F_2(t)}{(\exists x)(F_1(x))\to F_2(t)}$.

Правила унификации предикатов

Подстановка q – это конечное множество вида $\{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$, где каждая v_i – переменная, каждый t_i – терм, отличный от v_i, все v_i различны.

Подстановка q называется унификатором для множества $\{E_1, \ldots, E_k\}$ тогда и только тогда, когда $E_1q = E_2q = E_kq$. Множество $\{E_1, \ldots, E_k\}$ унифицируемо, если для него существует унификатор.

Унификация производится при следующих условиях:

1 термы-константы унифицируемы тогда и только тогда, когда они совпадают;

2 если в первой формуле терм – переменная, а во второй константа, то они унифицируемы, при этом вместо переменной подставляется константа;

3 если терм в первой формуле – переменная и во второй формуле терм – переменная, то они унифицируемы;

4 если в первой формуле терм – переменная, а во второй – функциональная переменная, то они унифицируемы, при этом вместо переменной подставляется функциональная переменная;

5 унифицируются между собой термы, стоящие на одинаковых местах в одинаковых предикатах.

Метод резолюций

1 Принять отрицание следствия.

2 Все посылки и отрицание следствия привести к сколемовской нормальной форме.

3 Удалить кванторы всеобщности, введя термы.

4 Сформировать множество дизъюнктов.

5 Формирование резольвенты с использованием правил унификации.

6 Повторять формирование резольвенты до тех пор, пока не получим пустую резольвенту.

Задачи

1 Записать следующие высказывания:

а) «Всем млекопитающим необходима вода»;

б) «Некоторые млекопитающие не едят рыбу»;

в) «Не существует млекопитающих без органов зрения»;

г) «Существуют только два льва»;

д) «В Лондоне живет мужчина, имеющий сестру в Москве»;

е) «Кто-то встретил кого-то, а кто-то так не встретил никого».

2 Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями:

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x).$$

3 Применяя равносильные преобразования, приведите следующие формулы к предваренной нормальной форме:

$$(\forall x)P(x,y) \vee ((\exists)P(x,x) \to (\forall z)(\neg Q(y,z) \to (\exists x)P(x,z))).$$

4 Найти сколемовскую стандартную форму для следующей формулы:

$$(\forall x)(\exists y)((\forall z)P(x,y,z) \wedge ((\exists u)Q(x,u) \to (\exists v)Q(y,v))).$$

5 Существуют ученики, которые не любят учителей. Ни один из учеников не любит невежд. Докажите, что ни один учитель не является невеждой.

6 Пусть брадобреи бреют всех людей, которые не бреются сами, и не бреют тех, кто бреется сам. Докажите, что брадобреев не существуют.

7 Все программисты не любят тестировать свой код. Каждый выпускник специальности «Программное обеспечение автоматизированных систем (ПОВТ)» становятся программистом. Докажите, что все выпускники ПОВТ не любят тестировать свой код.

Практическое занятие № 6

Тема. Нечеткие множества. Операции над нечеткими множествами. Нечеткие числа. Нечеткие отношения. Нечеткие высказывания и предикаты.

Теоретический материал

Пусть E – универсальное множество, x – элемент E, а R – некоторое свойство.

Нечеткое подмножество A универсального множества E определяется как множество упорядоченных пар:

$$A = \{\mu_A(x)/x\},$$

где $\mu_A(x)$ – характеристическая функция, принимающая значения в некотором вполне упорядоченном множестве M (например, $M = [0; 1]$).

Основные характеристики нечетких множеств

Пусть $M = [0, 1]$ и A – нечеткое множество с элементами из универсального множества E и множеством принадлежностей M.

1 Величина $\sup_{x\in E} \mu_A(x)$ называется высотой нечеткого множества A. Нечеткое множество нормально, если его высота равна 1, т. е. верхняя граница его функции принадлежности равна 1. При $\sup_{x\in E} \ \mu_A(x) < 1$ нечеткое множество называется субнормальным. Непустое субнормальное множество можно нормализовать по формуле:

$$\mu_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{\sup_{x\in E} \mu_A(x)}.$$

2 Нечеткое множество пусто, если $\forall x \in E \ \mu_A(x) = 0$.

3 Нечеткое множество унимодально, если $\mu_A(x) = 1$ только на одном x из E.

4 Носителем нечеткого множества A является обычное подмножество со свойством $\mu_A(x) > 0$.

5 Элементы $x \in E$, для которых $\mu_A(x) = 0{,}5$, называются точками перехода множества A.

Логические операции над нечеткими множествами.

1 **Включение.** Пусть A и B – нечеткие множества на универсальном множестве E. Говорят, что A содержится в B, если $\forall x \in E \ \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.

2 **Равенство.** A и B равны, если $\forall x \in E \ \mu_A(x) = \mu_B(x)$.

3 **Дополнение.** Пусть $M = [0, 1]$, A и B – нечеткие множества, заданные на E. A и B дополняют друг друга, если $\forall x \in E$ $\mu_A(x) = 1 - \mu_B(x)$.

4 **Пересечение.** $A \cap B$ – наибольшее нечеткое подмножество, содержащее одновременно A и B:

$$\mu_{A \cap B}(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

5 **Объединение.** $A \cup B$ – наименьшее нечеткое подмножество, включающее как A, так и B, с функцией принадлежности:

$$\mu_{A \cup B}(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

6 **Разность.** $A - B$ – нечеткое множество с функцией принадлежности:

$$\mu(x) = max(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)).$$

7 **Алгебраическое произведение** A и B обозначается $A \cdot B$ и определяется функцией принадлежности:

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x).$$

8 **Алгебраическая сумма** A и B обозначается $A + B$ и определяется функцией принадлежности:

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x).$$

Лингвистическая переменная

Нечеткая переменная характеризуется тройкой $< \alpha, X, A >$, где α – наименование переменной; X – универсальное множество; A – нечеткое множество на X, описывающее ограничения на значения нечеткой переменной α.

Лингвистической переменной называется набор $< \beta, \Gamma, X, G, M >$, где β – наименование лингвистической переменной; Γ – множество ее значений (терм-множество), представляющих собой наименования нечетких переменных, областью определения каждой из которых является множество X. Множество Γ называется базовым терм-множеством лингвистической переменной; G – синтаксическая процедура, позволяющая оперировать элементами терм-множества Γ, в частности, генерировать новые термы (значения). M – семантическая процедура, позволяющая превратить каждое новое значение лингвистической переменной, образуемое процедурой G, в нечеткую переменную, т. е. сформировать соответствующее нечеткое множество.

Нечеткие числа

Нечеткие числа – нечеткие переменные, определенные на числовой оси, т. е. нечеткое число определяется как нечеткое множество на множестве действительных чисел R с функцией принадлежности $\mu_A(x) \in [0,1]$, где x – действительное число.

Расширенные бинарные арифметические операции (сложение, умножение и пр.) для нечетких чисел определяются через соответствующие операции для четких чисел с использованием принципа обобщения следующим образом.

Пусть A и B – нечеткие числа, и $*$ – нечеткая операция, соответствующая произвольной алгебраической операции $*$ над обычными числами. Тогда (используя здесь и в дальнейшем обозначения $\cap_x$ вместо max_x и $\cup_x$ вместо min_x) можно записать:

$$C = A * B : \mu_C(z) = \cup_{Z=X*Y}(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)).$$

Нечеткие отношения Пусть $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ — прямое произведение универсальных множеств и M — некоторое множество принадлежностей. Нечеткое n-арное отношение определяется как нечеткое подмножество R на E, принимающее свои значения в M. В случае $n = 2$ и $M = [0,1]$ нечетким отношением R между множествами $X = E_1$ и $Y = E_2$ будет называться функция R: $(X,Y) \to [0,1]$, которая ставит в соответствие каждой паре элементов $(x,y) \in X \times Y$ величину $\mu_R(x,y) \in [0,1]$. Нечеткое отношение на $X \times Y$ запишется в виде $x \in X, y \in Y : xRy$.

Операции над нечеткими отношениями.

1 *Объединение двух отношений R_1 и R_2.* Объединение двух отношений обозначается $R_1 \cup R_2$ и определяется выражением:

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x,y) = max(\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,y)).$$

2 *Пересечение двух отношений.* Пересечение двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \cap R_2$ и определяется выражением:

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x,y) = min(\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,y)).$$

3 *Алгебраическое произведение двух отношений.* Алгебраическое произведение двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \cdot R_2$ и определяется выражением:

$$\mu_{R_1 \cdot R_2}(x,y) = \mu_{R_1}(x,y) \cdot \mu_{R_2}(x,y).$$

4 *Алгебраическая сумма двух отношений.* Алгебраическая сумма двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 + R_2$ и определяется выражением:

$$\mu_{R_1 + R_2}(x,y) = \mu_{R_1}(x,y) + \mu_{R_2}(x,y) - \mu_{R_1}(x,y)\mu_{R_2}(x,y).$$

5 *Дополнение отношения.* Дополнение отношения R обозначается $\neg R$ и определяется функцией принадлежности:

$$\mu_{\neg R}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y).$$

6 *Композиция двух нечетких отношений.* Пусть R_1— нечеткое отношение $R_1 : (X \times Y) \to [0,1]$ между X и Y, и R_2 — нечеткое отношение $R_2 : (Y \times Z) \to [0,1]$ между Y и Z. Нечеткое отношение между X и Z, обозначаемое $R_2 \circ R_1$, определяется выражением:

$$\mu_{R_2 \circ R_1}(x,z) = \cup_y(\mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(y,z)).$$

Нечеткие высказывания – повествовательное предложение, истинность которого принимает значение от $[0;1]$.

Нечеткое высказывание, истинность которого равна 0.5, называется *индифферентностью.*

Операции над нечеткими высказываниями.

1 *Отрицанием* нечеткого высказывания A называется нечеткое высказывание, обозначаемое $\neg A$, степень истинности которого определяется выражением:

$$\lambda(\neg A) = 1 - \lambda(A).$$

2 *Конъюнкцией* нечетких высказываний A, B называется нечеткое высказывание, обозначаемое $A \wedge B$, степень истинности которого определяется следующим образом:

$$\lambda(A \wedge B) = min(\lambda(A), \lambda(B)).$$

3 *Дизъюнкцией* нечетких высказываний A, B называется нечеткое высказывание, обозначаемое $A \vee B$, степень истинности которого находится как:

$$\lambda(A \vee B) = max(\lambda(A), \lambda(B)).$$

4 *Импликацией* нечетких высказываний A, B называется нечеткое высказывание, обозначаемое $A \to B$, степень истинности которого определяется выражением:

$$\lambda(A \to B) = max(1 - \lambda(A), \lambda(B)).$$

5 *Эквивалентностью* нечетких высказываний A, B называется нечеткое высказывание, обозначаемое $A \leftrightarrow B$, степень истинности которого определяется выражением:

$$A \leftrightarrow B = min(max(1 - \lambda(A), \lambda(B)), max(1 - \lambda(B), \lambda(A))).$$

Нечеткие логические формулы

Нечеткая высказательная переменная x_i – переменная, определенная на множестве нечетких высказываний.

Нечеткая логическая формула обладает следующими признаками.

1 Любая высказательная переменная есть формула.

2 Если A – формула, то $\neg A$ есть формула.

3 Если A и B – формулы, то $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$ есть формулы.

4 Если A – формула, то (A) есть формула.

5 Других формул нет.

Если на всех определенных наборах степени истинности нечетких переменных $x_1, ..., x_n$ значение степени истинности формулы:

1) ≥ 0.5, то формула *нечетко истинна*,

2) ≤ 0.5, формула *нечетко ложная.*

Степень равносильности двух формул A и B обозначается $\mu(A(x), B(x))$ на некотором наборе $\{x_1, ..., x_m\}$ и определяется выражением:

$$\mu(A(x), B(x)) = (A(x_1) \leftrightarrow B(x_1)) \wedge .. \wedge (A(x_m) \leftrightarrow B(x_m)).$$

Если $\mu(A(x), B(x)) \geq 0.5$, то формулы *нечетко равносильны* $(A(x) \approx B(x))$.

Некоторые соотношения, справедливые для любых наборов значений истинности нечетких высказываний:

1) $\neg(\neg x) \approx x$;

2) $x \wedge x \approx x$;

3) $x \vee x \approx x$;

4) $\neg(x \wedge y) \approx \neg x \vee \neg y$;

5) $\neg(x \vee y) \approx \neg x \wedge \neg y$;

6) $x \to y \approx \neg x \vee y$;

7) $x \wedge F \approx F$;

8) $x \wedge T \approx x$;

9) $x \vee F \approx x$;

10) $x \vee T \approx T$.

Нечеткие предикаты

Нечетким предикатом, определенном на множествах $M_1, ..., M_n$, называется предложение, зависящее от переменных $x_1, ..., x_n$, которое превращается в нечеткое высказывание при подстановке вместо $x_1, ..., x_n$ элементов $a_1, ..., a_m$ из множеств $M_1, ..., M_n$.

Выделяют нульместные, одноместные, двухместные и т. д. нечеткие предикаты. Местность предиката зависит от количества предметных переменных.

Классификация предикатов

1 Если для всех предметов $\lambda(P(x)) \geq 0.5$, то предикат называют *тождественно истинным нечетким предикатом.*

2 Если для всех предметов $\lambda(P(x)) \leq 0.5$, то предикат называют *тождественно ложным нечетким предикатом.*

3 Если существует предмет a, для которого $\lambda(P(a)) \geq 0.5$, то предикат называют *выполнимым нечетким предикатом.*

4 Если существует предмет a, для которого $\lambda(P(a)) \leq 0.5$, то предикат называют *опровержимым нечетким предикатом.*

Операции над нечеткими предикатами

1 *Отрицанием* нечеткого предиката $P(x_1, ..., x_n)$, определенного на множествах $M_1, ..., M_n$, называется предикат $\neg P(x_1, ..., x_n)$ такой, что $\forall a_i \in M_i, i = 1, ..., n$ $\lambda(\neg P(a_1, ..., a_n)) = 1 - \lambda(P(a_1, ..., a_n))$.

2 *Дизъюнкцией* нечетких предикатов $P(x_1, ..., x_n)$ и $Q(y_1, ..., y_n)$, определенных на множествах $M_1, ..., M_n$ и $N_1, ..., N_m$, соответственно, называется $(n + m)$-местный предикат $P(x_1, ..., x_n) \vee Q(y_1, ..., y_n)$ такой, что $\forall a_i \in M_i, b_j \in N_j$, $i = 1, ..., n$; $j = 1, ..., m$, $\lambda(P(a_1, ..., a_n) \vee Q(b_1, ..., b_n)) = max(\lambda(P(a_1, ..., a_n)), \lambda(P(b_1, ..., b_n)))$.

3 *Конъюнкцией* нечетких предикатов $P(x_1, ..., x_n)$ и $Q(y_1, ..., y_n)$, определенных на множествах $M_1, ..., M_n$ и $N_1, ..., N_m$, соответственно, называется $(n + m)$-местный предикат $P(x_1, ..., x_n) \wedge Q(y_1, ..., y_n)$ такой, что $\forall a_i \in M_i, b_j \in N_j$, $i = 1, ..., n$; $j = 1, ..., m$, $\lambda(P(a_1, ..., a_n) \wedge Q(b_1, ..., b_n)) = min(\lambda(P(a_1, ..., a_n)), \lambda(P(b_1, ..., b_n)))$.

4 *Импликацией* нечетких предикатов $P(x_1, ..., x_n)$ и $Q(y_1, ..., y_n)$, определенных на множествах $M_1, ..., M_n$ и $N_1, ..., N_m$, соответственно, называется $(n + m)$-местный предикат $P(x_1, ..., x_n) \to Q(y_1, ..., y_n)$ такой, что $\forall a_i \in M_i, b_j \in N_j, i = 1, ..., n; j = 1, ..., m$, $\lambda(P(a_1, ..., a_n) \to Q(b_1, ..., b_n)) = max(1 - \lambda(P(a_1, ..., a_n)), \lambda(P(b_1, ..., b_n)))$.

5 *Эквивалентностью* нечетких предикатов $P(x_1, ..., x_n)$ и $Q(y_1, ..., y_n)$, определенных на множествах $M_1, ..., M_n$ и $N_1, ..., N_m$, соответственно, называется $(n+m)$-местный предикат $P(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow Q(y_1, ..., y_n)$ такой, что $\forall a_i \in M_i, b_j \in N_j, i = 1, ..., n; j = 1, ..., m,\ \lambda(P(a_1, ..., a_n) \rightarrow Q(b_1, ..., b_n)) = min(max(\lambda(P(a_1,\ ..., a_n)), 1 - \lambda(P(b_1, ..., b_n))), max(1 - \lambda(P(a_1, ..., a_n)), \lambda(P(b_1, ..., b_n))))$.

Степень всеобщности предиката $P(x)$ на наборах $x_1, ..., x_n$ определяется выражением:

$$\lambda((\forall x)P(x)) = min(\lambda(P(x_1)), ..., \lambda(P(x_n))).$$

Если $\lambda((\forall x)P(x)) \geq 0.5$, то на переменную x предиката P может быть наложен квантор всеобщности.

Степень существования предиката $P(x)$ на наборах $x_1, ..., x_n$ определяется выражением:

$$\lambda((\exists x)P(x)) = max(\lambda(P(x_1)), ..., \lambda(P(x_n))).$$

Если $\lambda((\exists x)P(x)) \geq 0.5$, то на переменную x предикат P может быть наложен квантор существования.

Задачи

1 Пусть на множестве $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ заданы следующие нечеткие множества:
$A = 0,5/x_1 + 0,1/x_2 + 0,1/x_3 + 0,9/x_4$;
$B = 0,3/x_1 + 0,6/x_2 + 0,2/x_3 + 0,6/x_4$;
$C = 0,4/x_1 + 0,6/x_2 + 0,4/x_3 + 0,2/x_4$.
Найти: $\neg A$, $A - B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $A \oplus C$.

2 Пусть дано универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, ..., 10\}$. Построить нечеткое множество «Множество чисел, чуть меньших 7». Найти высоту получившегося множества, его точку перегиба, определить его принадлежность к нормальному множеству и найти множество уровня 0,7.

3 Даны два нечетких числа:
$A = 0.5/2 + 1/3 + 0.3/4$
$B = 0.7/3 + 0.9/5 + 0.6/6$.
Найдите их сумму, произведение, частное, минимальное и максимальное значения.

4 Пусть A – нечеткое множество «примерно от 2 до 6», а B – «чуть больше 5». Определите функцию принадлежности к данным нечетким множествам RL-типа. Графически изобразите результат объединения и пересечения данных множеств.

5 Задайте на универсуме от 0 до 100 следующие нечеткие множества: «Очень маленькое число», «Среднее по значению число», «Чуть больше 50», «Намного больше 30», «Очень большое число».

6 Определите нечеткое отношение «x примерно равен y» для следующих множеств:

$$X = \{3, 4, 5\}$$
$$Y = \{4, 5, 6\}.$$

7 Задать нечеткое отношение «Схожий менталитет» на множестве {украинец, чех, австриец, немец}.

8 Заданы нечеткие отношения:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $\neg A$, $A - B$, $A \oplus B$, $A \cdot B$, $A + B$.

9 Определить значение истинности формул:

а) $(A \to B \wedge C) \wedge (C \to B \vee A) \wedge (B \to C \wedge A)$.
$\lambda(A) = 0,3; \lambda(B) = 0,7; \lambda(C) = 0,15$.

б) $\neg(A \to B) \to (C \vee B)$.
$\lambda(A) = 0,15; \lambda(B) = 0,8; \lambda(C) = 0,78$.

в) $((\neg A \vee B) \to (\neg B \wedge C)) \to (A \vee C)$.
$\lambda(A) = 0,75; \lambda(B) = 0,35; \lambda(C) = 0,22$.

10 Определить степень равносильности формул:
$A_1(x, y) = \neg x \to y$;
$A_2(x, y) = x \wedge \neg y$;
$x \in \{0,8; 0,6; 0,7\}$
$y \in \{0,3; 0,4; \}$.

11 Пусть даны предикаты:
$P_1(x) = x^2 - 3x + 2 \approx 0$;
$P_2(x) = x$ – большое число.
Задать графически характеристические функции и построить результаты применения основных операций над предикатами.

12 Пусть даны предикаты:
$P_1(x, y)$=«x любит есть y»; $P_2(x)$ = «y невредная еда»;
$x \in \{$ пельмени, борщ, фуагра, торт, гамбургер $\}$.
$y \in \{$ Иванов, Петров, Сидоров $\}$.

Задать матрицу и вектор истинности предикатов для всех возможных значений предметов. Определить значения истинности основных операций.

13 Пусть дан предикат $P(x) =$ «x живет центре города», определенный на множестве студентов вашей группы. Определите значение истинности следующих высказываний:

а) $(\exists x)P(x)$;

б) $(\forall x)P(x)$.

Теория алгоритмов

Практическое занятие № 7

Тема. Машина Тьюринга. Частично рекурсивные функции.

Теоретический материал

Идея создания машины Тьюринга, предложенная английским математиком А. Тьюрингом в тридцатых годах XX века, связана с его попыткой дать точное математическое определение понятия алгоритма.

Машина Тьюринга (МТ) – это математическая модель идеализированной цифровой вычислительной машины. В ее состав входит:

1) **лента** бесконечной длины, разбитая на ячейки. В клетки в дискретный момент времени может быть записан только один символ (буква) из внешнего алфавита $A = \{\Lambda, a_1, ..., a_n\}$. Пустая ячейка обозначается символом Λ, а сам символ Λ называется пустым, при этом остальные символы называются непустыми;

2) **считывающая головка** перемещается вдоль ленты так, что в каждый момент времени она обозревает ровно одну ячейку ленты. Головка может считывать содержимое ячейки и записывать в нее новый символ из алфавита A. В одном такте работы она может сдвигаться только на одну ячейку вправо (R), влево (L) или оставаться на месте (N);

3) **внутренняя память машины** представляет собой некоторое конечное множество внутренних состояний $Q = \{q_0, .., q_m\}$. Два состояния машины имеют особое значение: q_1 – начальное внутреннее состояние (начальных внутренних состояний может быть несколько), q_0 – заключительное состояние или стоп-состояние (заключительное состояние всегда одно);

4) **Устройство управления** в каждый момент t в зависимости от считываемого в этот момент символа на ленте и внутреннего состояния машины выполняет следующие действия:

   а) изменяет считываемый в момент t символ a_i на новый символ a_j (в частности оставляет его без изменений, т. е. $a_i = a_j$).);

   б) может передвинуть головку;

   в) изменяет имеющееся в момент t внутреннее состояние машины q_i на новое q_j, в котором будет машина в момент времени $t+1$ (может быть, что $q_i = q_j$).

Программа для машины Тьюринга представляет собой таблицу, в каждой клетке которой записана команда. Клетка (a_j, R, q_j) определяется тремя параметрами: символом алфавита (a_j), который будет записан в ячейку ленты, куда переместится считывающая головка, и в какое состояние перейдет МТ.

	a_1	...	a_m
q_1	...	a_j, L, q_t	...
...	...	...	...
q_l	...	a_k, R, q_n	...

В 30-х годах XX века (Гедель, Клини, Черч) предложили новую модель формализации алгоритма частично рекурсивных функций. Данный класс определяется путем указания конкретных исходных функций и фиксированного множества операций получения новых функций из заданных.

В качестве базисных функций берутся следующие:

1 нуль-функция: $o(x) = 0$;

2 функция следования: $s(x) = x + 1$;

3 функции выбора аргументов: $I_n^m(x_1, ..., x_n) = x_m$.

Допустимыми операциями над функциями являются операции суперпозиции (подстановки), рекурсии и минимизации.

1 **Операция суперпозиции.** Пусть даны n-местная функция G и n функций $f_1, ..., f_n$. Считаем, что функции $f_1, ..., f_n$ зависят от одних и тех же переменных $x_1, ..., x_m$. Это можно сделать путем введения фиктивных переменных. Суперпозицией (подстановкой) функций G и $f_1, ..., f_n$ называется функция
$h(x_1, ..., x_m) = g(f_1(x_1, ..., x_m), ..., f_n(x_1, ..., x_m))$.

2 **Операция примитивной рекурсии**. Пусть заданы n-местная функция $g_1(x_1, ..., x_n)$ и $(n+2)$-местная функция $h(x_1, ..., x_n, y, z)$. Определим $(n+1)$-местную функцию f индуктивным образом с помощью соотношений:
$f(x_1, ..., x_n, 0) = g(x_1, ..., x_n)$
$f(x_1, ..., x_n, y+1) = h(x_1, ..., x_n, y, f(x_1, ..., x_n, y))$.

3 **Операция минимизации.** Пусть задана n-местная функция $g(x_1, ..., x_{n-1}, y)$. Зафиксируем набор $(x_1, ..., x_{n-1})$ и рассмотрим уравнение относительно y: $g(x_1, ..., x_{n-1}, y)$. Будем решать данное уравнение, вычисляя последовательно $g(x_1, ..., x_{n-1}, 0)$, $g(x_1, ..., x_{n-1}, 1)$, ... и сравнивая с x_n. Наименьшее y, для которого выполнено исходное уравнение обозначим через $\mu_y(g(x_1, ..., x_{n-1}, y) = x_n)$. При этом считаем, что y определено, если $g(x_1, .., x_{n-1}, z)$ определено при всех $z \leq y$. В противном случае считаем, что y не определено.

Функция $f(x_1, .., x_n)$ называется *частично рекурсивной*, если она может быть получена из базисных функций применением конечного числа раз операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

Тезис Черча. Класс алгоритмически вычислимых функций совпадает с классом всех частично рекурсивных функций. Принятие данного тезиса позволяет истолковывать доказательство, что некоторая функция не является частично рекурсивной, как доказательство отсутствия алгоритма вычисления ее значений.

Задачи

1 Пусть дан алфавит $A = \{0; 1\}$. На ленте находятся символы алфавита А, например, 01100111100. Необходимо составить программу, которая заменит 1 на 0 и 0 на 1 и вернется в первоначальное состояние.

2 Создать машину Тьюринга, которая первый символ непустого слова перенесет в его конец.

3 Создать машину Тьюринга, которая складывает десятичное число на ленте с числом 2.

4 Пусть дан входной алфавит $A = \{a, b, c\}$. Построить машину Тьюринга, которая удаляет из входного слова символ a.

5 Пусть дан входной алфавит $A = \{a, b, c\}$. Построить машину Тьюринга, которая симметрично отображает входное слово.

6 Пусть дан входной алфавит $A = \{a, b, c, d\}$. Построить машину Тьюринга, которая удваивает слово.

7 Построить машину Тьюринга, которая считает сумму двузначных чисел.

8 Пусть дан входной алфавит $A = \{a, b, c\}$. Построить машину Тьюринга, которая считает количество вхождений символа a.

9 Пусть дан входной алфавит $A = \{a, b, c\}$. Построить машину Тьюринга, которая заменяет символ a на bc.

10 Показать, что следующие функции являются частично-рекурсивными:

а) x^y;

б) $min(x, y)$;

в) $max(x, y)$.

11 Показать, что следующие функции являются примитивно рекурсивными:

а) $rt(u, v) = \sqrt[n]{x}$;

б) $log(i, x) = log_i x$;

в) $p(x)$ – простое число.

12 Пусть $F(x)$ задана соотношениями: $F(0) = 1$, $F(1) = 1$, $F(x) = F(x) + F(x-1)$. Показать, что данная функция является частично-рекурсивной.

13 Показать, что кусочно-заданная функция

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x = 0,1,2,3; \\ 3x, & x = 4,5,6; \\ 5, & x > 6. \end{cases} \quad \text{является частично-рекурсивной.}$$

14 Обосновать примитивную рекурсивность функции $f(x, y) = x + (2 - y)$.

15 Применить операцию минимизации к функции $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \neq 2; \\ notdeterm & x = 2. \end{cases}$ Результирующую функцию представить в аналитическом виде.

16 Обосновать вычислимость следующих функций:

а) $f(x, y, z) = \left[\frac{2}{(x+2)}\right](x - sg(2^x - y)) - (x+1)^3$.

б) $\left(\frac{yz}{x-1} + 2^{[x/2]}\right)((x^2 - y) + z)$.

Практическое занятие № 8

Тема. Оценка сложности алгоритмов.

Теоретический материал

Определение трудоемкости алгоритма

В качестве основной характеристики сложности алгоритма мы будем рассматривать число шагов t исполнения алгоритма. Однако t зависит от исходных данных задачи. Зависимость эта в большинстве случаев является весьма сложной, и не всегда ее возможно анализировать непосредственно.

Принято входные данные V алгоритма характеризовать одним параметром или несколькими параметрами. Одной из таких характеристик является объем входных данных – число элементов входных данных.

Так как число шагов алгоритма зависит не только от выбранных в задаче параметров $P = (n, m, ...)$, характеризующих объем входных данных $V = (P, X)$, но и от других характеристик входных данных $X = (x_1, x_2, ...)$, то мы введем оценку по всем этим характеристикам. Оценка наибольшего числа шагов, необходимых для выполнения алгоритма, в зависимости от параметров P:

$$t = t(P, X) \leq max\ t(P, X) \equiv T(P)$$

называется максимальной трудоемкостью алгоритма или просто трудоемкостью алгоритма.

Максимальная трудоемкость дает нам возможность оценить максимальное время, необходимое для исполнения алгоритма. Эта оценка может быть очень завышенной в некоторых случаях. Поэтому важно иметь оценку наименьшего числа шагов, которую мы назовем минимальной трудоемкостью:

$$t = t(P, X) \geq min\ t(P, X) \equiv T_{min}(P)$$

и оценку среднего числа шагов, которую мы назовем средней трудоемкостью:

$$t = t(P, X) = \tfrac{1}{k} \textstyle\sum_X t(P, X) \equiv T_{av}(P),$$

где k – число вариантов других характеристик входных данных.

Оценка трудоемкости алгоритма

Трудоемкость алгоритма позволяет оценить время выполнения алгоритма при решении той или иной задачи:

$T \leq \tau T(n)$.

Однако точный вид зависимости $T(n)$ от аргумента n часто очень трудно (практически невозможно) установить. Поэтому вместо установления вида функции для трудоемкости оценивается быстрота роста этой функции при помощи некоторой простой функции $f(n)$.

Говорят, что

$$T(n) = O(f(n)),$$

если $|T(n)| \le C|f(n)|$ для всех значений $n > n_0$. Такая оценка роста функции $T(n)$ является односторонней, так как функция $f(n)$ может расти быстрее. Лучше оценивать рост трудоемкости функцией $f(n)$, имеющей тот же порядок роста, т. е. также $|T(n)| \ge C_|f(n)|$. В этом случае пишут

$$T(N) = \Theta(f(n))$$

и говорят, что рост $T(n)$ оценивается ростом $f(n)$. Наиболее простыми функциями, оценивающими рост трудоемкости, являются полиномы $p(n) = n^k + c_1 n^{k-1} + ... + c_k$. В случае $T(n) = \Theta(p(n))$, учитывая, что $p(n) = \Theta(n^k)$, получаем $T(n) = \Theta(n^k)$. Говорят, что в этом случае трудоемкость полиномиальна или алгоритм имеет полиномиальную трудоемкость. При $k = 1$ алгоритмы принято называть алгоритмами с линейной трудоемкостью.

Трудоемкость алгоритма может иметь скорость роста меньшую, чем линейная. Например, $T(n) = \Theta(\sqrt{n})$ или $T(n) = log_2(n)$. Но и в этом случае принято говорить о полиномиальной трудоемкости.

Алгоритмы, трудоемкость которых растет быстрее любого полинома, принято называть алгоритмами экспоненциальной трудоемкости, даже если скорость роста трудоемкости оценивается более медленной функцией, чем экспонента. Например, экспоненциальными являются все алгоритмы со следующими трудоемкостями:

$$T(n) = \Theta(2^b), T(n) = \Theta(2^{\sqrt{n}}), T(n) = \Theta(n^{n^2}).$$

Анализ алгоритмов и методика оценивания трудоемкости

Процесс получения оценки трудоемкости называется оцениванием трудоемкости. Для этого следует анализировать алгоритм с точки зрения быстроты роста числа его шагов при изменении параметров задачи (параметров входных данных).

Прежде всего в алгоритме следует выделить циклы. Если циклов нет, то число шагов линейной структуры алгоритма не зависит от параметров задачи и, следовательно, трудоемкость является константной, т. е. оценивается как $\Theta(1)$.

Если цикл B с числом повторений $n(B)$ вложен в цикл A с числом повторений $n(A)$ и циклы независимы (число повторений цикла B не зависит от выполнения цикла A), то общее число повторений цикла B с учетом повторений цикла A составляет $n(A) \cdot n(B)$. Отсюда правило:

для вложенных независимых циклов их трудоемкости перемножаются $\Theta(AB) = \Theta(A) \cdot \Theta(B)$.

Если вложенные циклы не являются независимыми, т. е. число повторений внутреннего цикла $n_i(B)$ зависит от номера i повторения при выполнении внешнего цикла, то нужно проанализировать, как зависит общее число повторений $\sum_{i=1}^{n(A)} n_i(B)$ внутреннего цикла от параметров задачи.

Если циклы не являются вложенными, то трудоемкость определяется наибольшей из трудоемкостей циклов:

$$\Theta(A + B) = \Theta(A) + \Theta(B) = max(\Theta(A), \Theta(B)).$$

Заметим теперь, что при оценке максимальной трудоемкости следует подбирать такие примеры входных данных для тех или иных параметров задачи, на которых реализуется максимальное число шагов алгоритма. При оценке минимальной трудоемкости следует подбирать примеры, на которых реализуется минимальное число шагов алгоритма. Ввиду сложности некоторых алгоритмов такие примеры не всегда удается построить, но в этих случаях для оценки трудоемкости бывает достаточно примеров и близких по числу операций к максимальному или, соответственно, к минимальному числу.

Задачи

1 Оценить сложность алгоритма поиска элемента в отсортированном и неотсортированном списке.

2 Оценить сложность алгоритма быстрой сортировки списка.

3 Оценить сложность алгоритма сортировки списка слиянием.

4 Оценить сложность алгоритма сортировки списка пузырьком.

5 Оценить сложность алгоритма вычисления числа Фибоначчи.

6 Оценить сложность алгоритма Дейкстры.

7 Оценить сложность алгоритма поиска корня нелинейного уравнения методом Ньютона.

ЧЕРЕПАНОВ ОЛЕГ СЕРГЕЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМА

Методические указания к выполнению контрольных работ для студентов направлений 10.05.03, 10.03.01 – «Информационная безопасность автоматизированных систем»

Редактор Л. П. Чукомина

……………………………………………………………………..……………

Подписано в печать 14.10.19	Формат 60х84 1/16	Бумага 65 г/м^2
Печать цифровая	Усл. печ. л. 2,75	Уч.-изд. л. 2,75
Заказ 147	Тираж 25	Не для продажи

……………………………………………………………………………..…

БИЦ Курганского государственного университета.
640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.