

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования «Курганский государственный университет»

Кафедра «Программное обеспечение автоматизированных систем»

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ
АЛГОРИТМОВ**

Методические указания к выполнению контрольных работ для
студентов направлений 10.05.03, 10.03.01 – «Информационная
безопасность автоматизированных систем»

Курган 2019

Кафедра: «Программное обеспечение автоматизированных систем»

Дисциплина: «Математическая логика и теория алгоритмов» (10.05.03, 10.03.01 – Информационная безопасность автоматизированных систем)

Составитель: канд. физ.-мат. наук, О.С. Черепанов

Утверждены на заседании кафедры «23» ноября 2018 г.

Рекомендованы методическим советом университета «20» декабря 2017 г.

Содержание

Введение	4
1 Общие требования к оформлению контрольной работы	4
2 Порядок защиты и критерии оценивания курсовой работы	5
3 Пример решения контрольной работы	6
4 Задания для выполнения контрольной работы	11
Приложение А	27

Введение

Методические указания составлены для выполнения контрольной работы по учебной дисциплине – «Математическая логика и теория алгоритмов» для студентов направления 10.05.03 – Информационная безопасность автоматизированных систем.

Целью контрольной работы является формирование практических навыков решения типовых задач по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов». В рамках контрольной работы студент должен решить ряд задач из следующих разделов дисциплины:

- 1) алгебра высказываний,
- 2) исчисление высказываний,
- 3) алгебра предикатов,
- 4) исчисление предикатов,
- 5) алгебра нечетких высказываний и предикатов,
- 6) теория алгоритмов.

1 Общие требования к оформлению контрольной работы

Контрольная работа имеет следующую структуру:

- 1) титульный лист;
- 2) оглавление;
- 3) текст работы;
- 4) библиографический список;
- 5) приложения (при необходимости).

Общий объем контрольной работы не должен превышать 20 страниц. Работа должна быть напечатана на листах с одной стороны бумаги формата А4. Каждый лист работы должен быть пронумерован, исключая титульный лист. Шрифт – Times New Roman, размер 14, полуторный межстрочный интервал. Размеры полей: левое – 30 мм, правое – 10 мм, верхнее – 20 мм, нижнее – 20 мм. Необходимо установить выравнивание по ширине.

Титульный лист работы должен содержать полное наименование вуза, название кафедры, номер варианта, фамилию и инициалы автора, фамилию, инициалы и ученую степень (звание) преподавателя, год выполнения (приложение А).

Оглавление должно содержать список всех заголовков разделов работы с указанием страниц.

Текст работы должен содержать условия задач и подробные их решения. Каждая задача должна начинаться с новой страницы. Формулы, используемые в решении, должны быть приведены, пронумерованы, а в тексте должны быть на них ссылки. Решение задачи должно быть строго обосновано, иметь четкую и логическую структуру. Каждая задача должна оканчиваться ответом.

Библиографический список должен содержать перечень источников информации, используемых при выполнении контрольной работы, и их библиографическое описание.

Приложения могут включать дополнительный материал, который необходим для решения задач.

2 Порядок защиты и критерии оценивания курсовой работы

Порядок защиты работы

Аттестация контрольной работы проводится до экзаменационной сессии в виде её защиты.

Защита контрольной работы представляет собой беседу между преподавателем и студентом, состоящую из пояснений к решению задач и ответов на поставленные преподавателем вопросы. В процессе защиты выясняется уровень теоретической подготовки студента и оцениваются его практические навыки решения задач.

Оценка контрольной работы выносится по результатам анализа предъявленной контрольной работы, доклада студента и его ответов на вопросы.

Контрольная работа оценивается преподавателем «зачтено/незачтено».

Критерии оценивания

Оценка «зачтено» выставляется, если обучающийся знает теоретический материал, правильно, по существу и последовательно излагает решения задач контрольной работы.

Оценка «незачтено» выставляется, если обучающийся не знает теоретический материал дисциплины или систематически допускает существенные ошибки, или не представил решения большинства задач, или не смог ответить на дополнительные вопросы.

3 Пример решения контрольной работы

Задача № 1. Составьте таблицу истинности для следующей формулы алгебры высказываний:

$$\neg A \wedge (B \rightarrow C). \quad (1)$$

Решение.

- 1 *Таблица истинности* – таблица, показывающая, какие значения истинности может принимать формула при всех возможных наборах значений истинности пропозиционных переменных, входящих в него.
- 2 Количество строк r таблицы определяется формулой $r = 2^n$, где n – количество пропозиционных переменных формулы. Исходная формула (1) содержит 4 пропозиционных переменных (A, B, C, D) , поэтому количество строк таблицы истинности $r = 2^3 = 8$.
- 3 Количество столбцов s определяется суммой количества переменных и количества логических операций. Исходная формула (1) содержит 3 переменные и 3 логические операции $(\neg, \wedge, \rightarrow)$, следовательно, количество столбцов – 6.
- 4 Столбцы таблицы заполняются, исходя из приоритета операций с учетом круглых скобок.

Последовательность операций:

- а) отрицание $(\neg A)$;
 - б) импликация $(B \rightarrow C)$;
 - в) конъюнкция $(\neg A \wedge (B \rightarrow C))$.
- 5 Заполним таблицу 1 истинности исходной формулы, учитывая определения логических операций.

Задание № 2. Если футбольная команда «Тобол» одерживает победу в игре, то город Курган будет ликовать, а если выигрывает команда «Томь», то торжествовать будет город «Томск». В игре победит или «Тобол» или «Томь». Однако, если выигрывает Тобол, то город Томск не будет ликовать, а если выигрывает Томь, то не будет торжествовать город «Курган». Доказать, что город «Томск» будет торжествовать тогда и только тогда, когда не будет торжествовать город «Курган».

Решение.

Введем следующие обозначения:

- A – «Команда «Тобол» одерживает победу в игре»;

Таблица 1 – Таблица истинности формулы (1)

$\lambda(A)$	$\lambda(B)$	$\lambda(C)$	$\neg A$	$\lambda(B \rightarrow C)$	$\lambda(\neg A \wedge (B \rightarrow C))$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0

- В=»Команда «Томь» побеждает»;
- А'=»Город Курган будет торжествовать»;
- В'=»Город Томск будет ликовать».

Согласно введенным обозначениям и условиям задачи формальная запись данной теоремы примет вид:

$$\frac{(A \rightarrow A') \wedge (B \rightarrow B'), (A \vee B), (A \rightarrow \neg' B) \wedge (B \rightarrow \neg A')}{(B \leftrightarrow \neg A')} \quad (2)$$

1) $F_1 = (A \rightarrow A') \wedge (B \rightarrow B')$ – посылка.

2) $F_2 = (A \rightarrow A')$ – заключение по формуле F_1 и правилу вывода

$$\frac{F_1 \wedge F_2}{F_1}. \quad (3)$$

3) $F_3 = (B \rightarrow B')$ – заключение по формуле F_1 и правилу вывода

$$\frac{F_1 \wedge F_2}{F_2}. \quad (4)$$

4) $F_4 = (A \rightarrow \neg B') \wedge (B \rightarrow \neg A')$ – посылка.

5) $F_5 = (A \rightarrow \neg B')$ – заключение по формуле F_4 и правилу вывода 3.

6) $F_6 = (B \rightarrow \neg A')$ – заключение по формуле F_4 и правилу вывода 4.

7) $F_7 = (B' \rightarrow \neg A)$ – заключение по формуле F_5 и правилу контрпозиции.

8) $F_8 = (A' \rightarrow \neg B)$ – заключение по формуле F_6 и правилу контрпозиции.

9) $F_9 = (A \vee B)$ – посылка.

- 10) $F_{10} = (\neg A \rightarrow B)$ – заключение по формуле F_9 и правилу эквивалентного преобразования.
- 11) $F_{11} = (\neg A \rightarrow \neg A')$ – заключение по формулам F_6 , F_{10} и закону силлогизма.
- 12) $F_{12} = (B' \rightarrow \neg A')$ – заключение по формулам F_7 , F_{11} и закону силлогизма.
- 13) $F_{13} = (\neg A' \rightarrow \neg A)$ – заключение по формуле F_2 и закону контрпозиции.
- 14) $F_{14} = (\neg A' \rightarrow B)$ – заключение по формулам F_{10} , F_{13} и правилу силлогизма.
- 15) $F_{15} = (\neg A' \rightarrow B')$ – заключение по формулам F_3 , F_{14} и правилу силлогизма.
- 16) $F_{16} = (B' \rightarrow \neg A') \wedge (\neg A' \rightarrow B') = (B' \leftrightarrow \neg A')$ – заключение по формулам F_{12} , F_{15} правилу введения логической связки конъюнкции.

На рисунке 1 представлен граф прямого вывода.

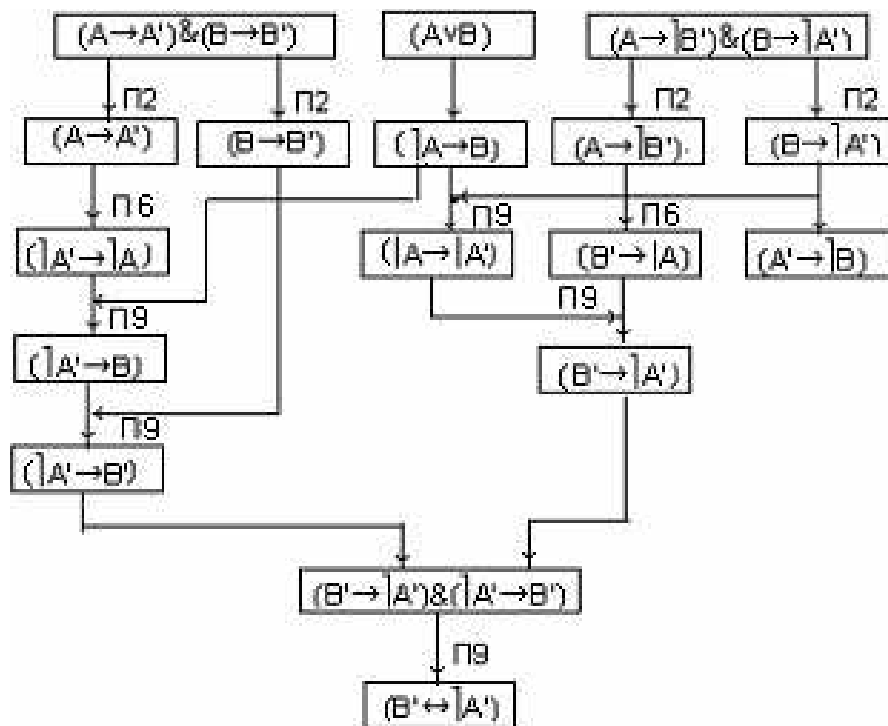


Рисунок 1 – Граф прямого вывода

Задача № 3. Пусть дана формула:

$$F = (\exists x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\exists x_4)(\forall x_5)(\exists x_6)((P_1(x_1, x_2) \vee \neg P_2(x_3, x_4, x_5)) \wedge P_3(x_4, x_6)).$$

Привести данную формулу к сколемовской стандартной форме (ССФ).

Решение.

Для получения ССФ требуется выполнить шаги следующего алгоритма:

- Представить формулу в виде ПНФ.
- Найти в префиксе самый левый квантор существования:
 - 1) если квантор находится на первом месте префикса, то вместо переменной, связанной квантором существования, подставить всюду предметную постоянную a , отличную от встречающихся предметных постоянных в матрице формулы, а квантор существования удалить;
 - 2) если квантор находится не на первом месте префикса, т. е. $(\forall x_1), \dots, (\forall x_{i-1}) (\exists x_i) \dots$, то выбрать $(i - 1)$ – местный функциональный символ, отличный от функциональных символов матрицы, выполнить замену предметных переменных x_i , связанных квантором существования, на функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$, и квантор существования удалить.
- Найти следующий справа квантор существования и перейти к исполнению шага 2, иначе конец.

Используя данный алгоритм, получим ССФ исходной формулы:

- 1) заменим предметную переменную x_1 на постоянную a :

$$F = (\forall x_2)(\forall x_3)(\exists x_4)(\forall x_5)(\exists x_6)((P_1(a, x_2) \vee \neg P_2(x_3, x_4, x_5)) \wedge P_3(x_4, x_6));$$

- 2) заменим предметную переменную x_4 на функцию $f_1(x_2, x_3)$:

$$F = (\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_5)(\exists x_6)((P_1(a, x_2) \vee \neg P_2(x_3, f_1(x_2, x_3), x_5)) \wedge P_3(f_1(x_2, x_3), x_6));$$

- 3) заменим предметную переменную x_6 на функцию $f_2(x_2, x_3, x_5)$:

$$F = (\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_5)((P_1(a, x_2) \vee \neg P_2(x_3, f_1(x_2, x_3), x_5)) \wedge P_3(f_1(x_2, x_3), f_2(x_2, x_3, x_5))).$$

Задача № 4 Существуют ученики, которые уважают учителей. Ни один из учеников не любит невежд. Доказать, что ни один учитель не является невеждой.

Решение.

Введем предикаты:

- 1) $P_1(x) := \langle\langle x - \text{ученик} \rangle\rangle$;
- 2) $P_2(y) := \langle\langle y - \text{учитель} \rangle\rangle$;
- 3) $P_3(x, y) := \langle\langle x \text{ любит } y \rangle\rangle$;
- 4) $P_4(y) := \langle\langle y - \text{невежда} \rangle\rangle$.

Формула суждений имеет вид:

$$\frac{(\exists x)(P_1(x) \wedge (\forall y)(P_2(y) \rightarrow P_3(x, y))), (\forall x)(P_1(x) \rightarrow (\forall y)(P_4(y) \rightarrow \neg P_3(x, y)))}{(\forall y)(P_2(y) \rightarrow \neg P_4(y))}.$$

Вывод заключения:

1) преобразовать посылки и отрицание заключения к виду ССФ:

$$F_1 = (\exists x)(P_1(x) \wedge (\forall y)(P_2(y) \rightarrow P_3(x, y))) = (\forall y)(P_1(a) \wedge (\neg P_2(y) \vee P_3(a, y))).$$

$$F_2 = (\forall x)(P_1(x) \rightarrow (\forall y)(P_4(y) \rightarrow \neg P_3(x, y))) = (\forall x)(\forall y)(\neg P_1(x) \vee \neg P_4(y) \vee \neg P_3(x, y)).$$

$$F_3 = \neg(\forall y)(P_2(y) \rightarrow \neg P_4(y)) = P_2(b) \wedge P_4(b);$$

2) выписать множество дизъюнктов посылок и отрицания заключения:

$$K = \{P_1(a), (\neg P_2(t_y) \vee P_3(a, t_y)), (\neg P_1(t_x) \vee \neg P_4(t_y) \vee \neg P_3(t_x, t_y)), P_2(b), P_4(b)\}.$$

3) выполнить подстановку и унификацию дизъюнктов:

- $P_2(b) \vee \int_{t_y}^b (\neg P_2(t_y) \vee P_3(a, t_y)) = P_2(b) \vee \neg P_2(b) \vee P_3(a, b) = P_3(a, b)$ – резольвента;
- $P_3(a, b) \vee \int_{t_y}^b (\neg P_1(t_x) \vee \neg P_4(t_y) \vee \neg P_3(t_x, t_y)) = P_3(a, b) \vee \neg P_1(t_x) \vee \neg P_4(b) \vee \neg P_3(t_x, b) = P_3(a, b) \vee \int_{t_x}^a (\neg P_1(t_x) \vee \neg P_4(b) \vee \neg P_3(t_x, b)) = P_3(a, b) \vee \neg P_1(a) \vee \neg P_4(b) \vee \neg P_3(a, b) = \neg P_1(a) \vee \neg P_4(b)$ – резольвента;
- $\neg P_1(a) \vee \neg P_4(b) \vee P_1(a) = \neg P_4(b)$ – резольвента;
- $\neg P_4(b) \vee P_4(b) = \square$.

Задача № 5. Пусть на множестве $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ заданы следующие нечеткие множества:

$$A = 0, 4/x_1 + 0, 2/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4;$$

$$B = 0, 7/x_1 + 0, 9/x_2 + 0, 1/x_3 + 1/x_4;$$

Определите $\neg A$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $A \oplus B$.

Решение.

- 1) $\neg A = (1 - 0, 4)/x_1 + (1 - 0, 2)/x_2 + (1 - 0)/x_3 + (1 - 1)/x_4 = 0, 6/x_1 + 0, 8/x_2 + 1/x_3 + 0/x_4;$
- 2) $A \cup B = \max(0, 4; 0, 7)/x_1 + \max(0, 9; 0, 2)/x_2 + \max(0; 0, 1)/x_3 + \max(1, 1)/x_4 = 0, 7/x_1 + 0, 9/x_2 + 0, 1/x_3 + 1/x_4;$
- 3) $A \cap B = \min(0, 4; 0, 7)/x_1 + \min(0, 9; 0, 2)/x_2 + \min(0; 0, 1)/x_3 + \min(1, 1)/x_4 = 0, 4/x_1 + 0, 2/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4;$

$$4) A \oplus B = \max(\min(0, 4; 0.3); \min(0, 6; 0, 7))/x_1 + \max(\min(0, 2; 0.1); \min(0, 8; 0, 9))/x_2 + \max(\min(0; 0, 9); \min(1; 0, 1))/x_3 + \max(\min(1; 0); \min(0; 1))/x_4 = \max(0.3; 0, 6)/x_1 + \max(0.1; 0, 8)/x_2 + \max(0; 0, 1)/x_3 + \max(0; 0)/x_4 = 0, 6/x_1 + 0, 8/x_2 + 0, 1/x_3 + 0/x_4.$$

Задача № 6. Пусть дан алфавит $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \$\}$. Построить машину Тьюринга, прибавляющую 1 к введенному числу в десятичной системе счисления.

Решение. В таблице 2 представлена машина Тьюринга (МТ), решающая поставленную задачу.

Пусть исходное число записано на ленте и обрамлено символами \$. Изначальное МТ находится в состоянии q_1 . В состоянии q_1 МТ движется право, не изменяя число. Дойдя до конца числа (символ \$), МТ переходит в состояние q_2 , в котором машина Тьюринга увеличивает разряд числа на 1. Если самый младший разряд, не равен 9, то МТ увеличивает его на 1 и переходит в состояние q_3 , иначе изменяет разряд на 0, и переходит к следующему по старшинству разряду, чтобы увеличить его, оставаясь в текущем состоянии. В состоянии q_3 МТ движется к началу числа и останавливается.

Таблица 2 – Машина Тьюринга в табличном виде

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	\$
q_1	$1Rq_1$	$2Rq_1$	$3Rq_1$	$4Rq_1$	$5Rq_1$	$6Rq_1$	$7Rq_1$	$8Rq_1$	$9Rq_1$	$0Rq_1$	$\$Lq_2$
q_2	$2Lq_3$	$3Lq_3$	$4Lq_3$	$5Lq_3$	$6Lq_3$	$7Lq_3$	$8Lq_3$	$9Lq_3$	$0Lq_2$	$1Lq_3$	$1Lq_3$
q_3	$1Lq_3$	$2Lq_3$	$3Lq_3$	$4Lq_3$	$5Lq_3$	$6Lq_2$	$7Lq_2$	$8Lq_3$	$9Lq_3$	$0Lq_3$	$\$Rq_0$

4 Задания для выполнения контрольной работы

Вариант 1

- 1 Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений всех предыдущих высказываний:

$$\lambda(A \rightarrow B) = 1, \lambda(A \leftrightarrow B) = 0, \lambda(B \rightarrow A) = ?$$

- 2 Закрытие предприятия происходит тогда и только тогда, когда появляется безвластие в рядах его управления. Появление безвластия в управлении равносильно появлению в руководстве безответственных людей. Появление подобных людей приводит к тому, что они действуют безрассудно. Такие действия демонстрируют неспособность этих

людей управлять предприятием. Доказать дедуктивным методом, что если предприятие закрылось, то это произошло из-за неспособности управления им.

- 3 Используя равносильные преобразования, приведите следующую формулу алгебры предикатов к приведённой форме:

$$\neg((\exists y)(P(y) \leftrightarrow (\forall x)(Q(x)))).$$

- 4 Миша, Петя и Вася организовали предприятие по разработке ПО. Каждый член клуба или архитектор, или программист, или является тем и другим. Нет архитекторов, которые любят мотоциклы, и все программисты любят собирать грибы. Петя не любит то, что любит Миша и любит то, что Миша не любит. Миша любит мотоциклы и собирать грибы. Доказать методом резолюций, что существует в клубе человек, являющийся программистом и не являющийся архитектором.

- 5 Даны два нечетких числа:

$$A = 0,6/2 + 0.9/3 + 0.2/4;$$

$$B = 0.8/3 + 0.1/5 + 0.5/6.$$

Найти их сумму и разность.

- 6 Пусть дан алфавит $A = \{a, b, c\}$. Построить машину Тьюринга, которая приписывает слева к слову W символ c ($W \rightarrow cW$).

Вариант 2

- 1 Составьте таблицу истинности для следующей формулы алгебры высказываний:

$$(P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \rightarrow P) \vee Q).$$

- 2 Если человек занимается наукой, то он хочет быть умным. Большой ум способствует интересной жизни. Если человек занимается наукой, то он стремится достичь высоких научных результатов. Наличие высоких результатов позволяет одерживать победы на научных конференциях. Победы на конференциях влекут за собой мировую славу. Однако человек не хочет жить интересной жизнью и иметь мировую славу. Доказать методом резолюций, что он не станет заниматься наукой.

3 Доказать, что следующая формула алгебры предикатов выполнима:

$$\forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)) \wedge \\ \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \rightarrow (P(y, z) \rightarrow P(x, z))). \quad (5)$$

4 У каждого комика из города N есть анекдот о каком-нибудь курганце и его теще, который может рассмешить любого жителя Кургана, за исключением тещи этого курганца. Иван – великий комик. У Инны Петровны нет зятя. Доказать дедуктивным методом, что Инну Петровну рассмешит анекдот Ивана о Пете и его теще Елене Семеновне.

5 Даны два нечетких числа:

$$A = 0,3/2 + 0,2/3 + 0,7/4;$$

$$B = 1/3 + 0,5/5 + 0,3/6.$$

Найти их произведение и частное.

6 Пусть дан алфавит $A = \{a, b, c\}$. Построить машину Тьюринга, которая приписывает справа к слову W символы bc ($W \rightarrow Wbc$).

Вариант 3

1 Составьте таблицу истинности для следующей формулы алгебры высказываний:

$$(((P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee R)) \vee \neg R) \vee Q.$$

2 Если знать китайский язык, то можно написать письмо Си Цзиньпину. Письмо можно написать при наличии знакомого китайского переводчика. Овладеть китайским языком можно, обучаясь в институте. Если письмо написано, то его написал выпускник института. Но письмо не написано. Доказать дедуктивным методом, что желающий написать письмо Си Цзиньпину не знает китайского языка и не имеет знакомых переводчиков.

3 Привести к предварённой нормальной форме следующую формулу алгебры предикатов:

$$\neg \forall x \forall y P(x, y) \vee \forall x \exists y Q(x, y).$$

4 Все программисты – успешные люди. Каждый успешный человек счастлив в жизни. Доказать методом резолюций, что все программисты – счастливые люди.

5 Даны два нечетких числа:

$$A = 0,35/3 + 0.62/4 + 0.55/5;$$

$$B = 0.5/1 + 0.2/2 + 0.7/3.$$

Найти их максимальное и минимальное значения.

6 Пусть дан алфавит $A = \{a, b, c\}$. Построить машину Тьюринга, которая оставляет только последний символ не пустого слова.

Вариант 4

1 Составьте таблицу истинности для следующей формулы алгебры высказываний:

$$\neg((\neg R \rightarrow \neg(P \rightarrow \neg(Q \rightarrow R))) \rightarrow \neg(P \rightarrow \neg Q)).$$

2 Все живые существа способны чувствовать. Любой материальный предмет занимает определенный объем в пространстве. Если какой-то объект занимает объем и способен чувствовать, то он – живой организм. Пусть существует некий живой объект, но не являющийся организмом. Доказать методом резолюций, что этот объект нематериален.

3 Среди следующих формул алгебры предикатов найти все пары равносильных формул:

- $\forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(x));$
- $\forall x \exists y (P(x) \rightarrow Q(x));$
- $\exists y \forall x (P(x) \rightarrow Q(x));$
- $\forall y \exists x (P(x) \rightarrow Q(x));$
- $\exists x \forall y (P(x) \rightarrow Q(x));$
- $\exists x \exists y (P(x) \rightarrow Q(x)).$

4 Пусть брадобрее бреют всех людей, которые не бреются сами и не бреют тех, кто бреется сам. Доказать дедуктивным методом, что брадобрее не существуют.

5 Пусть на множестве $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ заданы следующие нечеткие множества:

$$A = 0,4/x_1 + 0,2/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4;$$

$$B = 0,7/x_1 + 0,9/x_2 + 0,2/x_3 + 0.5/x_4;$$

$$C = 0,1/x_1 + 0,3/x_2 + 0,1/x_3 + 0,4/x_4.$$

Найти: $\neg A \wedge C$ и $A \wedge B \vee C$.

- 6 Пусть дан алфавит $A = \{a, b, c, 1, 0\}$. Построить машину Тьюринга, которая определяет, содержит ли входное слово символ a . Ответом является 1, если содержит, и 0, если нет.

Вариант 5

- 1 Составив таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний, докажите, что она является тавтологией:

$$((P \wedge Q) \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R)).$$

- 2 Если предохранитель вышел из строя, то в сети случился перепад напряжения. Если радиоприемник включен в сеть, то он работает нормально, если предохранитель исправен. Если радиоприемник работает нормально, я услышу «Эхо Москвы». Доказать дедуктивным методом, что я услышу «Эхо Москвы» при условии подключения радиоприемника к сети и отсутствия перепадов.
- 3 Привести к предварённой нормальной форме следующую формулу логики предикатов:

$$\forall x \neg \exists y P(x, y) \wedge \exists x \forall y Q(x, y).$$

- 4 Каждого, кто любит всех животных, кто-то любит. Любого, кто убивает животных, никто не любит. Джек любит всех животных. Кота по имени Тунец убили либо Джек, либо любопытство. Определить методом резолюций, действительно ли этого кота убило любопытство?
- 5 Пусть на множестве $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ заданы следующие нечеткие множества:

$$A = 0,7/x_1 + 0,3/x_2 + 0,1/x_3 + 0,8/x_4;$$

$$B = 0,3/x_1 + 0,6/x_2 + 0,3/x_3 + 0,9/x_4;$$

$$C = 0,8/x_1 + 0,3/x_2 + 0,5/x_3 + 0,7/x_4.$$

Найти: $C - A$ и $C \vee B \wedge A$.

- 6 Пусть дан алфавит $A = \{a, b, c, 1, 0\}$. Построить машину Тьюринга, которая определяет является ли входное слово записью числа в двоичной системе. Ответом будет 1, если является, и 0, если нет.

Вариант 6

- 1 Составив таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний, докажите, что она является тавтологией:

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)).$$

- 2 Если в доме убрано, то жена отпустит на футбол. Если отпустят на футбол, то обязательно возьмут и дочь. Если берут дочь, значит надо брать кошку. Если брать с собой кошку, то поедут все. Доказать методом резолюций, что, если в доме убрано, то все едут на футбол.
- 3 Привести к предварённой нормальной форме следующую формулу алгебры предикатов:

$$\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y Q(x, y).$$

- 4 Перья есть только у птиц. Ни одно млекопитающее не является птицей. Доказать дедуктивным методом, что все млекопитающие лишены перьев.
- 5 Пусть A – нечеткое множество «примерно от 4 до 8», а B – «чуть меньше 6». Определите функцию принадлежности к данным нечетким множествам RL-типа. Графически изобразите результат объединения и пересечения данных множеств.
- 6 Пусть дан алфавит $A = \{1, 0\}$. Построить машину Тьюринга, которая удаляет из входного слова все 0, кроме последнего.

Вариант 7

- 1 Составив таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний, докажите, что она является тавтологией:

$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q).$$

- 2 Маша может надеть на себя черное платье или белый платок, или красные туфли. Она будет выглядеть великолепно, если наденет красные туфли и при этом возьмет с собой зеленую сумку. И наоборот, она будет выглядеть ужасно, если наденет черное платье или белый платок. Однако сумку надо брать обязательно, если Маша наденет красные туфли. Доказать дедуктивным методом, чтобы выглядеть великолепно, Маша должна надеть красные туфли.

- 3 Некоторые из студентов знакомы с каким-либо языком программирования. Но ни один из студентов не знаком ни с одним функциональным языком программирования. Какие из следующих утверждений будут следствием этого и почему:
- «ни один язык программирования не является функциональным»;
 - «некоторые из языков программирования не являются функциональным»;
 - «найдется язык программирования, который является функциональным».
- 4 Имеются прилежные студенты. Ни один студент не лишен способностей. Доказать методом резолюций, что некоторые студенты, способны и прилежны.
- 5 Пусть A – нечеткое множество «примерно от 4 до 8», а B – «чуть меньше 6». Определите функцию принадлежности к данным нечетким множествам RL-типа. Графически изобразите результат объединения и пересечения данных множеств.
- 6 Пусть дан алфавит $A = \{a, b, c\}$. Построить машину Тьюринга, которая определяет длину входящего слова. Максимальная длина входящего слова – 9.

Вариант 8

- 1 Следующую формулу алгебры высказываний преобразуйте равносильным образом так, чтобы она содержала только логические связки \neg, \wedge, \vee :

$$((X \rightarrow Y) \wedge (\neg X \rightarrow \neg Y)) \rightarrow ((X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y)).$$

- 2 Падение T приводит к падению P и уменьшению V . Увеличение V приводит к росту показателя D . Повышение P приводит к падению L , если при этом уменьшать T . Снижение D приводит к уменьшению P или росту T . Доказать методом резолюций, что уменьшение T и увеличение P ведут к уменьшению V .
- 3 Привести следующую формулу алгебры предикатов к предваренной нормальной форме:

$$\forall x \exists y P(x, y) \wedge \neg(\exists x \forall y Q(x, y)).$$

- 4 Все студенты ленивы. Некоторые ленивые студенты одиноки. Петя ленив и одинок. Выяснить дедуктивным методом, является ли Петя студентом.
- 5 Задайте на универсуме от 0 до 100 следующие нечеткие множества: «Очень молодой», «Слегка молод», «Молодой», «Человек средних лет», «Пенсионер», «Пожилой», «Очень старый».
- 6 Пусть дан алфавит $A = \{a, b, c\}$. Построить машину Тьюринга, которая приписывает к концу слова начальный символ.

Вариант 9

- 1 Следующую формулу алгебры высказываний преобразуйте равносильным образом так, чтобы она содержала только логические связки \neg, \wedge, \vee :

$$((X \wedge \neg Y) \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow \neg Y).$$

- 2 Если Петя стал известным, то он попал на экран телевизора, и его посмотрели миллионы зрителей. Если Петю пригласили на передачу, то он станет известным. Петю стали приглашать на передачи. Доказать дедуктивным методом, что Петя попал на экран телевизора.
- 3 Привести следующую формулу алгебры предикатов к предваренной нормальной форме:

$$\forall x \forall y (\exists z P(x, z) \wedge P(y, z) \rightarrow \exists y Q(x, y, z)).$$

- 4 Ни одно животное не бессмертно. Кошки – животные. Доказать методом резолюций, что некоторые кошки не бессмертны.
- 5 Заданы нечеткие отношения:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,8 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,7 \\ 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Найди: $A \cap B$ и $A \cup B$.

- 6 Пусть дан алфавит $A = \{a, b, c\}$. Построить машину Тьюринга, которая меняет местами первый и последний символы.

Вариант 10

- 1 Следующую формулу алгебры предикатов преобразуйте равносильным образом так, чтобы она содержала только логические связки \neg, \wedge, \vee :

$$(X \rightarrow Z) \rightarrow ((X \vee Y) \rightarrow (\neg Z \vee Y)).$$

- 2 Если Вова богат и умен, то он нравится девочкам. Если Вова красив, то он тоже нравится девочкам. Если Вова богат, то он красив или умен. Вова богат. Доказать методом резолюций, что Вова нравится девочкам.
- 3 Найти сколемовскую нормальную форму следующей формулы алгебры предикатов:

$$\exists x \forall y \exists z \exists t (\neg(P(y) \vee Q(t)) \wedge R(x) \wedge S(z))$$

- 4 Все умные или богатые мужчины любимы девушками. Маша не любит умных мужчин. Петя любим Машей. Дедуктивным методом доказать, что Петя богат.
- 5 Заданы нечеткие множества:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,8 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,6 \\ 0,7 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Найти: $A - B$ и $A + B$.

- 6 Пусть дан алфавит $A = \{a, b, c\}$. Построить машину Тьюринга, которая переворачивает входное слово.

Вариант 11

- 1 Следующую формулу алгебры высказываний преобразуйте равносильным образом так, чтобы отрицание было отнесено только к пропозиционным переменным и не стояло перед скобками:

$$\neg(\neg(\neg(X \wedge Y) \rightarrow Y) \rightarrow (\neg X \wedge Z)).$$

- 2 Если Вова богат и умен, то он нравится девочкам. Если Вова красив, то он тоже нравится девочкам. Если Вова богат, то он красив или умен. Вова богат. Доказать дедуктивным методом, что Вова нравится девочкам.

- 3 Найти область истинности предиката $P(x, y)$, заданного предикатной формулой:

$$P(X, Y) = ((X + Y) \bmod 4) \rightarrow ((X - Y) > 0),$$

где $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{2, 3, 4, 5\}$.

- 4 Все умные или богатые мужчины любимы девушками. Маша не любит умных мужчин. Петя любим Машей. Методом резолюций доказать, что Петя богат.

- 5 Заданы нечеткие отношения:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,8 \\ 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Найти: $A \cdot B$ и $\neg A$.

- 6 Доказать, что функция $f(x, y) = x + y$ является частично рекурсивной.

Вариант 12

- 1 Следующую формулу алгебры высказываний преобразуйте равносильным образом так, чтобы отрицание было отнесено только к пропозиционным переменным и не стояло перед скобками:

$$\neg((\neg X \leftrightarrow \neg Y) \vee Z) \wedge Y.$$

- 2 Если Петя стал известным, то он попал на экран телевизора, и его посмотрели миллионы зрителей. Если Петю пригласили на передачу, то он станет известным. Петю стали приглашать на передачи. Доказать методом резолюций, что Петя попал на экран телевизора.

- 3 Приведите следующую формулу алгебры предикатов к предваренной нормальной форме:

$$\exists x F(X) \rightarrow \forall x G(x).$$

- 4 Ни одно животное не бессмертно. Кошки – животные. Доказать дедуктивным методом, что некоторые кошки не бессмертны.

- 5 Заданы нечеткие отношения:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,8 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,6 \\ 0,7 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Найти: $A - B$ и $A + B$.

- 6 Доказать, что функция $f(x, y) = |x - y|$ является частично рекурсивной.

Вариант 13

- 1 Следующую формулу алгебры высказываний преобразуйте равносильным образом так, чтобы отрицание было отнесено только к пропозиционным переменным и не стояло перед скобками:

$$\neg(((X \vee \neg Y) \rightarrow Y) \vee (\neg X \vee Y)).$$

- 2 Падение Т приводит к падению Р и уменьшению V. Увеличение V приводит к росту показателя D. Повышение Р приводит к падению L, если при этом уменьшать Т. Снижение D приводит к уменьшению Р или росту Т. Доказать дедуктивным методом, что уменьшение Т и увеличение Р ведут к уменьшению V.

- 3 Приведите следующую формулу алгебры предикатов к предваренной нормальной форме:

$$\forall x \forall y F(x, y) \rightarrow \exists x \exists y G(x, y).$$

- 4 Все студенты ленивы. Некоторые ленивые студенты одиноки. Петя ленив и одинок. Выяснить методом резолюций, является ли Петя студентом.
- 5 Задать нечеткие отношения: «схожий менталитет» для следующего множества: {украинец, чех, немец, русский, австралиец}.
- 6 Доказать, что функция $f(x, y) = \max(x, y)$ является частично рекурсивной.

Вариант 14

- 1 С помощью равносильных преобразований докажите, что следующая формула является тождественно ложной:

$$\neg(((X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z)) \rightarrow (X \rightarrow Z)).$$

- 2 Маша может надеть на себя черное платье или белый платок, или красные туфли. Она будет выглядеть великолепно, если наденет красные туфли и при этом возьмет с собой зеленую сумку. И наоборот, она будет выглядеть ужасно, если наденет черное платье или белый платок. Однако сумку надо брать обязательно, если Маша наденет красные туфли. Доказать методом резолюций, чтобы выглядеть великолепно, Маша должна надеть красные туфли.

- 3 Приведите следующую формулу алгебры предикатов к предваренной нормальной форме:

$$\neg(\exists z\neg\forall x(G(x, y) \wedge F(x, z)) \rightarrow \forall yH(y, z)).$$

- 4 Имеются прилежные студенты. Ни один студент не лишен способностей. Доказать методом резолюций, что некоторые студенты способны и прилежны.

- 5 Вычислить степень нечеткости составного высказывания:

$$D = (A \wedge \neg B \vee \neg A \wedge B) \rightarrow \neg(A \wedge C),$$

где $A = 0.7$, $B = 0,4$, $C = 0,9$.

- 6 Доказать, что функция $f(x, y) = \max(x, y)$ является частично рекурсивной.

Вариант 15

- 1 С помощью равносильных преобразований докажите, что следующая формула алгебры предикатов является тождественно ложной:

$$(Z \rightarrow \neg(X \wedge \neg Z)) \rightarrow (\neg(X \vee Z) \wedge X \wedge Y).$$

- 2 Если в доме убрано, то жена отпустит на футбол. Если отпустят на футбол, то обязательно возьмут на него и дочь. Если берут дочь, значит надо брать кошку. Если брать с собой кошку, то поедут все. Доказать дедуктивным методом, что, если в доме убрано, то все едут на футбол.

- 3 Приведите следующую формулу алгебры предикатов к предваренной нормальной форме:

$$F(x, y) \wedge \forall yG(x, y, z) \wedge \exists xF(x, x).$$

- 4 Перья есть только у птиц. Ни одно млекопитающее не является птицей. Доказать методом резолюций, что все млекопитающие лишены перьев.

- 5 Пусть даны предикаты:

$$P_1(x) = \langle x^2 - 3x + 2 \approx 0 \rangle,$$

$$P_2(x) = \langle x \rangle - \text{целое число.}$$

Задать графически функции принадлежности и графически построить результат известных Вам логических операций.

- 6 Доказать, что функция $f(x, y) = x + y^2$ является частично рекурсивной.

Вариант 16

- 1) С помощью равносильных преобразований докажите, что следующая формула алгебры предикатов является тождественно ложной:

$$(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \rightarrow \neg Q)).$$

- 2) Если предохранитель вышел из строя, то в сети случился перепад напряжения. Если радиоприемник включен в сеть, то он работает нормально, если предохранитель исправен. Если радиоприемник работает нормально, я услышу «Эхо Москвы». Доказать методом резолюций, что я услышу «Эхо Москвы» при условии подключения радиоприемника к сети и отсутствия перепадов.

- 3) Запишите следующие утверждения в виде формул алгебры предикатов:

- если задача имеет решения, то отличник найдет его. Миша – отличник, но не может решить задачу. Следовательно задача не имеет решения;
- через любые две различные точки плоскости проходят ровно две прямые;
- если все предметы круглые, то квадратных предметов нет.

- 4) Каждого, кто любит всех животных, кто-то любит. Любого, кто убивает животных, никто не любит. Джек любит всех животных. Кота по имени Тунец убили либо Джек, либо любопытство. Определить дедуктивным методом, действительно ли этого кота убило любопытство?

- 5) Пусть даны предикаты:

$$P_1(x) = \langle x \text{ любит } y \rangle,$$

$$P_2(x) = \langle y - \text{полезная еда} \rangle.$$

Определить известные Вам операции над данными предикатами, если $y \in \{ \text{пельмени, борщ, торт, креветки, лягушки} \}$, а $x \in \{ \text{русский, японец, француз} \}$.

- 6) Доказать, что функция $f(x, y) = \ln(y) + x^2 + y$ является частично рекурсивной.

Вариант 17

- 1 Приведите равносильными преобразованиями следующую формулу алгебры высказываний к дизъюнктивной нормальной форме:

$$((X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \rightarrow \neg X)) \rightarrow (Y \rightarrow \neg Z).$$

- 2 Все живые существа способны чувствовать. Любой материальный предмет занимает определенный объем в пространстве. Если какой-то объект занимает объем и способен чувствовать, то он – живой организм. Пусть существует некий живой объект, который не является организмом. Доказать дедуктивным методом, что этот объект нематериален.
- 3 Найдите сколемовскую стандартную форму для следующей формулы алгебры предикатов:

$$\forall x \exists y \forall z \forall u R(x, y, z, u).$$

- 4 Пусть брадобрее бреют всех людей, которые не бреются сами и не бреют тех, кто бреется сам. Доказать методом резолюций, что брадобрее не существуют.
- 5 Вычислить степень истинности составного высказывания:

$$D = (A \rightarrow \neg B \vee \neg C \wedge B) \rightarrow \neg(A \vee C),$$

где $A = 0, 2$; $B = 0, 1$; $C = 0, 5$.

- 6 Оценить сложность алгоритма поиска числа в отсортированном списке.

Вариант 18

- 1 Приведите равносильными преобразованиями следующую формулу алгебры высказываний к конъюнктивной нормальной форме:

$$X \rightarrow (Y \rightarrow Z).$$

- 2 Если знать китайский язык, то можно написать письмо Си Цзиньпину. Письмо можно написать при наличии знакомого китайского переводчика. Владеть китайским языком можно, обучаясь в институте. Если письмо написано, то его написал выпускник института. Но письмо не написано. Доказать методом резолюций, что желающий написать письмо Си Цзиньпину не знает китайского языка и не имеет знакомых переводчиков.

- 3 Найдите сколемовскую стандартную форму для следующей формулы алгебры предикатов:

$$\neg\forall x(\exists yR(x, y) \rightarrow \forall zP(z, x)).$$

- 4 Все программисты – успешные люди. Каждый успешный человек счастлив в жизни. Доказать дедуктивным методом, что все программисты – счастливые люди.
- 5 Задать нечеткие отношения: «дружественные страны» для следующего множества: {РФ, Китай, США, Украина, Казахстан, Турция}.
- 6 Оценить сложность алгоритма сортировки слиянием.

Вариант 19

- 1 Для следующей формулы алгебры высказываний найдите СДНФ с помощью таблицы истинности:

$$X \vee (Y \rightarrow (Z \leftrightarrow (X \wedge Y))).$$

- 2 Если человек занимается наукой, то он хочет быть умным. Большой ум способствует интересной жизни. Если человек занимается наукой, то он стремится достичь высоких научных результатов. Наличие высоких результатов позволяет одерживать победы на научных конференциях. Победы на конференциях влекут за собой мировую славу. Однако человек не хочет жить интересной жизнью и иметь мировую славу. Доказать дедуктивным методом, что он не станет заниматься наукой.
- 3 Найдите сколемовскую стандартную форму для следующей формулы алгебры предикатов:

$$\exists x\forall y(P(x, y) \rightarrow (\neg P(y, x) \rightarrow (P(x, x) \leftrightarrow P(y, y)))).$$

- 4 У каждого комика из города N есть анекдот о каком-нибудь курганце и его теще, который может рассмешить любого жителя Кургана, за исключением тещи этого курганца. Иван – великий комик. У Инны Петровны нет зятя. Доказать методом резолюций, что Инну Петровну рассмешит анекдот Ивана о Пете и его теще Елене Семеновне.
- 5 Пусть даны множества $X = \{\text{менеджер, секретарь, дворник, программист}\}$, $Y = \{\text{быстрота и гибкость мышления, быстрота реакции, психическая устойчивость, двигательная память}\}$, $Z =$

непустое подмножество студентов Вашей группы. Постройте нечеткие отношения «Человек на должности X должен обладать свойством Y », « Z обладает качеством Y » и композицию данных отношений.

6 Оценить сложность алгоритма умножения матрицы на вектор-столбец.

Вариант 20

1 Для следующей формулы алгебры высказываний найдите СКНФ с помощью таблицы истинности:

$$(X \leftrightarrow Y) \wedge (\neg Z \rightarrow (T \wedge \neg X)).$$

2 Закрытие предприятия происходит тогда и только тогда, когда появляется безвластие в рядах его управления. Появление безвластия в управлении равносильно появлению в руководстве безответственных людей. Появление подобных людей приводит к тому, что они действуют безрассудно. Такие действия демонстрируют неспособность этих людей управлять предприятием. Доказать методом резолюций, что если предприятие закрылось, то это произошло из-за неспособности управления им.

3 Установите, являются ли приведенные формулы выполнимыми, тождественно истинными, противоречивыми:

- $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)(\neg P(x))$,
- $(\forall x)(P(x) \rightarrow P(x))$.

4 Миша, Петя и Вася организовали предприятие по разработке ПО. Каждый член клуба или архитектор, или программист, или является тем и другим. Нет архитекторов, которые любят мотоциклы, и все программисты любят собирать грибы. Петя не любит то, что любит Миша, и любит то, что Миша не любит. Миша любит мотоциклы и собирать грибы. Доказать дедуктивным методом, что существует в клубе человек, являющийся программистом и не являющийся архитектором.

5 Пусть дано универсальное множество $U = 1, 2, 3, 4, \dots, 10$. Построить нечеткое множество «Множество чисел меньше 5». Найти высоту получившегося множества, его точку перегиба, определить его принадлежность к нормальному множеству и найти множество уровня 0,7.

6 Предложите и оцените сложность алгоритма, переворачивающего входную последовательность.

Приложение А

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение

высшего образования

КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Программное обеспечение автоматизированных систем»

РФ КГУ 10.05.03.КР17.123456

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине

«Математическая логика и теория алгоритмов»

Вариант №1

Выполнил студент гр. Т-30916 _____ И. И. Иванов

Руководитель, к.ф.-м.н. _____ О. С. Черепанов

Работа защищена с оценкой _____ " _____ " _____ 2019 г.

Курган 2019

ЧЕРЕПАНОВ ОЛЕГ СЕРГЕЕВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ
АЛГОРИТМА**

Методические указания к выполнению контрольных работ для
студентов направлений 10.05.03, 10.03.01 – «Информационная
безопасность автоматизированных систем»

Редактор Л. П. Чукомина

.....
Подписано в печать 14.10.19

Формат 60x84 1/16

Бумага 65 г/м²

Печать цифровая

Усл. печ. л. 1,75

Уч.-изд. л. 1,75

Заказ 146

Тираж 25

Не для продажи

.....
БИЦ Курганского государственного университета.

640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.

Курганский государственный университет.