

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Курганский государственный университет»

Кафедра фундаментальной математики

МАТЕМАТИКА

Материалы для практических занятий и самостоятельной работы

для студентов направлений 04.05.01 «Фундаментальная

и прикладная химия», 03.03.02 «Физика»

Часть 2

Курган 2019

Кафедра: «Фундаментальная математика»

Дисциплины: «Математика» (направления 04.05.01, 03.03.02)

Составили: старший преподаватель Е. Л. Потеряйко.

Утверждены на заседании кафедры «18» октября 2018 г.

Рекомендованы методическим советом университета «20» декабря 2017 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Раздел 1. Элементы интегрального исчисления функции одной переменной	5
Тема 1. Неопределённый интеграл	5
Тема 2. Интегрирование рациональных функций.....	7
Тема 3. Интегрирование некоторых видов иррациональностей	9
Тема 4. Интегрирование тригонометрических выражений, тригонометрические подстановки.....	10
Тема 5. Определённый интеграл.....	12
Тема 6. Приложения определённого интеграла	14
Тема 7. Физические приложения определённого интеграла.....	18
Тема 8. Несобственные интегралы	20
Раздел 2. Ряды	21
Тема 1. Числовые ряды.....	21
Тема 2. Степенные ряды.....	23
Тема 3. Разложение функций в степенные ряды.....	24
Тема 4. Тригонометрические ряды. Ряды Фурье.....	27
Проверочный тест для подготовки к экзамену	29
Примеры решения типовых задач.....	31

Введение

Настоящие материалы предназначены для студентов, обучающихся по направлениям «Фундаментальная и прикладная химия», «Физика». Они составлены в соответствии с учебным планом по дисциплине «Математика».

Для каждой темы составлены вопросы по теории для повторения, предложены задачи для работы на практических занятиях и дома, а также примеры решения задач.

Цель материалов – оказать помощь студентам при подготовке к практическим занятиям по данному курсу. Это пособие может быть использовано также студентами естественнонаучного направления других специальностей.

**Раздел 1. Элементы интегрального исчисления функции
одной переменной**

Тема 1. Неопределённый интеграл

Вопросы теории для повторения:

- 1 Определение первообразной функции для данной.
- 2 Определение неопределённого интеграла. Свойства.
- 3 Таблица основных интегралов.
- 4 Методы вычисления неопределённого интеграла.

Задачи для решения в аудитории

Вычислить интегралы, используя таблицу основных интегралов:

$$\begin{array}{lll} 1 \int (2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 5) dx. & 2 \int (1 + x^5) dx. & 3 \int \frac{dx}{x^3}. \\ 4 \int (5^{2x} - \sqrt{x}) dx. & 5 \int (\cos x + \sin x) dx. & 6 \int (5x + e^x) dx. \\ 7 \int (1 + \frac{1}{x}) dx. & 8 \int (e^{3x} + \sin 2x) dx. & 9 \int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}. \\ 10 \int \frac{dx}{x^2 + 9}. & 11 \int (\frac{8}{\sin^2 x} + \frac{7}{\cos^2 x}) dx. & 12 \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{x^2 - 1} \right) dx. \end{array}$$

Вычислить интегралы методом замены переменной:

$$\begin{array}{llll} 13 \int x e^{x^2} dx. & 14 \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx. & 15 \int \frac{\ln^3 x}{x} dx. & 16 \int \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}. \\ 17 \int e^{2x^3 + 3} x^2 dx. & 18 \int \frac{x^2}{2x^3 + 3} dx. & 19 \int x \sqrt{2 - x} dx. & 20 \int \operatorname{tg} x dx. \\ 21 \int \frac{e^x dx}{2 + 3e^x}. & 22 \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{16 - x^8}}. & 23 \int \frac{\arcsin^3 x - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx. & 24 \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx. \end{array}$$

$$25 \int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx. \quad 26 \int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx. \quad 27 \int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$$

Вычислить интегралы, применяя метод интегрирования по частям:

$$28 \int x \ln x dx. \quad 29 \int x e^x dx. \quad 30 \int x \sin x dx. \quad 31 \int \ln x dx. \quad 32 \int x e^{-x} dx.$$

$$33 \int (5x+1) \ln x dx. \quad 34 \int (5x-2) e^{3x} dx. \quad 35 \int (5x+6) \cos 2x dx.$$

$$36 \int (x+5) \sin 3x dx. \quad 37 \int (8-3x) \cos 5x dx. \quad 38 \int x^3 \ln 2x dx.$$

$$39 \int x^2 e^{3x} dx. \quad 40 \int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx. \quad 41 \int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx.$$

$$42 \int \frac{x dx}{\cos^2 x}. \quad 43 \int x \sin^2 x dx. \quad 44 \int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}. \quad 45 \int x \ln^2 x dx.$$

Задания для решения дома

Вычислить неопределенные интегралы:

$$1 \int \frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2} dx. \quad 2 \int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1+x^2)} dx. \quad 3 \int \frac{dx}{\cos^2 5x}. \quad 4 \int 3^{2x} dx.$$

$$5 \int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \right) dx. \quad 6 \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}. \quad 7 \int e^{\sin x} \cos x dx.$$

$$8 \int 2^{x^3+2x^2} (3x^2 + 4x) dx. \quad 9 \int \frac{(\ln x + 3) dx}{x}. \quad 10 \int \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1}.$$

$$11 \int \operatorname{ctg} x dx. \quad 12 \int (4-3x) e^{-3x} dx. \quad 13 \int (2-x) \sin x dx. \quad 14 \int x e^{5x} dx.$$

$$15 \int \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx. \quad 16 \int \frac{x}{x^4 + 1} dx. \quad 17 \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}. \quad 18 \int \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx.$$

$$19 \int \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} dx. \quad 20 \int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

Тема 2. Интегрирование рациональных функций.

Вопросы теории для повторения:

- 1 Определение рациональной дроби (правильной и неправильной).
- 2 Простейшие дроби 4-х типов. Методы интегрирования.
- 3 Теорема о разложении правильной рациональной дроби на простейшие.

Задачи для решения в аудитории

Задача 1 Вычислить неопределённые интегралы:

$$1 \int \frac{dx}{(x-1)^4}. \quad 2 \int \frac{dx}{(2x+3)^3}. \quad 3 \int \frac{dx}{(x-5)^3}. \quad 4 \int \frac{dx}{(3x+2)^5}.$$

$$5 \int \frac{dx}{x^2+6x+25}. \quad 6 \int \frac{dx}{x^2-6x+18}. \quad 7 \int \frac{dx}{2x^2-2x+3}. \quad 8 \int \frac{(8x-7)dx}{x^2+10x+29}.$$

$$9 \int \frac{(3x+7)dx}{x^2+8x+17}. \quad 10 \int \frac{(5x+3)dx}{x^2+10x+29}. \quad 11 \int \frac{(x+1)dx}{5x^2+2x+1}.$$

Задача 2. Разложить рациональные дроби на простейшие:

$$1 \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 6x + 5}. \quad 2 \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}. \quad 3 \frac{2x + 5}{x^3 - 4x}. \quad 4 \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x}{(x-2)(x+1)^3}.$$

$$5 \frac{x^3 + 6x^2 + 4x + 24}{(x-2)(x+2)^3}. \quad 6 \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)}. \quad 7 \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)}.$$

Задача 3. Найти неопределённые интегралы.

$$1 \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx. \quad 2 \int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx. \quad 3 \int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx. \quad 4 \int \frac{2x^3 + 5}{x^2 - x - 2} dx.$$

$$5 \int \frac{2x^3 - 1}{x^2 + x - 6} dx. \quad 6 \int \frac{3x^3 + 25}{x^2 + 3x + 2} dx. \quad 7 \int \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx.$$

$$8 \int \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{(x+2)(x-2)(x-1)} dx. \quad 9 \int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx. \quad 10 \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx.$$

$$11 \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)x} dx. \quad 12 \int \frac{4x^3 + x^2 + 2}{x(x-1)(x-2)} dx. \quad 13 \int \frac{3x^2 - 2}{x^3 - x} dx.$$

$$14 \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-2)x} dx. \quad 15 \int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx. \quad 16 \int \frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^2 + x} dx.$$

$$17 \int \frac{2x^5 - 8x^3 + 3}{x^2 - 2x} dx. \quad 18 \int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x} dx. \quad 19 \int \frac{-x^5 + 9x^3 + 4}{x^2 + 3x} dx.$$

$$20 \int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^2 + 5x} dx. \quad 21 \int \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 23}{(x-1)(x+1)(x-5)} dx.$$

$$22 \int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{(x-3)(x-1)x} dx.$$

Задача 4. Найти неопределенные интегралы.

$$1 \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3} dx. \quad 2 \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3} dx. \quad 3 \int \frac{x^3 + x + 2}{(x+2)x^3} dx.$$

$$4 \int \frac{3x^3 + 9x^2 + 10x + 2}{(x-1)(x+1)^3} dx. \quad 5 \int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)} dx. \quad 6 \int \frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2(x^2+1)} dx.$$

$$7 \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx. \quad 8 \int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$9 \int \frac{x^2 + x + 3}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

Задания для решения дома

Разложить рациональные дроби на простейшие:

$$1 \frac{2x-1}{x^3-x}. \quad 2 \frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)}.$$

Вычислить неопределённые интегралы:

$$\begin{array}{lll} 3 \int \frac{(x+2)dx}{x(x-3)} & 4 \int \frac{(x^2-x+1) dx}{(x-2)^2(x+1)} & 5 \int \frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3(x-2)} dx \\ 6 \int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+4} dx & 7 \int \frac{x+4}{(x^2+x+2)(x^2+2)} dx & \end{array}$$

Тема 3. Интегрирование некоторых видов иррациональностей

Вопросы теории для повторения:

- 1 Методы интегрирования иррациональных функций.
- 2 Метод рационализации подынтегрального выражения.
- 3 Виды подстановок, применяемые при вычислении интегралов от иррациональностей.

Задачи для решения в аудитории

Задача 1. Найти неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{llll} 1 \int \frac{\sqrt{x} dx}{2\sqrt{x}+3} & 2 \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x}+1} & 3 \int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx & 4 \int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} \\ 5 \int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx & 6 \int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx & 7 \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}} & \\ 8 \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-2}{x}} dx & & & \end{array}$$

Задача 2. Найти неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{lll} 1 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}} & 2 \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}} & 3 \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+7}} \\ 4 \int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+3x-1}} & 5 \int \frac{(5x-3)dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} & 6 \int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{-x^2+4x+5}} \\ 7 \int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2+x+2}} & 8 \int \frac{(12x+1)dx}{\sqrt{-3x^2+12x-9}} & \end{array}$$

Задачи для решения дома

$$1 \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}}.$$

$$2 \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$3 \int \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{1 + \sqrt{x}} dx.$$

$$4 \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx.$$

$$5 \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 6x - 5}}.$$

$$6 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}.$$

$$7 \int \frac{(5-4x)dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 8}}.$$

$$8 \int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 7}}.$$

$$9 \int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}}.$$

Тема 4. Интегрирование тригонометрических выражений, тригонометрические подстановки.

Вопросы теории для повторения:

- 1 Методы интегрирования тригонометрических выражений.
- 2 Метод непосредственного интегрирования с использованием формул тригонометрии.
- 3 Универсальная тригонометрическая подстановка и другие виды подстановок при интегрировании тригонометрических выражений.
- 4 Применение тригонометрических подстановок при интегрировании иррациональных выражений.

Задачи для решения в аудитории

Задача 1. Найти неопределенные интегралы.

$$1 \int \sin 2x \cos 5x dx.$$

$$2 \int \sin 3x \sin x dx.$$

$$3 \int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx.$$

$$4 \int \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} dx.$$

$$5 \int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

$$6 \int \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$7 \int \cos^6 x dx.$$

$$8 \int \sin^3 x dx.$$

$$9 \int \sin^4 x \cos^5 x dx.$$

10 $\int \cos^2 x \sin^3 x dx.$

11 $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$

12 $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x} dx.$

13 $\int \frac{dx}{1 - \sin x}.$

14 $\int \frac{dx}{3 + 5 \sin x + 3 \cos x}.$

15 $\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x}.$

16 $\int \frac{dx}{2 \sin x + \sin 2x}.$

17 $\int \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}.$

18 $\int \frac{2 \operatorname{ctg} x + 1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx.$

19 $\int \frac{3 + 2 \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 1} dx.$

20 $\int \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{1 - \sin 2x + 4 \cos^2 x} dx.$

21 $\int \frac{11 - 3 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 3} dx.$

22 $\int \frac{4 - 7 \operatorname{tg} x}{2 + 3 \operatorname{tg} x} dx.$

Задача 2. Найти неопределенные интегралы.

1 $\int \sqrt{256 - x^2} dx.$

2 $\int x^2 \sqrt{1 - x^2} dx.$

3 $\int \frac{dx}{(25 + x^2) \sqrt{25 + x^2}}.$

4 $\int \frac{dx}{(9 + x^2)^{3/2}}.$

5 $\int \frac{dx}{\sqrt{(5 - x^2)^3}}.$

6 $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx.$

7 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}}.$

8 $\int \sqrt{4 - x^2} dx.$

9 $\int x^2 \sqrt{16 - x^2} dx.$

10 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25 - x^2}}.$

11 $\int \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x^4} dx.$

Задачи для решения дома

Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{lll}
1 \int \cos 3x \cos x dx. & 2 \int \sin 3x \sin 5x dx. & 3 \int \cos^4 x dx. \\
4 \int \cos^3 x \sin^4 x dx. & 5 \int \frac{dx}{4-5 \sin x}. & 6 \int \frac{dx}{5-3 \cos x}. & 7 \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}. \\
8 \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4+3 \cos 2x} dx. & 9 \int \frac{6+\operatorname{tg} x}{9 \sin^2 x+4 \cos^2 x} dx. & 10 \int \frac{3 \operatorname{tg}^2 x-1}{\operatorname{tg}^2 x+5} dx. \\
11 \int \sqrt{9-x^2} dx. & 12 \int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^4} dx. & 13 \int \frac{dx}{(4+x^2) \sqrt{4+x^2}}.
\end{array}$$

Тема 5. Определённый интеграл

Вопросы для повторения:

- 1 Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла.
- 2 Определение определённого интеграла. Его геометрический смысл.
- 3 Свойства определённого интеграла.
- 4 Связь определённого и неопределённого интегралов. Формула Ньютона-Лейбница.
- 5 Методы вычисления определённого интеграла.

Задачи для решения в аудитории

Вычислить определённые интегралы:

$$\begin{array}{llll}
1 \int_1^2 (3x^2 + x) dx. & 2 \int_a^{2a} (x^2 + 2ax) dx. & 3 \int_1^2 2^x dx. & 4 \int_2^3 (x-2)^2 dx. \\
5 \int_{-1}^1 (a^4 + ax^2) dx. & 6 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}. & 7 \int_0^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}. & 8 \int_0^4 \frac{dx}{16+x^2}. \\
9 \int_{-2}^3 \varphi(x) dx, \text{ если } \varphi(x) = \begin{cases} 3x, & x < 1, \\ x+2, & x \geq 1. \end{cases}
\end{array}$$

$$10 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx, \text{ если } f(x) = \begin{cases} \cos x, x \leq \frac{\pi}{4}, \\ \sin x, x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$11 \int_5^6 |x-3| dx.$$

$$12 \int_{-1}^2 |x-3| dx.$$

$$13 \int_{-1}^5 |x-3| dx.$$

$$14 \int_{-2}^1 |x|(x-2) dx.$$

$$15 \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4} dx.$$

$$16 \int_0^{0.5} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$17 \int_{-1}^0 e^{x^2} x dx.$$

$$18 \int_0^5 \sqrt{25-x^2} dx.$$

$$19 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$20 \int_0^7 \sqrt{49-x^2} dx.$$

$$21 \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$22 \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

$$23 \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

$$24 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx.$$

$$25 \int_0^1 \frac{x dx}{x^4+1}.$$

$$26 \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$$

$$27 \int_0^1 x e^x dx.$$

$$28 \int_1^e \ln x dx.$$

$$29 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx.$$

$$30 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$$

$$31 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx.$$

$$32 \int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx.$$

$$33 \int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$$

$$34 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{5 + 4 \cos x}.$$

$$35 \int_0^{2\pi/3} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx.$$

$$36 \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \frac{12 + \operatorname{tg} x}{3 \sin^2 x + 12 \cos^2 x} dx.$$

$$37 \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}.$$

$$38 \int_0^{\pi/4} \frac{7 + 3 \operatorname{tg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx.$$

$$39 \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4 + 3 \cos 2x} dx.$$

$$40 \int_0^{\arccos(1/\sqrt{6})} \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5} dx.$$

$$41 \int_0^4 \frac{dx}{(16 + x^2)^{3/2}}.$$

$$42 \int_0^4 x^2 \sqrt{16 - x^2} dx.$$

$$43 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$44 \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx.$$

$$45 \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^4} dx.$$

$$46 \int_1^{64} \frac{1 - \sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}} dx. \quad 47 \int_{-5/3}^1 \frac{\sqrt[3]{3x+5} + 2}{1 + \sqrt[3]{3x+5}} dx. \quad 48 \int_{-1/2}^0 \frac{xdx}{2 + \sqrt{2x+1}}.$$

$$49 \int_6^{10} \sqrt{\frac{4-x}{x-12}} dx. \quad 50 \text{ Решить уравнение } \int_1^2 \left(\frac{2y}{x^2} + xy^2\right) dx = 8.$$

Задачи для решения дома

Вычислить определённые интегралы:

$$1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 2x}. \quad 2 \int_1^3 f(x) dx = \begin{cases} 5x^4 + 2x, & \text{если } x < 2; \\ x^3, & \text{если } x \geq 2. \end{cases} \quad 3 \int_5^{10} |x-8| dx.$$

$$4 \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx. \quad 5 \int_0^1 x e^{2x} dx. \quad 6 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x-1) \cos x dx.$$

$$7 \int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 2) \sin x dx. \quad 8 \int_0^1 \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)^2}. \quad 9 \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 4}.$$

$$10 \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx. \quad 11 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x + \cos x}. \quad 12 \int_0^{\pi/4} \frac{5 \operatorname{tg} x + 2}{2 \sin 2x + 5} dx.$$

$$13 \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^6 x dx. \quad 14 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}. \quad 15 \int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}.$$

Тема 6. Приложения определённого интеграла

Вопросы для повторения:

- 1 Формулы для вычисления площади плоской фигуры.
- 2 Формулы для вычисления длины дуги кривой.
- 3 Формулы для вычисления объёмов и поверхностей тел вращения.

Задачи для решения в аудитории

Задача 1. Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

$$1 \quad 2x - 3y + 2 = 0, \quad x = 2, \quad y = 0.$$

$$2 \quad y = 6x - 3x^2, \quad y = 0.$$

$$3 \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

$$4 \quad y = \frac{4}{x}, \quad y = -x + 5.$$

$$5 \quad y = -x^2, \quad x + y + 2 = 0.$$

$$6 \quad y = x^2, \quad y = 2 - x^2.$$

$$7 \quad y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 8.$$

$$8 \quad y = \sqrt{x}, \quad y = x^3.$$

$$9 \quad y^2 = 8x, \quad x = 8.$$

$$10 \quad y = |x| + 1, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 1.$$

$$11 \quad y = \ln x, \quad x = e, \quad y = 0.$$

$$12 \quad x^2 - y^2 = 1, \quad x = 2.$$

$$13 \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$14 \quad y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x.$$

$$15 \quad y = \sin x, \quad y = x^2 - \pi x.$$

$$16 \quad y = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

$$17 \quad y = 2x - x^2 + 3, \quad y = x^2 - 4x + 3.$$

$$18 \quad y = \arctg x, \quad y = 0, \quad x = \sqrt{3}.$$

$$19 \quad y = \arccos x, \quad y = 0, \quad x = 0.$$

$$20 \quad y = \sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1.$$

Задача 2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

$$1 \quad \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$$

$$3 \quad \begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$$

$$y = 3 \quad (y \geq 3).$$

$$y = 3 \quad (0 < x < 4\pi, \quad y \geq 3).$$

$$x = 4 \quad (x \geq 4).$$

Задача 3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными в полярных координатах.

$$1 \quad \rho = 4 \cos 3\varphi, \quad \rho = 2 \quad (\rho \geq 2).$$

$$2 \quad \rho = \cos 2\varphi.$$

$$3 \quad \rho = \sqrt{3} \cos \varphi, \quad \rho = \sin \varphi, \\ (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$4 \quad \rho = 4 \sin 3\varphi, \quad \rho = 2 \quad (\rho \geq 2).$$

Задача 4. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

$$1 \quad y = x^{\frac{3}{2}} \text{ от } x = 0 \text{ до } x = 4 .$$

$$2 \quad y = x^2 - 1, \text{ отсечённой осью } Ox .$$

$$3 \quad y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \text{ от } x = 0 \text{ до } x = 2 .$$

$$4 \quad y = \ln \sin x \text{ от } x = \frac{\pi}{3} \text{ до } x = \frac{2\pi}{3} .$$

$$5 \quad y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x \text{ от } x = 1 \text{ до } x = e .$$

$$6 \quad y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq 7/9.$$

$$7 \quad y = -\ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/6.$$

$$8 \quad y = \ln(x^2 - 1), \quad 2 \leq x \leq 3.$$

$$9 \quad y = \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}.$$

$$10 \quad y = \ln \frac{5}{2x}, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$$

$$11 \quad y = e^x + 6, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}.$$

Задача 5. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

$$1 \quad \rho = 3e^{3\varphi/4}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$2 \quad \rho = 4e^{4\varphi/3}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$3 \quad \rho = 4(1 - \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$4 \quad \rho = 6(1 + \sin \varphi), \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq 0.$$

Задача 6. Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

$$1 \quad \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \quad 2 \quad \begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases} \quad 3 \quad \begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi. \quad 0 \leq t \leq \pi/2. \quad 0 \leq t \leq \pi/3.$$

Задача 7. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В вариантах 1–6 ось вращения Ox , в вариантах 7–10 ось вращения Oy .

$$1 \quad y = -x^2 + 5x - 6, \quad y = 0.$$

$$2 \quad y = \sin^2 x, \quad x = \pi/2, \quad y = 0.$$

$$3 \quad y = xe^x, \quad y = 0, \quad x = 1.$$

$$4 \quad x = \sqrt[3]{y-2}, \quad x = 1, \quad y = 1.$$

$$5 \quad y = e^{1-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1.$$

$$6 \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad x = 2.$$

7 $y = x^2, x = 2, y = 0.$

8 $y = x^2 + 1, y = x, x = 0, y = 0.$

9 $y = \sqrt{x-1}, y = 0, y = 1, x = 0,5.$ 10 $y = \ln x, x = 2, y = 0.$

Задача 8. Найти площади поверхностей тел вращения.

1 Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси ОХ дуги кривой $3y - x^3 = 0, 0 \leq x \leq 1.$

2 Вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги синусоиды $y = \sin x$ вокруг оси Ох от $x_1 = 0$ до $x_2 = \pi$.

3 Определить площадь поверхности, образованной вращением кривой $4x^2 + y^2 = 4$ вокруг оси Оу.

4 Вычислить площадь поверхности тела, полученного при вращении плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{x}, y = 0$ вокруг оси Ох.

5 Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси ОХ дуги кривой $y = \sqrt{x^2 + 1}, 0 \leq x \leq \frac{1}{4}.$

6 Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси ОХ дуги кривой $y = \sqrt{x^2 - 2}, \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}.$

7 Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох дуги кривой $y^2 = 4 + x,$ отсеченной прямой $x = 2.$

Задачи для решения дома

Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

1 $y = x^2 - 6x + 5, y = 0$

2 $x^2 = 8y, y^2 = x$

3 $y = \arctg x, y = 0,$
 $x = \sqrt{3}.$

4 $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \end{cases}$ 5 $\rho = \sin 3\varphi.$
 $y = 3 (y \geq 3).$

Найти длину дуги кривой:

6 $y = \ln \cos x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{6}.$

$$7 \quad y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \text{ от } x = 0 \text{ до } x = 1.$$

$$8 \quad y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x, \quad 0 \leq x \leq 8/9. \quad 9 \quad \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$$

Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций (ось вращения Ox)

$$10 \quad y = x^2 - 2x + 1, \quad x = 2, \quad y = 0. \quad 11 \quad y = (x-1)^2, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0.$$

$$12 \quad y = \sqrt{x+3}, \quad y = 0, \quad x = 1. \quad 13 \quad y = \ln(x-2), \quad x = 5, \quad y = 0.$$

Тема 7. Физические приложения определённого интеграла

Вопросы теории для повторения:

- 1 Вычисление статистических моментов и координат центра тяжести плоской фигуры.
- 2 Вычисление моментов инерции и массы тел.
- 3 Вычисление пути, пройденного телом, по его скорости, работы переменной силы.

Задачи для решения в аудитории

- 1 Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v = 2t + 3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.
- 2 Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v = 3t^2 + 2t + 1$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 10 секунд от начала движения.
- 3 Скорость движения точки в заданном направлении $v = 15t - 5t^2$ м/с (v). Найти путь, пройденный точкой от начала движения до её остановки. Чему равна средняя скорость движения?
- 4 Скорость движения точки выражается формулой $v = e^{-0,01t}$ (м/с). Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

5 Тело движется со скоростью $v = e^{-0,01t}$ (м/с). Определить закон движения тела, если за 5 секунд оно прошло 105 м.

6 Материальная точка движется со скоростью $v(t) = t\sqrt{4+t^2}$ м/с. Вычислить путь, пройденный ею за 20 секунд.

7 Мгновенная скорость движения определяется в зависимости от времени формулой $v(t) = \sqrt{1+t}$ м/с. Определить среднюю скорость движения за 10 секунд от начала движения.

8 Тело брошено вертикально вверх с поверхности земли со скоростью $v(t) = 39,2 - 9,8t$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

9 Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении вдоль прямой. Первое тело движется со скоростью $v = 6t^2 + 2t$ м/с, второе – со скоростью $v = 4t + 5$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 сек.?

10 Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,06 м, если известно, что сила растягивающая пружину зависит от длины растяжения и определяется формулой $F=k \cdot x$, где k -коэффициент пропорциональности, x – растяжение (м), и что для растяжения пружины на 0,01 м необходима сила 20 Н.

11 Определите работу, необходимую для запуска тела массой $m=1000$ кг с поверхности земли на высоту $h=300$ км.

12 Найдите момент инерции тонкого кольца массы M и радиуса R относительно оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно плоскости кольца.

13 Найдите массу тонкого стержня длиной $L=8,0$ метров, если линейная плотность материала, из которого сделан стержень, меняется вдоль стержня по закону $\lambda=5(1+x^3)$ кг/м.

14 Два электрических заряда $e_0 = \frac{1}{3} \cdot 10^{-7} \text{ к}$ и $e_1 = \frac{2}{3} \cdot 10^{-7} \text{ к}$ находятся на оси ОХ, соответственно, в точках $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$. Какая работа будет произведена, если второй заряд переместится в точку $x_2 = 10$? (Сила взаимодействия зарядов $F(x) = 9 \cdot 10^9 \frac{e_0 \cdot e_1}{x^2} \text{ Н}$).

15 Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции (рис.4.1).

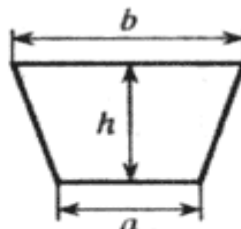


Рис. 4.1

Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, ускорение свободного падения положить равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Указание. Давление на глубине x равно $\rho g x$ $a = 6,6 \text{ м}, b = 10,8 \text{ м}, h = 4,0 \text{ м}$.

Задачи для решения дома

- 1 Скорость прямолинейного движения точки выражается формулой $v = 12t^2 - 3t$ (м/с). Найти путь, пройденный точкой от начала движения до её остановки.
- 2 Материальная точка движется со скоростью $v(t) = t\sqrt{2 + 5t^2}$ м/с. Вычислить путь, пройденный ею за 10 секунд.
- 3 Определите работу, необходимую для запуска тела массой $m=500$ кг с поверхности Земли (радиус которой принять равным R) на высоту $h=200$ км.
- 4 Найти центр тяжести полукруга, ограниченного полуокружностью $y = \sqrt{9\pi^2 - x^2}$ и осью OX .
- 5 Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобокой трапеции. Плотность воды, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, ускорение свободного падения положить равным $g = 10 \text{ м/с}^2$,
 $a = 6,0 \text{ м}, b = 9,6 \text{ м}, h = 4,0 \text{ м}$.

Тема 8. Несобственные интегралы

Вопросы для повторения:

- 1 Интегралы с бесконечными пределами интегрирования.
- 2 Интегралы от неограниченных функций.

Задачи для решения в аудитории

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$1 \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt[3]{8-x^3}} dx.$$

$$2 \int_2^{+\infty} 2e^{-3x} dx.$$

$$3 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}.$$

$$4 \int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3 - 1)}}.$$

$$5 \int_0^{+\infty} e^{-x} x^2 dx.$$

$$6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}.$$

$$7 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+9x^2}.$$

$$8 \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$9 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x-1)^2}.$$

$$10 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$11 \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^3}}.$$

$$12 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}.$$

$$13 \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\pi(x^2 + 4x + 5)}.$$

$$14 \int_0^1 \frac{xdx}{1-x^4}.$$

$$15 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

$$16 \int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{7+2x^6}}.$$

$$17 \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$18 \int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin 3x dx.$$

$$19 \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}.$$

$$20 \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2}.$$

$$21 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Задачи для решения дома

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость)

$$1 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$$

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$$

$$3 \int_0^1 x \ln^2 x dx$$

$$4 \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$5 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$$

$$6 \int_{-1}^0 \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$7 \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$$

$$8 \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

Раздел 2. Ряды

Тема 1. Числовые ряды

Вопросы теории для повторения:

- 1 Определения числового ряда, суммы ряда.
- 2 Необходимое условие сходимости числового ряда.
- 3 Признаки сходимости рядов с положительными членами.
- 4 Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.
- 5 Условная и абсолютная сходимость знакопеременных рядов.

Задачи для решения в аудитории

1 Записать первые пять членов ряда с общим членом

а) $u_n = \frac{1}{2n-1}$; б) $u_n = \frac{2n-1}{4n^2+1}$.

2 Найти общий член ряда

а) $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} + \dots$;

б) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots$

3 Найти сумму ряда

а) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots$; б) $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 14n + 48}$;

в) $1 \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$; г) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$.

4 Исследовать сходимость ряда

а) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{3n-1} + \dots$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, если $p < 1$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n + 1}$.

5 Исследовать сходимость ряда с общим членом

$$u_n = \frac{1}{4 \cdot 2^n - 3}$$

6 Используя признак Коши, исследовать сходимость ряда

а) $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^4 \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.

7 Используя признак Даламбера, исследовать сходимость ряда

а) $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \dots + \frac{2^n}{n^{10}} + \dots$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9\sqrt{3}} + \dots$;
 в) $\frac{10}{1!} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \dots$; г) $\frac{10}{11} + \left(\frac{10}{11}\right)^2 \cdot 2^5 + \left(\frac{10}{11}\right)^3 \cdot 3^5 + \dots + \left(\frac{10}{11}\right)^n \cdot n^5 + \dots$.

8 Применяя интегральный признак, исследовать сходимость ряда

а) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$; в) $\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} + \dots$;
 г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n-1) \ln(10n-1)}$.

9 Применяя признак Лейбница, исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2+1} + \frac{3}{3^2+1} - \frac{4}{4^2+1} + \dots$.

10 Исследовать сходимость ряда 1) $1-1+1-1+\dots$; 2) $1,1-1,01+1,001-1,0001+\dots$;

3) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \dots$; 4) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \dots$;

5) $\frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{7}{8} - \frac{10}{11} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{3n-2}{3n-1} + \dots$; 6) $2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n} + \dots$;

7) $\frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots$ (α — любое целое число); 8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$; 10) $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^{n^2}}{n^n}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{\sqrt{n+2}}$.

11 Дан сходящийся знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы этого ряда: 1) суммой первых его трёх членов; 2) суммой первых его четырёх членов.

12 Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

13 Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{(2n+1)5^n}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

Тема 2. Степенные ряды

Вопросы теории для повторения:

- 1 Определения функционального и степенного рядов.
- 2 Радиус и интервал сходимости степенного ряда.
- 3 Теорема Абеля.

Задачи для решения в аудитории

Задача 1. Исследовать сходимость степенных рядов:

- 1) $(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + \dots$; 2) $1!(x-5) + 2!(x-5)^2 + 3!(x-5)^3 + \dots$;
- 3) $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$; 4) $1 + \frac{x^3}{8} + \frac{x^6}{8^2} + \frac{x^9}{8^3} + \dots$;
- 5) $(x-4) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-4)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)^3 + \dots$; 6) $\frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(x-1)^3}{2^3} + \dots$;
- 7) $x + (2x)^2 + (3x)^3 + (4x)^4 + \dots$; 8) $5x + \frac{5^2 x^2}{2!} + \frac{5^3 x^3}{3!} + \frac{5^4 x^4}{4!} + \dots$;
- 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)5^n}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n^3+1}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+n}}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{5^n}$;
- 13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{(n+1)!3^n}$; 14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)!}$; 15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{3n}}{8(n+2)^3}$; 16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

Задача 2. Найти сумму ряда:

- 1) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$ ($|x| < 1$); 2) $\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} + \frac{3x^2}{a^3} + \frac{4x^3}{a^4} + \dots$, если $|x| < a$.

Задачи для решения дома

Найти область сходимости степенного ряда

- 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)5^n}$ · 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n^3+1}$ · 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$ · 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n+\sqrt{n}}$ ·
- 5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{5^n}$ · 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)!}$ · 7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)!3^n}$ · 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)2^n}$ ·

Тема 3. Разложение функций в степенные ряды

Вопросы теории для повторения:

- 1 Формула Тейлора (Маклорена).
- 2 Разложения элементарных функции в степенной ряд Тейлора.
- 3 Остаточный член ряда Тейлора.
- 4 Приближённые вычисления с помощью разложения функции в ряд.

Задачи для решения в аудитории

Задача 1. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x :

1) $f(x) = x \cos 3x$; 2) $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$; 3) $f(x) = \sin x^2$; 4) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$;

5) $f(x) = \ln(1-x^2)$; 6) $f(x) = x \ln(1+x^2)$; 7) $f(x) = \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$; 8) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

Задача 2. Разложить функцию в степенной ряд функции:

1) $f(x) = x^4 + x^2$ по степеням $(x-1)$; 2) $f(x) = e^x$ по степеням $(x-2)$;

3) $f(x) = \ln x$ по степеням $(x-1)$.

Задача 3. Вычислить приближённо с точностью до 0,0001:

1) $\frac{1}{\sqrt[4]{e^3}}$; 2) $\sqrt[6]{68}$; 3) $\int_0^{0.2} \sqrt[3]{1+x^2} dx$.

Задача 4. Вычислить приближённо, взяв первые два члена разложения в ряд подынтегральной функции:

1) $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ 2) $\int_0^{0.5} e^{-x^2} dx$

Задача 5. Найти пределы: 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1 - x}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Задачи для решения дома

1. Разложить в ряд по степеням x функцию $y = (3 + e^{-x})^2$.

2. Разложить в ряд по степеням $x-2$ функцию $y = e^{-2x}$.

Тест на тему «Ряды»

Найти сумму числового ряда:

1 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$. 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$. 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$.

Определить, какой из числовых рядов является сходящимся:

1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+10}$. 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-7}{n^2+6n-1}$. 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{n^3}}$. 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{n}}$.

Определить, какие из числовых рядов являются расходящимися:

$$1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \quad 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1} \quad 4 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ar\,ctgn} n.$$

Определить, какой из знакочередующихся рядов является абсолютно сходящимся:

$$1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{7n+3} \quad 3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-1} \quad 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{2^n}$$

Найти интервал сходимости степенного ряда, если радиус сходимости равен 3:

$$1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-7)^n \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+2)^n \quad 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Найти радиус сходимости степенного ряда:

$$1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5n+3} \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{2n+1} \quad 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n n^2}{4^n} \quad 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-5}{2^n} (x-4)^n.$$

Найти количество целых чисел, принадлежащих интервалу сходимости степенного ряда:

$$1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{3^n n^2} \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n-2} (x-1,5)^n.$$

$$3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{9^n \sqrt[3]{9n^2+1}} \quad 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n x^{3n}}{125^n}.$$

Найти коэффициент a_n разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$, если: 1 $f(x) = x^4 - 1, x_0 = 1, a_5 = ?$ 2 $f(x) = (x+3)^2, x_0 = 0, a_2 = ?$

3 $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x + 5, x_0 = 0, a_4 - ?$

4 $f(x) = \sin x + 7x^2 - 3, x_0 = \pi, a_3 - ?$

Тема 4. Тригонометрические ряды. Ряды Фурье

Вопросы теории для повторения:

- 1 Понятие тригонометрического ряда.
- 2 Ряд Фурье. Условия разложения периодических функций в ряд Фурье.
- 3 Разложение в ряд Фурье периодической (с периодом 2π) функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-\pi; \pi]$.
- 4 Разложение в ряд Фурье периодической функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-l; l]$.

Задачи для решения в аудитории

- 1 Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π , заданную на интервале

$$-\pi < x \leq \pi \text{ формулой: } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & \text{если } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

- 2 Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π , заданную на интервале $-\pi < x \leq \pi$ формулой: $f(x) = x^2$

- 3 Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π , если

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Построить график $f(x)$ и суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

- 4 Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π , если

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x, & \text{если } -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} - x, & \text{если } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

- 5 Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π , заданную на интервале $-\pi < x \leq \pi$ формулой: $f(x) = x$

- 6 Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π , если

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

7 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ при $0 < x \leq 2\pi$; $f(x+2\pi) = f(x)$.

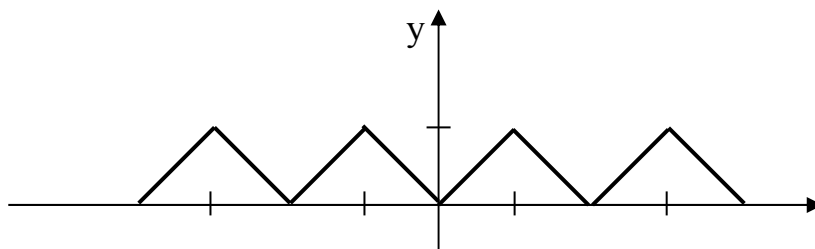
8 Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π , заданную на интервале

$$[-\pi, \pi] \text{ формулой } f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0; \quad a < x \leq \pi \\ 1, & 0 < x < a \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \quad x = a \end{cases}.$$

9 Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T = 4$, заданную на интервале

$$(0; 4) \text{ формулой } f(x) = \begin{cases} 6, & 0 < x < 2, \\ 3x, & 2 < x < 4. \end{cases}$$

10 Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T = 2$, заданную на интервале $(-1, 1)$ формулой $f(x) = |x|$.



11 Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T = 6$, заданную на полуинтервале

$$(-3; 3] \text{ формулой } f(x) = \begin{cases} -2, & -3 < x \leq 0, \\ 3-x, & 0 \leq x \leq 3, \end{cases} \text{ и построить график суммы.}$$

Задачи для решения дома

Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом 2π) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$.

$$1 \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x-1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$2 \quad f(x) = \begin{cases} 2x-1, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$3 \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{x}{2}+1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$4 \quad f(x) = \begin{cases} 2x+3, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5 \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 3-x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$6 \quad f(x) = \begin{cases} x-2, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$7 \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 4x-3, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$8 \quad f(x) = \begin{cases} 5-x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$9 \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 6x-5, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$10 \quad f(x) = \begin{cases} x+\frac{\pi}{2}, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Проверочный тест для подготовки к экзамену

1 Множество первообразных функции $f(x) = \cos 3x$ имеет вид...:

- 1) $3 \sin 3x + C$; 2) $3 \sin x + C$; 3) $\frac{1}{3} \sin 3x + C$; 4) $-\frac{1}{3} \sin 3x + C$.

2 Продолжить формулу $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = \dots$:

- 1) $f(x)$; 2) $f(x) + C$; 3) $F(x) + C$; 4) $f(x) dx$.

3 Установить соответствие между интегралом и его значением:

- 1) $\int \sin^3 x \cos x dx$; 2) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$; 3) $\int e^x (\sin e^x) dx$; 4) $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$.

- A) $\operatorname{tg} x$; B) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$; C) $\frac{1}{4} \sin^4 x$; D) $\frac{1}{\cos x}$; E) $-\cos e^x$.

4 Определенный интеграл $\int_0^2 x^3 dx$ равен:

- 1) 2; 2) 0; 3) 4; 4) $\frac{1}{4}$.

5 Определенный интеграл $\int_3^5 |x-8| dx$ равен:

- 1) $|x-8|$; 2) $\int_3^5 (8-x) dx$; 3) $\int_3^5 (x-8) dx$; 4) $\int_2^4 (x-8) dx$.

6 Продолжить формулу $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \dots$:

- 1) $k \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx$; 2) $\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx$; 3) $\int f_1(x) dx \pm f_2(x) dx$; 4) $\int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$.

6) В сходится условно, А сходится абсолютно.

12 Коэффициент a_5 в разложении функции $f(x)=x^4+3x^2-x+1$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ равен:

- 1) -3; 2) 0; 3) 1; 4) 9.

13 Интервал $[0;2)$ является областью сходимости степенного ряда:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x+2)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-2)^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n$.

Примеры решения типовых задач

Задача 1. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx$

Решение:

$$\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx = \left| \begin{array}{l} x-\sin x = t \\ (1-\cos x)dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -t^{-1} + C = -\frac{1}{x-\sin x} + C.$$

Задача 2. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx.$$

Решение:

Разделим дробь

$$\begin{array}{l} x^3 - 3x^2 - 12 \\ x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \\ \hline 6x^2 - 26x + 12 \end{array} \left| \begin{array}{l} x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \\ \hline 1 \end{array} \right.$$

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx = \int \left(1 + \frac{6x^2 - 26x + 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} \right) dx$$

Разложим дробь $\frac{6x^2 - 26x + 12}{(x-4)(x-3)(x-2)}$ на простейшие

$$\frac{6x^2 - 26x + 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-3)(x-2) + B(x-4)(x-2) + C(x-4)(x-3)}{(x-4)(x-3)(x-2)}.$$

$$Ax^2 - 5Ax + 6A + Bx^2 - 6Bx + 8B + Cx^2 - 7Cx + 12C = 6x^2 - 26x + 12.$$

$$A + B + C = 6;$$

$$-5A - 6B - 7C = -26;$$

$$6A + 8B + 12C = 12. \quad \text{Решая систему, получаем } A = 2; \quad B = 12; \quad C = -8.$$

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } \int \left(1 + \frac{6x^2 - 26x + 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} \right) dx &= \int \left(1 + \frac{2}{x-4} + \frac{12}{x-3} - \frac{8}{x-2} \right) dx = \\ &= x + 2 \ln|x-4| + 12 \ln|x-3| - 8 \ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

Задача 3. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$

Решение:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}} &= \left. \frac{x = 3 \operatorname{tg} t}{dx = \frac{3 dt}{\cos^2 t}} \right|_0^{\pi/4} = \int_0^{\pi/4} \frac{3 dt}{(9+9 \operatorname{tg}^2 t)^{3/2} \cos^2 t} = \\ &= \frac{3}{27} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^3 t}{\cos^2 t} dt = \frac{3}{27} \int_0^{\pi/4} \cos t dt = \frac{3}{27} \sin t \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{18}. \end{aligned}$$

Задача 4. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями.

$$\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Решение:

$$x' = 4(-\sin t + \sin t + t \cos t) = 4t \cos t,$$

$$y' = 4(\cos t - \cos t + t \sin t) = 4t \sin t.$$

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt, \quad l = \int_0^2 \sqrt{16t^2 \cos^2 t + 16t^2 \sin^2 t} dt = \int_0^2 4t dt = 2t^2 \Big|_0^2 = 2 \cdot 2^2 = 8.$$

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \ln n}.$$

Решение:

Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3n \ln n}$.

Мы можем сделать это, руководствуясь предельным признаком сравнения.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(3n-1) \ln n}}{\frac{1}{3n \ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n \ln n}{(3n-1) \ln n} = 1 \neq 0.$$

Интегральный признак Коши

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{3x \ln x} = \frac{1}{3} \lim_{D \rightarrow \infty} \int_2^D \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \frac{1}{3} \lim_{D \rightarrow \infty} \ln(\ln x) \Big|_2^0 = \frac{1}{3} \lim_{D \rightarrow \infty} (\ln(\ln D) - \ln(\ln 2)) = \infty.$$

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3n \ln n}$ расходится, значит расходится и исследуемый ряд.

Задача 6. Найти область сходимости ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3^n}.$$

Решение:

Радикальный признак Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|U_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(x+5)^n}{3^n} \right|} = \frac{|x+5|}{3} < 1,$$

$$-3 < x+5 < 3 \Rightarrow -8 < x < -2.$$

Исследуем сходимость на концах интервала

$$x = -8 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{ расходится, т.к. } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0.$$

$$x = -2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1^n \text{ расходится, т.к. } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0.$$

Область сходимости $x \in (-8; -2)$.

Задача 7. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x : $f(x) = \sqrt[4]{16-5x}$

Решение:

$$\sqrt[4]{16-5x} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{5}{16}x \right)^{\frac{1}{4}} \cong \approx$$

Воспользуемся известным разложением.

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{5}{16}x\right)^{\frac{1}{4}} &= 1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{5}{16}x\right) + \frac{\left(-\frac{3}{16}\right)}{2!}\left(-\frac{5}{16}x\right)^2 + \frac{\frac{21}{64}}{3!}\left(-\frac{5}{16}x\right)^3 + \dots = \\ &= 1 - \frac{5}{64}x - \frac{75}{8192}x^2 - \frac{875}{2^{19}}x^3 - \dots \end{aligned}$$

$$\sqrt[4]{16-5x} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2^7}x - \frac{75}{2^{14}}x^2 - \frac{875}{2^{20}}x^3 - \dots$$

Задача 8. Вычислить интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$.

Решение:

$$\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx = \int_0^{0,12} \left(\frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx.$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\int_0^{0,2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} + 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \dots \right) dx = \int_0^{0,2} \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} - \dots \right) dx = \left(x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} - \dots \right) \Big|_0^{0,2} \approx$$

$$\approx 0,2 - 0,01 + 0 = 0,190.$$

Список литературы

- 1 *И. И. Баврин*, Курс высшей математики. /*И. И. Баврин* – Москва : Просвещение, 2010.
- 2 *П. Е Данко*, Высшая математика в упражнениях и задачах. / *П. Е Данко*, *А. Г. Попов*, *Т. Я. Кожевникова*, *С. П. Данко* – Москва : Оникс, 2008.
- 3 *Б. П. Демидович*, Краткий курс высшей математики. / *Б. П. Демидович*, *В. А. Кудрявцев* – Москва : Астрель, АСТ, 2004.
- 4 *В. А. Ильин*, Высшая математика. /*В. А. Ильин*, *А. В. Куркина* – Москва : Изд. Проспект Изд. Московский университет, 2010 г.
- 5 *Н. С. Пискунов*, Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. пособие в 2 т /*Н.С. Пискунов* - Изд. стереотип. – Москва : Интеграл – Пресс, 2001. –Т.1.
- 6 *В. И. Смирнов*, Курс высшей математики. /*В. И. Смирнов* – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2008. – Т. 1
- 7 *Г. М. Фихтенгольц*, Курс дифференциального и интегрального исчисления: учеб. для вузов в 3 т. /*Г. М. Фихтенгольц* – 8-е изд. –Москва : Физматлит, 2001. – Т.1
- 8 *В. С. Шипачев*, Основы высшей математики. /*В. С. Шипачев* – Москва : Высшая школа, 2004

Потеряйко Елена Львовна.

МАТЕМАТИКА

Материалы для практических занятий и самостоятельной работы

для студентов направлений 04.05.01 «Фундаментальная

и прикладная химия», 03.03.02 «Физика»

Часть 2

Редактор Н. М. Быкова

Подписано в печать 30.09.19	Форма 60x84 1/16	Бумага 65 г/м ²
Печать цифровая	Усл. печ. л. 2,25	Уч.- изд. л. 2,25
Заказ 126	Тираж 25	Не для продажи

Библиотечно – издательский центр КГУ
640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.

Курганский государственный университет.