МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Курганский государственный университет»

Кафедра фундаментальной математики

МАТЕМАТИКА

Материалы для практических занятий и самостоятельной работы
для студентов направлений 04.05.01 «Фундаментальная и
прикладная химия», 03.03.02 «Физика»

Часть 1

Курган 2019

Кафедра: «Фундаментальная математика»

Дисциплины: «Математика» (направления 04.05.01, 03.03.02)

Составили: старший преподаватель Е. Л. Потеряйко.

Утверждены на заседании кафедры «18» октября 2018 г.

Рекомендованы методическим советом университета «20» декабря 2017 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Настоящие материалы предназначены для студентов, обучающихся по направлениям «Фундаментальная и прикладная химия», «Физика». Они составлены в соответствии с учебным планом по дисциплине «Математика».

Для каждой темы составлены вопросы по теории для повторения, предложены задачи для работы на практических занятиях и дома, а также примеры решения задач.

Цель материалов – оказать помощь студентам при подготовке к практическим занятиям по данному курсу.

Это пособие может быть использовано также студентами естественнонаучного направления других специальностей.

Раздел 1. Элементы теории множеств

Тема 1. Множества. Действия над множествами.

Вопросы теории для повторения:

1 Понятие множества. Виды множеств: а) конечное, б) бесконечное, в) числовые множества, г) равные множества.

2 Действия над множествами: а) объединение, б) пересечение, в) разность множеств.

3 Диаграммы Эйлера – Венна.

4 Теоремы о числе элементов в объединении конечных множеств.

5 Числовые множества.

Задачи для решения в аудитории

1 М – множество четырехугольников. Принадлежит ли этому множеству:
1) ромб; 2) трапеция; 3) окружность; 4) прямоугольник; 5) диагональ параллелограмма; 6) квадрат.

2 В следующих множествах все элементы, кроме одного, обладают некоторыми общими свойствами. Опишите это свойство и найдите элементы, не обладающие им:
1)$\{\text{квадрат}; \text{круг}; \text{ромб}; \text{параллелограмм}\}$; 2) $\{4; 9; 16; 25; 30\}$;
3)$\{\text{синий}, \text{красный}, \text{белый}, \text{цвет}, \text{черный}\}$.

3 Среди следующих множеств найдите равные множества: А = $\{1, 3, 6\}$;
В = $\{3, 6, 9\}$; С = $\{6, 9, 3\}$; D = $\{9, 6, 3\}$; Е = $\{3, 2, 6\}$; К = $\{6, 2, 3\}$.

4 Укажите, каким характеристическим свойством обладают элементы каждого из следующих множеств: $\{а, е, ё, и, о, э, ю, я, ы, у\}$;
$\{23; 22; 21; 20; 19; 18; 17; 16; 15\}$.

5 Задать с помощью характеристического свойства: 1) множество всех действительных положительных чисел; 2) множество всех действительных отрицательных чисел.

6 Задать множества, перечислив их элементы: 1) множество всех положительных простых чисел, меньше 40; 2) множество всех целых положительных чисел, кратных 3, меньших 33.

7 Записать следующие множества, используя различные формы записи множеств: 1) множества корней уравнения $x^2 - 1 = 0$; 2) множество натуральных чисел, лежащих в интервале (0; 5).

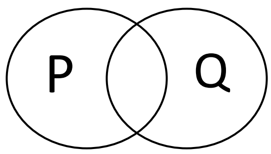
8 Дано множество чисел К = $\{21; 54; 153; 171; 234\}$. Составьте подмножества К из чисел, которые:1) являются четными; 2) являются нечетными; 3) делятся на 7; 4) делятся на 9.

9 Укажите пустые множества среди следующих: 1) множество целых корней уравнения $x^2 - 9 = 0$; 2) множество целых корней уравнения $x^2 + 9 = 0$; 3) множество действительных корней уравнения $\frac{1}{x} = 0$; 4) множество натуральных чисел, меньших единицы; 5) множество натуральных чисел, не являющихся ни простыми, ни составными.

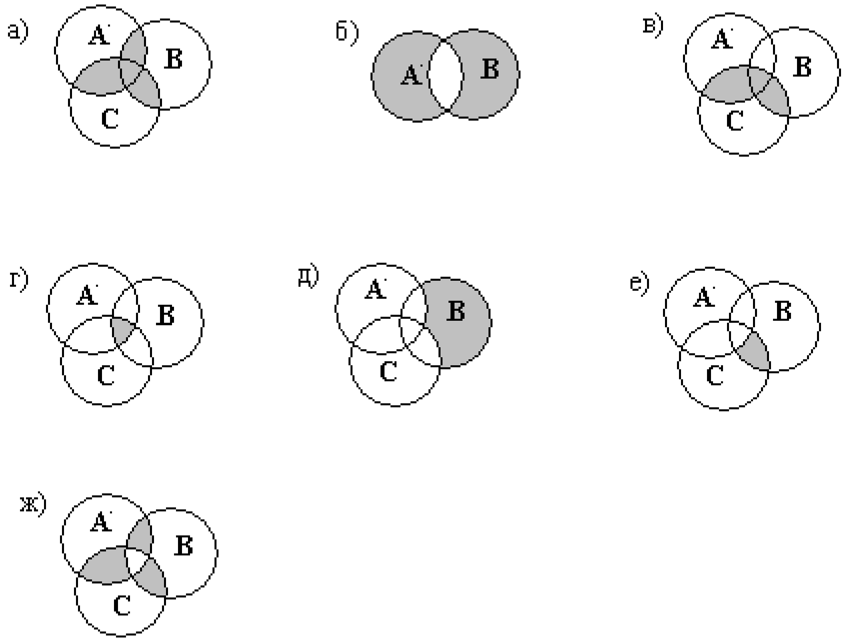
10 Начертите два треугольника так, чтобы их пересечением: 1) была точка; 2) был треугольник; 3) был отрезок; 4) был четырёхугольник; 5) был пятиугольник; 6) был шестиугольник.

11 Даны множества: A = $\{12; 20; 48; 60; 90\}$, B = $\{48; 60; 90; 92\}$, M = $\{12; 20; 35\}$. Найдите множества:1) M ∩ A; 2) M ∩ B; 3) A ∩ B;4) M U A; 5) M U B; 6) A U B; 7) A \ B; 8) B \ M; 9) A \ B \ M; 10) (A U B) \ (M ∩ B).

12 На рисунке изображены множества P и Q. Отметьте на этом рисунке следующие множества: 1) P\Q; 2) Q\P; 3) PUQ; 4) PUQ\Q; 5) Q∩P; 6) P\(P∩Q); 7) P∩Q\P; 8) (PUQ)\(P∩Q).



13 Используя операции над множествами A, B, C, записать символически каждую из заштрихованных областей:



14 Каждый из членов команды играет либо в футбол, либо в теннис, либо в футбол и в теннис. Сколько человек в команде, если известно, что 18 человек играют в обе игры, 23 человека играют в футбол, 21 – в теннис?

15 Из 220 студентов 163 играют в баскетбол, 175 – в футбол, 24 – не играют в эти игры. Сколько человек одновременно играют в баскетбол и в футбол?

16 Из 20 человек 2 изучают только английский язык, 3 – только немецкий, 6 – только французский. Никто не изучает 3 языков. Один изучает немецкий и английский язык, трое – французский и английский. Сколько человек изучает французский и немецкий языки?

17 Контрольную работу, содержащую одну задачу по алгебре, одну по геометрии, одну по тригонометрии, писали 105 учащихся. Задачу по алгебре решили 70 человек, по геометрии – 59, по тригонометрии – 62. 90 учащихся решили задачи по алгебре или геометрии, 89 – по геометрии или тригонометрии. По алгебре или по тригонометрии задачи были решены 91 учащимся, а 6 школьников не решили ни одной задачи. Сколько учащихся решили все 3 задачи?

18 Дано множество: D = $\left\{-125,7;-80;-\frac{2}{3};0;\sqrt{2};5;8,35;\frac{14}{2};\sqrt{13};222;\frac{54}{17};\sqrt[3]{923}\right\}$.

Найти подмножества данного множества, которые содержат: *а*) натуральные числа; б) целые числа; *в*) целые неотрицательные числа; *г*) рациональные числа; *д*) иррациональные числа; *е*) положительные действительные числа; *ж*) действительные числа.

Задачи для решения дома

1 Запишите множество А перечислением его элементов, если:
а) $A=\{k\in N/1,4<k<8\}$, б) $A=\{k\in Z/-4,8<k\leq 1\}$; в) $A=\{k\in N/2\leq k<3\}$.

2 Множество C = {10, 22, 35, 55, 60, 64, 70} есть объединение множеств A и B. В A входят все числа, которые делятся на 5, а в B – на 2. Найти множество $D = A\cap B$. На какое число делится каждый элемент множества D?

3 Какое из двух множеств является подмножеством другого:
а) A и $A\cap B$; б) A и $A\cup B$; в) $A\cap B$ и $A\cup B$.

4 Даны множества: A= {2, 0, -4, 10}, B= {0,-4, 12, 15, 8}, C= {-7, 3, 8}, D= {0, 15, 8, 12}. Найдите: а) $A\setminus(B\cup D)$; б) $(C\cap D)\cup(A\setminus B)$;

в) $(C\cup(A\cap B))\setminus D$.

5 Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна множества:
а) $A\cup(B\cap C)$; б) $A\cap(B\cup C)$; в) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$; г) $(A\cup B)\setminus(B\cap A)$;

д) $(A \cup B) \setminus (C \cap A)$; если множества A, B и C взаимно пересекаются.

6 Экзамен по русскому языку сдавали 300 абитуриентов, оценки 2, 3, 4 получили 280 человек, а оценки 3, 4, 5 получили 200 человек. Сколько человек получили оценки 3 и 4?

Тема 2. Алгебраическая форма записи комплексных чисел

Вопросы теории для повторения:

1 Определение алгебраической формы записи комплексного числа.
2 Комплексная плоскость. Изображение комплексных чисел на плоскости.
3 Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
4 Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел.

Задачи для решения в аудитории

1 Вычислить:

1) $(3-2i)+(5+3i)$; 2) $(1+2i)-(3-i)$; 3) $3(2-i)\cdot(1-i)$;
4) $(1+3i)(-7+2i)$; 5) $(2-i)^2$; 6) $(1+2i)^3$.

2 Вычислить:

1) i^{13}; 2) i^{65} ; 3) $\left(\dfrac{1}{1-i}\right)^2$; 4) $\dfrac{5}{1+2i}$; 5) $\dfrac{2i-3}{1+i}$; 6) $\dfrac{2+3i}{i}$;

7) $\dfrac{1+2i}{-2+i}(-i)+1$; 8) $\dfrac{2+i}{2-i}-(3+4i)+\dfrac{4-i}{3+2i}$; 9) $2i(3-i)+\dfrac{5+2i}{1-i}$;

10) $\dfrac{3-5i}{2+i}-\dfrac{1+2i}{1-2i}+7i.$

3 Выполнить действия:

1) $3i\,(2-i)+\frac{7-2i}{2+i}$; 2) $\dfrac{2-i}{1+i}+(3-2i)\cdot(1+7i)$; 3) $\dfrac{3-i}{1+i}-(2+7i)\cdot(1-i)$;

4) $(5-3i)\cdot(4+7i)-\dfrac{1+i}{2+3i}$; 5) $\dfrac{2+i}{-3-i}+(5+2i)\cdot(4-2i)$; 6) $\dfrac{3+i}{-1+i}-(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i)\cdot(1+4i)$.

4 Найти действительную и мнимую части числа $z=\dfrac{5+2i}{2-5i}-\dfrac{3-4i}{4+3i}-\dfrac{1}{i}$.

5 Построить точки, соответствующие комплексным числам:

-1; i; 2; $-3i$; $2-3i$; $-4-2i$; $3+i$; $-6+2i$; $2+2i$; $-2+2i$; $-2-2i$.

6 Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел, изобразить геометрически данные числа и результаты действий.

1) $z_1=-5+2i,\quad z_2=3-i$; 2) $z_1=-2,\quad z_2=5i$.

7 Решить уравнения на множестве комплексных чисел

1) $x^2-4x+5=0$; 2) $x^2-6x+13=0$; 3) $x^2-10x+34=0$; 4) $x^2+x+1=0$.

Задачи для решения дома

1 Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел, изобразить геометрически данные числа и результаты действий.

1) $z_1=-2+i,\quad z_2=3-i$; 2) $z_1=-3,\quad z_2=4i$.

2 Выполнить действия:

1) $\frac{2-i}{3+i}+i\,(1-8i)$; 2) $\frac{1+i}{2-i}+\ (3-i)(1+2i)$; 3) $(3-i)(5+2i)+\frac{1-3i}{1+i}$.

Тема 3. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел

Вопросы теории для повторения:

1 Определение тригонометрической формы записи комплексного числа.
2 Модуль и аргумент комплексного числа.
3 Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
4 Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа.
5 Определение показательной формы записи комплексного числа.
6 Действия над комплексными числами в показательной форме. Формула Эйлера.

Задачи для решения в аудитории

1 Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел:

1) $z=1+i$; 2) $z=\sqrt{3}-i$; 3) $z=\sqrt{2}i$; 4) $z=2$; 5) $z=-i$.

2 Представить следующие комплексные числа в тригонометрическом виде:

1) $1,\ -1,\ i,\ -i$; 2) $z=3-3i$; 3) $z=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}i}{2}$.

3 Даны числа

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}, \quad z_2 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}, \quad z_3 = \cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}.$$

Вычислить: 1) $z_1 z_2 z_3$; 2) $\frac{z_1}{z_2 z_3}$; 3) $\frac{z_1 z_2}{z_3}$; 4) $\frac{z_1 z_3}{z_2}$.

4 Вычислить:

1) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^6$; 2) $\left(\sqrt{3}+i\right)^9$; 3) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}$; 4) $(1 + i)^3(1 - i)^7$;

5) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-12}$; 6) $\frac{(1+i)^8}{(-1+i)^4}\cdot\sqrt{3}$

5 Вычислить $|z|$ и $\arg z$, если $z = \frac{10-2i}{2-3i}$.

6 Вычислить корни.

1) $\sqrt[4]{1}$; 2) $\sqrt[4]{-i}$; 3) $\sqrt[3]{1+i}$; 4) $\sqrt[6]{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$; 5) $\sqrt[5]{-2+2i}$; 6) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}}$.

7 Представить в показательной фоpе комплексные числа:

1) $-1 - i$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[3]{-1+i}$.

8 Найти тригонометрическую и алгебраическую форму для чисел:

1) $z = 2e^{\frac{\pi i}{4}}$; 2) $z = 4e^{\frac{\pi i}{2}}$; 3) $z = 3e^{\pi i}$; 4) $z = e^{i}$.

9 Найти $z_1 z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$, результат написать в алгебраической форме.

1) $z_1 = 1{,}5e^{0{,}7i}$; $z_2 = 0{,}7e^{1{,}7i}$, 2) $z_1 = e^{-0{,}7+3i}$; $z_2 = e^{1{,}5+2i}$.

10 Решить уравнения на множестве комплексных чисел:

1) $x^3 - 27 = 0$ 2) $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$ 3) $x^3 + 8x^2 + 15x + 18 = 0$ 4) $x^3 - 6x + 9 = 0$.

Задачи для решения дома

1 Представить следующие комплексные числа в тригонометрическом и показательном виде:

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$; 2) $z = 1 - i$; 3) $z = -\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}i}{2}$.

2 Даны числа $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10})$, $z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$.

Вычислить: 1) $z_1 z_2$; 2) $\dfrac{z_2}{z_1}$.

3 Вычислить: 1) $\left(\sqrt{3}-i\right)^9$; 2) $\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^{10}$; 3) $\sqrt[4]{i}$; 4) $\sqrt[3]{-1+i}$; 5) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$.

Раздел 2. Элементы линейной алгебры

Тема1. Матрицы и определители

Вопросы теории для повторения:

1 Определение матрицы размера *m* х *n*.
2 Определение квадратной матрицы *n* - го порядка.
3 Виды матриц: а) диагональная; б) единичная; в) нулевая; г) вырожденная; д) невырожденная; е) матрица – столбец; ж) матрица – строка.
4 Определитель матрицы второго порядка.
5 Определитель матрицы третьего порядка.
6 Свойства определителей.
7 Действия над матрицами: а) сложение; б) вычитание; в) умножение матрицы на число; г) умножение матриц.
8 Определение ранга матицы.
9 Вычисление ранга матрицы (теорема о ранге матрицы).
10 Обратная матрица. Определение и вычисление.
11 Матричные уравнения.

Задачи для решения в аудитории

1 Даны матрицы: A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, D= $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

C = (1 -1 4), N= $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, K = $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, M = $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Найти: а) A + B; б) -3A; в) 5A – 2B; г) K – N; д) K + D; е) A · B; ж) D · M;

з) N · K; и) A · D; к) M · C; л) N · D;м) L· R

2 Дано: A= $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, E= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $A^2 - 12E$.

3 Дано: A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти $A^2 + B^2$.

4 Дано: A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$. Найти $A^2 + 4A + E$.

5 Найти A^{-1}, если: а) A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; б) A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & -1 & 2\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; д) $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$;
е) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}$.

6 Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & -2\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}1 & 7\\ 7 & 1\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}4 & 8\\ 2 & 4\end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix}0 & 7\\ 0 & -3\end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -7 & 5\end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix}0 & -5\\ 1 & 0\end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}$; и) $\begin{vmatrix}-3 & 0 & 1\\ -5 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 7\end{vmatrix}$; к) $\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 31 & 5 & -7\\ 14 & 3 & 1\end{vmatrix}$; л) $\begin{vmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix}$ м) $\begin{vmatrix}o & a & o\\ b & c & d\\ o & e & o\end{vmatrix}$;

н) $\begin{vmatrix}-1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix}$;о) $\begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}$; п) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$; р) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$; с) $\begin{vmatrix}-1 & 4 & 3\\ 3 & -12 & -9\\ 5 & 30 & 71\end{vmatrix}$;

т) $\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & 7 & -1\end{vmatrix}$; у) $\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & -3 & 1\\ 0 & 7 & -1\end{vmatrix}$.

7 Найти *x*, если:

а) $\begin{vmatrix}1 & 3 & x\\ 4 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}=0$; б) $\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & x & -2\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}=4$; в) $\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ -2 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & 2 & 7\\ -2 & x & -2\\ 4 & 5 & 11\end{vmatrix}$,
где $x \in Z$.

8 Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3 & -2\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}6 & 2 & -10 & 4\\ -5 & -7 & -4 & 1\\ 2 & 4 & -2 & -6\\ 3 & 0 & -5 & 4\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}2 & -2 & 0 & 3\\ 3 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -4 & 0\end{vmatrix}$;
г) $\begin{vmatrix}-4 & 1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ -3 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -2 & 3\end{vmatrix}$.

9 Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$; б) $X\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 0 & 4 & 8\end{pmatrix}$;

г) $X\cdot\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&7\\0&1\\2&3\\3&4\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}3&-1\\5&-2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&16\\9&10\end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-3&2\\5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\3&-1\end{pmatrix}$; ж) $X\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\\1&-2&5\end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&-3&0\\10&2&7\\10&7&8\end{pmatrix}$; и) $X\cdot\begin{pmatrix}5&3&1\\1&-3&-2\\-5&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&3&0\\-5&9&0\\-2&15&0\end{pmatrix}$;

к) $\begin{pmatrix}1&-2&-3\\1&-1&-2\\2&-3&-4\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-5&7\\4&-9&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix}2&-3&1\\4&-5&2\\5&-7&3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}9&7&6\\1&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\18&12&9\\23&15&11\end{pmatrix}$.

10 Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&-1&1&-2&1\\1&-1&2&-1&2\\5&-5&8&-7&3\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}3&1&2\\7&3&5\\15&7&11\\11&5&8\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}-1&3&3&-4\\4&-7&-2&1\\-3&5&1&0\\-2&3&0&1\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&0&1&1\\1&0&1&0&0\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$.

Задачи для решения дома:

1 Даны матрицы:

$A=\begin{pmatrix}2&-3\\5&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&3\\-2&6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&3\\-1&2\end{pmatrix}$

Найти: *а)* $(A+B)C$; б) $(2A-3B)C$; *в)* $(ABC)^T$; *г)AC и CA,* сравнить результаты.

2 Найти матрицу, обратную к данной $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{pmatrix}$.

Решить матричное уравнение*:*

3 $\begin{pmatrix}-1&2\\2&-3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-2&3\\1&-4\end{pmatrix}$ **4** $\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\cdot X\begin{pmatrix}-1&-2\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}$

Решить уравнение и неравенство:

5 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$ **6** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$

Вычислить определитель 4-го порядка разложением по строке или столбцу:

7 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$

Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

8 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$ **9** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$ **10** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$

Тема 2. Системы линейных уравнений

Вопросы теории для повторения:

1 Определение системы m линейных уравнений с n неизвестными.
2 Исследование систем линейных уравнений: а) совместные и несовместные системы, б) определенные и неопределенные системы уравнений.
3 Матричный метод решения n линейных уравнений с n неизвестными.
4 Метод Крамера решения n линейных уравнений с n неизвестными.
5 Метод Гаусса решения m линейных уравнений с n неизвестными.

Задачи для решения в аудитории

Решить системы уравнений методом Крамера:

1 $\begin{cases} 2x+3y=-11, \\ 5x-4y=30. \end{cases}$ 2 $\begin{cases} 3x-y=4, \\ 15x-3y=6. \end{cases}$ 3 $\begin{cases} x-2y=-19, \\ 2x-3y=-23. \end{cases}$

4 $\begin{cases} 2x+y+3z=7, \\ 2x+3y+z=1, \\ 3x+2y+z=6. \end{cases}$ 5 $\begin{cases} x+2y+z=8, \\ 2x-3y+3z=5, \\ 3x-4y+5z=10. \end{cases}$ 6 $\begin{cases} 2x+y-z=0, \\ 3y+4z=-6, \\ x+z=1. \end{cases}$

7 $\begin{cases} 2x-3y-z=-6, \\ 3x+4y+3z=-5, \\ x+y+z=-2. \end{cases}$ 8 $\begin{cases} -2x+y=-6, \\ x-2y-z=5, \\ 3x+4y-2z=13. \end{cases}$ 9 $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$

Решить системы уравнений матричным методом:

10 $\begin{cases} x+2y-z=3, \\ 5x+12y-2z=-1, \\ 4x+9y-2z=2. \end{cases}$ 11 $\begin{cases} x+2y+3z=14, \\ x+y+z=6, \\ x+y=3. \end{cases}$ 12 $\begin{cases} 3x-4y+5z=-3, \\ 2x-3y+z=-7, \\ 3x-5y-z=-16. \end{cases}$

13 $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8. \end{cases}$ 14 $\begin{cases} x+2y+3z=5, \\ 2x-y-z=1, \\ x+3y+4z=6. \end{cases}$ 15 $\begin{cases} 2x+y-z=5, \\ x-2y+2z=-5, \\ 7x+y-z=10. \end{cases}$

Исследовать и решить системы уравнений методом Гаусса.

16 $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=9. \end{cases}$ 17 $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=12, \\ x_1+2x_2+4x_3=4, \\ 5x_1+x_2+2x_3=20. \end{cases}$ 18 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-x_3=4, \\ 3x_1+x_2-4x_3=0. \end{cases}$

19 $\begin{cases} 2x_1-4x_2+3x_3=1, \\ x_1-2x_2+4x_3=3, \\ 3x_1-x_2+5x_3=2. \end{cases}$ 20 $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=2, \\ 3x_1+2x_2+2x_3=-2, \\ x_1-2x_2+x_3=1. \end{cases}$ 21 $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=6, \\ -x_1+2x_2+x_3=-1, \\ 4x_1+3x_2+29x_3=-5. \end{cases}$

22 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1, \\ 3x_1+x_2-4x_3=0, \\ 4x_1+5x_2+9x_3=18. \end{cases}$ 23 $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=6, \\ x_1+2x_2-x_3=1, \\ 3x_1+11x_2-7x_3=-3. \end{cases}$ 24 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=9, \\ x_1-x_2+x_3=5, \\ x_1+x_2-x_3=-1. \end{cases}$

25 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2, \\ 3x_1+2x_2+2x_3=1, \\ 4x_1+3x_2+3x_3=4. \end{cases}$ 26 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4, \\ 3x_1-5x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+7x_2-x_3=8. \end{cases}$

Решить системы уравнений любым методом.

27 $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=6, \\ -x_1+2x_2+x_3=-1, \\ 4x_1+3x_2-3x_3=-5. \end{cases}$ 28 $\begin{cases} 4x_1-3x_2-2x_3=3, \\ 2x_1-4x_2-3x_3=0, \\ x_1+2x_2+3x_3=5. \end{cases}$ 29 $\begin{cases} 2x_1-x_2-6x_3+3x_4=-1, \\ 7x_1-4x_2+2x_3-15x_4=-11, \\ x_1-2x_2-4x_3+9x_4=5 \\ x_1-x_2+2x_3-6x_4=-8 \end{cases}$.

Задачи для решения дома

Решить системы уравнений методом Крамера.

1 $\begin{cases} 2x-3y-z=-6, \\ 3x+4y+3z=-5, \\ x+y+z=-2. \end{cases}$ **2** $\begin{cases} -2x+y=-6, \\ x-2y-z=5, \\ 3x+4y-2z=13. \end{cases}$ **3** $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$

Решить системы уравнений матричным методом

4 $\begin{cases} x+2y+3z = 14, \\ x+y+z=6, \\ x+y=3. \end{cases}$ 5 $\begin{cases} 3x-4y+5z = -3, \\ 2x-3y+z=-7, \\ 3x-5y-z=-16. \end{cases}$

Решить системы уравнений методом Гаусса

6 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-x_3=4, \\ 3x_1+x_2-4x_3=0, \end{cases}$ 7 $\begin{cases} 4x_1-3x_2-2x_3=3, \\ 2x_1-4x_2-3x_3=0, \\ x_1+2x_2+3x_3=5. \end{cases}$ 8 $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=6, \\ -x_1+2x_2+x_3=-1, \\ 4x_1+3x_2-3x_3=-5. \end{cases}$

9 $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=3, \\ x_1+2x_2+3x_3=1, \\ -2x_1-x_2-4x_3=-1. \end{cases}$ 10 $\begin{cases} 2x_1-3x_2+7x_3=3, \\ x_1-4x_2+8x_3=1, \\ 3x_1+2x_2-4x_3=3. \end{cases}$ 11 $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4, \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=8, \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=14, \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6. \end{cases}$.

Тема 3. Исследование систем линейных уравнений

Вопросы теории для повторения:

1 Определение совместных и несовместных систем.
2 Определенные и неопределенные системы уравнений.
3 Критерий совместности системы линейных уравнений (теорема Кронекера-Капелли)

Задачи для решения в аудитории

Исследовать системы уравнений на совместность, если система совместная и неопределённая, то указать число свободных переменных.

1 $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1, \\ 2x_1+x_2-2x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+2x_2-3x_3=1. \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-2x_4+4x_5=-1, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+x_4+7x_5=2, \\ 2x_1-x_2+x_3+8x_4+2x_5=1. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

6 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$

3 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$

7 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2. \end{cases}$

4 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

Задачи для решения дома

Исследовать системы уравнений на совместность, если система совместная и неопределённая, то указать число свободных переменных.

1 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 2. \end{cases}$

3 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2. \end{cases}$

4 $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$

5 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

Раздел 3. Элементы аналитической геометрии

Тема 1. Метод координат на плоскости и в пространстве

Вопросы теории для повторения:

1 Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве.

2 Полярная система координат на плоскости.

3 Формулы, позволяющие находить прямоугольные координаты точки по ее полярным координатам и наоборот.

4 Формула расстояния между двумя точками, заданных своими координатами на плоскости и в пространстве.

5 Формулы, позволяющие находить координаты точки, делящей отрезок в заданном соотношении на плоскости и в пространстве.

Задачи для решения в аудитории

1 Построить точки, заданные полярными координатами: $A\left(2;\frac{5\pi}{6}\right)$, $B(1;-\pi)$, $C(3;0)$, $D\left(\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right)$. Найти декартовые координаты этих точек.

2 Найти полярные координаты точек:
$A(2;0)$, $B(-1;0)$, $C(0;2)$, $D(-1;-1)$, $E\left(-\sqrt{3};1\right)$, $F\left(2\sqrt{3};2\right)$.

3Даны две смежные вершины квадрата А (3; -7) и В (-1; 4). Вычислить его площадь.

4 Вычислить площадь правильного треугольника, две вершины которого точки А (-3; 2) и В (1; 6).

5 Даны три вершины А (3; -7), В (5; -7), С (-2; 5) параллелограмма ABCD, четвертая вершина которого D противоположна В. Определить длину диагоналей этого параллелограмма.

6 Доказать, что треугольник с вершинами А (1; 1), В (2; 3) и С (5; -1) прямоугольный.

7 Определить, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами М (1; 1), M_2 (0; 2) и M_3 (2; -1) тупой угол.

8 Вершины треугольника точки А (5; 0), В (0; 1) и С (3; 3). Вычислить его внутренние углы.

9 На оси абсцисс найти такую точку М, расстояние которой до точки N (2; -3) равнялось бы 5.

10 На оси ординат найти такую точку М, расстояние которой до точки N (-8; 13) равнялось бы 17.

11 Даны две точкиM (2; 2) и N (5; -2); на оси абсцисс найти такую точку Р, чтобы угол MPN был прямым.

12 Через точку А (4; 2) проведена окружность, касающаяся обеих координатных осей. Определить ее центр С и радиус R.

13 Даны вершины треугольника А (1; -3), В (3; -5) и С (-5; 7). Определить середины его сторон.

14 Точки М (2; -1), N (-1; 4) и Р (-2; 2) являются серединами сторон треугольника Определить его вершины.

15 Даны три вершины параллелограмма А (3; -5), В (5; -3), С (- 1; 3). Определить четвертую вершину D, противоположную В.

16 Даны две смежные вершины параллелограмма A (-3; 5), B (1; 7) и точка пересечения его диагоналей M (1; 1). Определить две другие вершины.

17 Даны вершины треугольника A (1; 4), B (3; -9), C (-5; 2). Определить длину его медианы, проведенной из вершины B.

18 Даны вершины треугольника A (2; -5), B (1; -2), C (4; 7). Найти точку пересечения со стороной AC биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

19 Доказать, что треугольник с вершинами A (3; -1; 2), B (0; -4; 2) и C (-3; 2; 1) равнобедренный.

20 На оси абсцисс найти точку, расстояние которой от точки A (-3; 4; 8) равно 12.

21 На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек A (1; -3; 7) и B (5; 7; -5).

22 Даны вершины: A (2; -1; 4), B (3; 2; -6), C (-5; 0; 2) треугольника. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A.

23 Даны две вершины: A (2; -3; -5), B (- 1; 3; 2) параллелограмма ABCD и точка пересечения его диагоналей E (4; -1; 7). Определить две другие вершины этого параллелограмма.

24 Определить координаты концов отрезка, который точками C (2; 0; 2) и D (5; -2; 0) разделен на три равные части.

25 Даны вершины треугольника A (1; 2; -1), B (2; -1; 3) и C (-4;7; 5). Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

26 Построить линии, заданные в полярной системе координат уравнениями:

а) $\rho = 1 + \cos\varphi$; *б)* $\rho = \dfrac{6}{2 - \cos\varphi}$.

Задачи для решения дома

1 Найти полярные или прямоугольные координаты точек: $A\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right); B\left(1;-\sqrt{3}\right); C(3;-3); M\left(1;\dfrac{3\pi}{4}\right); N\left(2;\dfrac{\pi}{6}\right); K\left(3;-\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Построить эти точки в полярной системе координат.

2 Даны две противоположные вершины квадрата P (3; 5) и Q (1; -3). Вычислить его площадь.

3 Определить, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами $M_1(1; 1)$, $M_2(0; 2)$ и $M_3(2; -1)$ тупой угол.

4 На оси аппликат найти точку, равноудаленную от точек M (-2; 1; 1) и N (3; -1; 2).

5 Отрезок прямой, ограниченный точками A (-1; 8; 3) и B (9; -7; -2), разделен точками C, D,E, F на пять равных частей. Найти координаты этих точек.

Тема 2. Векторы на плоскости и в пространстве
Вопросы теории для повторения:

1 Определение вектора.
2 Виды векторов: а) коллинеарные векторы, б) нулевой вектор, в) единичный вектор, г) равные векторы.
3 Длина вектора.
4 Линейные операции над векторами: а) сложение, б) вычитание, в) умножение на число.
5 Координаты вектора.
6 Векторный базис на плоскости и в пространстве.
7 Скалярное произведение векторов. Свойства.
8 Векторное произведение векторов. Свойства.
9 Смешанное произведение векторов. Свойства.

Задачи для решения в аудитории

1 Дан правильный шестиугольник $A_1 \dots A_6$, т. О – его центр. Найти координаты векторов а) $\overline{A_4A_2}$; б) $\overline{A_4A_6}$; в) $\overline{A_3A_5}$; г) $\overline{A_5A_1}$ в базисе $\overline{e}_1 = \overline{OA_1}, \overline{e}_2 = \overline{OA_2}$.

2 Пусть $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ некомпланарные векторы. Выяснить коллинеарны ли векторы $\overline{m} = \overline{b} + \overline{c}$ и $\overline{n} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$.

3 Пусть $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ некомпланарные векторы. Выяснить коллинеарны ли векторы $\overline{m} = 2\overline{a} - \overline{b} - \overline{c}$ и $\overline{n} = 2\overline{b} - \overline{c} - \overline{a}$.

4 Определить, при каком значении α векторы $3\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - 2\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны, если $\left|\overline{a}\right| = 7\sqrt{2}$; $\left|\overline{b}\right| = 4$; $\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b} = \frac{\pi}{4}$.

5 На плоскости даны два вектора $\vec{p}\{2;\ -3\}, \vec{q}\ \{1;\ 2\}$. Найти разложение вектора $\vec{a}\{9;\ 4\}$ по базису $\vec{p}, \vec{q}$.

6 Даны три вектора $\vec{p}\ \{3;\ -2;\ 1\}, \vec{q}\{-1;\ 1;\ -2\}, \vec{r}\{2;\ 1;\ -3\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}\{11;\ -6;\ 5\}$ по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

7 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны; вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $\left|\overline{a}\right| = 3$; $\left|\overline{b}\right| = 6$, $|\vec{c}|$=8, вычислить: $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c})$.

8 Даны векторы $\vec{a}\ \{4;\ -2;\ -4\}, \vec{b}\{6;\ -3;\ 2\}$. Вычислить: $\vec{a}\vec{b}$; $|\vec{a}|$; $|\vec{b}|$.

9 Вычислить косинус угла, образованного векторами $\vec{a}\ \{2;\ -4;\ 4\}$ и $\vec{b}\{-3;\ 2;\ -6\}$.

10 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\boldsymbol{\varphi} = \frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}|$=6 и $|\vec{b}|$=5, вычислить $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

11 Даны: $|\vec{a}|$=10 и $|\vec{b}|$=2, $\vec{a}\vec{b} = 12$. Вычислить $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

12 Даны векторы $\bar{a}$ (2; -1; 3), $\bar{b}$ (1; *y*; 2). При каком значении ***y*** вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ коллинеарен вектору $\bar{c}$ (2; -2; -2)?

13 Даны векторы $\bar{a}$ (1; 2; 3), $\bar{b}$ (1; -3; z). При каком значении z вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ коллинеарен вектору $\bar{c}$ (-9; -3; 5)?

14 Даны векторы $\bar{a}$ (0; 1; 2), $\bar{b}$ (-2; -1; 0). При каком значении z вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\bar{c}$ (3; 4; z)?

15 Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах

$\vec{a}$ и $\vec{b}$: *а)* $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q},\ \ \vec{b}=3\vec{p}-\vec{q};\ \ \left|\vec{p}\right|=1,\ \ \left|\vec{q}\right|=2,\ \ \left(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}\right)=\dfrac{\pi}{6}.$

б) $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q},\ \ \vec{b}=\vec{p}-2\vec{q};\ \ \left|\vec{p}\right|=4,\ \ \left|\vec{q}\right|=1,\ \ \left(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}\right)=\dfrac{\pi}{4}.$

16 Найти длину высота BD треугольника ABC, если известны его вершины $A(-5;\ 6;\ -2),\ \ B(-1;\ 1;\ -2),\ \ C(-1;\ -3;\ 1).$

17 Вычислить произведение $\vec{b}(\vec{c}+\vec{a})(\vec{b}+2\vec{c})$, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=5$.

18 Установить, компланарны ли векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, если

а) $\bar{a}$ $(4;\ -3; 2)$, $\bar{b}$ $(-2; 6; 8)$, $\bar{c}$ (2; 3; 10); б) $\bar{a}$ $(1;\ -2; 5)$, $\bar{b}$ $(-4; 3; 0)$, $\bar{c}$ (3; -5; 8);

в) $\vec{a}=\vec{\imath}$, $\vec{b}=\vec{k}$, $\vec{c}=\overrightarrow{MN}$, где $\overrightarrow{OM}$ (6; 3; 4), $\overrightarrow{ON}$ (-2; 3; 1).

19 Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, если

а) $\bar{a}$ $(1;\ 2; 3)$, $\bar{b}$ $(-5; 0; 4)$, $\bar{c}$ (-1; 1; 1); б) $\bar{a}$ $(-3;\ 0; 1)$, $\bar{b}$ $(2; -1; 5)$, $\bar{c}$ (-7; 6; 0).

20 Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

а) $A_1(1,\ \ 3,\ \ 6),\ \ A_2(2,\ \ 2,\ \ 1),\ \ A_3(-1,\ \ 0,\ \ 1),\ \ A_4(-4,\ \ 6,\ \ -3).$

б) $A_1(-4,\ \ 2,\ \ 6),\ \ A_2(2,\ \ -3,\ \ 0),\ \ A_3(-10,\ \ 5,\ \ 8),\ \ A_4(-5,\ \ 2,\ \ -4).$

Задачи для решения дома

1 Даны два вектора $\vec{a}(2;-3;4)$ и $\vec{в}(-1;-2;-5)$ Найти сумму, разность, длину, скалярное произведение и угол между ними.

2 Определить, при каком значении γ векторы $\gamma\bar{a}+17\bar{b}$ и $3\bar{a}-\bar{b}$ будут взаимно перпендикулярны, если $\left|\bar{a}\right|=2$; $\left|\bar{b}\right|=5$; $(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b})=\dfrac{2\pi}{3}$.

3 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Зная, что $|a| = 6$ и $|в| = 5$,

вычислить $\left|\vec{a} \times \vec{в}\right|$.

4 Даны векторы $\bar{a}$ (1; 2; -1), $\bar{b}$ (2; 0; 3). При каком значении $\boldsymbol{x}$ вектор $\bar{a}$ x $\bar{b}$ перпендикулярен вектору $\bar{c}$ *(x;* 2; 2)?

5 Установить, компланарны ли векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, если $\bar{a}$ $(4;\ -3; 2)$, $\bar{b}$ $(-2; 6; 8)$, $\bar{c}$ (2; 3; 10).

6 Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, если $\bar{a}$ $(1;\ 2; 3)$, $\bar{b}$ $(-5; 0; 4)$, $\bar{c}$ (-1; 1; 1).

Тема 3. Прямая линия на плоскости

Вопросы теории для повторения:

1 Способы задания прямой на плоскости.
2 Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
3 Уравнение прямой по двум точкам.
4 Уравнение прямой по точке и направляющему вектору: а) каноническое, б) параметрические.
5 Уравнение прямой по точке и нормальному вектору.
6 Общее уравнение прямой.
7 Уравнение прямой в «отрезках» на осях координат.
8 Взаимное расположение прямых на плоскости.
9 Угол между прямыми.
10 Расстояние от точки до прямой.

Задачи для решения в аудитории

1 Дан треугольник АВС: А (5; -3), В (-1; -2), С (2; 4). Составить уравнения сторон.

2 Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых l_1*:* $x + 2y + 3 = 0$ и l_2*:* $4x+5y + 6 = 0$ и составляющей тот же угол с осью *OX,* что и прямая *m:* $3x - y + 1 = 0$.

3 Составить уравнение прямой:
а) проходящей через точку А (-1; 3) и перпендикулярной к прямой $x - y + 1 = 0$;
б) проходящей через точку В (5; 10) и параллельной прямой $2x + y - 7 = 0$;
в) проходящей через точку Р (1; 2) и отсекающей равные отрезки на осях координат.

4 Даны прямые: а) $3x - y + 5 = 0$; б) $x + y - 3 = 0$; в) $x + 3y = 0$. Написать уравнения каждой из них в параметрическом виде.

5 Найти длины отрезков, отсекаемых на осях координат прямыми:
а) $3x - 2y + 6 = 0$; б) $x + y - 6 = 0$; в) $2x - y + 3 = 0$. Составить уравнения этих прямых в отрезках.

6 Даны вершины треугольника ABC: A (-4; -5), B (4; 1), C (-0,5; 7). Написать уравнения: а) медианы CM, б) высоты BD.

7 Найти угол, образованный двумя прямыми:
а) $3x + y - 6 = 0$, $2x - y + 5 = 0$; б) $\sqrt{3}x - 3y + 6 = 0$. $\sqrt{3}x + y - 5 = 0$;
в) $x - 2y + 1 = 0$, $6x + 3y - 2 = 0$.

8 Через точку A (-1; 5) провести прямые, наклоненные к прямой $l: x - y + 3 = 0$ под углом, тангенс которого равен: а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{1}{3}$.

9 Определить, при каких значениях m и n две прямые $l_1: mx + 8y + n = 0$, $l_2: 2x + my - 1 = 0$. а) параллельны; б) совпадают; в) перпендикулярны.

10 Найти проекцию точки P (-6; 4) на прямую $l: 4x - 5y + 3 = 0$.

11 На оси OX найти точку, равноудаленную от прямых:
1) $x + 3y + 2 = 0$, $3x - y + 1 = 0$; 2) $3x + 4y - 1 = 0$, $4x - 3y = 0$.

12 Найти расстояние от точки до прямой:
а) M (-1; 5), $l: 4x + 3y - 5 = 0$; б) A (-3; 4), $m: x + 2y + 3 = 0$;
в) B (3; 1), $l: 5x - 12y - 6 = 0$.

13 Найти длины высот треугольника, стороны которого заданы уравнения
$y - 2 = 0$, $2x - y - 12 = 0$, $4x - 11y + 30 = 0$.

14 Найти точку Q, симметричную точке P (-5;13) относительно прямой
$l: 2x - 3y - 3 = 0$.

15 Вычислить угловой коэффициент k прямой, проходящей через две данные точки: а) M_1 (2; -5), M_2 (3;2); б) P (-3;1), Q (7; 8); в) A(5;-3), B(-1; 6).

16 Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника A (5; -4), B (-1; 3), C (-3; -2) параллельно противоположным сторонам.

17 Даны середины сторон треугольника: M_1(2;1), M_2(5; 3) и M_3(3; -4). Составить уравнение его сторон.

18 Даны вершины треугольник M_1 (2;1), M_2 (-1; -1) и M_3 (3; 2). Составить уравнения его высот.

19 Определить угол φ между двумя прямыми:
1) $5x + y + 7 = 0$; $3x + 2y = 0$; 2) $3x - 2y + 7 = 0$, $2x + 3y - 3 = 0$;

3) $x - 2y - 4 = 0$, $2x - 4y + 3 = 0$; 4) $3x + 2y - 1 = 0$, $5x - 2y + 3 = 0$.

20 Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M_0(2;1) под углом 45° к данной прямой.

21 Установить, какие из следующих пар перпендикулярны:

1) $3x - y + 5 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$; 2) $3x - 4y + 1 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$;

3) $6x - 15y + 7 = 0$, $10x + 4y - 3 = 0$; 4) $7x - 2y + 1 = 0$, $4x + 6y + 17 = 0$.

22 Вычислить расстояние d между параллельными прямыми в каждом из следующих случаев:
1) $3x - 4y - 10 = 0$, $6x - 8y + 5 = 0$; 2) $4x - 3y + 15 = 0$, $8x - 6y + 25 = 0$;

3) $5x - 12y + 26 = 0, \quad 5x - 12y - 13 = 0;$

4) $24x - 10y + 39 = 0, \quad 12x - 5y - 26 = 0.$

23 Две стороны квадрата лежат на прямых $5x - 12y - 65 = 0; 5x - 12y + 26 = 0$. Вычислить его площадь.

24 Доказать, что прямая $5x - 2y - 1 = 0$ параллельна прямым $5x - 2y + 7 = 0$, $5x - 2y - 9 = 0$.

25 Доказать, что через точку $P(2;7)$ можно провести две прямые так, чтобы их расстояния от точки Q (1;2) были равны 5. Составить уравнения этих прямых.

Задачи для решения дома

1 Найти каноническое и параметрические уравнения прямой $l: 2x-3y+5=0$.

2 Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(-3;-2) и пересекающей прямую $m: 3x-2y+10=0$ под углом 45^0.

3 Дан треугольник ABC с вершинами A(-4;2), B(-1;6), C(4;-6).
Составить уравнения: а) стороны AB, б) высоты CH, в) прямой, проходящей через вершину B, параллельно стороне AC. Найти длину высоты CH.

4 Найти косинус угла между прямыми $l_1: x+3y-7=0$; $l_2: 9x+3y-2=0$.

5 Исследовать взаимное расположение двух прямых l_1 и l_2:
а) $l_1: 14x-8y+1=0; l_2: 7x-4y+9=0;$ *б*) $l_1: 7x+3y+4=0; l_2: 3x-7y+12=0.$

Тема 4. Линии второго порядка на плоскости

Вопросы теории для повторения:

1 Определение окружности. Каноническое уравнение.

2 Определение эллипса. Каноническое уравнение.

3 Характеристики и свойства эллипса. Эксцентриситет.

4 Определение гиперболы. Каноническое уравнение.

5 Характеристики и свойства гиперболы. Асимптоты.

6 Определение параболы. Каноническое уравнение.

7 Свойства и виды парабол.

Задачи для решения в аудитории

1 Составить каноническое уравнение окружности. Найти координаты центра и радиус.
а) $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 101 = 0;$ *б*) $x^2 + y^2 - 2x = 0;$
в) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0.$

2 Составить уравнение окружности с центром в точке C (5; 2), касающейся прямой $l: x - 3y + 2 = 0$.

3 Составить уравнение эллипса, если а) $a - в = 1$, $c = \sqrt{13}$; *б*) $a + в = 8$, $\varepsilon = \frac{4}{5}$;
в) $F_1F_2 = 8$; $\varepsilon = \frac{1}{2}$; *г*) эллипс проходит через точки $M_1(2; 0)$, $M_2(1; 2)$.

4 Показать, что уравнения 1) $25x^2 + 16y^2 - 50x + 16y - 371 = 0$;
2) $5x^2 + 9y^2 - 10x + 36y - 4 = 0$ выражают эллипсы.
Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет каждого эллипса.

5 Составить каноническое уравнение гиперболы, если
а) $A_1A_2 = 16$, F_1 (10; 0), F_2 (-10; 0),
б) действительная ось равна 6 и кривая проходит через точку A (9; -4),
в) уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$, $F_1F_2 = 20$, г) $F_1F_2 = 6$, $\varepsilon = 1{,}5$.

6 Даны уравнения гипербол:
а) $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$; б) $25x^2 - 16y^2 - 400 = 0$; в) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 18y - 41 = 0$;
г) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 80 = 0$.
Найти координаты центра, фокусов, полуоси, эксцентриситет, написать уравнения асимптот.

7 Дана гипербола $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{12} = 1$. Написать уравнение сопряженной с ней гиперболы. Найти эксцентриситет и асимптоты данной и сопряженной гипербол.

8 Найти уравнение гиперболы, проходящей через точку M (-5; 3) и имеющей общие фокусы с равносторонней гиперболой $x^2 - y^2 = 8$.

9 Определить координаты фокуса и составить уравнение директрисы для каждой из парабол:
а) $y^2 = 6x$, б) $x^2 = 3y$, в) $x^2 = -4y$, г) $y^2 = -2x$, д) $2x^2 - 3y = 0$, е) $3y^2 + 16x = 0$.

10 Составить каноническое уравнение параболы, если
а) $p = 3$; б) фокус находится в точке F (0; 5);
в) парабола проходит через точку P (1; -4);
г) директриса определяется уравнением $x + 3 = 0$;
д) фокус F (5; 0), а ось ординат служит директрисой параболы.

11 Составить каноническое уравнение параболы, если она имеет общий фокус с эллипсом α: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ и вершину в центре этого эллипса.

12 На параболе $y^2 = 4x$ найти точку, расстояние которой от директрисы параболы равно 5.

Задачи для решения дома

1 Составить каноническое уравнение окружности
$x^2 + y^2 - 10x + 18y - 15 = 0$. Найти координаты центра и радиус.

2 Составить уравнение эллипса, если $a - в = 2$, $c = \sqrt{24}$.

3 Составить каноническое уравнение гиперболы, если $F_1F_2 = 12$, $\varepsilon = 1{,}5$.

4 Дана гипербола $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Написать уравнение сопряженной с ней гиперболы. Найти эксцентриситет и асимптоты данной и сопряженной гипербол.

5 Определить координаты фокуса и составить уравнение директрисы для каждой из парабол: а) $x^2 = 8y$, б) $y^2 = -14x$, в) $4x^2 - 5y = 0$.

6 Определить, какие линии определяются уравнениями, найти координаты центра или вершины:

а) $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0;$ б) $9x^2 - 16y^2 + 18x + 64y - 71 = 0;$
в) $x^2 + 4y^2 - 4x = 0.$

Тема 5. Плоскость и прямая в пространстве
Вопросы теории для повторения:

1 Способы задания плоскости в пространстве.
2 Детерминантное уравнение плоскости в пространстве по точке и двум направляющим векторам.
3 Детерминантное уравнение плоскости в пространстве по трем точкам.
4 Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору.
5 Общее уравнение плоскости.
6 Взаимное расположение плоскостей.
7 Угол между плоскостями.
8 Расстояние от точки до плоскости.
9 Способы задания прямой в пространстве.
10 Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве по точке и направляющему вектору.
11 Уравнения прямой по двум точкам в пространстве.
12 Уравнения прямой, заданной пересечением двух плоскостей.
13 Взаимное расположение прямых в пространстве.
14 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
15 Угол между двумя прямыми, угол между прямой плоскостью в пространстве.

Задачи для решения в аудитории

1 Даны вершины тетраэдра A (4; 0; 2), B (0; 5; 1), C (4; -1; 3), D (3; -1; 5). Найти:
а) уравнение плоскости, проходящей через вершину A и параллельной грани BCD;
б) уравнения трех плоскостей, проходящих через вершину D и перпендикулярных, соответственно, сторонам AB, BC и AC.

2 Написать «в отрезках» уравнения плоскостей: а) $2x – 3y + z – 6 = 0;$
б) плоскости, проходящей через точки M_1 (1; 1; 1), M_2 (3; 1; 5), M_3 (1; 2; 3).

3 Составить уравнение касательной плоскости к сфере
$(x – 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 24$ в точке M_0 (0; 1; 3).

4 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M (1; 1; -2) и перпендикулярной плоскостям $2x + 3z = 0$ и $x – y + z - 1 = 0.$

5 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M (1; -3; 5) и параллельной плоскости:
а) $3x - y + z + 4 = 0$; б) $x - 3y + z = 0$.

6 Установить взаимное расположение следующих пар плоскостей:
а) $x - 3y + z + 1 = 0$; $2x + y + z + 2 = 0$;
б) $3x + y - z + 2 = 0$; $6x + 2y - 2z + 3 = 0$;
в) $6x - 2y + z + 10 = 0$; $12x - 4y + 2z + 20 = 0$;
г) $x + y - z + 7 = 0$, $x - y + 15 = 0$.

7 Найти двугранные углы между следующими парами плоскостей:
а) $16x + 8y + 2z + 1 = 0$; $2x - 2y + z + 5 = 0$;
б) $2x + 5y + 4z + 15 = 0$; $6x - 3z + 2 = 0$.

8 Найти расстояние от точки до плоскости:
а) M_1 (1; -2; 2), π: $2x + y + 2z - 7 = 0$; б) M_2 (3; 0; 4), π: $2x + 3y + 8 = 0$;
в) M_3 (-1; 2; $\sqrt{2}$), π: $5x - 3y + \sqrt{2}z = 0$.

9 На оси OX найти точку, равноудаленную от точки M (9; -2; 2) и от плоскости $3x - 6y + 2z - 3 = 0$.

10 Составить уравнения прямой:
а) проходящей через точку M_0 (2; 1; -3) и параллельной вектору $\vec{a}$ (1; -3; 1);
б) проходящей через две точки M_1 (2; -3; 0,5), M_2 (3; 5; 1,5);
в) образованной пересечением плоскости $x - y + z = 0$ с плоскостью, проходящей через точки A (2; 0; 3), B (1; 1; 1), C (2; 4; -3).

11 Через точку M (1; -3; 4) провести прямую, параллельную прямой
$$l\begin{cases}2x - y + z - 3 = 0;\\ x + 3y - z - 1 = 0.\end{cases}$$

12 Составить канонические и параметрические уравнения прямых:

а) $\begin{cases}x - 2y + 3z - 4 = 0,\\ 3x + y - 5z - 4 = 0.\end{cases}$ б) $\begin{cases}5x + y + z = 0,\\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0.\end{cases}$

в) $\begin{cases}x - 2y + 3z + 1 = 0,\\ 2x + y - 4z - 8 = 0.\end{cases}$ г) $\begin{cases}x + 2y + z - 1 = 0,\\ x - y + 1 = 0.\end{cases}$

13 Показать, что прямая $l:\begin{cases}x = 1 + 2t,\\ y = 3t,\\ z = -2 + t\end{cases}$ пересекает плоскость $2x - y + z + 1 = 0$.

Найти координаты точки пересечения и угол между этой прямой и плоскостью.

14 Показать, что прямая $l:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{1}$ параллельна плоскости $x-2y+5z-6=0$, а прямая $m:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ лежит в этой плоскости.

15 При каких значениях А и В плоскость $Ax+By+3z-5=0$ перпендикулярна к прямой $l:\begin{cases}x=3+2t,\\ y=5-3t,\\ z=-2-2t\end{cases}$?

16 Даны две прямые: $l_1:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ и $l_2:\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{0}$. Доказать, что они скрещиваются.

17 Найти угол между прямыми $l_1:\begin{cases}y+1=0,\\ x+2z-1=0\end{cases}$ и $l_2:\begin{cases}x=0,\\ z=1.\end{cases}$

18 Определить взаимное расположение двух прямых в каждом из следующих случаев:

а) $l_1:\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z+3}{-2}$; $l_2:\dfrac{x-21}{6}=\dfrac{y+5}{8}=\dfrac{z-2}{-4}$;

б) $l_1:\begin{cases}x=2t-4,\\ y=-t+4,\\ z=-2t-1;\end{cases}$ $l_2:\begin{cases}x=4t-5,\\ y=-3t+5,\\ z=-5t+5;\end{cases}$ в) $l_1:\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$; $l_2:\begin{cases}x=4-9t,\\ y=1-6t,\\ z=-5+6t.\end{cases}$.

Задачи для решения дома

1 Написать уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_0(1,2,4)$, $M_1(-1,5,2)$ перпендикулярно плоскости $x-2y+z-5=0$.

2 Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки с координатами $M_0(2,5,0)$, $M_1(1,4,2)$, $M_2(3,-2,1)$.

3 Найти точку пересечения плоскости $x-y+2z=0$ с прямой, заданной каноническими уравнениями: $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z+1}{2}$.

4 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(0,2,1)$ параллельно плоскости $x+3y-2z+1=0$.

5 Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(2,0,5)$ и $B(1,6,3)$.

6 Написать канонические и параметрические уравнения прямой, образованной пересечением плоскостей $3x-2y+3z+6=0$ и $x-3y-2z-6=0$.

7 Определить косинус двугранного угла между плоскостями:
$3x+y+2z+1=0$, $2x-2y+z+5=0$.

8 Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:
$2x+ly+3z-5=0$, $mx-6y-6z+2=0$.

9 Определить, при каком значении l следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:
$3x-5y+lz-3=0$, $x+3y+2z+5=0$.

10 Доказать, что прямые $l_1: \begin{cases} x=2+4t, \\ y=-6t, \\ z=-1-8t; \end{cases}$ и $l_2: \begin{cases} x=7-6t, \\ y=2+9t, \\ z=12t \end{cases}$ лежат в одной плоскости.

11 Написать уравнения прямой, проходящей через точку M (2; -3; 3) и перпендикулярной к плоскости $x-3y+4\mathrm{z}-1=0$.

12 При каком значении m прямая $l: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6\mathrm{z}+7=0$?

13 Найти угол между прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+12}{3}=\dfrac{z-4}{6}$ и плоскостью $6x+15y-10\mathrm{z}=0$.

14 Найти косинус угла между прямыми $l_1: \begin{cases} x=7+2t; \\ y=-5-4t; \\ z=3+4t. \end{cases}$ и $l_2: \begin{cases} x=3t; \\ y=1+4t; \\ z=-6+5t. \end{cases}$

Раздел 4. Элементы дифференциального исчисления функции одной переменной

Тема 1. Функции. Свойства функций. Элементарные функции.

Вопросы теории для повторения:

1 Определение функции. Область определения, множество значений.

2 Основные свойства: чётность (нечётность), периодичность, монотонность, непрерывность.

3 Элементарные функции.

4 Числовая последовательность, как функция натурального аргумента.

Задачи для решения в аудитории

1 Найти области определения функций:

1) $y=\dfrac{\sqrt[5]{\lg(x+1)}}{x-1}+2^{\sqrt{10-x}}$; 2) $y=\dfrac{\sqrt[6]{16-x^2}}{\log_3(x-1)^2}$;

3) $y=\sqrt{4-x^2}\cdot tgx$; 4) $y=\dfrac{\arcsin(x-1)}{\log_5 x}$.

2 Найти области значений функций:

1) $y=5\sin x+2\cos x$; 2) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$;

3) $y=\dfrac{3}{(\sin x+\cos x)^2+2}$; 4) $y=\log_\pi(\arccos x)$.

3 Выяснить чётность (нечётность) функций:

1) $y=x+\sin x$; 2) $y=x\cdot\sin^3 x$; 3) $y=\dfrac{\lg(1-x^2)}{\sqrt[3]{\cos x}}\cdot e^{-x^2}$;

4) $y=\dfrac{x^3\cos x}{2^{x^2}}+\sin^2 x$; 5) $y=\ln\left(\dfrac{8-x^3}{8+x^3}\right)$.

4 Найти наименьший положительный период функции:

1) $y=5\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+3x\right)$; 2) $y=3tg4x+1$;

3) $y = 7\sin^2 2x$; 4) $y = 3\cos 2x + \sin\frac{3x}{2} - 5tg\frac{x}{3}$.

5 Построить графики функций, используя элементарные преобразования:

1) $y = 7 + 6x - x^2$; 2) $y = \frac{3x-2}{x+1}$;

3) $y = 3\cdot 2^{x+1}$; 4) $y = 2\cos(2x + \frac{\pi}{4})$;

5) $y = 2\log_2(4 + x)$.

Задачи для решения дома

1 Найти область определения функции $y = \frac{\ln(4-x)}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{5x-1}\arcsin(2x^2 - x)$.

2 Найти множества значений функций:

а) $y = 3\cdot 2^{-x^2}$; *б*) $y = 9\sin 2x + 12\cos 2x$.

3 Выяснить чётность (нечётность) функций:

а) $y = \frac{x^4 + \sin^2 2x}{\cos^3 x}$; *б*) $y = \log_5\left(\frac{3-x}{x+3}\right)$.

4 Найти наименьший положительный период функции:

а) $y = 5\cos^2 3x$; *б*) $y = 3tg6x - \sin\frac{5x}{2} + 7\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2x}{3}\right)$.

5 Построить графики функций (с помощью элементарных преобразований):

а) $y = x^2 - 2x - 3$; *б*) $y = 2 - \log_3(1 + x)$.

Тема 2. Предел и непрерывность функций

Вопросы теории для повторения:

1 Определение числовой последовательности.
2 Определение предела числовой последовательности.
3 Определение предела функции в точке.
4 Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства.

5 Основные теоремы о пределах.

6 Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$.

7 Замечательные пределы.

8 Определения непрерывной функции в точке и на отрезке.

9 Эквивалентные бесконечно малые функции.

Задачи для решения в аудитории

Вычислить предел функции или числовой последовательности.

1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 8}{x^2 - x + 4}$; 2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{\pi}\arcsin x - 3}{x^2 + 3}$; 3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$;

4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 5x}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}$; 5) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{1 - x^2}$; 6) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$;

7) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x - 4}$; 8) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + x^2 - x + 2}{x + 2}$; 9) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x + 6}$;

10) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$; 11) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{16n^3 - 2n^2 + 3n + 1}{4n^3 + 2n^2 - 3n + 2}$;

12) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{15n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 5n + 1}{3n^4 + 4n^3 + 2n^2 - 4n - 2}$; 13) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n^2 + 4n + 1}{2n^3 + 3n^2 - 7}$;

14) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5n^3 + 4n^2 - 3n - 10}{n^2 + 3n + 5}$; 15) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x^3 - 2x + 3}{5x^4 + 3x^3 - 2x}$;

16) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$; 17) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}$; 18) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$;

19) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x + 4} - 2}$; 20) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$; 21) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{\sqrt{x - 1} - 2}$;

22) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$; 23) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 + x}}{1 - \sqrt{1 + x}}$; 24) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$;

25) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$; 26) $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$; 27) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

28) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; 29) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$;

30) $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}\right)$; 31). $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3}\right)$;

32) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$; 33) $\lim\limits_{n \to \infty}\sqrt{n}\ \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)$;

34) $\lim\limits_{n \to \infty}\left[n-\sqrt{n\ (n-1)}\right]$; 35) $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2}\right)$;

36) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$; 37) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg 8x}{2x}$; 38) $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$;

39) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; 40) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{1-\cos x}$; 41) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{tgx-\sin x}$;

42) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos^3 2x}{4x^2}$; 43) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$; 44) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$;

45) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$; 46) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{3n\ \ +4}{3n\ \ +7}\right)^{2n-5}$;47) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$;

48) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$; 49) $\lim\limits_{x \to 2}(3-x)^{\frac{3x}{2-x}}$; 50) $\lim\limits_{x \to 4}(5-\mathrm{x})^{\frac{x}{4-x}}$;

51) $\lim\limits_{x \to 0}\left(1+\sin^2 3x\right)^{1/\sin 5x}$.

Вычислить пределы функций методом замены эквивалентными бесконечно малыми функциями:

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$. 2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4(x-\pi)}$. 3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x+1}-2}{\ln(1+4x)}$. 4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$.

5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$. 6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin(\pi(\frac{x}{2}+1))}$. 7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos(x-\pi)}{(e^{3x}-1)^2}$.

8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3arctgx}$. 9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-arctg3x}$. 10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$.

11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$. 12 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$. 13 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$.

14 $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$. 15 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$. 16 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos \pi x}{tg^2 \pi x}$.

Исследовать на непрерывность функции:

1 $f(x)=\begin{cases} x-2, 0<x<1, \\ 1-x, 1\le x\le 3, \end{cases}$ в точке $x_0=1$. **2** $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, x<0, \\ -x, x\ge 0, \end{cases}$ в точке $x_0=0$.

3 $y=\dfrac{1}{1-e^{1-x}}$ в точке $x_0=1$. **4** $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-6)}$ на отрезке: 1) $[2;5]$; 2) $[4;10]$; 3) $[0;7]$.

Найти точки разрыва функции, указать характер разрыва:

5 $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$. **6** $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}$. **7** $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$. **8** $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

9 $y=\dfrac{tgx\cdot arctg\dfrac{1}{x-3}}{x(x-5)}$. **10** $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$. **11** $y=\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

12 $y=\dfrac{x+1}{x^3+6x^2+11x+6}$.

Задачи для решения дома

Вычислить предел функции или числовой последовательности

1 $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + x - 6}$. 2 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2}$. 3 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x^3 - 64}$.

4 $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{\sqrt{x-3} - \sqrt{3}}{x - 6}$. 5 $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x + 5}{\sqrt{x+30} - 5}$. 6 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x+5} - 3}{\sqrt{x} - 2}$.

7 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{12x^3 - 2x^2 + x + 7}{2x^2 - 6x^3 + x - 3}$. 8 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8x^2 + 2x - 3}{2x^3 - x + 8}$.

9 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5n^2 - 3n + 4}{n + 3}$. 10 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg^2 5x}{x^2}$. 11 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 7x}{1 - \cos^2 x}$.

12 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{5 \sin 3x}$. 13 $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n}{n+1} \right)^{3n+5}$. 14 $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n^2 + 3}{n^2 + 1} \right)^{n^2 - 5}$.

15 $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{n(n-1)} - \sqrt{n^2 - 5} \right)$. 16 $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n - 2} - n \right)$.

17 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x} - e^{-2x}}{2arctgx - \sin x}$. 18 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{tgx}$. 19 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 + \cos \pi x}{tg^2 \pi x}$.

Исследовать на непрерывность функции:

1 $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$. 2 $y = \dfrac{3x^2}{(x-3)(x+4)}$. 3 $f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 2, \\ 20 - 8x, 2 < x \le 3. \end{cases}$

Тема 3. Производная функции

Вопросы теории для повторения:

1 Задачи, приводящие к понятию производной.
2 Определение производной функции в точке.
3 Геометрический и физический смысл производной.
4 Определения дифференцируемой функции в точке, на промежутке.

5 Правила дифференцирования функции.
6 Таблица производных элементарных функций.
7 Производная сложной, параметрической, показательно-степенной функций и функции, заданной неявно.

Задачи для решения в аудитории

Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производные следующих функций.

1 $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4.$

2 $y = \dfrac{7}{x^3}.$

3 $y = \dfrac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \dfrac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \dfrac{2}{15}x^7\sqrt{x}.$

4 $y = \left(x^2 + 2x + 2\right)e^{-x}.$

5 $y = 3x^3 \ln x - x^3.$

6 $y = \dfrac{5^{8x}}{8\ln 5} + 3x^2 - 9.$

7 $y = \sqrt{1 - 3x^2}.$

8 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}.$

9 $y = \ln\left(2x^3 + 3x^2\right).$

10 $y = \cos^3 \dfrac{x}{3}.$

11 $y = \ln tg \dfrac{2x + 1}{4}.$

12 $y = tg2x + \dfrac{2}{3}tg^3 2x + \dfrac{1}{5}tg^5 2x.$

13 $y = x \arccos \dfrac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}.$

14 $y = \dfrac{1}{5}\dfrac{\sin^2 5x}{\cos 10x}.$

15 $y = \arcsin \dfrac{2x^3}{1 + x^6},\ \textit{если} |x| < 1.$

16 $y = \dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\dfrac{\mathrm{e}^x - 3}{2}.$

17 $y = \dfrac{e^{x^3}}{1 + x^3}.$

18 $y = \arccos \dfrac{9 - x^2}{9 + x^2}.$

19 $y=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$.

20 $y=\log_2\sin^2 x$.

21 Чему равно выражение $u=y^2+\left(y'\right)^2+\frac{4y^2}{\left(y'\right)^2}, если\ y=2\cos x$?

22 Показать, что функция $y=(x^2+1)(e^x+c)$, где $c=const$ обращает уравнение $y'-\frac{2xy}{x^2+1}=e^x\left(x^2+1\right)$ в тождество.

Найти производную показательно-степенной функции.

1 $y=\left(\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{arctg}x\right)}$.

2 $y=\left(\arcsin x\right)^{e^x}$.

3 $y=x^{\arcsin x}$.

4 $y=\left(\ln x\right)^{3^x}$.

5 $y=\left(\cos 5x\right)^{e^x}$.

6 $y=\left(x^3+4\right)^{\operatorname{tg}x}$.

7 $y=x^{\sin x^3}$.

8 $y=\left(x^2+1\right)^{\cos x}$.

Найти производную y'_x.

1 $\begin{cases} x=\frac{3t^2+1}{3t^3}, \\ y=\sin\left(\frac{t^3}{3}+t\right). \end{cases}$

2 $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\operatorname{tg}\sqrt{1+t}. \end{cases}$

3 $\begin{cases} x=\left(1+\cos^2 t\right)^2, \\ y=\frac{\cos t}{\sin^2 t}. \end{cases}$

4 $\begin{cases} x=\ln\operatorname{tg}t, \\ y=\frac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$

5 $\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2}, \\ y=\arcsin\left(t-1\right). \end{cases}$

6 $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}t, \\ y=\ln\frac{\sqrt{1+t^2}}{t+1}. \end{cases}$

7 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{4}t^4, \\ y=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3. \end{cases}$

8 $\begin{cases} x=5\sin^3 t, \\ y=5\cos^3 t. \end{cases}$

9 $\begin{cases} x=2\operatorname{tg}t, \\ y=2\sin^2 t+\sin 2t. \end{cases}$

Найти производную функции, заданной неявно:

1. $x^3 + y^3 - 3xy = 0.$ **2.** $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0.$

3. $x\sin y + y\sin x = 0.$ **4.** $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$

5. $\sin\left(y - x^2\right) - \ln\left(y - x^2\right) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0.$

6. $\dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = 0.$

Задачи для решения дома

Найти производные указанных функций.

1 $y = 7x^5 + 3x^2 - 4x - 9.$ 2 $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}.$ 3 $y = e^x \cos 2x.$

4 $y = x \arccos x.$ 5 $y = x^2 \log_3 x.$ 6 $y = \dfrac{\cos x}{1 + 2\sin x}$.

7 $y = \dfrac{x^4 - 8x^2}{2\left(x^2 - 4\right)}.$ 8 $y = \sin^2 x^3.$ 9 $y = \ln\dfrac{x^2}{1 - x^2}.$ 10 $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2 - 1}{x}.$

11 Найти $\varphi'(1), \varphi'(e), \varphi'\left(\dfrac{1}{e}\right), \varphi'\left(\dfrac{1}{e^2}\right)$, если $\varphi\left(x\right) = x\ln x$.

12 Найти $f'\left(0\right)$, если $f\left(x\right) = \dfrac{1 - 10^x}{1 + 10^x}$.

13 $y = \left(\operatorname{tg} x\right)^{4e^x}$. 14 $y = x^{e^{\sin x}}$. 15 $y = x^{e^x} x^9.$

16 $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$ 17 $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$ 18 $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{t}, \\ y = \sqrt{t^2-1} + \arcsin\dfrac{1}{t}. \end{cases}$

Тема 4. Производные высших порядков. Дифференциал функции

Вопросы теории для повторения:

1 Определение производной второго порядка. Физический смысл.
2 Определение производной n - го порядка.
3 Определение дифференциала функции. Геометрический смысл.
4 Связь производной и дифференциала функции. Основные свойства дифференциала.
5 Применение дифференциала функции к приближенным вычислениям.
6 Правило Лопиталя вычисления пределов функций.

Задачи для решения в аудитории

Найти производные второго порядка:

1 $y = -\dfrac{22}{x+5}$. 2 $y = \dfrac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$. 3 $y = \dfrac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \dfrac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x.$

4 $y = -\dfrac{1}{9}x\sin 3x - \dfrac{2}{27}\cos 3x$. 5 $y = \cos^2 5x$. 6 $y = x\ln(x + \sqrt{x^2+9}) - \sqrt{x^2+9}.$

Найти производные третьего порядка:

7 $y = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{2}$.

8 $y = xe^{-x}$

9 $y = e^x\cos x.$

10 $y = x^2\sin x.$

11 $y = \dfrac{x}{6(x+1)}$.

12 $y = \dfrac{1}{2}\ln^2 x.$

Найти производные указанного порядка:

13 $y = \dfrac{1}{2x+1}$, $y''' - ?$

14 $y = 2^x + 2^{-x}$, $y^{IV} - ?$

15 $y = 5 - 3\cos^2 x$, $y^{V} - ?$

16 $y = x^2 \ln x$, $y^{V} - ?$

Найти производные второго порядка y''_{xx} от функций, заданных параметрически:

17 $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\dfrac{1}{t}. \end{cases}$ 18 $\begin{cases} x=\sin^3 x, \\ y=\cos^2 x. \end{cases}$ 19 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{4}t^4+3t^2-7t, \\ y=2t^2-5t+27. \end{cases}$

Найти дифференциалы функций:

20 $y=\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x-6}{x+6}$.

21 $y=xarctgx.$

22 $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

23 $y=arcsin\sqrt{x}$.

24 $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$.

25 $y=2^{-x^2}$.

26 Найти приближенное значение $arctg1{,}05$.

27 Найти приближенное значение $\sqrt[3]{7{,}76}$.

28 Найти приближенное значение $(2{,}01)^6$.

29 Найти приближенное значение $\arcsin 0{,}08$.

Используя правило Лопиталя, найти пределы:

30 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)}$.

31 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$.

32 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

33 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^5-1+x^2}$.

34 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-2)}{\ln(e^x-e^2)}$.

Задачи для решения дома

Найти дифференциалы функций:

1 $y=x^3\sqrt{x}$. 2 $y=\ln(\sin\sqrt{x})$. 3 $y=\dfrac{2-x^2}{2+x^2}$. 4 $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}$.

Найти производные указанных порядков для функций:

5 $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - x + 7$; найти y^{V}.

6 $y = x^3e^x$; найти y^{IV} .

7 $y = \sin^2 3x$; найти y^{III}.

8 Найти приближенное значение $\sqrt[5]{(1,03)^2}$.

9 Найти приближенное значение $\sqrt{1,005}$.

10 Показать, что функция $y = x + \sin 2x$ удовлетворяет уравнению $y^{||} + 4y = 4x$.

Используя правило Лопиталя, найти пределы:

11 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.   12 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$.   13 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5 + 3x^3 - 2x + 6}{x^5 - 4x^2 + 3}$.

Тема 5. Применение производной к исследованию функций

Вопросы для повторения:

1 Определения возрастающей и убывающей функций, экстремум функции.
2 Теоремы, позволяющие находить промежутки монотонности функции
3 Необходимое условие существования экстремума функции.
4 Первое достаточное условие существования экстремума функции.
5 Второе достаточное условие существования экстремума функции.
6 Алгоритм исследования функции на экстремум с помощью производной второго порядка.
7 Определения выпуклости (вогнутости) графика функции в точке, на интервале.
8 Определение точки перегиба графика функции.
9 Теоремы, позволяющие находить интервалы выпуклости (вогнутости), точки перегиба.
10 Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.
11 Асимптоты графика функции, классификация, нахождение.

Задачи для решения в аудитории

Найти интервалы монотонности функций:

1 $y = x^3 + 5x + 6$.

2 $y = (x^2 - 1)^{3/2}$.

4 $y = 2 - 3x + x^3$.

5 $y = xe^{-x}$.

3 $y = (2 - x)(x + 1)^2$.

6 $y = (x - 2)(x + 1)(x - 3)$.

Найти экстремумы функций, используя производную первого порядка:

7 $y = (2x - 1)\sqrt[3]{(x - 3)^2}$.

8 $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 2x + 2}$.

9 $y = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - x + 3}$.

10 $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$.

11 $y = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 5x + 6}$.

12 $y = x^2 e^{-x}$.

Найти наименьшее и наибольшее значения функций на отрезке:

13 $y = x^4 - 2x^2 + 3$; [-3; 2].

14 $y = 3x - x^3$; [-2; 3].

15 $y = - 5x^3 + x| x - 1 |$; [0; 2].

Найти экстремумы функций, используя производную второго порядка:

16 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12$.

17 $y = x + \sqrt{3 - x}$.

18 $y = xe^x$.

19 $y = \ln(x^2 + 1)$.

20 $y = x^{2/3}(x - 5)$.

21 $y = (x - 1)^{6/7}$.

22 $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

23 $y = \dfrac{4x}{1 + x^2}$.

Найти интервалы выпуклости и вогнутости графиков функций:

24 $y = x^2 - 5x + 6$.

25 $y = \dfrac{4}{x^2}$.

Найти точки перегиба кривых:

26 $y = x^3 - \dfrac{1}{2}x^2$.

27 $y = (x - 4)^5 + 4x + 4$.

28 $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.

29 $y = x^4 - \dfrac{4}{3}x^3$.

30 $y = (x - 1)\sqrt[7]{(x - 1)^6}$.

31 $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$.

Найти асимптоты графиков функций:

32 $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

33 $f(x) = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$.

34 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 2x + 2}$.

35 $f(x)=\dfrac{5x}{x-1}$. 36 $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2-1}+2x$. 37 $f(x)=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$.

38 $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}-3x$. 40 $f(x)=x-2arctgx$.

Провести полное исследование функций и построить их графики:

1 $y = x^3 - 3x$. 2 $y=12x-x^3$. 3 $y=\ln x-\ln(x-1)$.

4 $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$. 5 $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$. 6 $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

7 $y=\dfrac{x}{x^2-1}$. 8 $y=\sqrt[3]{1-x^3}$. 9 $y=2x+\dfrac{1}{x^2}$.

10 $y=e^{-x^2}$. 11 $y=\dfrac{1+\ln x}{x}$. 12 $y=x-\ln x$.

Задачи для решения дома

1 Найти экстремумы функций, используя производную первого порядка:

1) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$. 2) $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2$.

3) $y=x^2\left(1-x\sqrt{x}\right)$. 4) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

2 Найти наименьшее и наибольшее значения функций на отрезке:

$y=4x^3-x|x-2|$; $[0; 3]$.

3 Найти экстремумы функций, используя производную 2-ого порядка:

1) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x+1$. 3) $y=(x+1)^2(x-2)$.

2) $y=x\ln x$. 4) $y=\sqrt{x^2+1}$.

4 Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости графика функции:

1) $y=\dfrac{x^3}{3}+x^2-3x+\dfrac{2}{3}$ 2) $y=x^4-6x^2$ 3) $y=2x^2+\ln x$

5 Найти асимптоты графиков функций:

1) $y = \frac{5x^4 + 2}{x^3}$. 2) $y = \frac{3x}{x-2}$. 3) $y = 2x + arctgx$.

6 Провести полное исследование и построить графики функций:

1) $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$. 2) $y = -\frac{x^2 + 8}{\sqrt{x^2 - 4}}$. 3) $y = x - \ln x$.

Проверочный тест для подготовки к зачёту

1 Пусть даны множества А=$\{-7;-3;2;4;33\}$ и В=$\{-1;0;1;2;4;3\}$. Установите соответствие между заданиями и ответами:

Задания	Ответы
1) $A \cap B$	а) $\{-1;0;3;1\}$
2) $A \cup B$	б) $\{2;4\}$
3) $A \setminus B$	в) $\{-7;-3;-1;0;1;3;33\}$
4) $B \setminus A$	г) $\{-7;-3;33\}$
5) $(B \cup A) \setminus (A \cap B)$	д) $\{0;1;2;4;-1;-3;-7;3;33\}$

2 Для того чтобы выполнить действие $\dfrac{-3+2i}{-1-i}$, мы должны:

а) умножить числитель дроби на комплексное число $-1-i$;

б) умножить числитель и знаменатель дроби на комплексное число $1-i$;

в) умножить знаменатель дроби на комплексное число $-3-2\cdot i$;

г) умножить числитель и знаменатель дроби на комплексное число $-1+i$.

3 Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Можно ли найти:

а) $A \cdot B$; б) $B \cdot A$.

4 Чему равен определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$?

а) 8; б) –29; в) 30; г) 29.

5 Найти алгебраическое дополнение для третьего элемента второй строки матрицы $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$:

а) 0; б) 1; в) –3; г) 13; д) 3.

6 Найти обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$:

а) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 7 & 4\end{pmatrix}$; б) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -7\\ 1 & -4\end{pmatrix}$; в) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -7 & -4\end{pmatrix}$;

г) обратной матрицы не существует.

7 Найти расстояние между точками А (-3;2) и В (1;5):
а) $\sqrt{53}$; б) 5; в) 8; г) $\sqrt{15}$.

8 Какие из перечисленных формул не являются уравнением прямой линии на плоскости?
а) $y=k\cdot x+b$; б) $A\cdot x+B\cdot y+C=0$; в) $y-y_1=k\cdot(x-x_1)$;

г) $\dfrac{x-x_1}{x}=\dfrac{y}{x_2-x_1}$; д) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

9 Условие перпендикулярности прямых $l_1: y=k_1\cdot x+b_1$ и $l_2: y=k_2\cdot x+b_2$ записывается следующим образом:
а) $k_1\cdot k_2=1$; б) $k_1=k_2$; в) $k_1\cdot k_2=-1$; г) $k_1=-k_2$.

10 Найти расстояние от точки А (-2;1) до прямой $l: 2x-3y+5=0$:
а) 3; б) 21; в) $\sqrt{51}$; г) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

11 Дано уравнение окружности $(x-2)^2+(y+1)^2=9$. Найти координаты центра и радиус окружности:
а) А (2;1) и R=3; б) A(2;-1) и R=9;

в) А (2;-1) и R=3; г) A(-2;-1) и R=3.

12 Какое из перечисленных уравнений является уравнением гиперболы?
а) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{3}=1$; б) $x=y-2$; в) $-3\cdot x^2-y^2=9$; г) $x^2+3\cdot y^2=1$.

13 Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами 2c=10:
а) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{36}=1$; б) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$; в) $\dfrac{x^2}{169}-\dfrac{y^2}{144}=1$; г) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{36}=1$.

14 Решить систему с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=10;\\ -3x_1+3x_2+2x_3=8;\\ 5x_1+2x_2+8x_3=-1.\end{cases}$$

15 Исследовать систему и, если она совместна, найти ее решение:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

Проверочный тест для подготовки к экзамену

1 Установите соответствие между периодической функцией и значением ее периода:

1) $y = cos\pi x$; 2) $y = tg\frac{3\pi x}{2}$; 3) $y = sin\frac{\pi x}{2}$.

Варианты ответов:

1) 4; 2) π; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 2.

2 Точками разрыва функции $y = \frac{x+3}{x(x+1)}$ являются точки…(выбрать несколько вариантов ответов):

1) $x = 0$; 2) $x = 1$; 3) $x = -1$; 4) $x = -3$.

3 Результат вычисления предела $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+x-3}{x^2-4}$имеет вид…:

1) 0; 2) ∞; 3) 5; 4) $\frac{1}{5}$.

4 Результат вычисления предела $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$имеет вид…:

1) 0,25; 2) 0; 3) 4; 4) ∞.

5 Результат вычисления предела $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2-1})^x$ имеет вид …:

1) ∞; 2) 0; 3) e; 4) 1.

6 Результат вычисления предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin12x}{sin3x}$ имеет вид …:

1) ∞; 2) 4; 3) 1; 4) 0.

7 Если к пределу $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}$ применить правило Лопиталя, то он примет вид:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x^2}$.

8 Установите соответствие между функциями и их производными:

1) $y = arcsinx^3$;   2) $y = 5^{3x}$;   3) $y = ln8x$.

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{x}$;   2) 5^{3x};   3) $\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$;   4) $3 \cdot 5^{3x} ln5$.

9 Производная второго порядка функции $y = sin^2 x$ имеет вид…:

1) $2cos2x$;   2) $2cosx$;   3) - $2sinx$;   4) $2sinxcosx$.

Примеры решения типовых задач

Задача 1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11. \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение: 1) составим определители, соответствующие исходной системе и каждому неизвестному:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}; \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

тогда решение можно будет определить по формулам Крамера.

2) вычислим определитель системы: сложим соответствующие элементы первой и второй строк, затем первой и третьей, получим во втором столбце нули, кроме элемента в первой строке. Найдем определитель разложением по второму столбцу: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$.

Определитель ненулевой, значит, система имеет решение.

3) вычислим оставшиеся определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 14 & 0 & 2 \\ 11 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 20;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -12 & 2 \end{vmatrix} = 10;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 14 \\ 2 & 0 & 11 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 5.$$

Откуда решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

4) проверяем подстановкой полученных значений в исходную систему:

$$\begin{aligned} 1\cdot 4 - 1\cdot 2 + 1\cdot 1 &= 3 \\ 2\cdot 4 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 &= 11. \\ 1\cdot 4 + 2\cdot 2 + 2\cdot 1 &= 8 \end{aligned}$$

Ответ: $x_1 = 4$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$.

Задача 2 Написать канонические уравнения прямой, образованной пересечением плоскостей $\pi_1: x + y + z + 1 = 0$ и $\pi_2: 2x - 3y - 2z - 8 = 0$.

Решение: 1) найдем координаты фиксированной точки. Из исходной системы уравнений $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - 3y - 2z - 8 = 0 \end{cases}$ исключим z. Положим $z = 0$, тогда: $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - 3y - 8 = 0 \end{cases}$, откуда находим: $x = 1,\ y = -2$.

Таким образом, нашли координаты фиксированной точки $M_0(1,-2,0)$.

2) направляющий вектор определяется как векторное произведение нормальных векторов двух плоскостей, образующих прямую:

$$\vec{a} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}.$$

3) запишем канонические уравнения: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-(-2)}{4} = \frac{z-0}{-5}$, или $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{-5}$.

Задача 3. Провести полное исследование функции и построить её график.

$$y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}.$$

1) $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2) функция ни четная, ни нечетная.

3) а) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}=-\infty$, $\quad\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}=+\infty$,

$x=1$- вертикальная асимптота.

б) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+3}{x(x-1)}=1.$

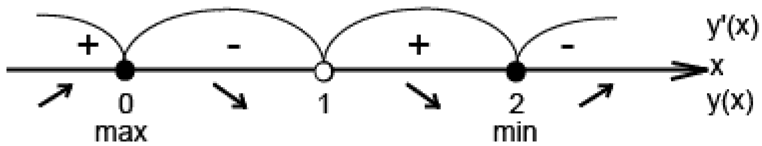
$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x+3}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+3}{x-1}=-2\,.$$

Следовательно, $y=x-2$ - наклонная асимптота.

4) $y'=\dfrac{(2x-3)(x-1)-(x^2-3x+3)}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$

$y'=0$ при $\begin{cases}x=0,\\ x=2.\end{cases}$

y' не существует при $x=1$.

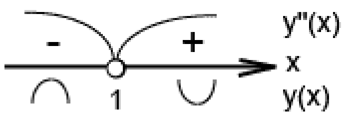


$x=0$ - точка максимума функции, $y_{\max}=-3$

$x=2$ - точка минимума функции, $y_{\min}=1$.

5) $y''=\dfrac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4}=\dfrac{2}{(x-1)^3}$,

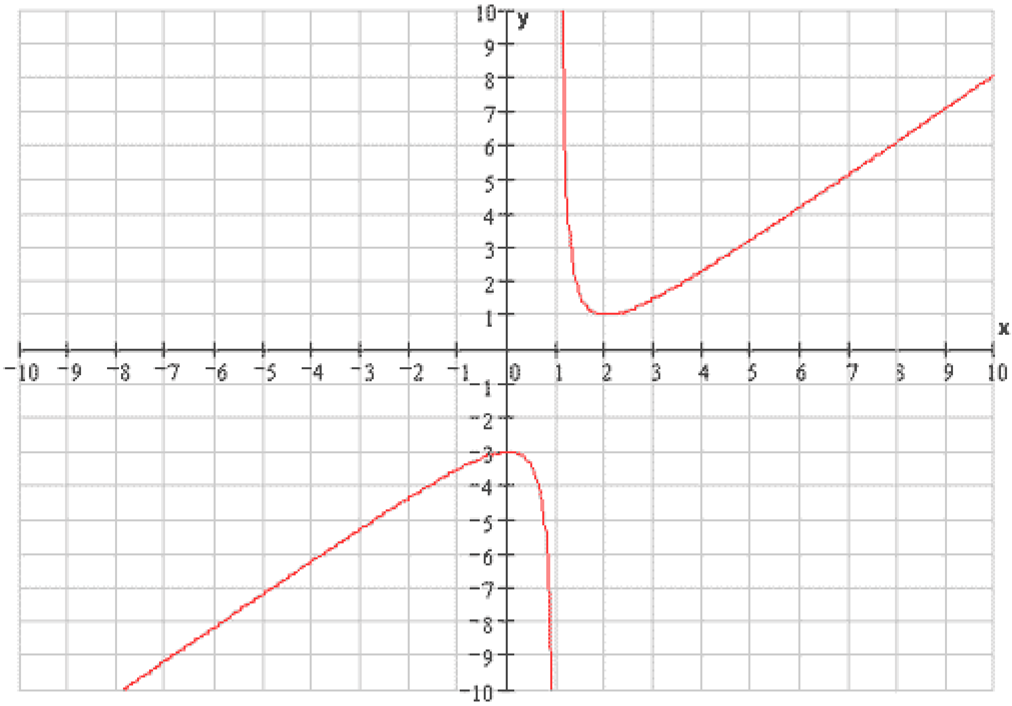
y'' не существует при $x=1$.



6) найдем точки пересечения с осями:

При $x = 0$ $y = -3$.

При $y = 0$ квадратное уравнение не имеет корней, следовательно, график не пересекается с осью Ox.



Список литературы

1 *И. И. Баврин,* Курс высшей математики. /*И. И. Баврин* – Москва : Просвещение, 2010.

2 *П. Е Данко,* Высшая математика в упражнениях и задачах. / *П. Е Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко* – Москва : Оникс, 2008.

3 *Б. П. Демидович,* Краткий курс высшей математики. / *Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев* – Москва : Астрель, АСТ, 2004.

4 *В. А. Ильин,* Высшая математика. /*В. А. Ильин, А. В. Куркина* – Москва : Изд. Проспект Изд. Московский университет, 2010 г.

5 *С. Б. Кадомцев*, Аналитическая геометрия и линейная алгебра. / *С. Б. Кадомцев* – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2011.

6 *В. И. Смирнов,* Курс высшей математики. /*В. И. Смирнов* – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2008. – Т. 1

7 *В. С. Шипачев,* Основы высшей математики. /*В. С. Шипачев* – Москва : Высшая школа, 2004.

8 *В. С. Шипачев,* Задачник по высшей математики. /*В. С. Шипачев* – Москва : Высшая школа, 2012.

Потеряйко Елена Львовна.

МАТЕМАТИКА

Материалы для практических занятий и самостоятельной работы
для студентов направлений 04.05.01 «Фундаментальная и
прикладная химия», 03.03.02 «Физика»

Часть 1

Редактор Н. М. Быкова

Подписано в печать 27.09.19	Форма 60х84 1/16	Бумага 65 г/м^2
Печать цифровая	Усл. печ. л. 3,31	Уч.- изд. л. 3,31
Заказ 125	Тираж 25	Не для продажи

Библиотечно – издательский центр КГУ
640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.