Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра фундаментальной математики и

методики преподавания математики

МНОГОЧЛЕНЫ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методические указания к практическим занятиям
и самостоятельной работе
для студентов направления подготовки 44.03.05

Курган 2018

Кафедра фундаментальной математики и методики преподавания математики.

Дисциплина: «Многочлены от нескольких переменных»
(направление 44.03.05).

Составитель: доцент О.Н. Хмеляр.

Утверждены на заседании кафедры «19» октября 2017г.

Рекомендованы методическим советом университета
«12» декабря 2016 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие составлено в соответствии с действующей программой по алгебре и предназначено для студентов направления 44.03.05. Пособие состоит из двух разделов. В первом разделе содержатся основные положения теоретического курса и даны решения типовых задач по теме «Многочлены от нескольких переменных».

Вовтором разделе приведен список задач, которые можно использовать для практических занятий в аудитории, составления вариантов контрольных и самостоятельных работ и самостоятельной работы студентов.

Глава 1. Многочлены от n переменных

Выражение $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, где a любое число из поля $P, x_1, x_2, \dots, x_n$– переменные, $k_1, k_2, \dots k_n$– целые неотрицательные числа, называют одночленом от n переменных надполем P.

Сумму конечного числа одночленов указанного вида называют многочленом от n переменных над полем P.

Для обозначения многочленов от переменных$x_1, x_2, \dots x_n$ пользуются символами $f(x_1, x_2, \dots x_n)$, □$(x_1, x_2, \dots x_n)$ит.п.

Многочлены $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ и □$(x_1, x_2, \dots x_n)$ называют равными, если для любых $k_1, k_2, \dots k_n$ коэффициент при $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равен коэффициенту при $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ многочлена □$(x_1, x_2, \dots x_n)$.

Суммой двух многочленов от n переменных $f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=o}^{m} ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$и □$(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{j=o}^{l} bx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$называют многочлен,получающийся в результате приписывания к членам первого многочлена членов второго многочлена с теми же знаками и приведения подобных членов (членов, имеющих одинаковые наборы показателей при переменных).

Чтобы найти произведение двух многочленов, нужно все члены первого многочлена умножить на все члены второго многочлена и привести подобные члены.

Произведением одночленов$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$и$bx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ называют одночлен вида$a_ib_jx_1^{k_1+l_1}x_2^{k_2+l_2}\dots x_n^{k_n+l_n}$

Число $k_1+k_2+\dots+k_n$ называют степенью ненулевого одночлена $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$. Очевидно, степень произведения двух одночленов равна сумме их степеней.

Степенью (по совокупности переменных) ненулевого многочлена называют максимальную из степеней его членов.

Многочлен называют однородным степени m, если все его члены имеют степень m.

Например, многочлен $f(x_1, x_2, \dots x_n) = x_1^3x_2^2 + x_2^5 - x_3x_4^4 + x_3^5 - 10x_1x_2x_3x_4^3$– однородныймногочлен пятой степени.

Если $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$и $ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}$есть два одночлена многочлена $f(x_1, x_2, \dots x_n)$,то одночлен $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ считают выше одночлена $ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}$, если существует натуральное число s такое, что $к_1 = 1_1, k_2 = 1_2, k_{s-1} = 1_{s-1}, k_s > 1_s$.

Любые два одночлена сравнимы по высоте.

При записи многочлена от n переменных принято располагать его одночлены по высоте. Такое расположение членов многочлена называют лексикографическим.

Задача 1

Расположить лексикографически члены многочлена:

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2x_2 - 5x_1x_2x_3^3 - 6x_1^2x_3 - 30x_1x_2^5x_3 - 7x_1^4x_2^2x^3 + 2x_1 - 5.$

Решение

$f(x_1, x_2, x_3) \ =– 7x_1^4x_2^2x^3 +3x_1^2x_2 + 6x_1^2x_3 – 30x_1x_2^5x_3 – 5x_1x_2x_3^3+2x_1– 5.$

Многочлен $f(x_1, x_2, ... x_n)$называют симметрическим, если он неизменится при любой перестановке входящих в него переменных $x_1, x_2,... x_n$.

При этом многочлены

□$_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n$

□$_2 = x_1 x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n$

□$_3 = x_1 x_2x_3 +x_2x_3 x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n$

□$_1 = x_1x_2....x_n$

называются основными симметрическими многочленами от *n* переменных.

Основная теорема теории симметрических многочленов: всякий симметрический многочлен от *n* переменных над полем *P* может быть единственным образом представлен в виде многочлена от основных симметрических многочленов с коэффициентами из поля *P,* т.е. $f(x_1, x_2, ... x_n) =$ □(□$_1$, □$_2$,... □$_n$).

Уравнение от одной переменной: $x^n +a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n= 0$(1)

и система *n* уравнений от *n* переменных:

$x_1+ x_2 + ... + x_n = –a_1,$

$x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = a_2,$(2)

$x_1x_2x_3 \ + x_2x_3 x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n = – a_3,$

$x_1x_2....x_n = (–1)^na_n$

связаны между собой следующим образом.Если числа $\alpha_1, \alpha_2,...,\alpha_n$– корниуравнения (1),то любая перестановка этих чисел является решением системы (2), т.е. система (2) имеет *n* решений, одним из которых будет $(\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n)$и обратно, если $(\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n)$одно из решении системы (2), то числа $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ являются корнями уравнения (1).

Задача 2

Выразить многочлен:

$f(x_1, x_2, x_3) \ = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \ + x_1^2x_2+x_1x_2^2+ x_1^2x_3 + x_1x_3^2 \ + x_2^2x_3 +x_2x_3^2+x_1x_2x_3$

через основные симметрические многочлены.

Решение

Данный симметрический многочлен является однородным многочленом третьей степени. Его высший член равен x_1^3. Ему соответствует система показателей $3\ 0\ 0$ $(x_1^3x_2^0x_3^0)$.

Составим многочлен $\square_1(\square_1, \square_2, \ldots \square_n) = \square_1^{3-0} \square_2^{0-0} \square_3^{0} = \square_1^{3}$, высший член которого совпадает с высшим членом $f(x_1, x_2, x_3)$.

$\square_1(\square_1, \square_2, \square_3) = \square_1^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_3 + 3x_1x_3^2 + 3x_2^2x_3 + 3x_2x_3^2 + 6x_1x_2x_3$.

Найдем разность $f(x_1, x_2, x_3) - \square_1(\square_1, \square_2, \square_3) = -2x_1^2x_2 - 2x_1x_2^2 - 2x_1^2x_3 - 2x_1x_3^2 - 2x_2^2x_3 - 2x_2x_3^2 - 5x_1x_2x_3$.

Обозначим полученный многочлен через $f(x_1, x_2, x_3)$. Высший членполученного многочлена равен $-2x_1^2x_2$. Ему соответствует системапоказателей $2\ 1\ 0$ $(x_1^2x_2^1x_3^0)$.

Составим многочлен $\varphi_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = -2\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^{0} = -2\sigma_1\sigma_2$, высший член которого совпадает с высшим членом многочлена $f_1(x_1, x_2, x_3)$.

$\varphi_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = -2\sigma_1\sigma_2 = -2(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) =$
$= -2(x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + 3x_1x_2x_3)$.

Найдём разность $f_1(x_1, x_2, x_3) - \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = x_1x_2x_3 = \sigma_3$. Отсюда следует, что $f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3$.

В случае, когда данный многочлен является однородным, эту задачу можно решить проще.

Учитывая все возможные высшие члены симметрических многочленов f_k, получающихся согласно доказательству теоремы, составим следующую таблицу (таблица 1):

Таблица 1 – Комбинация основных симметрических многочленов

Система показателей	Высшие члены	Соответствующая комбинация основных симметрических многочленов
3 0 0	$x_1^3x_2^0x_3^0$	$\varphi_1 = \sigma_1^{3-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^{0} = \sigma_1^3$
2 1 0	$ax_1^2x_2^1x_3^0$	$\varphi_2 = a\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^{0} = a\sigma_1\sigma_2$
1 1 1	$bx_1x_2x_3$	$\varphi_3 = b\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1} = b\sigma_3$

Обращаем внимание на то обстоятельство, что система показателей k_1, k_2, k_3 каждого высшего члена должна удовлетворять условию $k_1 \geq k_2 \geq k_3$, и в то же время, сумма $k_1 + k_2 + k_3$ должна равняться трём. Кроме того, каждая следующая система показателей должна соответствовать члену меньшей высоты.

Из приведённой таблицы получаем, что $f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3 + a\sigma_1\sigma_2 + b\sigma_3$, где a и b пока неопределённые коэффициенты. Определим их, подставляя в последнее тождество вместо x_1, x_2, x_3 некоторые числовые значения (таблица 2).

Таблица 2 – Определение коэффициентов разложения

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	*1*	*0*	*2*	*1*	*0*	*4*
1	*1*	*1*	*3*	*3*	*1*	*10*

Получаем систему уравнений относительно неизвестных a и b:

$$\begin{cases} 8+2a=4, \\ 27+9a+b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=-4, \\ 9a+b=-17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2, \\ b=1 \end{cases}$$

Итак, $f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3$.

Задача 3

Вычислить значение симметрического многочлена:

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_2^3x_3^3$, если x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3-2x^2-2x-2=0$.

Решение

Воспользуемся следующим утверждением: если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – корни уравнения n-ой степени $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, то имеют место соотношения:

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_1$,

$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_2$,

…

$x_1x_2x_3 \ldots x_{n-1}x_n = (-1)^n a_n$.

(формулы Виета для алгебраического уравнения n-ой степени).

Следовательно, для решения данной задачи достаточно выразить многочлен $f(x_1,x_2,x_3)$ через основные симметрические многочлены σ_1, σ_2, σ_3. Для этого составим таблицу 3.

Таблица 3 – Комбинация основных симметрических многочленов

Система показателей	Высшие члены	Соответствующая комбинация основных симметрических многочленов
3 3 0	$x_1^3x_2^3x_3^0$	$\varphi_1 = \sigma_2^3$
3 2 1	$ax_1^3x_2^2x_3$	$\varphi_2 = a\sigma_1\sigma_2\sigma_3$
2 2 2	$bx_1^2x_2^2x_3^2$	$\varphi_3 = b\sigma_3^2$

Из приведённой таблицы получается, что $f(x_1,x_2,x_3) = \sigma_2^3 + a\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + b\sigma_3^2$.

Определим коэффициенты a и b (таблица 4).

Таблица4 –Определение коэффициентов разложения

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	1	1	3	3	1	3
1	1	–2	0	–3	–2	–15

$$\begin{cases} 27+9a+b=3, \\ -27-4b=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a+b=-24, \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3, \\ b=3. \end{cases}$$

Итак, $x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_2^3x_3^3 = \sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2$.

Применяя формулы Виета для нашего случая, имеем:

$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 2,$

$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -2,$

$\sigma_3 = x_1x_2x_3 = 2.$

Подставляя найденные значения для σ_1, σ_2, σ_3 в$f(x_1,x_2,x_3) = \sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2$,получим: $(-2)^3 - 3 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 22 = 28$.

Задача 4

Найти сумму кубов корней уравнения:$2x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$.

Решение

Обозначим корни уравнения через x_1, x_2, x_3, x_4. Нам потребуется найти $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$, не находя самих корней x_1, x_2, x_3, x_4. По формулам Виета найдём значения основных симметрических многочленов от корней данного уравнения. При $a_0 \neq 1$ формулы Виета принимают вид:

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$

$x_1x_2 + x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0},$

$x_1x_2x_3 \ldots x_{n-1}x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$

В нашем случае $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = \frac{3}{2}$, $\sigma_3 = 1$, $\sigma_4 = -\frac{1}{2}$.

Для решения задачи достаточносимметрический многочлен$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ выразить через σ_1, σ_2, σ_3, σ_4(таблица 5).

Таблица5 – Комбинация основных симметрических многочленов

Система показателей	Высшие члены	Соответствующая комбинация основных симметрических многочленов
3 0 0 0	$x_1^3x_2^0x_3^0x_4^0$	σ_1^3
2 1 0 0	$ax_1^2x_2^1x_3^0x_4^0$	$a\sigma_1\sigma_2$
1 1 1 0	$bx_1^1x_2^1x_3^1x_4^0$	$b\sigma_3$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sigma_1^3 + a\sigma_1\sigma_2 + b\sigma_3.$

Определим коэффициенты a и b (таблица 6):

Таблица6 – Определение коэффициентов разложения

x_1	x_2	x_3	x_4	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	f
1	1	1	0	3	3	1	0	3
1	1	1	1	4	6	4	1	4

$$\begin{cases} 27+9a+b=3, \\ 64+24a+4b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a+b=-24, \\ 6a+b=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3, \\ b=3. \end{cases}$$

Итак, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

Подставляя значения σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, получим: сумма кубов корней данного уравнения равна $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3^3 - 3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot 1 = \frac{33}{2}$.

Задача 5

Разложить многочлен $f(x,y,z)=2(x^3+y^3+z^3)+x^2y+x^2z+xy^2+xz^2+y^2z+yz^2-3xyz$ на множители.

Решение

Этот многочлен является однородным третьей степени с высшим членом $2x^3$. Представим этот многочлен через основные симметрические многочлены (таблица7).

Таблица7 – Комбинация основных симметрических многочленов

Система показателей	Высшие члены	Соответствующая комбинация основных симметрических многочленов
3 0 0	$2x^3y^0z^0$	$2\sigma_1^3$
2 1 0	ax^2y	$a\sigma_1\sigma_2$
1 1 1	$bxyz$	$b\sigma_3$

$f(x,y,z) = 2\sigma_1^3 + a\sigma_1\sigma_2 + b\sigma_3.$

Найдём коэффициенты a и b(таблица8).

Таблица8 – Определение коэффициентов разложения

x	y	z	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	1	1	3	3	1	9
1	1	0	2	1	0	6

$$\begin{cases} 54+9a+b=9, \\ 16+2a=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-5, \\ b=0. \end{cases}$$

Итак, $f(x,y,z)=2\sigma_1^3-5\sigma_1\sigma_2=\sigma_1(2\sigma_1^2-5\sigma_2)=(x+y+z)(2x^2+2y^2+2z^2-xy-xz-yz)$.

Задача 6

Доказать, что при $x+y+z=0$ справедливо тождество:

$x^4+y^4+z^4=2(xy+xz+yz)^2$.

Решение

Левая и правая часть равенства являются однородными симметрическими многочленами. Представим их в виде многочленов от основных симметрических многочленов.

$f_1(x,y,z)=x^4+y^4+z^4$(таблица9).

Таблица9 – Комбинация основных симметрических многочленов

Система показателей	Высшие члены	Соответствующая комбинация основных симметрических многочленов
4 0 0	$x^4y^0z^0$	$2\sigma_1^4$
3 1 0	$ax^3y^1z^0$	$a\sigma_1^2\sigma_2$
2 2 0	$bx^2y^2z^0$	$b\sigma_2^2$
2 1 1	$cx^2y^1z^1c$	$c\sigma^1\sigma^3$

$f_1(x,y,z)=x^4+y^4+z^4=\sigma_1^4+a\sigma_1^2\sigma_2+b\sigma_2^2+c\sigma_1\sigma_3$.

Найдём коэффициенты a, b, c(Таблица10).

Таблица10 – Определение коэффициентов разложения

x	y	z	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	1	–2	0	–3	–2	18
1	1	0	2	1	0	2
1	1	1	3	3	1	3

$$\begin{cases} 9b=18, \\ 16+4a+b=2 \\ 81+27a+9b+3c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2, \\ a=-4, \\ c=4. \end{cases}$$

$f_1(x,y,z)=x^4+y^4+z^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3$.

$f_2(x,y,z)=(xy-xz-yz)^2=\sigma_2^2$.

Учитывая условие, $x+y+z=0$, т.е. $\sigma_1=0$, получим $2\sigma_2^2=2\sigma_2^2$.

Таким образом, доказываемое равенство является тождеством.

Задача 7

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^x = 6, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1x_2x_3 = -4, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3. \end{cases}$

Решение

Левые части уравнений в системе являются симметрическими многочленами от трёх переменных. Выразим их через основные симметрические многочлены.

$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$

$f_2 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1x_2x_3$(таблица 11).

Таблица 11 – Комбинация основных симметрических многочленов

Система показателей	Высшие члены	Соответствующая комбинация основных симметрических многочленов
3 0 0	$x_1^3 x_2^0 x_3^0$	σ_1^3
2 1 0	$ax_1^2x_2^1x_3^0$	$a\sigma_1\sigma_2$
1 1 1	$bx_1^1x_2^1x_3^1$	$b\sigma_3$

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1x_2x_3 = \sigma_1^3 + a\sigma_1\sigma_2 + b\sigma_3$ (таблица 12).

Таблица 12 – Определение коэффициентов разложения

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	*1*	*1*	*3*	*3*	*1*	*2*
1	*1*	*0*	*2*	*1*	*0*	*2*

$$\begin{cases} 27 + 9a + b = 2, \\ 8 + 2a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3, \\ b = 2. \end{cases}$$

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1x_2x_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_3.$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \sigma_2.$

Получаем систему вида $\begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 6, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_3 = -4, \\ \sigma_2 = -3. \end{cases}$

$\sigma_2 = -3,\ \sigma_1 = 0,\ \sigma_3 = -2.$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3, \\ x_1x_2x_3 = -2. \end{cases}$$

Составим уравнение третьей степени: $x^3 - 3x + 2 = 0$. Найдём его корни: $x_1 = 1, x_2 = 1$, $x_3 = -2$. Тогда одним из решений является $(1, 1, -2)$, другие представляют из себя перестановки этих чисел, но так как уравнение имеет два равных корня, то система имеет только три различных решения: $(1, 1, -2), (-2, 1, 1), (1, -2, 1)$.

Глава 2. Материалы для практических занятий

В задачах 1-10 найти сумму и разность многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и многочлена $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

1 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^3x_2 - x_1^3 + 4x_1x_2^2 + x_3^3 - 5$,

$\varphi(x_1,x_2,x_3)=5x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 4x_3x_1^2 - 4$.

2 $f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2x_2^2 + 2x_1^4x_3 - 5x_2^2 - 7x_1x_2^3 + x_2x_3 + 5$,

$\varphi(x_1,x_2,x_3) = - 3x_1^2x_2^2 + 3x_1^4x_3 + 2x_1^2 - 5x_2 + 3$.

3 $f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^5 - 2x_1^4x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3 - 7x_2^2x_3^2 + 3$,

$\varphi(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^5 + 3x_1x_2^2 - x_1^3x_2 + x_3^2 - 3x_2^2x_3^2 + 4$.

4 $f(x_1,x_2,x_3) = -3x_1^2x_3 + 2x_2^2 - 5x_1x_2^2 + 5$,

$\varphi(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2^3 - 4x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + 4x_1^2x_2^2 + x_3^2$.

5 $f(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^3 + x_1^2x_2^2 + 3x_1^2 - 5x_2^2 + 3x_1^3x_2^2 - 3x_3^2$,

$\varphi(x_1,x_2,x_3) = 17x_1^2 - 10x_1^3x_2^2 - x_1^3 + 3x_3^2 - 7$.

6 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^3 + x_1^2x_2^2 - x_3^2 + 5x_1x_2^2 - 7$,

$\varphi(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_2^2 - 3x_1^3x_2 + 17x_2^2 - 13x_1 + 3$.

7 $f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2x_3^4 + 2x_1x_2^2x_3 + 7$,

$\varphi(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2x_2^3 - 3x_1x_2^2x_3 + 5x_1x_2^2$.

8 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^3 - \frac{1}{2}x_1^2x_2^3 - 4x_1x_2^3 + 15x_1^3x_2$,

$\varphi(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}x_1^2x_2^3 - 4x_1x_2^2x_3 + 5$.

9 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^4x_2 - 3x_1x_2^2 + 5x_1x_2x_3 - x_2x_3^2$,

$\varphi(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2^3 + 7x_1x_2x_3 - 2x_1x_3^2 + 3$.

10 $f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1x_2^2x_3 + 2x_1x_2x_3^2 - 2x_1^3x_2 + 3,$

$\varphi(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_3 - 4x_1x_2x_3^2 + \frac{1}{2}x_1^3x_2^2 + x_2^3$

В задачах 11-20 найти произведение, степень и высший член произведения многочленов.

11 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_1x_3 - 5x_3^2 + 1,$ $\varphi(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 7x_1^2x_2.$

12 $f(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2 + 4x_1^2x_2 + 15x_3,$ $\varphi(x_1,x_2,x_3) = x_2^2 - x_1^3x_2 + 5x_1x_3.$

13 $f(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^3 + 2x_1^2x_2^2 - 7,$ $\varphi(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_3^2 + 5x_2.$

14 $f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2x_2x_3 - 2x_1x_2^2 + 2x_1^3,$ $\varphi(x_1,x_2,x_3) = -4x_1^2x_3 + x_1^3x_2 + 2.$

15 $f(x_1,x_2,x_3) = 7x_1^2x_3 + 3x_1x_2x_3^2 - 7,$ $\varphi(x_1,x_2,x_3) = -x_1^3x_2x_3 + 2x_1x_2^5 + 4x_1^3.$

16 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2x_3^5 - 6x_1^5x_2x_3 - 5,$ $\varphi(x_1,x_2,x_3) = 4x_1x_2^4x_3^8 - 3x_1x_2^3x_3.$

17 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 - 4x_1x_2x_3^6 - 3x_1^3x_2,$ $\varphi(x_1,x_2,x_3) = 3x_1x_2^2x_3^7 - 5x_1^5x_2 + 2.$

18 $f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1x_2^3x_3 + 4x_1^6x_2 - 7x_1^6,$ $\varphi(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2x_3^5 + 3x_1x_2^3 + 2.$

19 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2^3x_3 - 2x_1x_2^8 + 2x_1^5x_2,$ $\varphi(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2^3 - x_1^3x_2^2.$

20 $f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2x_2x_3 - 2x_1x_2^2 + 2x_1^3.$ $\varphi(x_1,x_2,x_3) = -4x_1^2x_3 + x_1^3 + 2.$

В задачах 21-30 расположить лексикографически многочлены.

21 $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 5x_1^3x_2 - x_1x_2^2x_3 + 10x_3^3 + x_1^4 - 2x_1x_3^2 + 3x_1^3x_2^2 + x_4^3 - 2x_1^3x_4.$

22 $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 8x_1x_2^3 + 5x_1^3x_2^5 - 11x_1^3 + 2x_1^3x_3x_4 - 7x_1x_3^3 + 3.$

23 $f(x_1,x_2,x_3) = 13x_1 + 5 - 7x_1^3x_2^2 + 3x_1x_2^3 + 10x_1x_2^{10} - 7x_1^3x_3.$

24 $f(x_1,x_2,x_3) = 21x_1^2x_2 - 3_1^{10} + 2x_1^5x_3^8 - x_1x_1^3 + 12x_1^2x_2^2 + 4x_1x_2^3 - x_2^3.$

25 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_2x_3^6 - 11x_1x_2^6x_3 + 7x_1x_2^6x_3^2 + 3x_1^2x_2^3x_3^2 - 2x_2^7x_3.$

26 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2^3x_3^5 - 2x_1x_2^6 - 11x_2x_3^5 + 3x_1x_2^3x_3^7 + 7x_1x_2x_3^5.$

27 $f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1x_2^5x_3 - 7x_2x_3^6 + 2x_1x_2^5x_3^2 - 4x_2x_3^5 + 5 - 6x_1^3x_2.$

28 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_3^2 - 7x_1^3x_2x_3^4 + 11x_2x_3^6 - 13x_3^1x_2^2x_3^5 + 3x_1x_2^3 + 5.$

29 $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_4^5 - 2x_2x_3^4x_4^2 + 2x_1x_2^3x_3 - 11x_1^2x_2^5x_3 + 12x_1^2x_2x_4^3 + 1.$

30 $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1^4x_2x_4 - 3x_1x_2^3x_3 + 12x_2^3x_3x_4^2 + 7x_1^4x_2^2x_3 - 13x_1^4x_2^2x_3 + 3.$

В задачах 31-40 выразить симметрические многочлены через основные симметрические.

31 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_2x_3^2 + x_2^2x_3.$

32 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_1^3x_3 + x_1x_3^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3.$

33 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 + 2x_2^2x_3^2.$

34 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2.$

35 $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1x_2 + x_3)(x_1x_3 + x_2)(x_2x_3 + x_1).$

36 $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3).$

37 $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)(x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2).$

38 $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2).$

39 $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2.$

40 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3x_2^2 + x_1^3x_3^2 + x_2^3x_1^2 + x_3^3x_1^2 + x_2^3x_3^2 + x_2^2x_3^3.$

В задачах 41-45 найти значение симметрического многочлена $f(x_1,x_2,x_3)$ от корней уравнения.

41 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3(x_2 + x_3) + x_2^3(x_1 + x_3) + x_3^3(x_1 + x_2),$ $x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0.$

42 $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^3(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + x_2^3(x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4) +$

$+ x_3^3(x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_4) + x_4^3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3),$ $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0.$

43 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^4x_2 + x_1x_2^4\ x_1^4x_3 + x_1x_3^4 + x_2^4x_3 + x_2x_3^4,$ $3x^3 - 5x^2 + 1 = 0.$

44 $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_1^3x_4^3 + x_2^3x_3^3 + x_2^3x_4^3 + x_3^3x_4^3,$

$3x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0.$

45 $f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2),$ $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0.$

В задачах 46-50 найти значение выражения от корней уравнения.

46 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_3},$ $x^3 - 3x + 5 = 0.$

47 $\frac{x_1^2}{(x_2+1)(x_3+1)}+\frac{x_2^2}{(x_1+1)(x_3+1)}+\frac{x_3^2}{(x_1+1)(x_2+1)}$, $x^3-2x^2+1=0$.

48 $\frac{x_1^2}{(x_1+1)^2}+\frac{x_2^2}{(x_2+1)^2}+\frac{x_3^2}{(x_3+1)^2}$, $x^3-x^2+3x-5=0$.

49 $x_1^4x_2^2+x_1^2x_2^4+x_2^2x_3^4+x_2^4x_3^2+x_1^4x_3^2+x_1^2x_3^4$, $2x^3-4x+7=0$.

50 $(x_1^2-x_2x_3)(x_2^2-x_1x_3)(x_3^2-x_1x_2)$, $x^3+5x^2-x=0$.

В задачах 51-55 найти сумму квадратов корней уравнения.

51 $x^3+3x^2-4x+1=0$.

52 $2x^4-x^2+5x-1=0$.

53 $x^3+4x^2+2x-4=0$.

54 $2x^3+5x^2-3x+2=0$.

55 $x^4-x^3+2x+3=0$.

В задачах 56-60 найти сумму кубов корней уравнения.

56 $x^3+3x^2-4x+1=0$.

57 $2x^3+6x^2+6x-3=0$.

58 $x^4-2x^2+3x-1=0$.

59 $3x^4-x^3+2x+3=0$.

60 $x^3-x^2+x+2=0$.

В задачах 61-70 разложить на множители следующие многочлены.

61 $(x+y)(x+z)(y+z)+xyz$.

62 $2(x^3+y^3+z^3)+x^2y+x^2z+xy^2+xz^2+y^2z+yz^2-3xyz$.

63 $x_1^3(x_2+x_3)+x_2^2(x_1+x_3)+x_3^2(x_1+x_2)+2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)$.

64 $(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$.

65 $x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)+2xyz(x+y+z)+(x^2+y^2+z)^2(xy+xz+yz)$.

66 $(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3$.

67 $(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)^2-(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2)$.

68 $10x^4-27x^3y-110x^2y^2-27xy^3+10y^4$.

69 $2x^4-x^3y+3x^2y^2-xy^3+2y^4$.

70 $6x^4-11x^3y-18x^2y^2-11xy^3+6y^4$.

В задачах 71-75 доказать тождество.

71 $(x + y + z)(xy + xz + yz) – xyz = (x + y)(x + z)(y + z)$.

72 $x(y + z)^2 + y(x + z)^2 + z(x + y)^2 – 4xyz = (y + z)(z + x)(x + y)$.

73 $(xy+xz+yz)^2 + (x^2 – yz^2) + (y^2 –xz)^2 + (z^2 – xy)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$.

74 $xyz(x+y+z)^3 –(yz+xz+xy)^3 =(x^2 –yz)(y^2 – zx)(y^2 – zx)(z^2 – xy)$.

75 $(x + y + z)^3 – (-x + y + z)^3 – (x – y + z)^3 – (x + y – z)^3 = 24xyz$.

Взадачах76-80доказатьтождество при указанных условиях.

76 $x^4 + y^4 + z^4 = 2(xy + xz + yz)$, если $x + y + z = 0$.

77 $xyz = 0$, если$x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^3 + y^3 + z^3 = 1$.

78 $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, если$x + y + z = 0$.

79 $x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z) = 0$, если$x + y + z = 0$.

80 $x^4 + y^4 + z^4 = 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$, если$x + y + z =0$.

В задачах 81-90 решить системы уравнений.

81 $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ x^3+y^3+z^3=8. \end{cases}$

85 $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3, \\ xyz=2. \end{cases}$

82 $\begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+xz+yz=11, \\ (x-y)(x-z)(y-z)=-2. \end{cases}$

86 $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=4, \\ x^3+y^3+z^3=8. \end{cases}$

83 $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=\dfrac{73}{8}, \\ xy+xz+yz=x+y+z, \\ xyz=1. \end{cases}$

87 $\begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+xz+yz=36, \\ xyz=216. \end{cases}$

84 $\begin{cases} x+y+z=\dfrac{13}{3}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{13}{3}, \\ xyz=1. \end{cases}$

88 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1, \\ xy+xz+yz=27, \\ x+y+z=9. \end{cases}$

89 $\begin{cases} xy+xz+yz=11, \\ xy(x+y)+yz(y+z)+xz(x+z)=48, \\ yx(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)=118. \end{cases}$

90 $\begin{cases} x+y+z=11, \\ (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=1, \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-6. \end{cases}$

Список литературы

1 Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. Симметрия в алгебре. – Москва : Наука, 1967.

2 Винберг Э. Б. Алгебра многочленов. – Москва : Просвещение, 1980.

3 Глухов М. М., Солодовников А. С. Задачник – практикум по высшей алгебре. – Москва : Просвещение, 1969.

4 Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – Москва : Физматгиз, 1968.

5 Окунев Л. Я. Высшая алгебра. – Москва : Просвещение, 1966.

6 Окунев Л. Я. Сборник задач по высшей алгебре. – Москва : Просвещение, 1964.

7 Сборник задач по алгебре: учебное пособие / под редакцией А. И. Кострикина. – Москва : Факториал, 1955.

8 Солодовников А. С., Родина М. А. Задачник – практикум по алгебре. – Москва : Просвещение, 1985.

9 Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. – Москва : Наука, 1964.

Хмеляр Олеся Николаевна

МНОГОЧЛЕНЫ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методические указания к практическим занятиям
и самостоятельной работе
для студентов направления подготовки 44.03.05

Редактор Н.Н. Погребняк

Подписано к печати 16.01.19	Формат бумаги 60×84 1/16	Бумага 65г/м^2
Печать цифровая	Усл. печ.л. 1,25	Уч.-изд.л. 1,25
Заказ 7	Тираж 25	Не для продажи

БИЦ Курганского государственного университета.
640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.