МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра фундаментальной математики и

методики преподавания математики

МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические указания и материалы
для практических занятий по дисциплине «Алгебра»
со студентами направлений 01.03.01 («Математика») и 44.03.05
(«Педагогическое образование» (с двумя профилями подготовки))

Курган 2018

Кафедра Фундаментальной математики и методики преподавания математики.

Дисциплина: «Алгебра» (направления 01.03.01 «Математика» и 44.03.05 «Педагогическое образование» (с двумя профилями подготовки)).

Составитель: доцент О.Н. Хмеляр

Утверждены на заседании кафедры «19» октября 2017г.

Рекомендованы методическим советом университета«12» декабря 2016 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие составлено в соответствии с действующей программой по алгебре и предназначено для студентов направлений 01.03.01 и 44.03.05. Пособие состоит из четырех разделов. В трех первых разделах содержатся основные положения теоретического курса и даны решения типовых задач по теме «Многочлены».

В последнем разделе приведено более трехсот примеров и задач, которые можно использовать для практических занятий в аудитории, составления вариантов контрольных и самостоятельных работ и самостоятельной работы студентов.

Глава 1. Многочлены от одной переменной

1.1 Основные понятия. Алгоритм Евклида

Многочленом степени n от переменной x над полем P называют алгебраическое выражение вида $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, где n – целое неотрицательное число, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ – любые числа из поля P, и $a_n \neq 0$.

Многочлены обозначают символами $f(x)$, $\phi(x)$, $p(x)$ и т.д.

Числа $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ называют коэффициентами многочлена, a_n– старший коэффициент, a_0 –свободный член.

Одночлены $a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}, \ldots, a_1x, a_0$ называют членами многочлена.

Многочлен, все коэффициенты которого равны 0, называют нулевым или нуль – многочленом.

При $n = 0$ многочлен имеет вид $a_0x^0 = a_0$, т.к. $x^0 =1$, $a_0 \neq 0$, т.е. многочленами нулевой степени являются числа из поля P, отличные от 0.

Два многочлена над полем P называются равными в алгебраическом смысле, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной x.

Сумма, разность и произведение двух многочленов над полем P также являются многочленами над полем P. Действительно, пусть

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $g(x) = b_0 + \ldots + b_mx^m$,

тогда

$f(x) +g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots + (a_k + b_k)x^k$,

$f(x)–g(x)= (a_0–b_0) + (a_1–b_1)x + (a_2–b_2)x^2 + \ldots + (a_k–b_k)x^k$,

где $k \leq max(n,m)$, причем считают $a_i=0$ при $i>n$ и $b_i = 0$ при $i>m$.

$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots +c_{n+m}x^{n+m}$,

где $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0$, причем $a_i = 0$ при $i > n$ и $b_i = 0$ при $i > m$.

Пусть $f(x)$ и $\phi(x) \neq 0$ многочлены над полем P. Говорят многочлен $f(x)$ делится на многочлен $\phi(x)$, если существует такой многочлен $g(x)$ над тем же полем, то выполняется равенство $f(x) = \phi(x)g(x)$.

Задача № 1

$f(x)= x^2– 4$, $\phi(x) = x – 2$, то $g(x) = x + 2$, т.к. $x^2– 4 = (x – 2)(x+ 2)$.

Операция деления во множестве многочленов не выполнима. Выполнимо деление с остатком. Для любых двух многочленов $f(x)$ и $\phi(x) \neq 0$ над полем P существует единственная пара многочленов $g(x)$ и $r(x)$ над этим полем, которые удовлетворяют двум условиям (соотношениям):

1) $f(x) = \phi(x)g(x) + r(x)$,

2) степень $r(x)$ меньше степени $\phi(x)$ или $r(x) = 0$.

Задача № 2

Разделить с остатком $f(x)$ на $\phi(x)$:

$f(x) = 2x^4– 4x^3 + 4x^2– 6$, $\phi(x) = x^2 – 3x – 1$.

Вычисления выполняются по следующей схеме:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,2x^4-4x^3+4x^2-6 & x^2-3x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^4-6x^3-2x^2} & 2x^2+2x+12 \\
-\,2x^3+6x^2-6 & \\
\underline{2x^3-6x^2-2x} & \\
-\,12x^2+2x-6 & \\
\underline{12x^2-36x-12,} & \\
8x+6 &
\end{array}
$$

$g(x) = 2x^2 + 2x + 12, \quad r(x) = 38x + 6.$

Многочлен $f(x)$ делится на $\phi(x)$ в том и только в том случае, если остаток при делении $f(x)$ на $\phi(x)$ равен нулю.

Многочлен $\delta(x) \neq 0$ называют общим делителем двух или нескольких многочленов, если каждый из них делится на $\delta(x)$.

Многочлен $d(x)$ называют наибольшим общим делителем двух или нескольких многочленов, если $d(x)$ является общим делителем этих многочленов и сам делится на любой другой их общий делитель.

Наибольший общий делитель двух многочленов находится однозначно с точностью до постоянного множителя, поэтому условились в качестве наибольшего общего делителя многочленов брать тот, у которого старший коэффициент равен 1.

Наибольший общий делитель двух многочленов $f(x)$ и $\phi(x)$ может быть найден при помощи алгоритма Евклида, который состоит в следующем: сначала делят с остатком многочлен $f(x)$ на $\phi(x)$, затем $\phi(x)$ на остаток от первого деления, затем остаток от первого деления на остаток от второго деления я так далее до тех пор, пока не получится нулевой остаток. Последний ненулевой остаток и есть наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $\phi(x)$. Так как постоянные множители не влияют на делимость многочленов, то в процессе применения алгоритма Евклида, чтобы исключить дробные коэффициенты, можно делимые и делители умножить на любое, отличное от нуля, число.

Задача № 3

С помощью алгоритма Евклида найти наибольший общий делитель многочленов:

$f(x) = x^3 + 3x^4 - 12x^3 - 52x^2 - 52x - 12,$

$\phi(x) = x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 22x - 12.$

Решение.

Разделим с остатком многочлен $f(x)$ на многочлен $\phi(x)$. Процесс деления будем осуществлять «углом».

$$
\begin{array}{l|l}
-\,x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 52x^2 - 52x - 12 & x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 22x - 12 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 + 3x^4 - 6x^3 - 22x^2 - 12x} & x \\
\qquad - 6x^3 - 30x^2 - 40x - 12. &
\end{array}
$$

Итак, $r_1(x) = - 6x^3 - 30x^2 - 40x - 12$.

Делим $\phi(x)$ на $r_1(x)$. Чтобы избежать дробных коэффициентов, умножим $\phi(x)$ на 3, а $r_1(x)$ на $-\frac{1}{2}$

$$3\phi(x) = 3x^4 + 9x^3 - 18x^2 - 66x - 36,$$

$$-\frac{1}{2}r_1(x) = 3x^3 + 15x^2 + 20x + 6.$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\,3x^4 + 9x^3 - 18x^2 - 66x - 36 & 3x^3 + 15x^2 + 20x + 6 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^4 + 15x^3 + 20x^2 + 6x} & x-2 \\
-\quad -6x^3 - 38x^2 - 72x - 36 & \\
\quad \underline{-6x^3 - 30x^2 - 40x - 12} & \\
\qquad - 8x^2 - 32x - 22. &
\end{array}
$$

Имеем: $r_2(x) = - 8x^2 - 32x - 24$.

Делим $-\frac{1}{2}r_1(x)$ на $r_2(x)$, умножив предварительно на $-\frac{1}{8}$

$$
\begin{array}{l|l}
-\,3x^3 + 15x^2 + 20x + 6 & x^2 + 4x + 3 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^3 + 12x^2 + 9x} & 3x + 3 \\
\quad 3x^2 + 11x + 6 & \\
\quad \underline{3x^2 + 12x + 9} & \\
\qquad -x - 3 &
\end{array}
$$

Получили, что $r_3(x) = - x - 3$. Умножив $r_3(x)$ на $- 1$, делим $x^2 + 4x + 3$ на $x + 3$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 + 4x + 3 & x + 3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^2 + 3x} & x + 1 \\
\quad x + 3 & \\
\quad \underline{x + 3} & \\
\quad 0. &
\end{array}
$$

Таким образом, четвертый остаток $r_4(x)$ равен нулю. Значит, наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $\phi(x)$ равен $x + 3$.

Ответ: $D\,(f(x), \phi(x)) = x + 3$.

1.2 Корни многочлена. Теорема Безу. Схема Горнера

Число c называют корнем многочлена $f(x)$, если $f(c) = 0$.

Справедлива *теорема Безу*: Остаток от делении многочлена $f(x)$ на линейный двучлен $(x - c)$ равен значению многочлена при $x = c$.

Число c тогда и только тогда является корнем многочлена $f(x)$, когда $f(x)$ делится нацело на $(x - c)$.

Число c называют k– кратным корнем многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x - c)^k$ но не делится на $(x - c)^{k+1}$.

Если $f(x) = (x - c)g(x) + r$, то коэффициенты многочлена $g(x)$и остаток r могут быть найдены по схеме Горнера (таблица 1).

Таблица 1 – Схема Горнера

	a_0	a_1	a_2		a_{n-1}	a_n
c	$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + b_0 c$	$b_2 = a_2 + b_1 c$		$b_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-2} c$	$r = a_n + b_{n-1}c$

Где a_0, a_1, ...,a_n – коэффициенты многочлена $f(x)$, записанного по убывающим степеням x:

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

$g(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$.

Задача № 4

Найти кратность корня $x = 5$ многочлена $f(x) = x^5 - 15x^4 + 76x^3 - 140x^2 + 75x - 125$.

Решение.

Используя схему Горнера (таблица 2), имеем:

Таблица 2 – Схема Горнера

	1	– 15	76	– 140	75	–125
5	1	– 10	26	– 10	25	0

Получим, что $f(x) = (x - 5)(x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 25)$.

Число 5 является корнем многочлена $f(x)$. Если 5 будет корнем и многочлена $\phi(x) = x^4 - 10x^3 + 26^2 - 10x + 25$, то 5 будет корнем многочлена $f(x)$ второй кратности или выше.

Проверим, будет ли 5 корнем $\phi(x)$ по схеме Горнера (таблица 3):

Таблица 3 – Схема Горнера

	1	– 10	26	– 10	25
5	1	– 5	1	– 5	0

$\phi(5) = 0$, следовательно, 5 – корень $\phi(x)$.$f(x) = (x - 5)^2(x^3 - 5x^2 + x - 5)$.

Проверим, будет ли 5 корнем многочлена $\phi(x) = x^3 - 5x^2 + x - 5$ (таблица 4):

Таблица 4 – Схема Горнера

	1	– 5	1	– 5
5	1	0	1	0

Число 5 является корнем $\phi(x)$, отсюда имеем:

$\phi(x) = (x – 5)(x^2 + 1)$, а$f(x) = (x – 5)^3(x^2 + 1)$.

Число 5 корнем многочлена $x^2 + 1$ уже не является, следовательно, $f(x)$ делится на $(x– 5)^3$, но не делится на $(x – 5)^4$ значит, кратность корня 5 многочлена $f(x)$равна 3.

Процесс решения можно оформить следующим образом (таблица 5):

Таблица 5 – Обобщённая схема Горнера

	1	–15	76	–140	75	–125
5	1	–10	26	–10	25	0
5	1	–5	1	–5	0	
5	1	0	1	0		
5	1	5	26≠0			

Число 5 является трехкратным корнем многочлена
$f(x) = x^3– 15x^4 + 76x^3– 140x^2 + 75x – 125$, т.е. $f(x) = (x – 5)^3(x^2 + 1)$

Задача № 5

Остатки от деления многочлена $f(x)$на $x – 2$ и $x – 3$ равны соответственно 5 и 7. Найти остаток от деления этого многочлена на $(x – 2)(x – 3)$.

Решение.

$f(x) = (x –2)(x –3)g(x) +r(x)$ (*), т.к. степень делителя $(x – 2)(x – 3)$равна двум, то степень остатка $r(x)$ меньше или равна единице, т.е. $r(x)=ax+b$.

По теореме Безу имеем $f(2) = 5, f(3) = 7$.

При $x = 2$ равенство (*) принимает вид $5 =2 a +b$,

При $x = 3,7= 3a +b$.

Решая систему $\begin{cases} 2a + b = 5 \\ 3a + b = 7 \end{cases}$ получаем $a = 2,\ b = 1$.

Итак, $r(x) = 2x + 1$.

Задача № 6

Найти, при каких значениях a и bмногочлен $f(x) = x^{10} + ax^2 + bx+ 1$ делится на$x^2 – 1$.

Решение.

$f(x) = (x^2 – 1)g(x)$,

при $x = 1$ имеем $f(1) =0$,

при $x =–1 f(– 1) = 0$, получаем систему

$\begin{cases} 1 + a + b + 1 = 0 \\ 1 + a - b + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} a + b = -2 \\ a - b = -2 \end{cases},$ отсюда $a = – 2,\ b= 0$.

Задача №7

Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x – 4$ по степеням $(x – 1)$, найти значение многочлена $f(x)$и всех его производных при $x =1$.

Решение:

По формуле Тейлора имеем:

$f(x) = f(1) + \frac{'(1)}{1!}(x-1) + \frac{''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{'''(1)}{3!}\frac{'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{^{IV}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{^{V}(1)}{5!}\frac{^{V}(1)}{5!}(x-1)^5$ – разложение многочлена $f(x)$ по степеням $(x–1)$.

Как видно из формулы, для решения задачи нужно найти значения многочлена $f(x)$ и его производных при $x = 1$. Это можно сделать непосредственно, находя производные многочлена $f(x)$, а затем их значения при $x = 1$.

Но для решения этой задачи можно использовать также и схему Горнера.

Запишем разложение многочлена $f(x)$ по степеням $(x – 1)$ с неопределенными коэффициентами:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + c_3(x-1)^3 + c_4(x-1)^4 + c_5(x-1)^5.$$

Числа $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ равны соответственно остаткам от деления многочленов $f(x), g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x), g_5(x)$ на $(x– 1)$, где $g_1(x)$ есть частное от деления $f(x)$ на $(x – 1)$, $g_2(x)$ есть частное от деления $g_1(x)$ на $(x – 1)$ и т.д. Наконец, $g_5(x)$ есть частное от деления $g_4(x)$ на $(x – 1)$.

Все решения можно записать в таблицу 6:

Таблица 6 – Обобщённая схема Горнера

	1	3	0	0	2	– 4
1	1	4	4	4	6	2
1	1	5	9	13	19	
1	1	6	15	28		
1	1	7	22			
1	1	8				
	1					

Отсюда: $f(1) = 2$, $\frac{'(1)}{1!} = 19$, $\frac{''(1)}{2!} = 28$, $\frac{'''(1)}{3!} = 22$, $\frac{^{IV}(1)}{4!} = 8$, $\frac{^{V}(1)}{5!} = 1$, тогда $f(1)=2, (1)= 19, ''(1) = 56, '''(1) = 132, ^{IV}(1) = 192, ^{V}(1) = 120$.

Подставляем найденные значения в формулу Тейлора, имеем:

$$f(x)= 2 + 19(x-1) + 28(x-1)^2 + 22(x-1)^3 + 8(x-1)^4 + (x-1)^3.$$

Задача № 8

Разложить на простейшие дроби рациональную дробь

$$\frac{x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 25x + 1}{(x+5)^6}$$

Решение.

Разложим числитель $f(x) = x^4 + 7x^3 + 4x^2 – 25x + 1$ по степеням $x + 5$ по формуле Тейлора, используя схему Горнера (таблица 7).

Таблица 7 – Обобщённая схема Горнера

	1	7	4	–25	1
5	1	2	–6	5	–24
5	1	–3	9	–40	
5	1	–8	49		
5	1	–13			
5	1				

$f(x) = (x + 5)^4 – 13(x + 5)^3 + 49(x + 5)^2 – 40(x – 5) – 24$.

Тогда $\frac{(x)}{(x+5)^6} = \frac{(x+5)^4 - 13(x+5)^3 + 49(x+5)^2 - 40(x+5) - 24}{(x+5)^6} = \frac{1}{(x+5)^2} - \frac{13}{(x+5)^3} - \frac{49}{(x+5)^4} - \frac{40}{(x+5)^5} - \frac{24}{(x+5)^6}$.

Задача № 9

Вычислить значение многочлена $f(x) = 3x^4 – 5x^3 + 7x^2 – x + 6$ при $x = 4,99$.

Решение.

Ближайшим целым числом к *4,99* является *5*, поэтому сначала разложим многочлен $f(x)$ по степеням $x – 5$ по формуле Тейлора, используя схему Горнера, а затем подставим значение $x = 4,99$ (таблица 8).

Таблица 8 – Обобщённая схема Горнера

	3	–5	7	–1	6
5	3	10	57	284	1426
5	3	25	182	1194	
5	3	40	382		
5	3	55			
5	3				

$f(x) = 3(x – 5)^4 + 55(x – 5)^3 + 382(x – 5)^2 + 1194(x – 5) + 1426;$

$f(4,99) = 3(4,99 – 5)^4 + 55(4,99 – 5)^3 + 382(4,99 – 5)^2 + 1194(4,99 – 5) + 1426,14;$

$f(4,99) = 3(–0,01)^4 + 55(–0,01)^3 + 382(–0,01)^2 + 1194(–0,01) + 1426;$

$f(4,99)=0,00000003–0,000055+0,0382–11,94 + 1426 = 1426,03820003 – 11,940055 =1414,09814503.$

Итак, $f(4,99) = 1414,09814503$.

1. 3 Приводимые и неприводимые многочлены

Многочлен $f(x)$ степени $n \geq 1$ называют приводимым над полем P, если он разлагается над этим полем на произведение двух многочленов меньшей степени и неприводимым над полем P в противном случае.

Один и тот же многочлен может быть приводим над одним полем и неприводим над другим, например, $x^2 - 3$над полем действительных чисел приводим, т.к. $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$,а над полем рациональных чисел он неприводим.

Многочлены первой степени неприводимы над любым полем. Всякий многочлен$f(x)$над полем P степени $n \geq 1$ разлагается на произведение неприводимых над этим полем многочленов, причем единственным образом с точностью до порядка следования сомножителей и множителей нулевой степени.

Всякий многочлен степени $n \geq 1$ над полем комплексных чисел имеет хотя бы один корень, в общем случае, комплексный.

По теореме Безу многочлен, имеющий корень c, делится на $x - c$, поэтому всякий многочлен степени $n \geq 2$ приводим над полем комплексных чисел.

Над C неприводимы лишь многочлены первой степени, поэтому всякий многочлен n-й степени разлагается над полем C на n линейных множителей.

Если многочлен $f(x)$с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a + bi$ то он имеет также корень $a - bi$, т.е. комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами попарно сопряжены.

Над полем R неприводимыми многочленами являются все многочлены первой степени и часть многочленов второй степени, а именно те, у которых дискриминант меньше нуля.

Над полем рациональных чисел Qсуществуют неприводимые многочлены любой натуральной степени, что следует из критерия Эйзенштейна.

Пусть дан многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами. Если хотя бы одним способом можно подобрать простое число p, удовлетворяющее следующим требованиям:

1) старший коэффициент a_0 не делится на p;

2) все остальные коэффициенты делятся на p;

3) свободный член a_n, делясь на p, не делится на p^2,то многочлен $f(x)$неприводим над полем рациональных чисел.

Например, $f(x) = x^{35} + 2x^{10} - 4x^2 + 22$ неприводим над полем рациональных чисел, т.к. существует $p = 2$, удовлетворяющее условиям критерия.

Задача № 10

Разложить многочлен $f(x) = x^6 - 1$на неприводимые множители над полем рациональных, действительных и комплексных чисел.

Решение.

1-й способ: найдем сначала разложение над полем C.

$x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1^3 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$. Чтобы разложить многочлен $x^4 + x^2 + 1$ на неприводимые множители над полем C, найдем его корни.

Обозначим $x^2 = y$, тогда $y^2 + y + 1 = 0$.

$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$;

$y_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $y_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$,

Возвращаясь к исходной переменной, получаем $x^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Чтобы извлечь квадратный корень из числа$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, представим его втригонометрической форме:$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=1(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$.

Тогда$\sqrt{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}=\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}$.

При $к=0$ получим$x_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

При $к=1$ получим $x_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Аналогично $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$

$\sqrt{\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}}=\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}$.

При $к=0$ получим $x_3=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

При $к=1$ получим $x_4=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Получаем, что

$x^4+x^2+1=(x-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Тогда разложение многочлена x^6-1 над полем C имеет вид:

$x^6-1=(x-1)(x+1)(x-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Найдем разложение данного многочлена над полем действительных чисел R. Для этого в полученном разложении перемножим множители, соответствующие сопряженным корням. Перемножим третий и шестой множители:

$(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=(x+\frac{1}{2})^2-(i\frac{\sqrt{3}}{2})^2=(x^2-x+1)$.

Аналогично перемножим четвертый и пятый множители:

$(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=(x+\frac{1}{2})^2-(i\frac{\sqrt{3}}{2})^2=(x^2+x+1)$.

Отсюда имеем разложение многочлена x^6-1 на неприводимые множители над полем R:

$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

Это же разложение имеет многочлен $f(x)=x^6-1$ и над полем рациональных чисел.

2-й способ:

$x^6-1=(x^3)^2-1^2=(x^3+1)(x^3-1)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)=(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

x^2-x+1 над полем R неприводим, т.к. $D=1-4=-3, D<0$, x^2+x+1над полем R неприводим,

т.к. $D=-3$, $D<0$, значит,

$(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$– разложение многочлена x^6-1 на неприводимые множители над полями Rи Q. Найдем разложение над полем комплексных чисел.

$x^2+x+1=0$,

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$,

$x_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Аналогично $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Итак, $x^6 - 1 = (x + 1)(x - 1)\left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} -\right.$ $i32$.

Задача № 11

Разложить многочлен $f(x) = x^4 + 10$ на неприводимые множители над полями C, R, Q.

Решение.

1-й способ: чтобы найти разложение многочлена над полем C, найдем его корни. Для этого извлечем корень четвертой степени из – 10.

$$\sqrt[4]{-10} = \sqrt[4]{10(cos\pi + isin\pi)} = \sqrt[4]{10}(cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + isin\frac{\pi + 2k\pi}{4})$$

Придавая $к$ значения $0, 1, 2, 3$, получим четыре корня:

$x_1 = \sqrt[4]{10}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $x_2 = \sqrt[4]{10}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$x_3 = \sqrt[4]{10}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $x_4 = \sqrt[4]{10}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Теперь можно записать разложение многочлена $f(x) = x^4 + 10$ над полем C:

$x^4 + 10 = (x - \frac{\sqrt[4]{40}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})\ (x + \frac{\sqrt[4]{40}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})(x + \frac{\sqrt[4]{40}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})(x - \frac{\sqrt[4]{40}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})$.

Перемножая первый и четвертый множители, а затем второй и третий, получим разложение многочлена $f(x)$ над полем R:

$\left(x - \frac{\sqrt[4]{40}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt[4]{40}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}\right) = \left(x - \frac{\sqrt[4]{40}}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}\right)^2 = x^2 - \sqrt[4]{40}x + \sqrt{10}$,

$\left(x + \frac{\sqrt[4]{40}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt[4]{40}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}\right) = \left(x + \frac{\sqrt[4]{40}}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}\right)^2 = x^2 + \sqrt[4]{40}x + \sqrt{10}$,

$$x^4 + 10 = \left(x^2 - \sqrt[4]{10}x + \sqrt{10}\right)\left(x^2 + \sqrt[4]{10}x + \sqrt{10}\right).$$

Над полем рациональных чисел Q данный многочлен неприводим, так как существует число $p = 2$ (или 5), на которое первый коэффициент 1 не делится, все остальные коэффициенты делятся, а свободный член 10, делясь на 2, не делится на 2^2 (критерий Эйзенштейна).

2-ой способ:

$x^4 + 10 = x^4 + 2\sqrt{10}x^2 + 10 - 2\sqrt{10}x^2 = \left(x^2 + \sqrt{10}\right)^2 - \sqrt[4]{40}x^2 = \left(x^2 + \sqrt{10}\right)^2 - \left(\sqrt[4]{10}x\right)^2 = \left(x^2 - \sqrt[4]{10}x + \sqrt{10}\right)\left(x^2 + \sqrt[4]{10}x + \sqrt{10}\right)$,

$x^2 - \sqrt[4]{10}x + \sqrt{10} = 0, \quad D = \sqrt{40} - 4\sqrt{10} = 2\sqrt{10} - 4\sqrt{10} = -2\sqrt{10}, D < 0$,

$x^2 + \sqrt[4]{10}x + \sqrt{10} = 0,\ D < 0$, поэтому эти многочлены неприводимы над R.

$x^4 + 10 = (x^2 - \sqrt[4]{10}x + \sqrt{10})(x^2 + \sqrt[4]{10}x + \sqrt{10})$– разложение многочлена над полем R.

$x^4 + 10$ над Q неприводим по критерию Эйзенштейна.

Найдем разложение над полем C:

$x^2 + \sqrt[4]{10}x + \sqrt{10} = 0,\ x_{1,2} = \frac{-\sqrt[4]{40} \pm \sqrt{-\sqrt{40}}}{2} = \frac{-\sqrt[4]{40} \pm \sqrt[4]{40}i}{2}$,

$x^2 + \sqrt[4]{10}x + \sqrt{10} = \left(x + \frac{\sqrt[4]{40}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt[4]{40}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}\right)$.

Аналогично найдем разложение:

$x^2-\sqrt[4]{10}x+\sqrt{10}=\left(x-\frac{\sqrt[4]{40}}{2}+i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt[4]{40}}{2}-i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}\right).$

Итак,

$x^4+10=\left(x+\frac{\sqrt[4]{40}}{2}+i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt[4]{40}}{2}-i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt[4]{40}}{2}+i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt[4]{40}}{2}-i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}\right)$– разложение над полем C.

Задача № 12

Выяснить, какие из многочленов неприводимы над полем Q:

$2x^5 + 6x^4 - 12x + 66;$

$x^3 - 15;$

$x^3 - 1;$

$x^2 + x + 3;$

$3x^3 - 10x - 4.$

Решение.

Многочлены $2x^5 + 6x^4 - 12x + 66$, $x^3 - 15$ неприводимы над полем Q, т.к. существует простое число $p = 3$, удовлетворяющее условиям критерия Эйзенштейна.

Многочлены x^3+1, $x +x+3$, $3x^3 - 10x - 4$ не удовлетворяют условиям критерия Эйзенштейна.

Вопрос о приводимости и неприводимости над Q решается в каждом случае индивидуально.

Многочлен $x^3 + 1$ приводим над Q, т.к. $x^3 + 1 = (x + 1)(x - x + 1)$.

Многочлен $x^2 + x + 3$ неприводим на R, т.к. $D< 0$, а значит, $x^2 + x + 3$ неприводим и над Q.

Многочлен $3x^3 - 10x - 4$ приводим над полем Q, т.к. имеет рациональный корень $c = 2$, а значит делится на $x - 2$.

$3x^3 - 10x - 4 = (x - 2)(3x^2 + 6x + 2).$

Задача № 13

Привести примеры многочленов степени n, неприводимых над Q:

1) $n= 4$; 2) $n = 10$; 3) $n= 135$; 4) $n = 1000$.

Решение.

Воспользуемся критерием Эйзенштейна. Возьмем любое простое число p. Пусть $p = 3$, $a_0= 1$, $a_1= 0$, $a_2= 3$, $a_3= 0$, $a_4= 6$, тогда многочлен $x^4 + 3x^2 + 6$ искомый для $n = 4$.

Пусть $p = 2$, $a_0 = 5$, $a_1 = 4$, $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 0$, $a_{10} =14$, тогда $5x^{10} + 4x^9+ 14$– искомый для $n = 10$.

Аналогично находим многочлены для $n = 135$ и $n = 1000$.

Например, $x^{135} + 2,2x^{1000} - 15x^{500} + 10$.

1.4 Многочлены над полями комплексных, действительных и рациональных чисел

Задача № 14

$1-2i$ является корнем многочлена $f(x) = 2x^4-17x^3+17x^2-17x+5$.Найти остальные его корни.

Решение.

Т.к. $f(x)$ есть многочлен с действительными коэффициентами, то наряду с корнем $1-2i$ он имеет корень $1+2i$. Следовательно, многочлен $f(x)$ делится на $(x-1+2i)(x-1-2i) = x^2-2x+5$.

Разделив $f(x)$ на x^2-2x+5, получим $2x^4-7x^3+17x^2-17x+5 = (x^2-2x+5)(2x^2-3x+1)$. Отсюда видно, что два других корня многочлена $f(x)$ есть корни уравнения$2x^2-3x+1=0$, т.е. равны числам 1 и$\frac{1}{2}$

Задача № 15

Построить многочлены наименьшей степени над полями C и R со старшим коэффициентом $a_o = 2$, имеющие следующие корни: -1 двукратный, $3-i$ простой корень.

Решение.

Найдем многочлен над C. Задачу можно решить двумя способами.

1-й способ: если c - корень $f(x)$, то $f(x)$ делится на $x-c$.Следовательно, искомый многочлен должен делиться на$(x+1)^2$ и на$(x-3+i)$, а так как он должен иметь наименьшую степень и $a_0 = 2$, то

$f(x) = 2(x+1)^2(x-3+i) = 2x^3-(2-2i)x^2-(10-4i)x-(6-2i)$.

2-й способ: для решения задачи можно воспользоваться формулами Виета, которые выражают связь между корнями и коэффициентами многочлена.

Пусть$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-i}x + a_n$, причем $a_o \neq 0$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$-корни многочлена, каждый из которых повторен столько раз, какова его кратность.

Тогда

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$,

$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{\alpha_2}{\alpha_0}$,

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{\alpha_3}{\alpha_0}$,

$\alpha_1 * \alpha_2 * \ldots \alpha_n = (-1)^2 \frac{\alpha_n}{\alpha_0}$.

Подставив вместо α_1, α_2, α_3соответственно числа $-1, -1, 3-i$, и учитывая, что $a_o = 2$, получим:

$-1-1+3-i = -\frac{a_1}{2}$

$1+(-3+i) = (-3+i) = \frac{a_2}{2}$

$3-i = -\frac{a_3}{2}$

Отсюда $a_1 = -2+2i$, $a_2 = -10+4i$, $a_3 = -6+2i$,

$f(x) = 2x^3-(2-2i)x^2-(10-4i)x-(6-2i)$.

Найдем многочлен над полем R.

Так как комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами попарно сопряжены, то наряду с корнем $3 - i$ искомый многочлен $f(x)$ должен иметь корень $3 + i$. Так как нужно построить многочлен наименьшей степени с корнями $-1, -1, 3+i, 3-i$, то можно сделать вывод, что $f(x)$ имеет четвертую степень. Найдем этот многочлен двумя способами.

1 -й способ:

$f(x) = 2(x-1)^2(x-3+i)(x-3-i) = 2(x^2-2x+1)(x^2-6x+10) = 2x^4-8x^3-2x^2+28x+20$.

2-й способ: воспользуемся формулами Виета:

$(-1)+(-1)+3+i+3-i = -\frac{a_1}{2}$, отсюда $a_1 = -8$;

$1-3-i-3+i-3+i-3-i+10 = \frac{a_2}{2}$, $a_2 = -2$;

$(3+i)+(3-i)-10-10 = -\frac{a_3}{2}$, $a_3 = 28$;

$(-1)(-1)(3+i)(3-i) = \frac{a_4}{2}$, $a_4 = 20$;

$f(x) = 2x^4-8x^3-2x^2+28x+20$.

Задача №16

Найти рациональные корни многочлена $f(x) = 8x^5 - 14x^4 - 77x^3 + 128x^2 + 45x - 18$.

Для того, чтобы найти рациональные корни многочлена, пользуются следующими теоремами:

Теорема 1. Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами, то p есть делитель свободного члена, а q – делитель старшего коэффициента многочлена $f(x)$.

Замечание. Теорема 1 дает необходимое условие для того, чтобы рациональное число $\frac{p}{q}$ было корнем многочлена. Если $\frac{p}{q}$ такова, что p – делитель свободного члена, а q – положительный делитель старшего коэффициента, то не обязательно, что $\frac{p}{q}$ - корень $f(x)$.

Теорема 2. Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами, то при любом целом m, отличном от $\frac{p}{q}$, число $f(m)$ делится на число $p - qm$, т.е. $\frac{f(m)}{p-qm}$ – целое число.

В частности, полагая $m = 1$, а затем $m = -1$, получим: если $\frac{p}{q}$ корень многочлена, не равный ± 1, то $f(1) \vdots (p-q)$ и $f(-1) \vdots (p+q)$, т.е. $\frac{f(1)}{p-q}$, $\frac{f(-1)}{p+q}$ – целые числа.

Замечание. Теорема 2 дает еще одно необходимое условие для рациональных корней многочлена. Это условие удобно тем, что оно легко проверяется практически. Находим сначала $f(1)$ и $f(-1)$, а затем для каждой испытываемой дроби проверяем указанное условие. Если хотя бы одно из чисел $\frac{f(1)}{p-g}$, $\frac{f(-1)}{p+g}$ дробное, то $\frac{p}{q}$ корнем многочлена $f(x)$ не является.

Решение.

По теореме 1 корни данного многочлена следует искать среди несократимых дробей, числители которых являются делителями 18, а знаменатели – делителями 8. Следовательно, если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ есть корень $f(x)$, то p

равно одному из чисел: ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18; qравно одному из чисел: ±1, ±2, ±4, ±8.

Учитывая, что $\frac{-p}{-q} = \frac{p}{q}$, $\frac{p}{-q} = -\frac{p}{q}$знаменатели дробей будем брать положительными.

Итак, рациональными корнями данного многочлена могут быть следующие числа: *±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18,* $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{9}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{9}{8}$.

Воспользуемся вторым необходимым условием.

Так как $f(1) = 72$, $f(-1) = 120$, отсюда, в частности, следует, что *1* и *– 1*не являются корнями $f(x)$. Теперь для каждой возможной дроби $\frac{p}{q}$ будемпроверять условия теоремы 2 при $m = 1$ и $m=-1$, т.е. будем устанавливать, целыми или дробными являются числа: $\frac{f(1)}{p-q} = \frac{72}{p-q}$ и $\frac{f(-1)}{p+q} = \frac{120}{p+q}$

Результаты сведем в таблицу, где буквы «*ц*» и «*д*» означают соответственно, целым или дробным является число $\frac{f(1)}{p-q}$ или $\frac{f(-1)}{p+q}$

Таблица 10 – Применение второго необходимого условия существования рационального корня

p	q	$\frac{72}{p-q}$	$\frac{120}{p+q}$
2	1	ц	ц
– 2	1	ц	ц
3	1	ц	ц
– 3	1	ц	ц
6	1	д	
– 6	1	д	
9	1	ц	ц
– 9	1	д	
18	1	д	
– 18	1	д	
1	2	ц	ц
– 1	2	ц	ц
3	2	ц	ц
– 3	2	д	

p	q	$\frac{72}{p-q}$	$\frac{120}{p+q}$
9	1	ц	ц
– 9	1	ц	ц
1	1	ц	ц
– 1	1	ц	ц
3	1	д	
– 3	1	д	
9	1	ц	ц
– 9	1	д	
1	1	д	
– 1	1	д	
3	2	ц	ц
– 3	2	ц	ц
9	2	ц	ц
– 9	2	д	

Из полученной таблицы видно, что$\frac{72}{p-q}$ и $\frac{120}{p+q}$являются целымилишь в тех случаях, когда $\frac{p}{q}$ равно одному из чисел: *2, – 2, 3, – 3, 9,* $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pm\frac{1}{4}$.

По следствию из теоремы Безу число α– корень $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x)\vdots(x-\alpha)$.Следовательно, для проверки оставшихся девяти чисел можно применить схему Горнера деления многочлена на двучлен (таблица 11):

Таблица 11 – Схема Горнера

	8	– 14	– 77	128	45	– 18
2	8	2	– 73	– 18	9	0
2	8	18	– 37	– 92	– 172≠0	

Отсюда имеем: $x = 2$– простой корень многочлена $f(x)$.

Остальные корни данного многочлена совпадают с корнями многочлена$f_1(x) = 8x^4 + 2x^3 – 73x^2 – 18x + 9$.

Аналогично проверим остальные числа (таблица 12):

Таблица 12 – Схема Горнера

	8	2	– 73	– 18	9
– 2	8	– 14	– 45	72	– 139≠0
3	8	26	5	– 3	0
3	8	50	155	462≠0	
– 3	8	2	– 1	0	
– 3	8	– 22	65≠0		
9	8	74	665≠0		
$\frac{1}{2}$	8	6	2≠0		
$-\frac{1}{2}$	8	– 2	0		
$-\frac{1}{2}$	8	– 6≠0			
$\frac{3}{2}$	8	2≠0			
$\frac{1}{4}$	8	0			

$– 2, 9, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$– не корни; $3, – 3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$– корни.

Итак, многочлен$f(x) = 8x^5 – 14x^4 – 77x^3 + 128x^2 + 45x – 18$ имеет пять рациональных корней:$\left\{2, 3, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$.

Глава 2. Материалы для практических занятий

В задачах 1 – 10 разделить с остатком многочлен $f(x)$ на $\varphi(x)$:

1 $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 1,$ $\varphi(x) = x^2 + 3x + 1.$

2 $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1,$ $\varphi(x) = x^2 + 1.$

3 $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 1,$ $\varphi(x) = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 24.$

4 $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6,$ $\varphi(x) = x^2 - 3x - 1.$

5 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 5x + 6,$ $\varphi(x) = x^2 - 3x + 1.$

6 $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1,$ $\varphi(x) = 3x^2 - 2x - 1.$

7 $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - x^2 + 7x + 3,$ $\varphi(x) = x^2 + x - 1.$

8 $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 + 1,$ $\varphi(x) = x^2 + (3 - i)x - (4 + 3i).$

9 $f(x) = (10 + 5i)x^4 - (15 + 5i)x^2 + (10 + 30i)x + (10 - 5i),$ $\varphi(x) = (2 + i)x^2 - 3x + i.$

10 $f(x) = x^5 + (1-i)x^4 + x^3 - ix^2 - 1,$ $\varphi(x) = x^4 - ix^3 - (1 - i)x^2 - x + 1.$

В задачах 11 – 20 найти необходимые и достаточные условия делимости многочлена $f(x)$ на $\varphi(x)$:

11 $f(x) = x^3 + ax + b,$ $\varphi(x) = x^2 + 1.$

12 $f(x) = x^3 + ax + b,$ $\varphi(x) = x^2 - 1.$

13 $f(x) = x^3 - ax + b,$ $\varphi(x) = x^2 - 3x + 2.$

14 $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + 1,$ $\varphi(x) = x^2 + 1.$

15 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 1,$ $\varphi(x) = x^2 - 1.$

16 $f(x) = x^3 + ax + b,$ $\varphi(x) = x^2 + mx + 1.$

17 $f(x) = x^4 + ax + b,$ $\varphi(x) = x^2 + mx + 1.$

18 $f(x) = x^5 + ax + b,$ $\varphi(x) = x^2 + mx + 1.$

19 $f(x) = x^3 + ax + b,$ $\varphi(x) = x^2 - m.$

20 $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + 3,$ $\varphi(x) = x^2 + m.$

В задачах 21 – 30 найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ используя алгоритма Евклида:

21 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1,$ $\varphi(x) = x^3 + x^2 - x - 1.$

22 $f(x) = x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5,$ $\varphi(x) = x^5 + x^2 - x + 1.$

23 $f(x) = x^5 + 3x^2 - 2x + 2,$ $\varphi(x) = x^6 + x^5 + x^4 - 3x^2 + 2x - 6.$

24 $f(x) = x^4 + x^3 - 4x + 5,$ $\varphi(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 2.$

25 $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1,$ $\varphi(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2.$

26 $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1,$ $\varphi(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$

27 $f(x) = x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7,$ $\varphi(x) = 3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7.$

28 $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1,$ $\varphi(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1.$

29 $f(x) = 2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 6x + 3,$ $\varphi(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 2.$

30 $f(x) = x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5,$ $\varphi(x) = x^5 + x^2 - x + 1.$

В задачах 31 – 40, пользуясь алгоритмом Евклида, найти многочлены $u(x)$ и $v(x)$ так, чтобы $f(x)u(x) + \varphi(x)v(x) = d(x)$, где $d(x)$ – наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$:

31 $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9,$ $\varphi(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4.$

32 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 6x - 3,$ $\varphi(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1.$

33 $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 1,$ $\varphi(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 1.$

34 $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12,$ $\varphi(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17.$

35 $f(x) = x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7,$ $\varphi(x) = 3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7.$

36 $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2,$ $\varphi(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2.$

37 $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2,$ $\varphi(x) = x^2 - x + 1.$

38 $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1,$ $\varphi(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2.$

39 $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6,$ $\varphi(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1.$

40 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2,$ $\varphi(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1.$

В задачах 41 – 50, пользуясь схемой Горнера, разделить многочлен $f(x)$ на линейный двучлен $x - c$ и найти значение многочлена $f(x)$ при $x = c$:

41 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8,$ $c = 1.$

42 $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x,$ $c = -3.$

43 $f(x) = 3x^5 + x^4 - 19x^2 - 13x - 10,$ $c = 2.$

44 $f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 2x + 5,$ $c = -2.$

45 $f(x) = x^5,$ $c = 1.$

46 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1,$ $c = -1.$

47 $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90,$ $c = 2.$

48 $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1 + i)x^2 - 3x + 7 + i,$ $c = -i.$

49 $f(x) = x^4 + (3-8i)x^3 - (21+18i)x^2 - (33-20i)x + 7 + 18i,$ $c = -1 + 2i.$

50 $f(x) = x^5 + (1 - 2i)x^4 - (3 + i)x^2 + 7i,$ $c = -1 + 2i.$

В задачах 51 – 55 найти остаток от деления многочлена $f(x)$ и $\varphi(x)$, не применяя теорему о делении с остатком:

50 $f(x) = x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x + 1,$ $\varphi(x) = x^2 - 1.$

52 $f(x) = x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x + 1,$ $\varphi(x) = x^2 + 1.$

53 $f(x) = x^{105} + x + 1,$ $\varphi(x) = x^2 - 1.$

54 $f(x) = x^{99} - 3x^{98} + x^2 + 1,$ $\varphi(x) = x^2 - 4x + 3.$

55 $f(x) = x^{100} + 2x^{99} - 3x^3 + 2x + 5,$ $\varphi(x) = x^2 + x - 2.$

56 Многочлен $f(x)$ при делении на $x - 2$ и $x - 3$ дает соответственно остатки 5 и 7. Найти остаток от деления этого многочлена на $(x - 2)(x - 3)$.

57 При делении $f(x)$ на $x - 1$, $x - 2$ и $x + 1$ остатки соответственно равны 3, 15 и 0. Найти остаток от деления $f(x)$ на $x^3 - 2x^2 - x + 2$.

58 Многочлен $f(x)$ при делении на $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$ и на $x - 4$ дает соответственно остатки 1, 3, 5 и 6. Найти остаток при делении этого многочлена на произведение $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$.

59 Найти при каких значениях a многочлен $f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$ делится на $(x + 1)^2$.

60 При каких значениях aиb многочлен $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + ab$ при делении на $x - 2$ даёт остаток 15, а при делении на $x + 1$ – остаток 0?

В задачах 61 – 70 найти кратность корня x_0 для многочлена $f(x)$:

61 $f(x) = x^5 - 8x^4 + 25x^3 - 38x^2 + 28x - 8,$ $x_0 = 2.$

62 $f(x) = 2x^4 + 17x^3 + 45x^2 + 27x - 27,$ $x_0 = -3.$

63 $f(x) = 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1,$ $x_0 = -\frac{1}{2}.$

64 $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16 - 16,$ $x_0 = -2.$

65 $f(x) = x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 65x^3 + 74x^2 - 46x + 12,$ $x_0 = 1.$

66 $f(x) = x^6 + 9x^5 + 30x^4 + 40x^3 - 48x - 32,$ $x_0 = -2.$

67 $f(x) = 2x^5 - 13x^4 + 26x^3 - 24x^2 + 24x - 9,$ $x_0 = 3.$

68 $f(x) = x^6 + 7x^5 + 17x^4 + 13x^3 - 10x^2 - 20x - 8,$ $x_0 = -2.$

69 $f(x) = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 9,$ $x_0 = 3.$

70 $f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3,$ $x_0 = -1.$

В задачах 71 – 80, пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $f(x)$ по степеням $x - c$. Найти значения многочлена $f(x)$ и его производных при $x = c$:

71 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 5,$ $c = -2.$

72 $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + 6x - 5,$ $c = -3.$

73 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 2x + 8,$ $c = 2.$

74 $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10,$ $c = 2.$

75 $f(x) = x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 32x + 13,$ $c = -3.$

76 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 3x - 4,$ $c = -2.$

77 $f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 3,$ $c = 4.$

78 $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10,$ $c = -1.$

79 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 7,$ $c = 3.$

80 $f(x) = 2x^4 + 13x^3 + 35x^2 + 54x + 39,$ $c = -2.$

В задачах 81 – 90 разложить на простейшие дроби данные рациональные дроби:

81 $\frac{2x^4 - 5x + 1}{(x-2)^5}.$

82 $\frac{3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + 6x - 5}{(x+3)^5}.$

83 $\frac{5x^4 - x^2 + x + 5}{(x+1)^4}.$

84 $\frac{3x^6 - 2x^2 + 5x - 1}{(x-1)^{10}}.$

86 $\frac{x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 25x + 1}{(x+5)^6}.$

87 $\frac{4x^3 - 2x^2 + x - 1}{(x-2)^4}.$

88 $\frac{x^5 + 2x^2 - x - 7}{(x+2)^5}.$

89 $\frac{x^5 + 2x^4 - x^3 + x - 7}{(x+4)^6}.$

85 $\frac{2x^5 - x^3 + 2x + 10}{(x-3)^7}$.   90 $\frac{x^3 - 21x^2 + 10x - 8}{(x+5)^5}$.

В задачах 91 – 100 разложить многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$ на неприводимые множители над полем действительных чисел:

91 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $\varphi(x) = x^6 - 1$.

92 $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1$, $\varphi(x) = x^4 + 4$.

93 $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$, $\varphi(x) = x^4 - 1$.

94 $f(x) = x^4 - 18x^2 + 81$, $\varphi(x) = x^3 + 8$.

95 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$, $\varphi(x) = x^6 + 1$.

96 $f(x) = x^4 + 4x^2 - 5$, $\varphi(x) = x^4 + 64$.

97 $f(x) = x^4 + x^2 + 1$, $\varphi(x) = x^3 + x + 2$.

98 $f(x) = 2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2$, $\varphi(x) = x^{12} - 1$.

99 $f(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 6x - 12$, $\varphi(x) = x^3 + 27$.

100 $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3$, $\varphi(x) = x^3 - 27$.

В задачах 101 – 110 разложить многочлены на неприводимые множители над полями комплексных, действительных и рациональных чисел:

101 $f(x) = x^4 + 2$.   106 $f(x) = x^4 + 3$.

102 $f(x) = x^4 + 6$.   107 $f(x) = x^6 + 64$.

103 $f(x) = x^4 + 5$.   108 $f(x) = x^8 - 256$.

104 $f(x) = x^4 + 16$.   109 $f(x) = x^4 + 7$.

105 $f(x) = x^6 - 64$.   110 $f(x) = x^6 - 729$.

В задачах 111 – 120 доказать неприводимость многочленов над полем рациональных чисел:

111 $f(x) = x^5 + 3x^3 - 12x^2 + 30x + 21$, $\varphi(x) = x^3 + 3x + 1$.

112 $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 21x^2 + 35$, $\varphi(x) = 2x^2 - x + 4$.

113 $f(x) = 5x^6 - 2x^2 + 16x + 2$, $\varphi(x) = x^3 - x + 22$.

114 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 10x + 55$, $\varphi(x) = x^2 + 3x + 2$.

115 $f(x) = x^6 + 8x^4 + 2x^3 - 10x - 34$, $\varphi(x) = x^2 + 5x + 3$.

116 $f(x) = 8x^8 + 11x^5 - 11x^4 + 33x - 55$, $\varphi(x) = x^3 + 2x + 4$.

117 $f(x) = x^5 + 3x^4 - 15x^2 + 33x + 12$, $\varphi(x) = x^2 - 2x + 5$.

118 $f(x) = 3x^8 + 2x^5 - 14x^2 - 20x - 30$, $\varphi(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

119 $f(x) = x^7 + 5x^3 - 10x^2 - 30x + 5$, $\varphi(x) = x^3+2x^2-3x+1$.

120 $f(x) = 25x^6 + 2x^5 + 20x - 6$, $\varphi(x) = x^2 - 4x + 5$.

В задачах 121 – 130 привести примеры неприводимых многочленов степени n и m над полем рациональных чисел:

121 $n = 15$, $m = 201$.   126 $n = 5$, $m = 1386$.

122 $n = 4$, $m = 103$.   127 $n = 15$, $m = 852$.

123 $n = 7, m = 1025$. 128 $n = 11, m = 3000$.
124 $n = 10, m = 3000$. 129 $n = 20, m = 350$.
125 $n = 8, m = 287$. 130 $n = 17, m = 1200$.

В задачах 131 – 140 построить многочлены наименьшей степени над полями C и R, имеющие старший коэффициент a_0 и корни:

131 3 и $2 - i$ – простые, $a_0 = 2$.
132 $2 - 3i$ – простой, 1 – двойной, $a_0 = 1$.
133 $3, 1, -2i$ – простые, $a_0 = 4$.
134 $-1 - i$ – простой, 2 – двойной, $a_0 = 2$.
135 $1 + i$ – простой,-1 – двойной, $a_0 = 2$.
136 $2, 3, 1 + i$ – простые, $a_0 = 2$.
137 $2i, 1, 5$ – простые, $a_0 = 1$.
138 $-i, -1, 4$ – простые, $a_0 = 1$.
139 $2 - i$ – простой,-1 – простой, $a_0 = 3$.
140 $2, -3, -1 + i$ – простые, $a_0 = 1$.

В задачах 141 – 150 найти корни многочлена $f(x)$, зная, что α один из его корней:

141 $f(x) = x^5 - x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 7x + 30,$ $\alpha = 1 - 2i$.
142 $f(x) = x^5 - 10x^4 + 43x^3 - 112x^2 + 222x - 312,$ $\alpha = 3 - 2i$.
143 $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 4x,$ $\alpha = 1 - i$.
144 $f(x) = x^5 - 6x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 99x - 54,$ $\alpha = -3i$.
145 $f(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 38x^2 - 39x,$ $\alpha = 2 - 3i$.
146 $f(x) = x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 71x^2 - 284 + 492,$ $\alpha = 5 - 4i$.
147 $f(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 19x^2 - 60x,$ $\alpha = 1 - 2i$.
148 $f(x) = x^5 - 6x^4 + x^3 + 46x^2 - 90x + 72,$ $\alpha = 1 - i$.
149 $f(x) = x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 86x^2 + 73x + 150,$ $\alpha = -4 + 3i$.
150 $f(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 - 49x^2 + 58x + 104,$ $\alpha = -2 - 3i$.

В задачах 151 – 160 найти рациональные корни многочленов:

151 $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$.
152 $f(x) = 20x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$.
153 $f(x) = 24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$.
154 $f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 36x^2 - 43x + 14$.
155 $f(x) = 6x^4 + 11x^3 + 21x^2 - 6x - 4$.
156 $f(x) = x^6 - 6x^5 + 11x^4 - x^3 - 18x^2 + 20x - 8$.
157 $f(x) = 4x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 4x + 5$.
158 $f(x) = 3x^5 + 17x^4 + 36x^3 + 38x^2 + 19x + 5$.
159 $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 3x - 2$.
160 $f(x) = 8x^5 + 2x^4 - 13x^3 - x^2 + 5x - 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящее пособие предназначено для студентов направлений 01.03.01 и 44.03.05 и содержит основные положения теоретического курса и решения типовых задач по теме «Многочлены».

Кроме того, приведено более трехсот примеров и задач, которые можно использовать для практических занятий в аудитории, составления вариантов контрольных и самостоятельных работ и самостоятельной работы студентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Логиновских Л. М., Тышук Л. Н. Многочлены. Методические указания и материалы для практических занятий по алгебре со студентами специальности 010101 «Математика»– Курган, изд – тво КГУ, 1999.

2 Курош А. Г. Курс высшей алгебры – 17-е изд.Санкт-Петербург.– Издательский Дом «Лань», 2008.

3 Окунев Л. Я. Высшая алгебра. – 3-е издание. Санкт-Петербург.– Издательский Дом «Лань», 2009.

4 Фаддеев Д. К. Задачи по высшей алгебре. – 17-е издание. Санкт-Петербург. – Издательский Дом «Лань», 2008.

5 Окунев Л. Я. Сборник задач по высшей алгебре. – 2-е изд. Санкт-Петербург. – Издательский Дом «Лань», 2009.

Хмеляр Олеся Николаевна

МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические указания и материалы
для практических занятий по дисциплине «Алгебра»
со студентами направлений 01.03.01 («Математика») и 44.03.05
(«Педагогическое образование» (с двумя профилями подготовки))

Редактор И. И. Погребняк

Подписано в печать 16.01.19	Формат бумаги 60 х 84 1/16	Бумага 65 г/м^2
Печать цифровая	Усл. печ.л. 1,75	Уч.-изд.л. 1,75
Заказ 2	Тираж 25	Не для продажи

БИЦ Курганского государственного университета.
640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.