МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДИРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра фундаментальной математики и методики преподавания математики

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические указания для студентов III курса

специальностей 010301 – «Математика» и

050201 – математика с дополнительной специальностью «Информатика»

Курган 2018

Кафедра:«Фундаментальная математика и методика преподавания математики»

Дисциплина: «Теория функций комплексного переменного» (специальности 010301, 050201)

Составил: канд. физ.-мат. наук, доцент Л.Д. Ионин.

Утверждены на заседании кафедры « 27 » декабря 2016 г.

Рекомендованы методическим советом университета «12»декабря 2016 года

.

Программа курса по Теории функции комплексного переменного

Исторический обзор развития ТФКП.

Поле комплексных чисел. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

Стереографическая проекция.

Последовательности и ряды комплексных чисел.

Кривые и области на комплексной плоскости.

Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функций комплексного переменного.

Дифференцируемость и голоморфность функции комплексного переменного.

Формальные производные, условия Коши-Римана.

Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформные отображения.

Сопряженные гармонические функции. Восстановление голоморфной функции по ее действительной или мнимой частям.

Степенные ряды в комплексной области.

Теорема Коши-Адамара. Голоморфность суммы степенного ряда.

Линейная функция. Дробно-линейная функция, ее геометрические свойства. Задание дробно-линейного отображения тремя парами точек.

Степенная функция с натуральным показателем.

Показательная функция и ее свойства.

Тригонометрические функции комплексного переменного и их связь с показательной функцией.

Многозначные функции. Логарифмы комплексных чисел и их свойства.

Логарифмическая функция.

Радикал, формула Муавра.

Понятие степени с произвольным показателем.

Интеграл в комплексной области, его свойства.

Теорема Коши для односвязных и многосвязных областей.

Интегральная формула Коши. Ряды Тейлора.

Разложение голоморфной функции в ряд Тейлора.

Неравенство Коши, теорема Лиувилля.

Нули голоморфной функции, их изолированность.

Теорема единственности голоморфных функций.

Принцип максимума модуля.

Ряды Лорана и их области сходимости. Разложение голоморфной в кольце функции в ряд Лорана.

Изолированные особые точки и их классификация. Связь вида ряда Лорана с характером особенности голоморфной функции.

Вычеты голоморфной функции и их вычисление.

Теоремы о вычетах и их применение к вычислению интегралов.

Логарифмический вычет. Основная теорема алгебры. Применение теории вычетов к вычислению интегралов специального вида.

ВОПРОСЫ

для экзамена по математическому анализу

1 Поле комплексных чисел. Геометрическая интерпретация. Стереографическая проекция.

2 Последовательности и ряды комплексных чисел. Сходимость последовательностей в C.

3 Функции комплексного переменного. Рельеф функции.

4 Дифференцируемость функции комплексного переменного. Формальные производные. Необходимость условий Коши-Римана.

5 Достаточность условий Коши-Римана. Голоморфные функции.

6 Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформные отображения.

7 Сопряженные гармонические функции. Восстановление голоморфной функции по ее действительной или мнимой части.

8 Степенные ряды в C. Формула Коши-Адамара.

9 Голоморфность суммы степенного ряда.

10 Линейная функция $f = az + b$ и ее свойства.

11 Дробно-линейная функция $f = \frac{az+b}{cz+d}$ и ее свойства.

12 Степенная функция $f = z^n$ с натуральным показателем и ее свойства.

13 Показательная функция $f = e^z$ и ее свойства.

14 Тригонометрические функции $f = \sin z, f = \cos z$ и их свойства.

15 Многозначные функции. Логарифмы комплексных чисел.

16 Степень с произвольным показателем. Корень n-ой степени. Формула Муавра.

17 Логарифмическая функция $f = \ln z$ и ее свойства.

18 Интеграл в комплексной области, его свойства.

19 Интегральные теоремы Коши для односвязных и многосвязных областей.

20 Интегральная формула Коши.

21 Ряды Тейлора для голоморфных функций.

22 Неравенства Коши. Теорема Лиувилля.

23 Изолированность нулей голоморфных функций.

24 Теорема единственности голоморфных функций.

25 Принцип максимума модуля.

26 Ряды Лорана, их области сходимости.

27 Разложение функций, голоморфных в кольце, в ряд Лорана.

28 Изолированные особые точки голоморфных функций и их классификация.

29 Связь вида ряда Лорана с типом изолированной особой точки голоморфной функции.

30 Теорема Сохоцкого.

31 Вычеты и их вычисление.

32 Теорема о сумме вычетов, о полной сумме вычетов.

33 Логарифмические вычеты.

34 Основная теорема алгебры.

35 Применение теорем о вычетах к вычислению интегралов вида $\int_{\Gamma} \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz$.

36 Применение вычетов к вычислению определенных интегралов от тригонометрических функций и несобственных интегралов.

Тематика практических занятий

На годовой курс ТФКП по плану отводится 114 аудиторных часов (48 – лекции, 66 – практические занятия).

Планом предусмотрены 3 контрольные работы (одна из них домашняя), зачет и экзамен.

1 Комплексные числа. Линии и области в C.
2 Функции комплексного переменного. Рельеф функции. Дифференцируемость функций.
3 Линейная и дробно-линейная функции.
4 Элементарные функции.
5 Решение уравнений в C.
6 Степенные ряды.
7 Контрольная работа.
8 Интеграл в C.
9 Интегрирование голоморфных функций.
10 Ряды Тейлора.
11 Ряды Лорана. Изолированные особые точки.
12 Вычеты и их вычисление.
13 Применение вычетов к вычислению интегралов.

Занятие №1

Комплексные числа. Линии и области в C

Основные вопросы теории

1 Комплексные числа. Арифметические операции над комплексными числами.
2 Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел.
3 Линии и области в C.

На занятии рекомендуется решить задачи

1Выделить действительные и мнимые части чисел:

$$\frac{1-i}{1+i} \quad ; \quad \left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2.$$

2Найти модули и главные значения аргументов чисел:

$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\left(\sqrt{3}+i\right)^3$.

3Доказать равенство:

$\overline{(z_1-z_2)}=\bar{z_1}-\bar{z_2}$.

4Изобразить на плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенствам:

а) $Im\, z \le 1$;
б) $|z| \le 1$;
в) $|z-2i| \ge 3$.

5Вычислить углы треугольника с вершинами в точках:

$1+i$; $-i$, $2-i$.

6Какие линии заданы уравнениями:

а) $|z-z_0|=2$;
б) $\arg(z-z_0)=-\frac{\pi}{3}$;
в) $|z-z_1|+|z-z_2|=a$, $a>|z_1-z_2|$;
г) $z=(1+2i)t$, $t\in R$;
д) $z=t+\frac{i}{t}$, $t\in R\backslash\{0\}$.

По теме занятия рекомендуется самостоятельно решить задачи:

№ 4, 6, 11, 14, 105, 111, 118, 131(Балк М.Б. и др. Задачник-практикум по теории аналитических функций.)

Занятие №2

Функции комплексного переменного. Рельеф функции. Дифференцируемость функций

Основные вопросы теории

1Определение функции комплексного переменного. График функции, рельеф функции.

2R^2-дифференцируемость и С-дифференцируемость функции. Формальные производные. Условия Коши-Римана. Правила вычисления производной.

3Голоморфность функции.

4Гармонические функции. Сопряженные гармонической функции.

5Восстановление голоморфной функции по ее действительной или мнимой части.

На занятии рекомендуется решить задачи

1Выделить действительную и мнимую часть функции:

$W = z\bar{z}^2$, $W = \frac{z+1}{z-1}$, $W = z^2 + pz + q$ $(p, q \in R)$.

2Найти множество точек Z, в которых функция принимает действительные значения:

$W = \frac{z+2}{z}$.

3Выяснить, существует ли производная в каких-либо точках плоскости функции $f(z)$, и, если да, то вычислить эту производную:

$$f(z) = 3\bar{z}z^2\ ;\quad f(z) = z^2 + 2z^3\ ;\quad f(z) = 3x^2 - 3y^2 + 6xyi + 4\ .$$

4Доказать, что если голоморфная в области D функция $f(z)$ принимает только действительные или только мнимые значения, то она постоянна.

5Существует ли голоморфная функция, мнимая часть которой

$v = x^2 - y^2 + xy$; $v = 12x^2y - 4y^3 - 3y$.

По теме занятия рекомендуется самостоятельно решить задачи:

№ 148, 151, 177, 180, 190, 201 (а, е, г). (Балк М.Б. и др. Задачник-практикум по теории аналитических функций.)

Занятие №3

Линейные и дробно - линейные функции

Основные вопросы теории

1Линейная функция и ее свойства.

2Дробно-линейная функция. Геометрические свойства дробно-линейной функции (круговое свойство, сохранение симметрии точек, конформность отображения).

3Задание дробно-линейной функции тремя парами точек.

На занятии рекомендуется решить задачи

1Найти линейную функцию с неподвижной точкой $1+2i,$, отображающую i в $(-i)$.

2Найти образы прямых x=a, y=b при отображении $w=(-1+i)z+(1+i)$.

3Найти образ окружности $x^2+y^2+x-2=0$ при отображении $w=\frac{1}{z}$.

4Найти образ множества $\{z\in C||z|<1, Im\, z>0\}$ при отображении $w=\frac{2z-i}{2+iz}$.

5Найти точку, симметричную точке $z=2+i$ относительно окружности $\{z\in C||z-i|=3\}$.

6Найти дробно-линейное отображение, переводящее точки $i, 1+i, -i$ в точки $2i, 0, -3$.

7Найти дробно-линейную функцию, отображающую единичный круг $\{z\in C||z|<1\}$ на верхнюю полуплоскость $\{z\in C|Im\, z>0\}$.

8В какую область функция $f=\frac{z+1}{z-1}$ преобразует левую полуплоскость? Какие линии при этом переходят в окружности с центром в начале координат?

9Найти общий вид дробно-линейной функции, преобразующей верхнюю полуплоскость в единичный круг, и притом так, чтобы точка i перешла в центр круга.

По теме занятия рекомендуется самостоятельно решить задачи:

№ 211, 212, 224, 230, 232*. (Балк М.Б. и др. Задачник-практикум по теории аналитических функций.)

Вопросы и упражнения для самопроверки к занятиям 1-3

1) как геометрически интерпретируются операции сложения и вычитания комплексных чисел?

2) вывести формулу связи между координатами точек комплексной плоскости и сферы при стереографической проекции.

3) сформулировать правило вычисления степеней числа i с натуральным показателем.

4) выяснить, какими должны быть коэффициенты многочлена $P_n(z) = a_n z^n + .. + a_1 z + a_0$, чтобы для любых комплексных чисел z имело место равенство:

а) $P_n(z) = \overline{P_n(\bar{z})}$;

б) $P_n(z) = -\overline{P_n(\bar{z})}$.

5) изобразить на плоскости множества точек, удовлетворяющих неравенствам:

а) $0 < arg\frac{i-z}{z+i} < \frac{\pi}{2}$;

б) $|z| > 1 - Re\, z$.

6) охарактеризовать два способа нахождения производных (с использованием частных производных от действительной и мнимой части функции и формальных производных от этой функции).

7) восстановить голоморфную в С функцию по ее вещественной части $u(x, y) = x - y$.

8) композицией каких геометрических преобразований плоскости являются линейное и дробное-линейное отображения?

9) может ли дробно-линейное отображение иметь неподвижные точки? Привести примеры.

10) найти образ множества $E = \{z \in C||z| \geq 1\}$ при отображении $f = \frac{z}{z+1}$.

11) образует ли множество дробно-линейных отображений плоскости группу преобразований? Какое это имеет значение?

12) как понимается симметрия точек на плоскости относительно прямой, окружности? Каков алгоритм построения точек, симметричных относительно прямой, окружности?

Занятие №4

Элементарные функции

Основные вопросы теории

1 Степенная функция с натуральным показателем.
2 Показательная функция $w = e^{z}$.
3 Тригонометрические функции $w = \sin z$, $w = \cos z$.
4 Логарифмы комплексных чисел и их свойства.
5 Логарифмическая функция.

На занятии рекомендуется решить задачи

1 Найти образ множества $\left\{z \in C \middle| |z| \le 1, 0 \le argz \le \frac{\pi}{4}\right\}$ при отображении $w = z^3$.

2 Найти образ прямой x=1 при отображении $w = z^2$.

3 Записать в алгебраической форме значения функции $w = e^{z}$ в точках $\pi i, 2\pi i, -\frac{\pi}{2} i$.

4 Найти все значения z , при которых $e^{z} -$ действительное число.

5 Доказать: $\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z$.

6 Найти $Re\cos(3 - 2i)$.

7 Вычислить $Ln(4 - 4i)$, $Ln(-\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} i)$.

8 В каких точках отображения $w = e^{z}$, $w = lnz$ имеют постоянный коэффициент растяжения, равный К, и угол поворота, равный α ?

9 Построить график функции $y = |\cos ix|$.

10 Найти образ полуполосы $0 < x < 1, y > 0$ при отображении $f = \cos\pi z$. Сделать чертеж.

11 Около 400 лет тому назад голландский ученый Меркатор предложил следующий способ построения географических карт. Земную сферу отображают на плоскость стереографической проекцией, а затем плоскость подвергают отображению $f = ilnz$. Какие линии будут изображать на карте Меркатора параллели и меридианы, в частности, экватор и нулевой меридиан?

По теме занятия рекомендуется самостоятельно решить задачи:

№ 235, 250, 261, 262(а), 267(в), 273, 276(д, е), 277. (Балк М.Б. и др. Задачник-практикум по теории аналитических функций.)

Занятие №5

Решение уравнений C

Основные вопросы теории

1Многозначные функции. Вычисление корня n-ой степени. Формула Муавра.

2Степень с произвольным показателем.

3Обратные тригонометрические функции.

На занятии рекомендуется решить задачи

1Найти все значения корня и построить их:

$\sqrt[4]{2-2i}$; $\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}$.

2Найти все значения степеней:

$$(-1)^i \quad ; \quad 4^{2i} \quad ; \quad (2-i)^{i+1}.$$

3Решить уравнения:

а) $z^3 = -1$;

б) $e^{2z} = 4$;

в) $\cos z = \frac{1}{2}$;

г) $\sin z = 5i$;

д) $tg(z-i) = 2i$;

е) $z^2 + 5z - 1 = 0$.

4Может ли при возведении мнимого числа в иррациональную степень получиться действительное число?

5Можно ли число 1 возвести в такую степень, чтобы получить 100?

6Как располагаются на комплексной плоскости значения степени a^b,

если b − чисто мнимое число?

7Вычислить $Log_{-2}(-8)$. Есть ли среди найденных значений действительные числа?

По теме занятия рекомендуется самостоятельно решить задачи:

№ 263, 264, 268(а), 295, 304, 308. (Балк М.Б. и др. Задачник-практикум по теории аналитических функций.)

Занятие №6

Степенные ряды

Основные вопросы теории

1Определение степенного ряда. Область сходимости степенного ряда.

2Теорема Коши-Адамара. Радиус и круг сходимости степенного ряда.

3Почленное дифференцирование рядов.

4 Геометрический ряд.

На занятии рекомендуется решить задачи

1Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2)^{2n-1}}{2^n(n+1+arctg\, n)}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^{2n+1}}{(n+1)^2 \ln(n+1)}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-\sqrt{2}i)^{2n}}{2^n \sqrt[3]{n^2+n}}$;

2Используя геометрический ряд, разложить в степенной ряд в окрестности $z_0 = 0$ функции $w = \frac{2}{1-z}$, $w = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$. Найти радиус сходимости полученных рядов.

3Разложить в степенной ряд в окрестности $z_0 = 2$ функции $w = \frac{3}{4-z}$, $w = \frac{z^2-5}{z^2-4z+3}$.

4Используя возможность почленного дифференцирования степенного ряда, вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$.

По теме занятия рекомендуется самостоятельно решить задачи:

№ 334, 336, 338, 340, 341, 346, 347, 348, 381, 393. (Балк М.Б. и др. Задачник-практикум по теории аналитических функций.)

Занятие № 7

Контрольная работа

Примерные варианты контрольной работы по темам занятий с 1-6 содержатся в приложении (с. 28, задачи 1-6).

Занятие № 8

Интеграл в С

Основные вопросы теории

1Гладкие и кусочно-гладкие кривые, односвязные и многосвязные области в С.

2Определение криволинейного интеграла и его свойства.

3Применение криволинейного интеграла к вычислению площадей. Формула Грина.

На занятии рекомендуется решить задачи

1Вычислить интегралы по определению:

а) $\int_{|z|=2} \bar{z}\, dz$;

б) $\int_{\Gamma} |z|\, dz$, Г – радиус-вектор точки *2-i*;

в) $\int_{\Gamma} 3z^4 dz$, $\Gamma=\{z \in C \mid |z|=1,\ 0 \le \arg z \le \pi\}$;

2Пусть Г – замкнутая кривая, ограничивающая фигуру площади S

(гладкая). Используя формулу $S=\frac{1}{2}\int_{\Gamma} xdy - ydx$, доказать равенства:

а) $\int_{\Gamma} xdz = iS$;

б) $\int_{\Gamma} ydz = -S$;

в) $\int_{\Gamma} \bar{z}dz = 2iS.$

По теме занятия рекомендуется самостоятельно решить задачи:

№ 352, 353, 358. (Балк М.Б. и др. Задачник-практикум по теории аналитических функций.)

Занятие № 9

Интегрирование голоморфных функций

Основные вопросы теории

1Интегральная теорема Коши для односвязных областей.

2Обобщение интегральной теоремы Коши на случай многосвязных областей.

3Интегральная формула Коши.

На занятии рекомендуется решить задачи

1 Вычислить интегралы:

$$\int_{\Gamma} \cos z dz \ ; \quad \int_{\Gamma} e^{2z} dz \, ,$$

где Г – радиус-вектор точки 2.

Зависит ли величина интегралов от формы пути интегрирования? А от направления?

2 Вычислить интегралы:

а) $\int_{|z|=3} z^2 \, dz$;

б) $\int_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{z+i}$;

в) $\int_{|z-3|=2} \frac{sin dz}{z+2}$;

г) $\int_{\Gamma} 2cos^2 z dz$, Г={z ∈ C| |z|=2, *Im z≥0*} ∪ {z ∈ C| |*Re z*|≤2, *Im z=0,* |*Re z*|≤2} ;

д) $\int_{\Gamma} \frac{z^4 dz}{z^2+1}$;

е) $\int_{|z-1|=4} \frac{z^2 dz}{z^2+1}$;

ж) $\int_{|z-2i|=2} \frac{z dz}{z^4-1}$;

з) $\int_{|z|=4} \frac{\cos z dz}{z^2-\pi^2}$;

и) $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{edz}{z(z-1)}$;

к) $\int_{|z|=1} \frac{edz}{z^2+9}$;

По теме занятия рекомендуется самостоятельно решить задачи:

№ 365, 366, 368, 371, 376. (Балк М.Б. и др. Задачник-практикум по теории аналитических функций.)

Занятие № 10

Ряды Тейлора

Основные вопросы теории

1Теорема о разложении голоморфной функции в степенной ряд. Ряды Тейлора. Интегральные и дифференциальные формулы для коэффициентов ряда Тейлора.

2Неравенства Коши. Теорема Лиувилля.

3Ряды Тейлора для основных элементарных функций (показательной, тригонометрических, логарифмической).

На занятии рекомендуется решить задачи

1Непосредственным вычислением коэффициентов найти разложение в ряд Маклорена функции $w = \cos z$.

2Разложить в ряд Тейлора в окрестности $z_0 = \frac{\pi}{4}$ функцию $w = \sin z$.

3Найти первые 4 члена разложения в ряд Маклорена функций:

а) w=$e^{z\sin z}$;

б) w=e^{e^z};

в) w=ln(1+e^z).

4Разложить в ряд Маклорена функции:

а) w=$\frac{1}{(1+z)^2}$;

б) w=$\sin^2 z$.

5Вычислить интегралы:

а) $\int_{|z|=3} \frac{sinz}{(z-2)^{100}} dz$;

б) $\int_{|z|=1} \frac{(1+z^{10})}{z^2(z^2+4)}$.

6Разложить в ряд Маклорена функциюw= $\frac{z}{\ln(1-z)}$, доопределив ее в точке z=0.

По теме занятия рекомендуется решить задачи:

№ 385, 386, 390, 395, 399. (Балк М.Б. и др. Задачник-практикум по теории аналитических функций.)

Занятие № 11

Ряды Лорана. Изолированные особые точки голоморфной функции

Основные вопросы теории

1Ряд Лорана. Правильная и главная часть ряда Лорана. Область сходимости ряда Лорана.

2Теорема о разложении голоморфных в кольце функций в ряд Лорана.

3Изолированные особые точки голоморфной функции и их классификация (устранимые особые точки, полюсы, существенно особые точки).

4Связь вида ряда Лорана с типом изолированной особой точки.

На занятии рекомендуется решить задачи

1Найти область сходимости рядов Лорана:

а) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n$;

б) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1}$.

2Разложить в ряд Лорана в кольце $\{z \mid 1 < |z| < 2\}$ функции:

а) f(z)= $\frac{1}{(z+1)(z+2)}$;

б) f(z)= $\frac{z^4+1}{(z-1)(z+2)}$;

в) $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$;

г) $f(z)=z^2\cos\frac{\pi}{2}$.

3Разложить в ряд Лорана в кольце $\{z \mid 1 < |z-1| < 2\}$ функцию $f(z) = \frac{1}{z(z-3)^2}$.

4Найти изолированные особые точки и определить их тип:

а) $f(z)= \frac{\cos z}{z-z^3}$;

б) $f(z)= ze^{\frac{1}{z}}$;

в) $f(z)= \frac{z}{1-\cos z}$;

г) $f(z)=\frac{z^4}{1+z^4}$;

д) $f(z)= \frac{z^2+z}{z^3}$.

По теме рекомендуется самостоятельно решить задачи:

№ 433, 438, 440, 444, 446, 448, 450, 463, 466. (Балк М.Б. и др. Задачник-практикум по теории аналитических функций.)

Занятие № 12

Вычеты и их вычисление

Основные вопросы теории

1Определение вычета функции в точке.

2Вычисление вычетов в изолированных особых точках. Связь вычета с коэффициентом C_{-1} в ряде Лорана.

3Вычет в бесконечности.

4Основная теорема о вычетах.

5Теорема о полной сумме вычетов.

6Логарифмический вычет.

На занятии рекомендуется решить задачи

1Выяснить характер всех особых точек и вычислить в них вычеты для функций:

а) $f(z)=\frac{1}{z+z^3}$;

б) $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^3}$.

2Найти вычеты во всех изолированных особых точках функции и в бесконечности:

а) $f(z)=\frac{z^2}{1+z^4}$;

б) $f(z)=\frac{z^2}{(1+z)^3}$;

в) $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$;

г) $f(z)=\frac{\cos z}{(z-1)^2}$;

д) $f(z)=e^{\frac{1}{z+1}}$;

е) $f(z)=z\cos^2\frac{\pi}{z}$;

ж) $f(z)=\frac{1+z^8}{z^6(z+2)}$;

з) $f(z)=\frac{1+z^{10}}{z^6(z^2+4)}$;

и) $f(z)=\frac{z^2}{e^z-1}$.

3Вычислить логарифмический вычет в точке $z_0=-2$ функции

$f(z)=\frac{(z^3-i)^2}{(z^3+8)^3\cos z}$.

По теме занятия рекомендуется самостоятельно решить задачи:

№ 460, 472, 476, 482, 520, 521, 522, 526, 534, 576. (Балк М.Б. и др. Задачник-практикум по теории аналитических функций.)

Занятие № 13

Применение вычетов к вычислению интегралов

Основные вопросы теории

1Применение основной теоремы о вычетах и теоремы о полной сумме вычетов к вычислению интегралов.

2Вычисление интегралов вида $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \varphi(z)\frac{f`(z)}{f(z)}dz$.

3Вычисление несобственных интегралов 1-го рода в действительной области.

На занятии рекомендуется решить задачи

1Вычислить интегралы:

а) $\int_{|z-1|=1}\frac{dz}{z^4+1}$;

б) $\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$;

в) $\int_{|z|=3}\frac{z^4dz}{z^5-2}$;

г) $\int_{|z-i-1|=2}\frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$;

д) $\int_{|z+2|=3}\frac{sinzdz}{(z+1)^3}$;

е) $\int_{|z|=2}\frac{z^3dz}{z^4-1}$;

ж) $\int_{|z|=2}\frac{e^{\frac{1}{z}}z^3dz}{z+1}$;

з) $\int_{|z-1|=4}\frac{z^2sin^2\frac{1}{z}dz}{(z-1)(z-2)}$;

и) $\int_{|z|=1}\frac{coszdz}{sinz}$.

2Вычислить несобственные интегралы:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$;

б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2dx}{x^4+10x^2+9}$;

в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1dx}{x^4+1}$;

г) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1dx}{x^3+8i}$;

д) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

3Вычислить интеграл: $\int_{|z-1|=\sqrt{6}} \frac{z^5 dz}{z^4+16}$.

По теме занятия рекомендуется самостоятельно решить задачи: № 538, 543, 547, 561, 565. (Балк М.Б. и др. Задачник-практикум по теории аналитических функций.)

Приложение

Контрольные задания по курсу ТФКП

Задание 1. Выполните указанные действия над комплексными числами z_1 *и* z_2 (таблица 1)

Таблица 1

№	z_1	z_2	а	б	в
1	$1-\sqrt{3}i$	$\sqrt{3}+i$	$z_1\bar{z}_2$	$(\frac{\bar{z}_1}{z_2})^2$	$\sqrt[3]{\bar{z}_2}$
2	$1+i$	$3-i$	$\bar{z}_1\bar{z}_2$	$\frac{z_1}{z_2^2}$	$\sqrt[4]{z_1^3}$
3	$1+\sqrt{3}i$	$2-\sqrt{3}i$	$\bar{z}_1 z_2$	$\frac{z_1^2}{\bar{z}_2}$	$\sqrt[3]{z_2^2}$
4	$2-2i$	$1+3i$	$\bar{z}_1 z_2$	$(\frac{z_1}{z_2})^2$	$\sqrt[3]{\bar{z}_1^4}$
5	$3+2i$	$2+2i$	$z_1\bar{z}_2$	$\frac{z_1^2}{z_2}$	$\sqrt[3]{\bar{z}_2^4}$
6	$7+i$	$3-3i$	$z_1\bar{z}_2$	$\frac{\bar{z}_1}{z_2}$	$\sqrt[3]{\bar{z}_2^2}$
7	$5-5i$	$2-i$	$\bar{z}_1 z_2^2$	$(\frac{z_1}{z_2})^2$	$\sqrt[4]{\bar{z}_1}$
8	$4+4i$	$4-3i$	$z_1\bar{z}_2$	$(\frac{\bar{z}_1}{z_2})^2$	$\sqrt[3]{z_1^2}$
9	$2-2\sqrt{3}i$	$\sqrt{3}+2i$	$z_1 z_2^2$	$\frac{\bar{z}_1}{z_2}$	$\sqrt[3]{\bar{z}_1^2}$
10	$2\sqrt{3}+2i$	$1+\sqrt{3}i$	$z_1\bar{z}_2^2$	$\frac{\bar{z}_2}{z_1}$	$\sqrt[3]{z_1^3}$
11	$-4-4i$	$3+2i$	$z_1^2\bar{z}_2$	$\frac{z_2}{\bar{z}_1}$	$\sqrt[3]{\bar{z}_1^3}$
12	$-3+3i$	$2+i$	z_2^5	$\frac{z_1^2}{\bar{z}_2}$	$\sqrt[3]{z_1}$
13	$4-3i$	$1+7i$	$z_1^2\bar{z}_2$	$\frac{z_1}{\bar{z}_2}$	$\sqrt{z_1 z_2}$
14	$5-12i$	$2+2i$	$z_1\bar{z}_2^2$	$\frac{\bar{z}_1}{z_2^2}$	$\sqrt[4]{z_2^3}$
15	$-3-4i$	$-4+4i$	$z_1\bar{z}_2$	$(\frac{\bar{z}_1}{z_2})^2$	$\sqrt[3]{-z_2}$

Задание 2.

а) построить фигуру на плоскости, определяемую данными неравенствами. Границы, принадлежащие фигуре, изобразить сплошными линиями, не принадлежащие – пунктирными;

б) найти образ множества D при отображении $w = f(z)$, изобразить D и его образ (таблица 2).

Таблица 2

№	а	б	
		$f(z)$	D
1	$\begin{cases} \lvert z-1\rvert > 1 \\ \lvert z+1\rvert \geq 1 \end{cases}$	$\frac{1}{z}$	$0 < Im\, z \leq \sqrt{Re\, z}$
2	$\begin{cases} \lvert z-2\rvert > 2 \\ \lvert z-4\rvert \leq 4 \end{cases}$	$-\frac{\sqrt{2}}{z}$	$\begin{cases} Re\, z + Im\, z \geq 1 \\ Re\, z > 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \lvert z-1\rvert > 2 \\ -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \\ Re\, z < 3 \end{cases}$	$\frac{1}{\bar{z}}$	$\begin{cases} Im\, z \leq Re\, z \leq Im\, z + 1 \\ Im\, z > 0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} \lvert z-2\rvert \leq 1 \\ Re\, z > 1{,}5 \\ Im\, z \geq -0{,}5 \end{cases}$	$\frac{1}{\bar{z}}$	$\begin{cases} \left\lvert z-\frac{1}{2}\right\rvert \leq \frac{1}{2} \\ Im\, z \geq 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} \lvert z\rvert \geq 1 \\ \lvert z+\sqrt{2}\rvert + \lvert z-\sqrt{2}\rvert \leq 2\sqrt{3} \\ Im\, z > 0 \end{cases}$	$\frac{2}{\bar{z}}$	$\begin{cases} \lvert z+1\rvert \geq 1 \\ Re\, z \leq 0 \\ Im\, z \leq 0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} \lvert z-1\rvert \leq 1 + Re\, z \\ Re\, z < 2 \end{cases}$	z^2	$\begin{cases} 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3} \\ Re\, z \leq 4 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \lvert z+2\rvert + \lvert z-2\rvert \leq 4\sqrt{3} \\ Re\, z < 2 \end{cases}$	$\frac{2}{z}$	$\begin{cases} Re\, z + Im\, z \geq -1 \\ Re\, z > 0 \end{cases}$
8	$\begin{cases} \lvert z-i\rvert \geq 1 + Im\, z > 0 \\ -2 \leq Re\, z \leq 2 \end{cases}$	$\frac{1}{z}$	$\begin{cases} Im\, z \geq Re\, z + 1 \\ Re\, z \geq 0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} \lvert z-1-i\rvert < \sqrt{2} \\ Re\, z\, Im\, z \geq 1 \end{cases}$	$\frac{1}{z}$	$\begin{cases} \lvert z\rvert \leq 1 \\ Re\, z \geq 0 \\ Im\, z \geq 0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} \lvert z-i\rvert \leq 1 + Im\, z \\ \arg z \leq \frac{\pi}{4} \\ Im\, z \leq 2 \end{cases}$	$\frac{1}{z}$	$\begin{cases} Re\, z + Im\, z \leq \frac{1}{2} \\ Re\, z > 0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} \lvert z-1\rvert \leq 1 \\ Re\, z > 0 \end{cases}$	$-\frac{1}{\bar{z}}$	$\begin{cases} -Re\, z + 1 \leq Im\, z \leq Re\, z \\ Re\, z \leq 1 \end{cases}$
12	$\begin{cases} \lvert z-1\rvert \leq 1 + Re\, z \\ \lvert z+1\rvert + \lvert z-i\rvert > 2\sqrt{2} \end{cases}$	$-\frac{1}{z}$	$0 \leq Re\, z \leq \sqrt{-Im\, z}$

13	$\begin{cases} \lvert z-1\rvert \geq 1 \\ \lvert z-\sqrt{2}\rvert < 2 \end{cases}$	$-\frac{1}{z}$	$\begin{cases} Re\, z + Im\, z \geq -\frac{1}{2} \\ Re\, z > 0 \end{cases}$
14	$\lvert z\rvert - 2 \leq Re\, z < 2 - \lvert z\rvert$	$\frac{1}{z}$	$\begin{cases} \left\lvert z-\frac{i}{2}\right\rvert \geq \frac{1}{2} \\ Re\, z \geq 0 \\ Im\, z \geq 0 \end{cases}$
15	$\begin{cases} \lvert z-1-i\rvert \leq 1 \\ Re\, z + Im\, z > 2 \\ \arg z > \frac{\pi}{4} \end{cases}$	$\frac{1}{\bar{z}}$	$\begin{cases} \left\lvert z-\frac{1}{2}\right\rvert \leq \frac{1}{2} \\ Im\, z \geq 0 \end{cases}$

Задание 3. Вычислить значения данных функций $f(z)$ при указанных значениях аргумента z (таблица 3).

Таблица 3

№	А		Б	
	$f(z)$	Z	$f(z)$	Z
1	$sin\, z$	$\frac{\pi}{4} + i$	$ln\, z$	$2-3i$
2	$\sin z$	$\frac{\pi}{3} + 2i$	$ln\, z$	$3-4i$
3	$\cos z$	$\frac{\pi}{6} + i$	$ln\, z$	$-5+i$
4	$\cos z$	$\frac{\pi}{3} - i$	$ln\, z$	$-2-i$
5	$\sin z$	$\frac{\pi}{2} + i$	e^z	$-0{,}5 - \frac{\pi}{2}i$
6	$\cos z$	$\frac{\pi}{2} + 3i$	$ln\, z$	$-4-3i$
7	$sin\, z$	$\frac{\pi}{6} + 2i$	$ln\, z$	$-3-3i$
8	$\cos z$	$\frac{\pi}{2} + 3i$	$ln\, z\, z$	$2-4i$
9	$\sin z$	$\frac{\pi}{6} - i$	$ln\, z$	$-3+i$
10	$\sin z$	$\frac{\pi}{2} + 2i$	e^z	$\frac{\pi(1-i)}{2}$
11	$\cos z$	$\frac{\pi}{4} + 2i$	e^z	$-\frac{\pi}{2}(1+2i)$
12	$\cos z$	$\frac{\pi}{2} + i$	$ln\, z$	$1+2i$
13	$\sin z$	$\frac{\pi}{4} + i$	e^z	$2 + \frac{\pi}{3}i$
14	$\sin z$	$\frac{\pi}{2} + 2i$	$ln\, z$	$24-7i$
15	$\cos z$	$\frac{\pi}{3} - i$	e^z	$1{,}5 + \frac{\pi}{2}i$

Задание 4. Выяснить, в каких точках комплексной плоскости функция имеет производную, и вычислить ее (таблица 4).

Таблица 4

№	а	б
1	$z\bar{z} + z$	$x^3 + 3ix^2 - 3xy^2 - iy^3$
2	$z^2 + \bar{z}^2$	$x^2 + 2ixy - y^2 + x + iy$
3	$zRe\, z$	$e^x \cos y + ie^x \sin y$
4	$zIm\, z$	$2xy - x^2 i + y^2 i$
5	$\lvert z\rvert^2 + z^2$	$e^x \sin y - ie^x \cos y$
6	$z^2 - \bar{z}^2$	$x^2 - y^2 - x + (2xy - y)i$
7	$z^2\bar{z}$	$2x + 4 + 2iy$
8	$z\bar{z}^2$	$ie^x \cos y - e^x \sin y$
9	$z^2\bar{z}^2$	$3x + (3y + 5)i$
10	$z^2\bar{z} - z$	$(2 - 5y) + (5x + 3)i$
11	$\dfrac{1}{1 + \bar{z}}$	$(1 - 4y) + (4x - 1)i$
12	$\dfrac{1}{1 + z}$	$e^x \cos y + ie^x \sin y + ix - y$
13	$(z - 1)^2$	$x^2 + 2xyi - y^2 + 5i$
14	$z + \dfrac{1}{z}$	$(x + iy)^2 + 5xi - 5y$
15	$\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\bar{z}}$	$e^x(\sin y - icos\ y)$

Задание 5. Проверить, является ли функция действительной (или мнимой) частью голоморфной функции и, если да, найти эту функцию (таблица 5).

Таблица 5

№	$U(x, y)$	№	$U(x, y)$
1	$e^x \cos y$	9	$arctg\ \dfrac{y}{x}$
2	$e^x \sin y$	10	$-\ln(x^2 + y^2)$
3	$x^3 - 3xy^2$	11	$\dfrac{y}{x^2 + y^2}$
4	$e^{-x} \sin y$	12	$\dfrac{x}{x^2 + y^2}$
5	$e^y \sin x$	13	e^{x-y}
6	$-e^{-y} \cos x$	14	$3x^2 y - y^3$
7	$e^{2y} \cos 2x$	15	$y^2 - x^2$
8	$e^{-2y} \cos 2x$		

Задание 6. Найти область сходимости степенного ряда (таблица 6).

Таблица 6

№	Ряд	№	Ряд
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^{2n-1}}{2^n(n+\ln n)}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1+i)^{2n-1}}{2^n(n+1)\ln(n+1)}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1-i)^{2n}}{3^n(n^2+nln\,n)}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2+2i)^n}{3^n(1+\frac{1}{n})^n}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1-i)^n}{2^n(n+1)\ln(n+1)}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n n^2(z+3-i)^n}{3^n\ln(n+1)}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^{2n-1}}{(n+1)^2\ln(n+1)}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)(z-2)^{2n}}{2^n(1+\ln 2n)}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(z-1+i)^n}{3^n(n+\sin\frac{\pi}{2})}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+\ln n)\,(z-1+i)^{2n}}{2^n}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{4})^n\frac{(z+2i)^{2n}}{\sqrt{n+\ln n}}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+2i)^n 2^{2n}}{3^n(n+\sqrt{n})}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2})^n\frac{(z-2i)^n}{n+1+\sin n\alpha}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n(z-i\sqrt{2})^{2n}}{2^n\sqrt{n^2+1}}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n(z+3i)^n}{3^n(n^2+1)}$		

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл от функции *f(z)* по кривой Г по определению (таблица 7).

Таблица 7

№	*f(z)*	Г
1	x	{z ∈ C: |z|=2}
2	$x+y$	Радиус-вектор точки *1+i*
3	$\bar{z}$	{z ∈ C: |z+i|=2}
4	$\bar{z}^2$	{z ∈ C:Im z=0, |Re z|=1}
5	$2y$	{z ∈ C: |z-1|=2}
6	$\bar{z}$	Радиус-вектор точки *2+3i*

7	z	Радиус-вектор точки *-2-i*
8	x	$\{z \in C: Im\ z=2,\ 0\le Re\ z\le 3\}$
9	z	$\{z \in C: \|z\|=2,\ Im\ z\ge 0\}$
10	y	$\{z \in C: Im\ z=0,\ 0\le Re\ z\le 1\}$
11	$\|z\|$	*Радиус-вектор точки 2-i*
12	$\|z\|$	$\{z \in C: \|z\|=2,\ Re\ z\ge 0\}$
13	$\|z\|\bar{z}$	$\{z \in C: Im\ z=0,\ -1\le Re\ z\le 1\}$
14	$\frac{z}{\bar{z}}$	$\{z \in C: \|z\|=3\}$
15	z^3	$\{z \in C: Im\ z=0,\ \|z\|=1\}$

Задание 8. Разложить функцию *f(z)* в ряд Лорана с центром в точке z_0, найти область сходимости полученного ряда (таблица 8).

Таблица 8

№	f(z)	z_0	№	f(z)	z_0
1	$\frac{1}{z^2(z-1)}$	1	9	$\frac{1}{z^2(z^2-4)}$	-2
2	$\frac{z}{z^2-5z+6}$	2	10	$\frac{z}{(z^2-1)^2}$	-1
3	$\frac{z+2}{z^2+2z-3}$	1	11	$\frac{1}{(z-1)(z^2+4)}$	1
4	$\frac{1}{z(z^2-1)}$	-1	12	$\frac{cos^2 z}{(z+\frac{\pi}{8})^2}$	$-\frac{\pi}{8}$
5	$\frac{z}{z^2-4}$	2	13	$\frac{1}{z(z+1)}$	0
6	$\frac{1}{(z+1)(z+2)}$	-1	14	$\frac{1}{(1+z)z^2}$	0
7	$\frac{sinz}{z-\frac{\pi}{4}}$	$\frac{\pi}{4}$	15	$\frac{1}{2-z-z^2}$	1
8	$\frac{cosz}{(z+\frac{\pi}{4})^2}$	$-\frac{\pi}{4}$			

Задание 9. Для функции *f(z)* найти все её изолированные особые точки, определить их тип и найти вычеты в них (включая бесконечно удалённую точку) (таблица 9).

Таблица 9

№	*f(z)*	№	*f(z)*
1	$\dfrac{e^z}{(z^2+\frac{\pi}{2})^2}$	9	$\frac{1}{1-z}\sin\frac{1}{z}$
2	$\dfrac{\sin z}{(z^2-\pi^2)^2}$	10	$\dfrac{1}{(1-z)^2}e^{\frac{1}{z}}$
3	$\dfrac{\cos z}{(z^2-\pi^2)^2}$	11	$\dfrac{1}{1-z^2}e^{\frac{1}{z}}$
4	$\dfrac{z^2+4}{(z^2+3z+2)^2}$	12	$\frac{1}{1+z^2}\sin\frac{1}{z}$
5	$\dfrac{e^{iz}}{(z^2-\pi^2)^2}$	13	$\frac{z}{z^2+1}\cos\frac{1}{z}$
6	$z^3e^{-\frac{1}{z^2}}$	14	$\dfrac{z}{1+z}e^{-\frac{1}{z^2}}$
7	$z^3\cos\frac{1}{z^2}$	15	$\frac{z}{1-z}\sin\frac{1}{z}$
8	$\dfrac{1}{1-z}e^{\frac{1}{z}}$		

Задание 10. Вычислить интеграл по указанному замкнутому контуру Г (таблица 10).

Таблица 10

№	Интеграл	Г	№	Интеграл	Г
1	$\int_Г \frac{dz}{(z^2+1)^2}$	|z+1|=1	9	$\int_Г \frac{e^{iz}dz}{z^2+1}$	|z|=2
2	$\int_Г \frac{dz}{(z^2-1)^3}$	|z-1|=1	10	$\int_Г \frac{chzdz}{(z^2+\pi^2)^2}$	|z-πi|=π
3	$\int_Г \frac{z^2+1dz}{z^3+1}$	|z|=2	11	$\int_Г \frac{sinzdz}{(z^2-\frac{\pi^2}{4})^2}$	$\|z-\frac{\pi}{2}\| = 1$
4	$\int_Г ze^{\frac{1}{z}}dz$	|z|=1	12	$\int_Г \frac{\ln zdz}{(z^2+1)^2}$	|z-1|=1
5	$\int_Г z^2ch\frac{1}{z}dz$	|z|=2	13	$\int_Г \frac{\ln(z+1)dz}{(z^2-1)^2}$	
6	$\int_Г zcos\frac{1}{z}dz$	|z|=2	14	$\int_Г \frac{e^{-z}dz}{z(z-1)^3}$	|z-1|=2
7	$\int_Г \frac{z^2-1dz}{(z^2+1)^2}$	|z|=2	15	$\int_Г \frac{\cos zdz}{z^2(z-\pi)^2}$	|z-π|=4
8	$\int_Г \frac{e^zdz}{(z^2-1)^2}$				

Задание 11. Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов (таблица11).

Таблица 11

№	Интеграл	№	Интеграл
1	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2}$	9	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^4}$
2	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 - 4ix - 5)^2}$	10	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$
3	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^4 + 1)dx}{x^6 + 1}$	11	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)^2}$
4	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 10x^2 + 25}$	12	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^5}$
5	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 16)^3}$	13	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}$
6	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2}$	14	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$
7	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 dx}{(1 + x^2)^4}$	15	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 4)dx}{x^4 + 16}$
8	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$		

Список рекомендуемой литературы

1 Балк М.Б. и др. Задачник-практикум по теории аналитических функций. – Москва: Просвещение, 1976. – 136 с.

2 Барменков А. Н. Методика решения задач повышенной сложности по теории функции комплексного переменного. – Москва : НИЯУ МИФИ, 2010.

3 Введение в теорию функций комплексного переменного. Привалов И.И.- Москва: Наука, 1984.

4 Волковыский Л. И., Лунц Г., Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002.

5 Волковыский М. И. и др. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – Москва : Наука, 1970. – 320 с.

6 Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – Москва : Наука, 1973. – 736 с.

7 Лекции по теории функции комплексного переменного / Сидоров Ю.В., Федорюк М. В., Шабунин М. И – Москва : Наука, 1989.

8 Маркушевич А. И., Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций. – Москва: Просвещение, 1977. – 320 с.

9 Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. – Москва : ГИФМЛ,1961. – 335 с.

10 Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – Москва : Физматгиз, 1960. – 444 с.

11 Пантелеев А. В., Якимова А. С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. – Москва : Высшая школа, 2010 .

12 Сборник задач по теории аналитических функций /под ред. Евграфова Москва : А. – Москва : Наука, 1971.

13 Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексного переменного. – Москва : Наука, 1967. – 304 с.

14 Фомин В. И. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие. – Тамбов: ГОУ ВПО ТГТУ, 2010.

15 Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. – Москва : Наука, 1976, ч. 1 – 320 с.

Ионин Леонид Дмитриевич

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические указания для студентов III курса

специальностей 010301 – «Математика» и

050201 – математика с дополнительной специальностью «Информатика»

Редактор Л. П. Чукомина

Подписано в печать18.01.19	Формат 60х84 1/16	Бумага 65 г/м^2
Печать цифровая	Усл. печ. л. 2,0	Уч.-изд. л.2,0
Заказ 18	Тираж 25	Не для продажи

БИЦ Курганского государственного университета.
640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.