МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра программного обеспечения автоматизированных систем

СЕМИНАРЫ СПЕЦИАЛИСТОВ

Методические указания
к выполнению практических работ
для студентов направления подготовки 09.03.04
«Программная инженерия»

Курган 2018

Кафедра: «Программное обеспечение автоматизированных систем».

Дисциплина: «Семинары специалистов» (направление 09.03.04 «Программная инженерия»).

Составил: канд. техн. наук, доцент А.М. Семахин.

Утверждены
на заседании кафедры « 24 » мая 2018 г.

Рекомендованы методическим советом университета

« 20 » декабря 2017 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Семинары специалистов» (6 семестр) имеет целью дать студентам теоретические знания и практические навыки в разработке математических моделей и формализации алгоритмов методов решения на объектно-ориентированном языке программирования.

Предмет дисциплины – технология разработки математических моделей.

Задачи дисциплины – изучение теоретических основ математического моделирования процессов, явлений и объектов реального мира и приобретение практических навыков разработки программных приложений в интегрированной среде программирования Microsoft Visual Studio, отладки и документирования программ.

Практические занятия (34 часа).

Методические указания содержат теоретическое обоснование и варианты заданий для выполнения практических работ по дисциплине «Семинары специалистов».

Методические указания разработаны в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта по подготовке бакалавров по направлению 09.03.04 «Программная инженерия».

1 Моделирование систем методами математического программирования

1.1 Методы линейного программирования

Линейное программирование – теоретический аппарат модельного исследования, направленного на отыскание наилучшего способа распределения ограниченных ресурсов. Целевая функция и ограничения математической модели линейного программирования представляются линейными уравнениями и неравенствами. Математическая модель линейного программирования имеет вид:

$$extr \leftarrow Z = \sum_{j=1}^{n} C_j * X_j \text{ – целевая функция}$$

при условиях (1.1)

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} * X_j = b_i \\ X_j \ge 0, i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

1.1.1 Симплекс-метод

Симплекс-метод – метод обхода угловых точек области допустимых решений (симплекса) с проверкой на оптимальность.

Базисное решение – решение системы уравнений, получаемое приравниванием к нулю $(n - m)$ переменных, где n – количество неизвестных, m – количество уравнений.

Допустимое базисное решение – базисное решение, удовлетворяющее требованию неотрицательности правых частей.

Небазисные переменные – переменные, имеющие нулевое значение.

Базисные переменные – переменные, имеющие ненулевое значение.

Включаемая переменная – небазисная переменная, которая будет включена в множество базисных переменных на следующей итерации (при переходе к смежной экстремальной точке).

Исключаемая переменная – базисная переменная, которая на следующей итерации подлежит исключению из множества базисных переменных.

Симплекс-алгоритм состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Определение начального допустимого базисного решения.

Шаг 2. Определение включаемой переменной из числа небазисных переменных. Если такой переменной нет, то решение оптимально. Иначе осуществляется переход к шагу 3.

Шаг 3. Определение исключаемой переменной из числа базисных переменных.

Шаг 4. Определение нового базисного решения. Переход на шаг 2 [2].

1.1.2 Метод Гаусса-Жордана

Метод Гаусса-Жордана (метод исключения переменных) определяет оптимальное решение задачи линейного программирования. Метод Гаусса-Жордана выполняется после определения ведущей строки, ведущего столбца и ведущего элемента симплекс-таблицы.

Ведущая строка – строка симплекс-таблицы, соответствующая исключаемой переменной.

Ведущий столбец – столбец симплекс-таблицы, соответствующий включаемой переменной.

Ведущий элемент – элемент таблицы, находящийся на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Условие оптимальности. Включаемой переменной в задаче максимизации (минимизации) является небазисная переменная, имеющая в Z-уравнении наибольший отрицательный (положительный) коэффициент. В случае равенства коэффициентов для нескольких небазисных переменных выбор делается произвольно. Если все коэффициенты при небазисных переменных в Z-уранении неотрицательны (неположительны), полученное решение является оптимальным [2].

Условие допустимости. В задачах максимизации и минимизации в качестве исключаемой переменной выбирается базисная переменная, для которой отношение постоянной в правой части соответствующего ограничения к (положительному) коэффициенту ведущего столбца минимально. В случае равенства этого отношения для нескольких базисных переменных выбор делается произвольно [2].

Метод Гаусса-Жордана включает две вычислительные процедуры.

1 Формирование новой ведущей строки.

Новая ведущая строка=Старая ведущая строка/Ведущий элемент.

2 Формирование остальных новых уравнений.

Новое уравнение=Старое уравнение−(Коэффициент ведущего столбца старого уравнения)*(Новая ведущая строка) [2]

1.2 Методы целочисленного программирования

Целочисленное программирование – раздел линейного программирования, разрабатывающий и исследующий методы решения задач, искомые переменные которых имеют целочисленные значения.

Математическая модель целочисленного программирования имеет вид:

$$extr \leftarrow Z = \sum_{j=1}^{n} C_j * X_j \text{ – целевая функция}$$

при условиях (1.2)

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * X_j = b_i, i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n} \\ X_j \geq 0, \text{целочисленное значение} \end{cases}$$

1.2.1 Метод отсекающих плоскостей

Метод отсекающих плоскостей разработан Р. Гомори в 1957-1958 годах. Алгоритм метода включает следующие этапы.

Этап 1. Ослабленная задача. Целочисленность искомых переменных игнорируется, симплекс-методом определяется оптимальный план.

Этап 2. Расширенная задача. Если план нецелочисленный, составляется дополнительное ограничение, «отсекающее» дробную часть искомой переменной. Дополнительное ограничение включается в систему ограничений и решается расширенная задача [3].

1.2.2 Метод ветвей и границ

Метод ветвей и границ применяется для решения полностью или частично целочисленных задач. Предложен А. Лэндом и Дж. Дойгом в 1960 г.

Дана математическая модель целочисленного линейного программирования:

$$\max \leftarrow Z = \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j$$

при ограничениях (1.3)

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j = b_i, \ i = \overline{1,m} \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n} \\ x_1, x_2, \ldots, x_p - \text{целые числа} \ (p \leq n) \end{cases}$$

Найти вектор $\overline{x} \in E_n$, максимизирующий целевую функцию. Для целочисленной переменной можно указать верхнюю и нижнюю границы, в пределах которых содержатся оптимальные значения

$$V_j \leq x_j \leq W_j, \ j = \overline{1,p}. \quad (1.4)$$

В начале S итерации метода ветвей и границ необходимо иметь:

1) список задач линейного программирования, каждая из которых должна быть решена в последующих итерациях;

2) нижнюю границу оптимального значения линейной формы задачи $Z_0^{(S)}$. На первой итерации в качестве $Z_0^{(1)}$ берется значение целевой функции $f(\overline{x})$ в любой целочисленной точке $\overline{x}$. Если точку указать невозможно, то принимают $Z_0^{(1)} = -\infty$.

Пусть в результате S итераций метода получили список из Z задач: $1, 2, \ldots, Z$ и существует $Z_0^{(S)}$. Алгоритм метода ветвей и границ содержит следующие этапы.

1 Этап. Выбирается из списка задач линейного программирования задача R для решения, $1 \leq R \leq Z$. Задача R решается.

2 Этап. Если задача R имеет решение $\overset{-}{x}_R^{(S)}$, то переходим к этапу 3. Иначе – исключаем задачу R из списка, $Z_0^{(S+1)} = Z_0^{(s)}$. Переход к этапу 1. При $S = 0$ делаем вывод, что исходная задача не имеет решения и процесс решения заканчивается.

3 Этап. Если $f(\overset{-}{x}_R^{(S)}) > Z_0^{(S)}$, то переходим к этапу 4. В противном случае задача R исключается из списка. Переход к этапу 1.

4 Этап. Если все компоненты вектора $\overset{-}{x}_R^{(S)}$ удовлетворяют условию целочисленности, то переходим к этапу 5. В противном случае задача R из списка исключается. План $\overset{-}{x}_R^{(S)}$ запоминается, $Z_0^{(S+1)} = f(\overset{-}{x}_R^{(S)})$. Переход к этапу 1. При $S = 0$ вектор $\overset{-}{x}^{(1)}$ является решением исходной задачи и процесс решения заканчивается.

5 Этап. Задача R из списка исключается. В список включаются две новые задачи линейного программирования – задача $Z+1$ и задача $Z+2$, $Z_0^{(S+1)} = Z_0^{(S)}$. Переход к этапу 1. Процесс разбиения задачи R на две новые задачи линейного программирования осуществляется следующим образом. Пусть $\overset{-}{x}_j^{(S)}$ – дробная компонента в полученном оптимальном плане $\overset{-}{x}_R^{(S)}$ и $\left[\overset{-}{x}_j^{(S)}\right]$ целая часть. Тогда задача $Z+1$ имеет вид:

$$f(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j = b_i, \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{m}} \\ \ldots \\ V_j \le x_j \le \left[\overset{-}{x}_j^{(S)}\right] \\ \ldots \\ x_1, \ldots, x_n \ge 0 \end{cases} \qquad (1.5)$$

Тогда задача $Z+2$ имеет вид:

$$f(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j = b_i, \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{m}} \\ \dots \\ \left[\bar{x}_j^{(S)} \right] + 1 \le x_j \le W_j \\ \dots \\ x_1, \dots, x_n \ge 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Процесс решения продолжается пока не будут решены все задачи линейного программирования из списка. Решение задачи будет $Z_0^{(S)}$ на последней итерации [4].

1.3 Практическая работа №1 «Метод отсечения в моделировании систем»

Цель: получить теоретические знания и практические навыки в моделировании систем методами линейного программирования.

Используемые приемы и технологии: линейное программирование, целочисленное программирование, технология визуального проектирования и событийного программирования, среда программирования Visual Studio 2010 Professional, язык программирования Visual C++.

Ключевые термины: математическая модель, симплекс-метод, метод отсекающих плоскостей, метод ветвей и границ.

Постановка задачи: разработайте математическую модель выбора оптимального проекта информационной системы организации.

Разработайте программу, формализующую математическую модель выбора оптимального проекта информационной системы организации на языке Visual C++.

1.3.1 Варианты заданий

Разработайте программу на языке C++, формализующую алгоритм решения оптимизационной задачи симплекс методом.

Вариант 1

$$extr \leftarrow Z = 2x_1 - 6x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 2

$$extr \leftarrow Z = 2x_1 - x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 3

$$extr \leftarrow Z = 3x_1 + 2x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 4

$$extr \leftarrow Z = x_1 + x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4 \\ 3x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 5

$$extr \leftarrow Z = 2x_1 + 3x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \le 14 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 6

$$extr \leftarrow Z = 40x_1 + 50x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 24x_1 + 8x_2 \le 600 \\ 8x_1 + 8x_2 \le 400 \\ 3x_1 + 8x_2 \le 240 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 7

$$extr \leftarrow Z = 2x_1 + 4x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 8

$$extr \leftarrow Z = 5x_1 + 7x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 9

$$extr \leftarrow Z = 4x_1 + 2x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 10

$$extr \leftarrow Z = 6x_1 - 4x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 \ge 0 \\ x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 11

$$extr \leftarrow Z = 14x_1 + 6x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \le 21 \\ x_1 - x_2 \le 0 \\ 5x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 12

$$extr \leftarrow Z = 6x_1 + 4x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 3x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.3.2 Методические указания

1 Выбрать вариант задания по последней цифре номера зачетной книжки.

2 Разработать математическую модель выбора оптимального проекта информационной системы.

3 Разработать алгоритм решения задачи.

4 Разработать программу выбора оптимального проекта информационной системы.

5 Оформить отчет по практической работе.

Содержание отчета должно включать следующее.

Титульный лист.

1 Постановка задачи.

2 Описание алгоритма решения задачи.

3 Математическая модель выбора проекта информационной системы организации.

4 Диаграмма классов.

5 Оптимальное решение математической модели информационной системы.

1.3.3 Контрольные вопросы

1 Что называется математической моделью?

2 Что называется оптимальным решением?

3 Что называется допустимым решением?

4 Какие существуют этапы метода Гаусса-Жордана?

5 Какой существует алгоритм метода обыкновенное Жорданово исключение?

6 Какой существует алгоритм метода модифицированное Жорданово исключение?

7 Какие используются этапы алгоритма метода отсекающих плоскостей?

8 Какие применяются этапы алгоритма метода ветвей и границ?

9 Как формулируется условие оптимальности?

10 Как формулируется условие допустимости?

2 Нелинейные модели. Методы одномерной оптимизации

Модели линейного программирования не всегда адекватны реальным ситуациям. При решении задач полный и точный учёт зависимостей между факторами и показателями, влияющими на критерий эффективности и ограничительные условия, достигается при разработке нелинейных математических моделей.

2.1 Постановка задачи нелинейного программирования

Задача нелинейного программирования в общем виде состоит в отыскании вектора искомых переменных $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, при котором целевая функция достигает экстремума (максимума, минимума).

$extr \leftarrow Z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

при ограничениях (2.1)

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, i = \overline{1, m} \\ \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, i = b_i, i = \overline{m_1 + 1, m} \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

В отличие от задач линейной оптимизации, для задач нелинейного программирования общего метода, позволяющего решать любые оптимизационные задачи не существует. Это обусловлено тем, что в задачах нелинейного программирования область допустимых решений может быть невыпуклой, иметь бесконечное число крайних точек, состоять из нескольких частей, а целевая функция может достигать экстремума не только на границе, но и внутри области допустимых решений системы ограничений. Нелинейная целевая функция может иметь несколько локальных экстремумов, среди которых необходимо найти глобальный.

2.2 Методы нелинейной одномерной оптимизации

Пусть функция $f(x)$ определена на $P \subseteq E_1$. Задача одномерной оптимизации – задача, в которой требуется найти max(min) $f(x)$, $x \in P$. Решение (точка максимума (минимума)) задачи одномерной оптимизации – точка $X^* \in P$, при условии $f(x^*) \le (\ge) f(x)$ для всех $x \in P$.

$$f(x^*) = \max_{x \in P}(\min) f(x). \qquad (2.2)$$

Функция $f(x)$ называется унимодальной на множестве P, если существует единственная точка x^* её максимума на P и для любых $x_1, x_2 \in P$,

$f(x_1) \le f(x_2) \le f(x^*)$, если $x_1 \le x_2 \le x^*$;

$f(x^*) \ge f(x_1) \ge f(x_2)$, если $x^* \le x_1 \le x_2$.

Унимодальная функция монотонно возрастает слева от точки максимума и монотонно убывает справа от неё.

В процессе применения методов одномерной оптимизации выделяют два этапа:

- поиск отрезка, содержащего точку максимума;
- уточнение координаты точки максимума на данном отрезке.

2.2.1 Алгоритм Свенна

Исходные данные: X_0 – начальная точка, h – шаг поиска ($h > 0$).

Этап 1. Определить $f(x_0)$, $f(x_0 + h)$, $f(x_0 - h)$, $k = 1$.

Этап 2. Если $f(x_0 - h) \le f(x_0) \le f(x_0 + h)$, то $x_1 = x_0 + h$ перейти на 4 этап.

Этап 3. Если $f(x_0-h)\ge f(x_0)\ge f(x_0+h)$, то $x_1=x_0-h$, $h=-h$ перейти на 4 этап, в противном случае ($f(x_0-h)\le f(x_0)\ge f(x_0+h)$), $a=x_0-h$, $b=x_0+h$, конец.

Этап 4. $x_{k+1}=x_k+2^k*h$. Определить $f(x_{k+1})$.

Этап 5. Если $f(x_{k+1})\ge f(x_k)$, то $k=k+1$, переход на 4 этап.

Этап 6. Если $h>0$, то $a=x_{k-1}$, $b=x_{k+1}$, конец. В противном случае $a=x_{k+1}$, $b=x_{k-1}$, конец.

Случай $f(x_0-h)\ge f(x_0)\le f(x_0+h)$ (этап 3) не рассматривается, так как он противоречит предположению о модальности функции $f(x)$.

2.2.2 Метод золотого сечения

Золотое сечение отрезка – деление отрезка на две неравные части таким образом, что отношение длины всего отрезка к длине большей части равно отношению длины большей части к длине меньшей части отрезка. Золотое сечение отрезка $[a,\mathrm{b}]$ производится двумя точками y и z, симметричными относительно середины отрезка (рисунок 2.1).

$$\frac{b-a}{b-y}=\frac{b-y}{y-a}=\frac{b-a}{z-a}=\frac{z-a}{b-z}=\lambda=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1{,}618$$

$$y=(\lambda-1)*a+(\lambda-1)^2*b=0{,}618*a+0{,}382*b$$

$$z=(\lambda-1)^2*a+(\lambda-1)*b=0{,}382*a+0{,}382*0{,}618*b$$

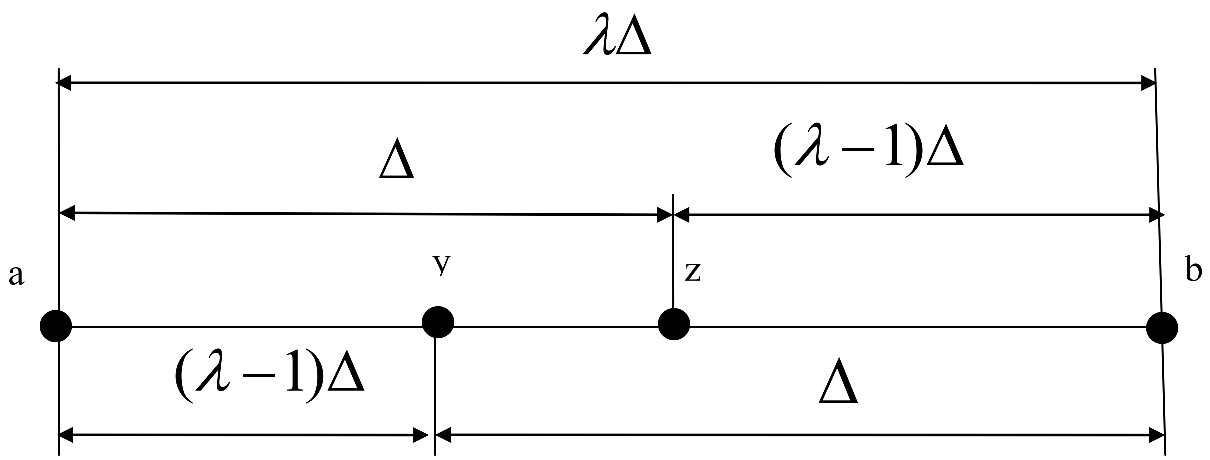


Рисунок 2.1 – Золотое сечение

Точка y производит золотое сечение отрезка $[a, z]$, а точка z производит золотое сечение отрезка $[y, \mathrm{b}]$. На этом свойстве, позволяющем вычислять значение функции в одной пробной точке основан алгоритм золотого сечения.

Алгоритм золотого сечения включает несколько этапов.

Исходные данные: $[a, \mathrm{b}]$ – отрезок, содержащий точку максимума, ε – параметр окончания счёта.

Этап 1. $\lambda = \dfrac{\sqrt{5+1}}{2}$; $k = 1$, $a_k = a$, $b_k = b$;

$y = (\lambda - 1) * a_k + (\lambda - 1)^2 * b_k$; $A = f(y)$;

$z = (\lambda - 1)^2 * a_k + (\lambda - 1) * b_k$; $B = f(z)$.

Этап 2. Если $A > B$, то перейти на 4 этап.

Этап 3. $a_{k+1} = y$; $b_{k+1} = b_k$;

$y = z$; $A = B$;

$z = (\lambda - 1)^2 * a_{k+1} + (\lambda - 1) * b_{k+1}$;

$B = f(z)$, перейти на 5 этап.

Этап 4. $a_{k+1} = a_k$; $b_{k+1} = z$; $z = y$; $B = A$;

$y = (\lambda - 1) * a_{k+1} + (\lambda - 1)^2 * b_{k+1}$;

$A = f(y)$.

Этап 5. Если $b_{k+1} - a_{k+1} < \varepsilon$, то $X^* \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$, конец.

Этап 6. $k = k + 1$, перейти на этап 2.

2.3 Практическая работа №2
Методы Свенна и золотого сечения в определении решения на экстремум унимодальной функции

Цель: закрепить теоретические знания и получить практические навыки в разработке программы решения задач методами одномерной оптимизации.

Используемые приемы и технологии: нелинейное программирование, алгоритм Свенна, метод золотого сечения, технология визуального проектирования и событийного программирования, среда программирования Visual Studio 2010 Professional, язык программирования Visual C++.

Ключевые термины: нелинейное моделирование, математическая модель, оптимальный план, допустимый план, алгоритм Свена, метод золотого сечения.

Постановка задачи: разработайте визуальное приложение на языке Visual C++ решения задачи методами одномерной оптимизации.

2.3.1 Варианты заданий

Методом Свенна найти отрезок, содержащий точку экстремума унимодальной функции $f(x)$, уточнить точку экстремума методом золотого сечения, $\varepsilon = 0{,}05$.

Вариант 1. $f(x) = x^2 + 1 \to \min$.

Вариант 2. $f(x) = 3x - x^2 - 1 \to \max$.

Вариант 3. $f(x) = 2x - x^2 - 1 \to \max$.

Вариант 4. $f(x) = 2x^2 + 3 \to \min$.

Вариант 5. $f(x) = x^2 + x + 1 \to \min$.

Вариант 6. $f(x) = 10x^2 + 7x + 1 \to \min$.

Вариант 7. $f(x) = 15x - 2x^2 + 5 \to \max$.

Вариант 8. $f(x) = 3 + 7x - 2x^2 \to \max$.

Вариант 9. $f(x) = 4 - 3x^2 \to \max$.

Вариант 10. $f(x) = 5 - 4x - x^2 \to \max$.

2.3.2 Методические указания

1 Разработайте алгоритм программы.

2 Разработайте визуальное приложение, формализующее алгоритм методов одномерной оптимизации:

- создайте проект с помощью мастера Windows Forms Application;
- настройте свойства формы Form1;
- добавьте компоненты на форму;
- создайте и определите функции обработчика событий.

3 Оформите отчет по лабораторной работе, включающий разделы:

- постановка задачи;
- теоретическое обоснование;
- скриншоты программы;
- код программы (функции обработчиков событий);
- выводы.

2.3.3 Контрольные вопросы

1 Что называется нелинейным программированием?

2 Какая существует постановка задачи нелинейного программирования?

3 Что называется унимодальной функцией?

4 Что понимается под нелинейной моделью?
5 Какие существуют методы одномерной оптимизации?
6 Сколько и какие этапы включает алгоритм Свенна?
7 Что понимается под золотым сечением?
8 Какое используется свойство золотого сечения?
9 Какие исходные данные содержит алгоритм метода золотого сечения?
10 Сколько и какие этапы метода золотого сечения существуют?

3 Сетевое планирование и управление в моделировании информационных систем

3.1 Сетевое планирования в условиях определённости

Длина критического пути и топология определяются методом критического пути (Critical Path Method). Для определения длины критического пути рассчитывается ранний (ожидаемый) срок наступления завершающего события. Ранний срок совершения события j определяется по формуле:

$$t_j^p = \underbrace{\max}_{(i,j)}\{t_i^p + t_{ij}\}, \tag{3.1}$$

где t_i^p – ранний срок совершения i события;

t_{ij} – продолжительность выполнения $i-j$ работы.

Поздний (предельный) срок наступления i события определяется по формуле:

$$t_i^n = \underbrace{\min}_{(i,j)}\{t_j^n - t_{ij}\}, \tag{3.2}$$

где t_j^n – поздний срок совершения j события;

t_{ij} – продолжительность выполнения $i-j$ работы.

Ранний срок начала работы – наиболее ранний (минимальный) из возможных моментов начала данной работы при заданной продолжительности работ. Совпадает с ранним сроком наступления начального события.

$$t_{ij}^{PH} = t_i^P, \tag{3.3}$$

где t_i^P – ранний срок наступления начального события.

Ранний срок окончания работы – наиболее ранний (минимальный) из возможных моментов окончания данной работы при заданной продолжительности работ. Рассчитывается по формуле:

$$t_{ij}^{PO} = t_i^P + t_{ij}, \tag{3.4}$$

где t_i^P – ранний срок совершения i события;

t_{ij} – продолжительность выполнения $i-j$ работы.

Поздний срок начала работы – наиболее поздний (максимальный) из допустимых моментов начала данной работы, при котором возможно выполнение последующих работ в установленный срок. Определяется по формуле:

$$t_{ij}^{ПН} = t_j^{П} - t_{ij}, \tag{3.5}$$

где $t_j^{П}$ – поздний срок свершения j события;

t_{ij} – продолжительность выполнения $i-j$ работы.

Поздний срок окончания работы – наиболее поздний (максимальный) из допустимых моментов окончания данной работы, при котором возможно выполнение последующих работ в установленный срок.

$$t_{ij}^{ПО} = t_j^{П}, \tag{3.6}$$

где $t_j^{П}$ – поздний срок свершения j события.

Работа участка, несовпадающего с критическим путем сетевого графика, обладает резервом времени. Полный резерв времени работы – максимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность работы t_{ij} без изменения общего срока выполнения проекта. Определяется по формуле:

$$r_{ij}^{П} = t_j^{П} - t_i^{P} - t_{ij}, \tag{3.7}$$

где $t_j^{П}$ – поздний срок свершения j события;

t_i^{P} – ранний срок совершения i события;

t_{ij} – продолжительность выполнения $i-j$ работы.

Критические работы не имеют резервов времени.

Степень сложности выполнения в заданный срок работы некритического пути определяется коэффициентом напряженности. Коэффициент напряженности рассчитывается по формуле:

$$\kappa_{ij}^{н} = 1 - \frac{r_{ij}^{n}}{T_{кр} - t_{кр}}, \tag{3.8}$$

где r_{ij}^{n} – полный резерв времени работы t_{ij};

$T_{кр}$ – длина критического пути;

$t_{кр}$– продолжительность части максимального полного пути, содержащего работу $i-j$, которая совпадает с критическим путем.

Алгоритм метода критического пути.

1 Ранний и поздний сроки наступления начального события i совпадают.

2 Ранний и поздний сроки наступления конечного события j совпадают.

3 Разность между ранним сроком конечного события j и ранним сроком начального события i совпадает с разностью между поздним сроком конечного события j и поздним сроком начального события i и равна продолжительности работы t_{ij}.

3.2 Сетевое планирования в условиях неопределённости

В условиях неопределенности время t_{ij} является случайной величиной, подчиняющееся закону распределения случайной величины (β-распределение, нормальное распределение). Числовые характеристики случайной величины t_{ij} математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение.

Математическое ожидание рассчитывается по формуле:

$$M(t_{ij}) = \frac{t_{ij}^{o} + t_{ij}^{н} + t_{ij}^{п}}{6}, \qquad (3.9)$$

где t_{ij}^{o} – оптимистическое время (выполнение работы в благоприятных условиях);

$t_{ij}^{п}$ – пессимистическое время (выполнение работы в неблагоприятных условиях);

$t_{ij}^{н}$ – наиболее вероятное время (выполнение работы в нормальных условиях).

Дисперсия рассчитывается по формуле:

$$\sigma^2 = \left(\frac{t_{ij}^{п} - t_{ij}^{o}}{6}\right)^2, \qquad (3.10)$$

где $t_{ij}^{п}$ – пессимистическое время;

t_{ij}^{o} – оптимистическое время.

Среднеквадратическое отклонение рассчитывается по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}, \qquad (3.11)$$

где σ^2 – дисперсия случайной величины t_{ij}.

Анализ сетевых графиков методом PERT (Program Evaluation and Review Technique) включает расчет временных параметров и оценку вероятности того, что общий срок выполнения проекта $T_{кр}$ не превысит директивного срока T_{∂}. Если вероятность $T_{кр} \le T_{\partial}$ мала, например меньше 0,3, то выполнение комплекса работ в заданный срок T_{∂} находится под угрозой срыва. Необходимо принять дополнительные меры: перераспределение ресурсов по сети, пересмотр состава работ и событий.

Если $T_{кр} \le T_{д}$ значительна, например больше 0,85, то выполнение проекта в заданный срок можно прогнозировать с высокой степенью надежности.

3.3 Расчёт параметров сетевого графика

Исходные данные для построения сетевого графика приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Исходные данные

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Длительность основных работ
a1	-	3
a2	-	6
a3	-	4
a4	a1	5
a5	a2	1
a6	a2	9
a7	a3, a5	6
a8	a4, a6, a7	8

Сетевой график приведён на рисунке 3.1. Из истока s=X1 строят дуги, соответствующие работам a1, a2, и a3. Работы a1, a2, и a3 не имеют предшествующих работ. Работе a4 предшествует a1, поэтому дуга a4 сетевого графика изображается следом за дугой a1. Аналогично дуги a5 и a6. Работа a7 опирается на работы a3 и a5. Работа a8 опирается на a4, a6 и a7.

Фиктивные работы (нулевой продолжительности) изображаются штриховыми линиями. Если работа a5 опиралась бы на a1, то между событиями X2 и X3 провели штриховую дугу.

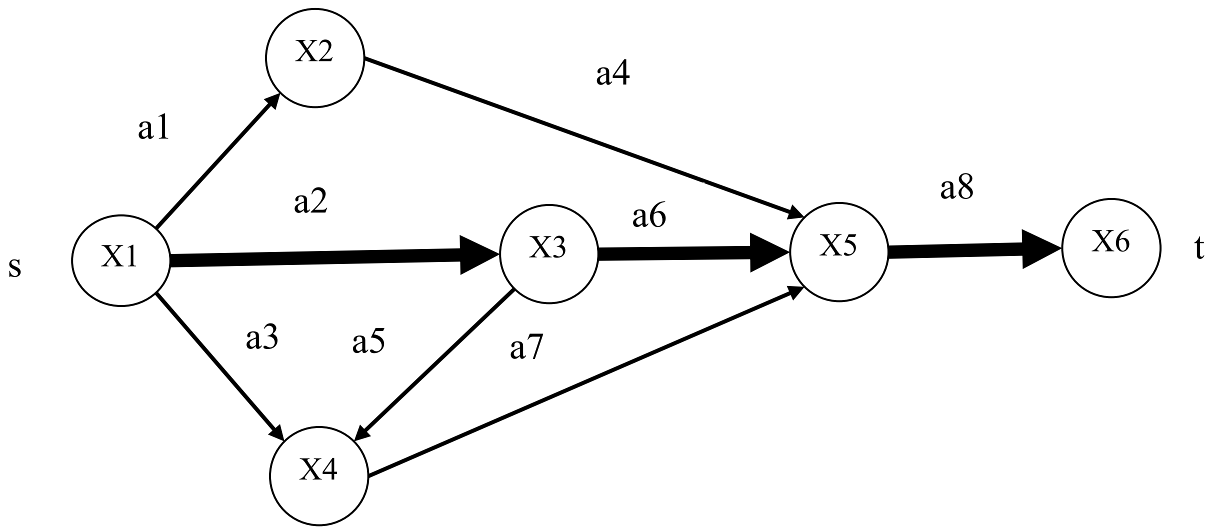


Рисунок 3.1 – Сетевой график

Определим критический срок $t_{кр}$. Полных путей четыре μ_i, $\mu_1 : 1 \to 2 \to 5 \to 6$; $\mu_2 : 1 \to 3 \to 5 \to 6$; $\mu_3 : 1 \to 4 \to 5 \to 6$; $\mu_4 : 1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$. Продолжительности полных путей $t(\mu_1) = 16$, $t(\mu_2) = 23$, $t(\mu_3) = 18$, $t(\mu_4) = 21$. Второй путь критический $t_{кр} = 23$.

Задержка критической работы вызывает задержку выполнения всего комплекса работ. Для уменьшения времени выполнения комплекса работ необходимо сократить сроки критических работ. Некритические участки сетевого графика имеют резервы времени.

Свершения событий можно варьировать. Например, событие X2 может свершиться через три дня (по окончании работы a1), но может наступить позже на срок до семи дней, поскольку на пути μ_1 есть резерв времени $t_{кр} - t(\mu_1) = 23 - 16 = 7$ дней. Для событий используют ранний и поздний сроки свершения.

Ранний срок свершения события рассчитывается по формуле:

$$t_p(x_j) = \max_{(x_i, x_j) \in U_j^+} (t_p(x_i) + t(x_i, x_j)), \tag{3.12}$$

где U_j^+ – множество работ, входящих в x_j событие;

$t_p(x_i)$ – ранний срок свершения начального события работы (x_i, x_j);

$t(x_i, x_j)$ – продолжительность работы (x_i, x_j).

Поздние сроки свершения событий рассчитываются по формуле:

$$t_n(x_i) = \min_{(x_i, x_j) \in U_i^-} (t_n(x_j) - t(x_i, x_j)), \tag{3.13}$$

где U_i^- – множество работ, выходящих из x_i события;

$t_n(x_j)$ – поздний срок свершения конечного события работы (x_i, x_j);

$t(x_i, x_j)$ – продолжительность работы (x_i, x_j).

Поздний срок свершения события $t_n(x_6) = 23$. Чтобы не нарушался критический срок, событие X5 должно произойти на восемь дней раньше. Поздний срок свершения события X5 $t_n(x_5) = 23 - 8 = 15$. Поздний срок свершения события X2 $t_n(x_2) = 15 - 5 = 10$.

Резерв времени рассчитывается по формуле:

$$R(x_i) = t_n(x_i) - t_p(x_i). \tag{3.14}$$

Резерв времени показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события x_i без изменения срока наступления итогового события t. Ранние и поздние сроки свершения критических событий совпадают. Резерв времени критического участка пути сетевого графика равен нулю.

Ранние и поздние сроки начала и окончания работы (x_i, x_j) определяются по формулам:

$$t_{р.н}(x_i, x_j) = t_p(x_i),\; t_{р.о}(x_i, x_j) = t_p(x_i) + t(x_i, x_j), \tag{3.15}$$

$$t_{п.о}(x_i, x_j) = t_n(x_j),\; t_{п.н}(x_i, x_j) = t_n(x_j) - t(x_i, x_j). \tag{3.16}$$

Для работ определяют два резерва времени: полный резерв времени, свободный резерв времени.

Полный резерв времени рассчитывается по формуле:

$$R_n(x_i, x_j) = t_n(x_j) - t_p(x_i) - t(x_i, x_j). \tag{3.17}$$

Свободный резерв времени рассчитывается по формуле:

$$R_c(x_i, x_{ji}) = t_p(x_j) - t_p(x_i) - t(x_i, x_j) \tag{3.18}$$

Расчёт резервов времени проводится четырем по этапам.

1 Расчёт раннего срока свершения события $t_p(x_i)$.

2 Расчёт позднего срока свершения события $t_n(x_i)$.

3 Расчёт резерва времени $R(x_i)$.

4 Определение критического пути и резервов времени работ.

Рассчитаем резервы времени для событий и работ примера.

Этап 1. Расчёт $t_p(x_i)$. При расчёте $t_p(x_i)$ перемещаются по сетевому графику от истока s=X1 к стоку t=X6 в порядке возрастания. Для события X1 $t_p(x_1) = 0$. По формуле 2.1 рассчитываем ранние сроки свершения событий.

$$t_p(x_2) = t_p(x_1) + t(x_1, x_2) = 0 + 3 = 3$$

$$t_p(x_3) = t_p(x_1) + t(x_1, x_3) = 0 + 6 = 6$$

$$t_p(x_4)=\max_{\substack{(x_1,x_4)\\(x_3,x_4)}}(t_p(x_1)+t(x_1,x_4),t_p(x_3)+(x_3,x_4))=$$

$$\max(0+4,6+1)=7$$

$$t_p(x_5)=\max_{\substack{(x_2,x_5),\\(x_3,x5),\\(x_4,x_5)}}(t_p(x_2)+t(x_2,x_5),t_p(x_3)+t(x_3,x_5),$$

$$t_p(x_4)+t(x_4,x_5))=\max(3+5,6+9,7+6)=15$$

$$t_p(x_6)=t_p(x_5)+t(x_5,x_6)=15+8=23.$$

Критический срок $t_{кр}=t_p(x_6)=23$.

Этап 2. Расчёт $t_n(x_i)$. При вычислении поздних сроков свершения событий перемещаются по сетевому графику от стока t=X6 к истокуs=X1 в порядке убывания номеров. Для события X6 $t_n(x_6)=t_p(x_6)$. По формуле 2.2 рассчитаем поздние сроки остальных событий.

$t_n(x_5)=t_n(x_6)-t(x_5,x_6)=23-8=15$;

$t_n(x_4)=t_n(x_5)-t(x_4,x_5)=15-6=9$;

$t_n(x_2)=t_n(x_5)-t(x_2,x_5)=15-5=10$.

Из события X3 выходят две работы a5 и a6.

$$t_n(x_3)=\min_{\substack{(x_3,x_5),\\(x_1,x_4)}}(t_n(x_5)-t(x_3,x_5),t_n(x_4)-t(x_3,x_4))=$$

$$\min(15-9,9-1)=6$$

Из события X1 выходят три работы a1, a2, a3.

$$t_n(x1)=\min_{\substack{(x_1,x_2),\\(x_1,x_3),\\(x_1,x_4)}}(t_n(x_2)-t(x_1,x_2),t_n(x_3)-t(x_1,x_3),$$

$$t_n(x_4)-t(x_1,x_4))=\min(10-3,6-6,9-4)=0$$

Этап 3. Расчёт $R(x_i)$. Резерв времени рассчитывается по формуле 3.14. Результаты расчёта приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Резервы времени

Номер события	Ранний срок свершения события $t_p(x_j)$	Поздний срок свершения события $t_n(x_i)$	Резерв времени $R(x_i)$
1	0	0	0
2	3	10	7
3	6	6	0
4	7	9	2
5	15	15	0
6	23	23	0

Этап 4. Определение критического пути и резервов времени работ.

Критические события X1, X3, X5 и X6. Критический путь 1->3->5->6. Резерв времени критических событий равен 0. Ранние и поздние сроки начала и окончания работ (x_i, x_j) рассчитываются по формулам 3.15 и 3.16.

$$t_{р.н}(x_1, x_2) = t_p(x_1) = 0,\ t_{п.о}(x_1, x_2) = t_n(x_2) = 10,$$
$$t_{п.н}(x_1, x_2) = t_n(x_2) - t(x_1, x_2) = 10 - 3 = 7$$

Полный резерв времени рассчитывается по формуле 3.17.

$$R_n(x_1, x_2) = t_n(x_2) - t_p(x_1) - t(x_1, x_2) = 10 - 0 - 3 = 7$$

Свободный резерв времени рассчитывается по формуле 3.18.

$$R_c(x_1, x_2) = t_p(x_2) - t_p(x_1) - t(x_1, x_2) = 3 - 0 - 3 = 3$$

3.4 Практическая работа №3 «Сетевое моделирование систем»

Цель: получить теоретические знания и практические навыки в моделировании процессов управления комплексом работ.

Используемые приемы и технологии: сетевое планирование и управление, сетевое моделирование в условиях определённости, сетевое моделирование в условиях неопределённости, технология визуального проектирования и событийного программирования, среда программирования Visual Studio 2010 Professional, язык программирования Visual C++.

Ключевые термины: сетевой график, событие, работа, критический путь, метод критического пути, метод PERT, резерв времени, коэффициент напряжённости.

Постановка задачи: разработайте сетевую модель создания информационной системы организации. Создайте программу на языке Visual C++ расчета временных параметров событий, работ, коэффициентов напряжённостей и определения критического пути сетевого графика информационной системы организации.

3.4.1 Методические указания

1 Выбрать вариант задания 1 по последней цифре номера зачетной книжки.

2 Разработать сетевую модель (сетевой график) информационной системы организации.

3 Разработать алгоритм решения задачи.

4 Рассчитать параметры сетевого графика

4.1 Временные параметры событий.

4.2.Временные параметры работ.

4.3 Критический путь сетевого графика.

4.4 Коэффициенты напряжённости работ участков пути.

5 Разработать программу сетевой модели информационной системы.

6 Оформить отчет по самостоятельной работе.

Содержание отчета должно включать следующее.

Титульный лист.

1 Постановка задачи.

2 Описание алгоритма решения задачи

3 Сетевая модель информационной системы организации.

3.1 Временные параметры событий.

3.2.Временные параметры работ.

3.3 Критический путь сетевого графика.

3.4 Коэффициенты напряжённости работ участков пути.

4 Диаграмма классов.

3.4.2 Варианты заданий

Разработайте визуальное приложение на языке Visual C++, формализующее построение сетевого графика по приведенному перечню работ и их взаимной последовательности, определение критического срока, раннего и позднего сроков совершения событий, резервов времени событий, ранних и поздних сроков начала и окончания работ, полных и свободных резервов времени работ.

Вариант 1. Исходные данные для построения сетевого графика приведены в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Исходные данные варианта 1

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Длительность основных работ
a1	-	5
a2	-	8

Продолжение таблицы 3.4

а3	-	11
а4	а1	6
а5	а1, а2	12
а6	а1, а2, а3	18
а7	а4, а5, а6	7

Вариант 2. Исходные данные для построения сетевого графика приведены в таблице 3.5.

Таблица 3.5 – Исходные данные варианта 2

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Длительность основных работ
а1	-	9
а2	-	5
а3	а1	11
а4	а1, а2	7
а5	а1, а2	4
а6	а3, а4	13
а7	а1, а5	15

Вариант 3. Исходные данные для построения сетевого графика приведены в таблице 3.6.

Таблица 3.6 – Исходные данные варианта 3

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Длительность основных работ
а1	-	7
а2	-	11
а3	-	5
а4	а1	10
а5	а1, а2, а3	4
а6	а3	13
а7	а3, а4, а5	12
а8	а4	8

Вариант 4. Исходные данные для построения сетевого графика приведены в таблице 3.7.

Таблица 3.7 – Исходные данные варианта 4

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Длительность основных работ
a1	-	3
a2	-	2
a3	-	4
a4	a1	3
a5	a1	5
a6	a2, a3	9
a7	a3	6
a8	a2, a3, a4	8
a9	a3, a5, a6	4
a10	a7	6

Вариант 5. Исходные данные для построения сетевого графика приведены в таблице 3.8.

Таблица 3.8 – Исходные данные варианта 5

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Длительность основных работ
a1	-	6
a2	-	9
a3	-	8
a4	a1	5
a5	a3	3
a6	a3	7
a7	a3, a4	9
a8	a1, a2, a5, a6	11
a9	a6	10

Вариант 6. Исходные данные для построения сетевого графика приведены в таблице 3.9.

Таблица 3.9 – Исходные данные варианта 6

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Длительность основных работ
a1	-	11
a2	-	9
a3	-	7
a4	a2	5
a5	a1	6
a6	a3, a4	8

Продолжение таблицы 3.9

a7	a2, a3, a4, a5	10
a8	a6	13
a9	a1, a7, a8	15

Вариант 7. Исходные данные для построения сетевого графика приведены в таблице 3.10.

Таблица 3.10 – Исходные данные варианта 7

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Длительность основных работ
a1	-	3
a2	-	6
a3	-	4
a4	a1	6
a5	a1, a2, a3	4
a6	a3	7
a7	a1, a4, a5	5

Вариант 8. Исходные данные для построения сетевого графика приведены в таблице 3.11.

Таблица 3.11 – Исходные данные варианта 8

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Длительность основных работ
a1	-	10
a2	-	12
a3	-	9
a4	a1	6
a5	a1, a3	7
a6	a2, a4	9
a7	a1, a2, a4, a5	5

Вариант 9. Исходные данные для построения сетевого графика приведены в таблице 3.12.

Таблица 3.12 – Исходные данные варианта 9

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Длительность основных работ
a1	-	5
a2	-	6
a3	a1	9

Продолжение таблицы 3.12

a4	a1, a2	11
a5	a1, a2	4
a6	a3	6
a7	a3	10
a8	a1, a4, a6	8
a9	a1, a4, a5, a6	12

Вариант 10. Исходные данные для построения сетевого графика приведены в таблице 3.13.

Таблица 3.13 – Исходные данные варианта 10

Основные работы	Работы, предшествующие основной	Длительность основных работ
a1	-	10
a2	-	9
a3	-	12
a4	a1	7
a5	a1, a2	8
a6	a1, a2, a3	13
a7	a6	15
a8	a4, a5, a7	11
a9	a6	9

3.4.3 Контрольные вопросы

1 Что называется сетевым графиком?
2 Какой существует алгоритм метода Фулкерсона?
3 Каким образом рассчитываются временные параметры событий?
4 Каким образом рассчитываются временные параметры работы?
4 Какой существует алгоритм метода критического пути?
5 Какой существует алгоритм метода PERT?
6 Что называется резервом времени?
7 Какие существуют виды резерва времени?
8 Чему равен резерв времени участка критического пути?
9 Как рассчитывается полный резерв времени?
10 Как рассчитывается свободный резерв времени?

4 Имитационное моделирование систем

4.1 Этапы имитационного моделирования

Имитационное моделирование – формальное описание логики функционирования исследуемой системы и взаимодействия элементов системы во времени, учитывающее существенные причинно-следственные связи, присущие системе, и обеспечивающее проведение статистических экспериментов.

4.2 Структура типовой имитационной модели

Структура имитационной модели с календарём событий включает:
- управляющая часть;
- функциональная часть;
- информационная часть.

Управляющая часть имитационной модели содержит блок управления моделированием, блок диалога, блок обработки результатов моделирования, календарь событий.

Функциональная часть имитационной модели состоит из функциональных модулей, являющихся основными элементами.

Информационная часть имитационной модели включает базы данных.

4.3 Генерация псевдослучайных чисел

Моделирование случайных факторов использует случайные числа, равномерно распределённые на интервале [0, 1].

Псевдослучайные числа (ПСЧ) получают с помощью детерминированных рекуррентных формул. Псевдослучайные числа остаются детерминированными: если цикл работы генератора начинается одними и теми же исходными данными, то на выходе получают одинаковые последовательности чисел (свойство воспроизводимости последовательности ПСЧ).

Методы генерации ПСЧ:
- мультипликативный метод;
- аддитивный метод;
- смешанный метод.

Мультипликативный метод основывается на формуле расчёта значения очередного ПСЧ по значению предыдущего:

$$X_{i+1} = a * X_i (\operatorname{mod} \mathrm{m}), \tag{4.1}$$

где a, m – неотрицательные целые числа (множитель и модуль).

Аддитивный метод основывается на формуле расчёта значения очередного ПСЧ по значениям предыдущих:

$$X_{i+1} = (X_i + X_{i-1})(\operatorname{mod} \mathrm{m}), \tag{4.2}$$

где a, m – неотрицательные целые числа (множитель и модуль).

Смешанный метод основывается на формуле расчёта значения очередного ПСЧ по значению предыдущего:

$$X_{i+1} = (a * X_i + c)(\mathrm{mod\,m}), \qquad (4.3)$$

где a, c, m – неотрицательные целые числа (множитель и модуль).

4.4 Моделирование случайных событий

Алгоритмы моделирования зависимых событий:
- последовательное моделирование;
- моделирование после предварительных расчётов.

Для проведения моделирования двух зависимых событий А и В, необходимо задать полные и условные вероятности: $P(A)$, $P(B)$, $P(B/A)$, $P(B/\overline{A})$. Вероятность наступления события В при условии, что событие А не наступило рассчитывается по формуле:

$$P(B/\overline{A}) = \frac{P(B) - P(A)P(B/A)}{1 - P(A)}. \qquad (4.4)$$

4.5 Моделирование случайных величин

Случайные величины подразделяются на:
- непрерывные;
- дискретные;
- смешанные.

Методы моделирования непрерывных случайных величин:
- метод обратной функции;
- метод исключения (фон Неймана);
- метод композиций.

Методы моделирования дискретных случайных величин:
- метод последовательных сравнений;
- метод интерпретации.

4.6 Моделирование случайных векторов

Случайный вектор (система случайных величин) – совокупность случайных величин, характеризующих случайное явление.

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n), \qquad (4.5)$$

где X_i – случайная величина.

Характеристикой случайного вектора является совместная многомерная функция распределения компонент $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или совместная многомерная плотность вероятности $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Методы моделирования случайных векторов с статистически зависимыми компонентами:

- метод условных распределений;
- метод исключения фон Неймана;
- метод линейных преобразований.

4.7 Практическая работа №4 «Последовательное обслуживание с блокировками и ограниченным буфером»

Цель: получить теоретические знания и практические навыки в имитационном моделировании.

Используемые приемы и технологии: имитационное моделирование, технология визуального проектирования и событийного программирования, среда программирования Visual Studio 2010 Professional, язык программирования Visual C++.

Ключевые термины: имитационная модель, генератор псевдослучайных чисел, модельное время.

Постановка задачи: разработайте имитационную модель и программное приложение на языке Visual C++, формализующее алгоритм решения задачи.

4.7.1 Варианты заданий 1

Производственная поточная линия включает два металлорежущих станка, обрабатывающих заготовки, и два магазина-накопителя, осуществляющих хранение заготовок ёмкостью n и m соответственно (рисунок 4.2).

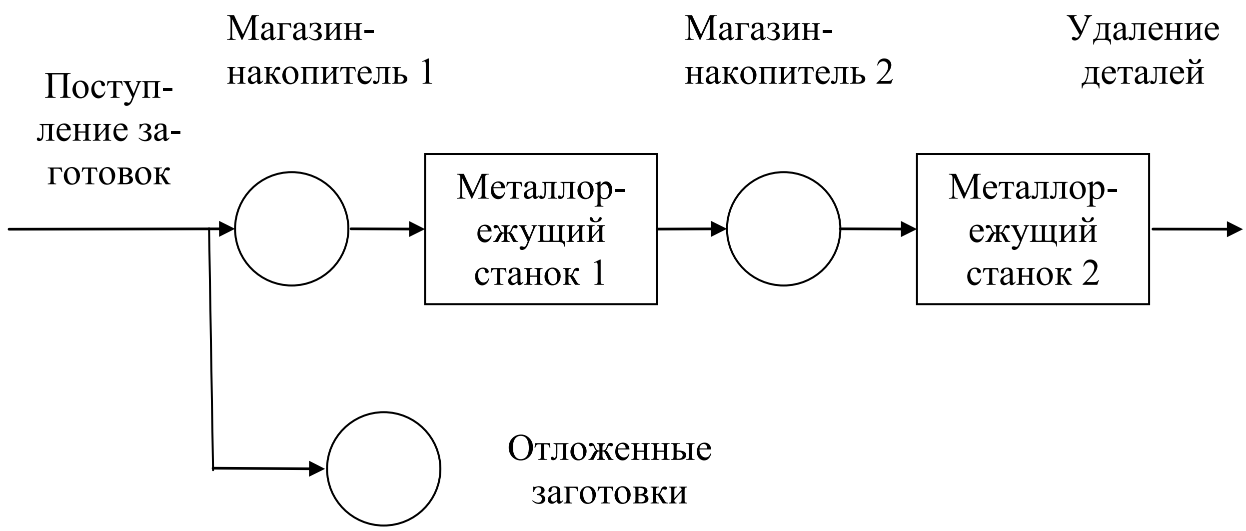


Рисунок 4.2 – Производственная поточная линия

Одновременно на поточной линии могут находиться N заготовок, включая обрабатываемые. Обработка заготовок, которые не могут разместиться в пределах линии из-за недостатка свободного пространства, откладывается. Интервалы времени между запросами на обработку заготовок распределены экспоненциально с математическим ожиданием, равным μ. Времена обработки заготовок распределены экспоненциально. На первом металлорежущем станке обработка занимает α единиц времени, на втором – β единиц времени. Заготовки автоматически транспортируются от первого металлорежущего станка ко второму станку за очень малый промежуток времени. Если очередь ко второму металлорежущему станку заполнена до конца, то первый станок блокируется. На заблокированный металлорежущий станок заготовки не поступают. Для оценки работы поточной линии определяются за период T единиц времени статистические данные:

- загрузка металлорежущих станков;
- время обработки одной заготовки;
- число заготовок, обработка которых отложена;
- число заготовок, находящихся в очереди к каждому станку;
- доля времени, в течение которого первый станок заблокирован.

Исходные данные задачи по вариантам представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Варианты исходных данных

Вариант	Ёмкость 1 магазина-накопителя заготовок n, шт.	Ёмкость 2 магазина-накопителя заготовок m, шт.	Математическое ожидание, μ	Время обработки заготовок на 1 станке α, ед.	Время обработки заготовок на 2 станке β, ед.	Количество заготовок N, шт.	Время моделирования T, ед.
1	4	2	0,40	0,25	0,5	8	300
2	5	2	0,30	0,35	0,6	9	400
3	3	2	0,50	0,30	0,55	10	350
4	5	3	0,40	0,40	0,5	8	450
5	6	4	0,25	0,25	0,6	7	500
6	6	3	0,35	0,35	0,45	9	350
7	4	3	0,45	0,45	0,5	10	300
8	7	4	0,50	0,30	0,6	12	450
9	7	3	0,40	0,25	0,5	9	400
10	6	5	0,35	0,35	0,6	10	500

Исследовать способы улучшения показателей функционирования поточной линии:

- увеличить число мест для ожидания у первого станка;
- повысить производительность первого станка;
- увеличить число мест для ожидания у второго станка;
- повысить производительность второго станка.

Определить влияние указанных параметров на характеристики поточной линии:

- вероятность откладывания поступившей заявки;

- среднее время пребывания заявки в системе;

- вероятность пребывания первого станка в заблокированном состоянии.

Построить графики зависимостей:

- зависимость вероятности откладывания от размера буфера первого рабочего места;

- зависимость среднего времени пребывания заявки от размера буфера первого рабочего места;

- зависимость вероятности блокировки от размера буфера первого рабочего места;

- зависимость вероятности откладывания от размера буфера второго рабочего места;

- зависимость среднего времени пребывания заявки от размера буфера второго рабочего места;

- зависимость вероятности блокировки от размера буфера второго рабочего места;

- зависимость вероятности откладывания от быстродействия первого рабочего места;

- зависимость среднего времени пребывания заявки от быстродействия первого рабочего места;

- зависимость вероятности блокировки от быстродействия первого рабочего места;

- зависимость вероятности откладывания от быстродействия второго рабочего места;

- зависимость среднего времени пребывания от быстродействия второго рабочего места;

- зависимость вероятности блокировки от быстродействия второго рабочего места.

4.7.2 Варианты заданий 2

Вариант 1. Врачи Иванов и Петров ведут с 9.00 утренний приём больных. Приёмная открывается в 8.30, а закрывается в 10.00 утра. Секретарь сохраняет записи об обращениях пациентов за последние десять недель, кроме того врачи ведут учёт пациентов, принятых ими в часы консультаций. Входной поток имеет структуру (таблица 4.2).

Таблица 4.2 – Модель входного потока пациентов

Промежуток между появлениями пациентов, мин	1	2	3	4	5	6	7	8
Вероятность	0,05	0,05	0,10	0,20	0,40	0,10	0,05	0,05

Одна половина регистрируется у доктора Иванова, другая регистрируется у доктора Петрова. Они образуют две отдельные очереди, обслуживаемые по принципу FIFO (First In – First Out). Если свободен другой доктор, то 90% пациентов высказывают желание обратиться к нему, когда подошла очередь, а их доктор занят. Распределение времени консультаций обоих докторов, имеет вид (таблица 4.3).

Таблица 4.3 – Продолжительность консультаций

Продолжительность консультаций, мин	6	8	10	12	14
Вероятность	0,10	0,20	0,50	0,10	0,10

Для каждого пациента отводится время на консультацию независимо от того, какой доктор обслуживает. Можно ввести в модель два типа распределений времени консультаций для каждого врача.

Разработать имитационную модель, оценить входной поток пациентов в часы утреннего приёма и ответить на вопросы.

1 Какое число пациентов ожидает в приёмной в 9.00 часов утра?

2 Чему равно среднее время ожидания пациентов приёма в очереди?

3 В котором часу каждого доктора покидает последний пациент?

Вариант 2. Ремонтная мастерская производит продажу и ремонт покрышек к автомобилям. Приход клиентов носит случайный характер, система предварительной записи отсутствует. Временные интервалы между последовательными моментами прихода клиентов представлены в таблице 4.4.

Таблица 4.4 – Временные интервалы появления клиентов

Временные интервалы между прибытием клиентов, мин	0	5	10	15	20	25	30	35
Вероятность	0,04	0,08	0,15	0,30	0,20	0,13	0,08	0,02

Время, необходимое для осмотра и замены покрышек, изменяется от 21 до 40 минут равновероятно. В ремонтной мастерской используется одна оборудованная монтажная площадка и место для парковки ещё одного автомобиля. Вне мастерской есть ещё место для парковки только одного автомобиля. Стоянка на близлежащей дороге запрещена, поэтому водитель, который подъехал в тот момент, когда заняты монтажная площадка и оба отведённых для парковки места, вынужден будет уехать и является потерянным клиентом. Потеря каждого клиента для мастерской обходится в 50 у.е. Если сделать реконструкцию, то внутри ремонтной мастерской можно оборудовать вторую монтажную площадку, но место для парковки внутри мастерской придётся демонтировать. Это не представляет проблемы, т. к. длина очереди и порядок продвижения клиентов останутся неизменными. Стоимость эксплуатации второй монтажной площадки составляет 35 у.е. в час.

Построить имитационную модель с 25 клиентами. Ответить на вопрос: следует ли ремонтной мастерской вводить в эксплуатацию монтажную площадку?

Вариант 3. Автомобильная фирма производит легковые автомобили. Аккумуляторы для автомобилей компания закупает у внешнего поставщика. Спрос на аккумуляторы за неделю имеет нормальное распределение со средним значением 500 и среднеквадратическим отклонением 10 для промежутка от 470 до 530. Начальный запас аккумуляторов составляет 2000 штук. Администрация фирмы приняла решение о подачах заказов на партии аккумуляторов размером в 2500 штук, каждый раз, когда их запас опускается ниже уровня в 1500 штук. Интервалы времени между подачей заказа и осуществлением поставок изменяется следующим образом (таблица 4.5).

Таблица 4.5 – Распределение времени поставки заказа

Время поставки заказа, недели	1	2	3	4
Вероятность	0,20	0,50	0,25	0,05

Единичная стоимость хранения запасов равна 0,50 у.е. в неделю и рассчитывается для общего размера запаса, оставшегося на конец недели. Стоимость заказа – 50 у.е. Отсутствие аккумуляторов на складе оценивается в 20 у.е. в неделю.

Разработать имитационную модель для периодов 20 недель. Оценить среднюю стоимость проведения изложенной политики в неделю. Расчёты производятся в конце недели, а подачи заказов и поставки по ним – в начале недели.

Вариант 4. Городская администрация контролирует услуги микроавтобусов, которые развозят туристов и покупателей с автобусного и железнодорожного вокзалов в различные районы города. Данные о потоке пассажиров, прибывающих на автобусную остановку, находящуюся около железнодорожного вокзала, приведены в таблице 4.6.

Таблица 4.6 – Интервалы прибытия пассажиров на автобусную остановку

Время между моментами прибытия пассажиров, мин	0	1	2	3	4	5	6
Вероятность	0,04	0,16	0,24	0,28	0,16	0,10	0,02

По расписанию микроавтобусы должны прибывать каждые 10 минут, однако изменчивость транспортных условий приводит к расписанию прибытия (таблица 4.7).

Таблица 4.7 – Интервалы между последовательными прибытиями автобусов

Интервалы между последовательными прибытиями автобусов, мин	8	10	12	14	16
Вероятность	0,10	0,38	0,28	0,15	0,09

Число мест в автобусе определяется распределением (таблица 4.8).

Таблица 4.8 – Распределение числа мест в автобусе

Число свободных мест	0	1	2	3	4	5	6
Вероятность	0,06	0,18	0,27	0,34	0,11	0,03	0,01

Построить имитационную модель потока из 30 пассажиров, прибывающих на автобусную остановку, в предположении, что моделируемый счётчик времени установлен на нулевой отметке. Оценить среднее время ожидания автобуса пассажиром и среднюю длину очереди.

Вариант 5. Корпорация производит операции со всеми клиентами в 30-дневный срок. Как показывает опыт, 80% всех счетов закрывается в течение одного месяца, а 70% оставшихся счетов – в течение следующего месяца после того, как клиенту посылается стандартное письмо-напоминание о просроченных счетах. Половина счетов остаётся неоплаченной в течение двух месяцев. После того, как было отправлено письмо, содержащее «последнее предупреждение», выплаты производятся в течение третьего месяца.

Со всеми счетами, которые оказались неоплаченными в течение трёх месяцев, поступают одним из двух возможных способов. Если сумма на счету превышает 1000 у.е., то для того, чтобы вернуть деньги, компания прибегает к законодательным процедурам. Принимая во внимание связанные с судебными процедурами издержки, доля каждой суммы, которую в конечном счёте удаётся вернуть, варьирует следующим образом (таблица 4.9).

Таблица 4.9 – Доля исходной денежной суммы, которую удаётся вернуть

Доля исходной денежной суммы, которую удаётся вернуть, %	0-40	40-60	60-80	80-100
Вероятность	0,10	0,30	0,40	0,20

Прежде, чем окончательные выплаты будут произведены, проходит, как правило, не менее трёх месяцев.

Если денежная сумма на счету составляет менее 1000 у.е., то компания продаёт неоплаченные счета другой компании, специализирующейся на скупке долговых обязательств, получая за это 50% исходной суммы, выплаты которой производятся в течение одного месяца, т. е. к концу четвёртого месяца.

Сумма счетов, выписанных компанией за последние месяцы, распределяется следующим образом (таблица 4.10).

Таблица 4.10 – Распределение суммы счетов

Сумма на счету	0-200	200-500	500-1000	1000-2000	2000-5000
Вероятность	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Связь между суммой счёта в момент его оплаты и долей общей суммы, которую удаётся возвратить, отсутствует. Оплата всех счетов производится в последний день каждого месяца. Темпы роста основного капитала компании равны 1,5%.

Определить вероятность того, что выплаты по любому счёту будут произведены в конце второго месяца, третьего месяца, четвёртого месяца, шестого месяца.

Определить, какова ожидаемая стоимость в настоящий момент нового счёта, размер неоплаченной суммы которого составляет 2000 у.е. Значения ежемесячных коэффициентов дисконтирования приведены в таблице 4.11.

Таблица 4.11 – Значения ежемесячных коэффициентов дисконтирования

Месяц	1	2	3	4	5	6
Коэффициент	0,9852	0,9707	0,9563	0,9422	0,9283	0,9145

Построить имитационную модель системы в целом и определить текущее значение стоимости двух моделируемых счетов, используя случайные числа (таблица 4.12).

Таблица 4.12 – Случайные числа

Счёт 1	8	8	7	5	7
Счёт 2	9	9	8	2	9

Вариант 6. Администрация корпорации рассматривает вопрос о покупке новой упаковочной машины с автоматическим управлением. Новая машина позволяет ликвидировать две старые, которые в настоящее время применяются для упаковки продукта X. Ввиду более высокой автоматизации технологического процесса новая машина позволит сократить затраты на оплату труда, а ввиду её более высокой производительности – увеличить объёмы производства. В связи со значительным ростом спроса на продукт X, по оценкам специалистов, установка новой машины приведёт к увеличению прибыли за каждый из ближайших трёх лет. Ввиду неопределённости спроса ежегодный приток капитала, вызванный покупкой новой машины, нельзя оценить точно, поэтому при расчёте за каждый год использовались вероятностные оценки (таблица 4.13).

Таблица 4.13 – Ежегодный приток капитала

Ежегодный приток капитала, тыс. у.е.					
1-й год	Вероятность	2-й год	Вероятность	3-й год	Вероятность
10	0,3	10	0,1	10	0,3
15	0,4	20	0,2	20	0,5
20	0,3	30	0,4	30	0,2
		40	0,3		

В объёмах продаж продуктов X существует неопределённость, поэтому для решения вопроса о целесообразности или нецелесообразности покупки упаковочной машины необходимо учитывать величину притока капитала только за ближайшие три года. Чистая стоимость новой машины за вычетом ликвидационной стоимости старого оборудования составит 42000 у.е. Налоги не учитываются.

Определить, какая из комбинаций ежегодных притоков капитала приведёт к отрицательному значению общего притока капитала, а также вероятность появления этого события, не принимая во внимание изменение стоимости во времени.

Рассчитать на основе средних значений притока капитала за каждый год текущее значение чистой стоимости новой машины, если стоимость капитала для компании равна 15%. Соответствующие коэффициенты дисконтирования приведены в таблице 4.14.

Таблица 4.14 – Коэффициенты дисконтирования

Год	Значение коэффициента дисконтирования
1	0,8696
2	0,7561
3	0,6575

Построить имитационную модель расчёта текущего значения чистой стоимости, оценить значение риска, соответствующее данной ситуации. При моделировании 5 множеств притоков капитала используйте приведённые значения случайных чисел (таблица 4.15).

Таблица 4.15 – Значения случайных чисел

Год	Множество 1	Множество 2	Множество 3	Множество 4	Множество 5
1-й	4	7	6	5	0
2-й	2	4	8	0	1
3-й	7	9	4	0	1

На основе полученных результатов рассчитать ожидаемое значение чистой стоимости на настоящий момент и вероятность того, что внедрение новой машины приведёт к получению отрицательного значения чистой стоимости на настоящий момент.

Вариант 7. Мойщик машин установил оборудование на автомобильной стоянке около транспортной магистрали. На автомобильной стоянке могут находиться одновременно максимум два автомобиля, включая автомобиль, обслуживание которого производится в данный момент, причём в соответствии с правилами движения стоянка на дороге запрещена. Следовательно, клиент, подъезжающий к стоянке в тот момент, когда все места парковки заняты, является потерянным для мойщика машин. Распределение интервалов времени прибытия потенциальных клиентов и распределение времени обслуживания приведены в таблице 4.16.

Таблица 4.16 – Интервалы времени между прибытием и длительность обслуживания

Время, мин	Интервалы между прибытием, %	Длительность обслуживания, %
0-2	15	10
2-4	50	25
4-6	20	30
6-8	5	25
8-10	5	10
10-12	5	0
Итого:	100	100

Оценить среднее число потенциальных клиентов в час.

Используя случайные числа, приведённые в таблице 4.17, построить имитационную модель работы машин по обслуживанию 10 потенциальных клиентов и оценить число потерянных клиентов за 1 час.

Таблица 4.17 – Случайные числа для интервалов прибытия и длительности обслуживания

Номер клиента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайные числа для интервалов прибытия	87	69	19	21	62	07	31	30	60	88
Случайные числа для длительности обслуживания	90	67	83	32	65	18	74	8	18	38

Вариант 8. Адвокаты Николаев и Михайлов ведут с 9.00 приём граждан. Юридическая контора открывается в 8.30, а закрывается в 10.00 утра. Секретарь сохраняет записи об обращениях пациентов за последние десять недель, кроме того адвокаты ведут учёт граждан, принятых ими в часы консультаций по юридическим вопросам. Входной поток имеет структуру (таблица 4.18).

Таблица 4.18 – Модель входного потока клиентов

Промежуток между появлениями клиентов, мин	1	2	3	4	5	6	7	8
Вероятность	0,04	0,06	0,12	0,18	0,35	0,15	0,07	0,03

Одна половина регистрируется у адвоката Николаева, другая регистрируется у адвоката Михайлова. Они образуют две отдельные очереди, обслуживаемые по принципу FIFO (First In – First Out). Если свободен другой адвокат, то 80% пациентов высказывают желание обратиться к нему, когда подошла очередь, а их адвокат занят. Распределение времени консультаций обоих адвокатов приведено в таблице 4.19.

Таблица 4.19 – Продолжительность консультаций

Продолжительность консультаций, мин	6	8	10	12	14
Вероятность	0,14	0,25	0,30	0,16	0,15

Для каждого клиента отводится время на консультацию независимо от того, какой адвокат консультирует. Можно ввести в модель два типа распределений времени консультаций для каждого адвоката.

Разработать имитационную модель, оценить входной поток граждан в часы приёма и ответить на вопросы.

1 Какое число граждан ожидает в приёмной в 9.00 часов утра?

2 Чему равно среднее время ожидания граждан приёма в очереди?

3 В котором часу каждого адвоката покидает последний клиент?

Вариант 9. Станция технического обслуживания производит техническое обслуживание автомобилей. Приход клиентов носит случайный характер. Временные интервалы между последовательными моментами прихода клиентов представлены в таблице 4.20.

Таблица 4.20 – Временные интервалы появления клиентов

Временные интервалы между прибытием клиентов, мин	0	5	10	15	20	25	30	35
Вероятность	0,06	0,15	0,20	0,25	0,15	0,10	0,05	0,04

Время, необходимое для осмотра и технического обслуживания, изменяется от 20 до 55 минут равновероятно. На станции технического обслуживания используется одна оборудованная смотровая площадка и место для парковки ещё одного автомобиля. Вне станции техобслуживания есть ещё место для парковки только одного автомобиля. Стоянка на близлежащей дороге запрещена, поэтому водитель, который подъехал в тот момент, когда заняты смотровая площадка и оба отведённых для парковки места, вынужден будет уехать и является потерянным клиентом. Потеря каждого клиента для мастерской обходится в 60 у.е. Если сделать реконструкцию, то внутри станции технического обслуживания можно оборудовать вторую смотровую площадку, но место для парковки внутри станции технического обслуживания придётся демонтировать. Это не представляет проблемы, т. к. длина очереди и порядок продвижения клиентов останутся неизменными. Стоимость эксплуатации второй смотровой площадки составляет 45 у.е. в час.

Построить имитационную модель с 20 клиентами. Ответить на вопрос: следует ли станции технического обслуживания вводить в эксплуатацию смотровую площадку?

Вариант 10. Фирма производит компьютеры. Комплектующие изделия для компьютеров компания закупает у внешнего поставщика. Спрос на комплектующие изделия за неделю имеет нормальное распределение со средним значением 600 и среднеквадратическим отклонением 8 для промежутка от 560 до 640. Начальный запас комплектующих изделий составляет 3000 штук. Администрация фирмы приняла решение о подачах заказов на партии комплектующих размером в 3500 штук, каждый раз, когда их запас опускается ниже уровня в 1800 штук. Интервалы времени между подачей заказа и осуществлением поставок изменяется следующим образом (таблица 4.21).

Таблица 4.21 – Распределение времени поставки заказа

Время поставки заказа, недели	1	2	3	4
Вероятность	0,15	0,50	0,20	0,15

Единичная стоимость хранения запасов равна 0,60 у.е. в неделю и рассчитывается для общего размера запаса, оставшегося на конец недели. Стоимость заказа – 60 у.е. Отсутствие комплектующих изделий на складе оценивается в 25 у.е. в неделю.

Разработать имитационную модель для периодов 25 недель. Оценить среднюю стоимость проведения изложенной политики в неделю. Расчёты производятся в конце недели, а подачи заказов и поставки по ним – в начале недели.

4.7.3 Методические указания

1 Выбрать вариант задания по последней цифре номера зачетной книжки.

2 Разработать имитационную модель. Для вариантов заданий 2 использовать таблицы случайных чисел и программные генераторы случайных чисел.

3 Разработать алгоритм решения задачи.

4 Разработать программное приложение.

6 Оформить отчет по самостоятельной работе.

Содержание отчета должно включать следующее.

Титульный лист.

1 Постановка задачи.

2 Описание алгоритма решения задачи.

3 Для варианта заданий 2 таблица статистического эксперимента.

4 Скриншоты.

5 Листинги программы.

4.7.4 Контрольные вопросы

1 Что называется имитационной моделью?

2 Какая используется классификация имитационных моделей?

3 Какие существуют этапы имитационного моделирования?

4 Какая существует структура имитационной модели?

5 Что называется псевдослучайным числом?

6 Какие существуют методы генерации псевдослучайных чисел?

7 Какие существуют методы моделирования зависимых событий?

8 Какие существуют виды случайных величин?
9 Какие применяются методы моделирования случайных величин?
10 Какие применяются методы моделирования случайных векторов?

5 Системы массового обслуживания в моделировании систем

5.1 Основные понятия и определения. Классификация систем массового обслуживания

Система массового обслуживания(СМО) – совокупность взаимосвязанных и целенаправленно взаимодействующих однотипных обслуживающих устройств.

Системы массового обслуживания по времени пребывания требований в очереди до начала обслуживания системы подразделяются на три вида:

- с неограниченным временем ожидания (с ожиданием);
- с отказами;
- смешанного типа.

5.2 Моделирование систем массового обслуживания

Переход системы массового обслуживания из одного состояния в другое происходит случайным образом и представляет случайный процесс. Работа системы массового обслуживания – случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Наибольшее распространение получил случайный процесс без последствий (Марковский процесс): в любой момент времени характеристики процесса в будущем зависят от состояния в настоящий момент и не зависят от прошлого.

При моделировании СМО используют уравнения А.Н. Колмогорова. Уравнения А.Н. Колмогорова позволяют вычислить все вероятности состояний S_i СМО в функции времени $p_i(t)$.

Для СМО, имеющей граф из трёх состояний S_0, S_i, S_2 (рисунок 5.1), система уравнений А.Н. Колмогорова имеет вид:

Выходящие Входящие

Для состояния S_0 ----> $p_0 * \lambda_{01} = p_1 * \lambda_{10}$

Для состояния S_1 -----> $p_1 * (\lambda_{10} + \lambda_{12}) = p_0 * \lambda_{01} + p_{21} * \lambda_{21}$

Для состояния S_2 ----> $p_2 * \lambda_{21} = p_1 * \lambda_{12}$

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1$$

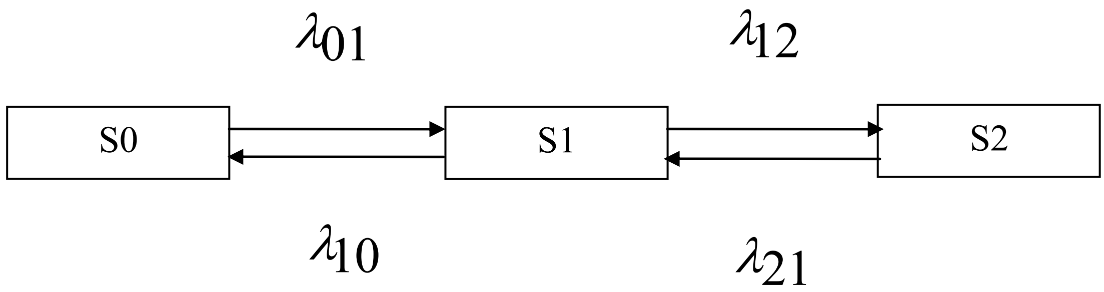


Рисунок 5.1 – Граф состояний СМО

5.3 Модели систем массового обслуживания

5.3.1 Одноканальная система массового обслуживания с отказами в обслуживании

Одноканальная СМО с отказами в обслуживании имеет входной пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ, а обслуживание происходит под действием пуассоновского потока с интенсивностью μ (рисунок 5.2).

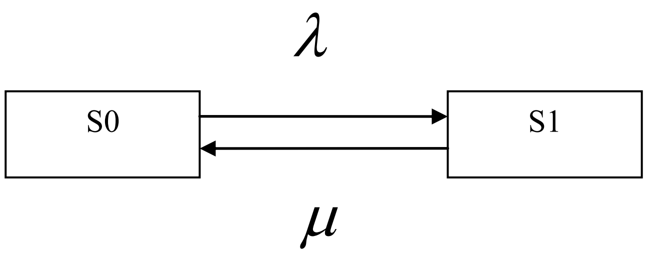


Рисунок 5.2 – Граф состояний одноканальной СМО (S_0– канал обслуживания свободен, S_1– канал занят обслуживанием)

Вероятность того, что канал свободен и не занят обслуживанием определяется по формуле 5.1:

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} * e^{-(\lambda+\mu)*t}. \tag{5.1}$$

Вероятность занятости канала определяется по формуле 5.2:

$$p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} * e^{-(\lambda+\mu)*t}. \tag{5.2}$$

При $t->\infty$ вероятность $p_0(t)$ определяется по формуле:

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \tag{5.3}$$

При $t->\infty$ вероятность $p_1(t)$ определяется по формуле:

$$p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \qquad (5.4)$$

Функции $p_0(t)$ и $p1(t)$ определяют переходный процесс в одноканальной СМО и описывают процесс экспоненциального приближения СМО к предельному состоянию с постоянной времени $\tau = \frac{1}{\lambda + \mu}$.

Доля обслуживаемых заявок по отношению ко всему потоку заявок определяется величиной:

$$Q = \frac{\lambda * p_0(t)}{\lambda} = p_0(t). \qquad (5.5)$$

При $t -> \infty$ ($t > 3\tau$) относительная пропускная способность определяется по формуле:

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \qquad (5.6)$$

Абсолютная пропускная способность, определяющая число заявок, обслуживаемых в единицу времени в пределе при $t -> \infty$ определяется по формуле:

$$A = \frac{\lambda * \mu}{\lambda + \mu} = \lambda * Q. \qquad (5.7)$$

Доля заявок, получивших отказ, определяется по формуле:

$$P_{отказ} = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \qquad (5.8)$$

Общее число необслуженных заявок определяется по формуле:

$$N = \frac{\lambda^2}{\lambda + \mu}. \qquad (5.9)$$

Примерами одноканальных СМО с отказами в обслуживании являются стол заказов в магазине, диспетчерская автотранспортного предприятия, контора склада, офис управления коммерческой фирмы, с которыми устанавливается связь по телефону.

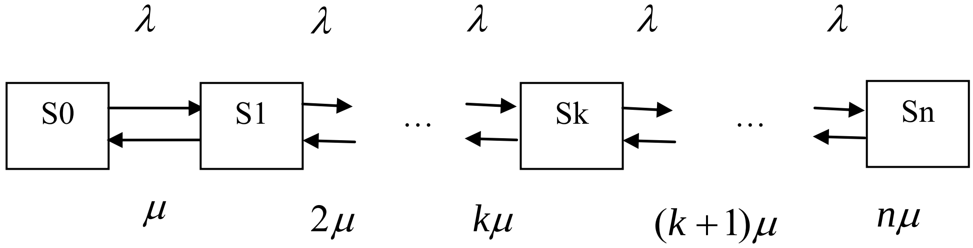
5.3.2 Многоканальная система массового обслуживания с отказами в обслуживании

Многоканальная СМО с отказами в обслуживании на вход которой поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ (рисунок 5.3).

Случайный процесс представляет частный случай процесса «рождения-гибели» и описывается системой дифференциальных уравнений Эрланга, позволяющие получить выражения для предельных вероятностей состояния рассматриваемой системы, называемые формулами Эрланга:

$$P_0 = [\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}]^{-1}; \ P_k = \frac{\rho^k}{k!} * P_0; \ \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \qquad (5.10)$$

Характеристики системы обслуживания определяются посредством вычисления вероятностей состояний n-канальной СМО с отказами p_0, p_1, $p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_n$.



(S_0 – все каналы свободны, $k = 0$; S_1 – занят только один канал, $k = 1$; S_2 – заняты только два канала, $k = 2$;… S_k – заняты только k каналов;… S_n – заняты все n каналов)

Рисунок 5.3 – Граф состояний многоканальной СМО с отказами

Вероятность отказа в обслуживании определяется вероятностью того, что поступившая заявка на обслуживание найдёт все n каналов занятыми, система будет находиться в состоянии S_n.

$$p_{отк} = p_n = p_0 * \frac{\rho^n}{n!};\; k = n. \qquad (5.11)$$

В системах с отказами события отказа и обслуживания составляют полную группу событий $p_{отк} + p_{обс} = 1$.

Относительная пропускная способность определяется по формуле:

$$Q = p_{обсл} = 1 - p_{отк} = 1 - p_n. \qquad (5.12)$$

Абсолютная пропускная способность СМО определяется по формуле:

$$A = \lambda * p_{обсл}. \qquad (5.13)$$

Вероятность обслуживания, или доля обслуживания заявок, определяет относительную пропускную способность СМО, которая рассчитывается по формуле:

$$Q = p_{обс} = \frac{n_з}{\rho}, \qquad (5.14)$$

где $n_з$ – число заявок, находящихся на обслуживании.

Среднее число заявок, находящихся на обслуживании определяется по формуле:

$$\overline{n_з} = \rho * p_{обс} = \frac{A}{\mu}. \qquad (5.15)$$

Вероятность занятости каналов обслуживанием, которая учитывает среднее время занятости $\bar{t}_з$ и простоя $\bar{t}_{пр}$ каналов определяется по формуле:

$$p_{зан} = \frac{\bar{t}_з}{\bar{t}_з + \bar{t}_{пр}}. \tag{5.16}$$

Среднее время простоя каналов определяется по формуле:

$$t_{пр} = \bar{t}_{обс} * \frac{1 - p_{зан}}{p_{зан}}. \tag{5.17}$$

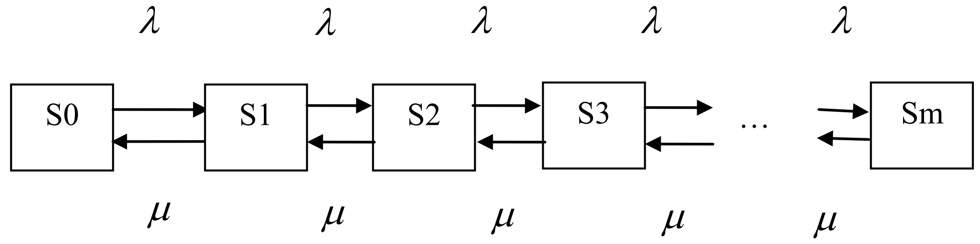
Среднее время пребывания заявки в системе в установившемся режиме определяется по формуле Литтла

$$T_{СМО} = \bar{n}_з / \lambda \tag{5.18}$$

Примером многоканальных СМО с отказами в обслуживании являются офисы предприятий с несколькими телефонными каналами.

5.3.3 Одноканальная система массового обслуживания с ограниченной длиной очереди

Одноканальная СМО с ограниченной очередью, в которой число мест в очереди m – фиксированная величина. Заявка, поступившая в момент, когда все места в очереди заняты, не принимается к обслуживанию, не встаёт в очередь и покидает систему (рисунок 5.4).



(S_0– канал обслуживания свободен, S_1 – канал обслуживания занят, но очереди нет; S_2– канал обслуживания занят, в очереди стоит одна заявка, S_3– канал обслуживания занят, в очереди стоят две заявки;… S_{m+1} – канал обслуживания занят, в очереди все m места заняты, любая следующая заявка получает отказ)

Рисунок 5.4 – Граф состояний одноканальной СМО с ограниченной очередью

Основные характеристики одноканальной СМО с ожиданием:
- относительная пропускная способность;
- абсолютная пропускная способность;
- вероятность отказа;
- средняя длина очереди;
- среднее время ожидания заявки в очереди.

Вероятность отказа определяется вероятностью появления состояния S_{m+1} по формуле:

$$p_{отк} = p_{n+1} = \rho^{m+1} * p_0. \quad (5.19)$$

Относительная пропускная способность, или доля обслуживаемых заявок, поступающих в единицу времени, определяется по формуле:

$$Q = 1 - p_{отк} = 1 - \rho^{m+1} * p_0. \quad (5.20)$$

Абсолютная пропускная способность определяется по формуле:

$$A = Q * \lambda. \quad (5.21)$$

Среднее число заявок, стоящих в очереди на обслуживание, определяется математическим ожиданием случайной величины k – числа заявок, стоящих в очереди, по формуле:

$$L_{оч} = M(k). \quad (5.22)$$

Случайная величина k принимает целочисленные значения: 1 – в очереди стоит одна заявка, 2 – в очереди две заявки, …, m – в очереди все места заняты. Вероятности значений определяются вероятностями состояний, начиная с состояния S_2 (таблица 5.1).

Таблица 5.1 – Вероятности значений k

k	1	2	…	m
p_i	p_2	p_3	…	p_{m+1}

В случае $\rho = 1$, когда все вероятности p_k оказываются одинаковыми среднее число заявок рассчитывается по формуле:

$$L'_{оч} = \frac{m*(m+1)}{2} * p_0 = \frac{m*(m+1)}{2*(m+2)}. \quad (5.23)$$

Среднее время ожидания обслуживания заявки в очереди определяется формулами Литтла:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}, \text{ при } \rho \neq 1, \quad (5.24)$$

$$T'_{оч} = \frac{L'_{оч}}{\lambda}, \text{ при } \rho = 1. \quad (5.25)$$

5.3.4 Одноканальная система массового обслуживания с неограниченной длиной очереди

Одноканальная СМО с ожиданием обслуживания, на которую поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ и интенсивностью обслуживания μ приведена на рисунке 5.5. Заявка, поступившая в момент, когда канал занят обслуживанием, ставится в очередь и ожидает обслуживания.

Ограничение на длину очереди отсутствует, любая заявка может быть обслужена, поэтому $p_{обс} = 1$, относительная пропускная способность

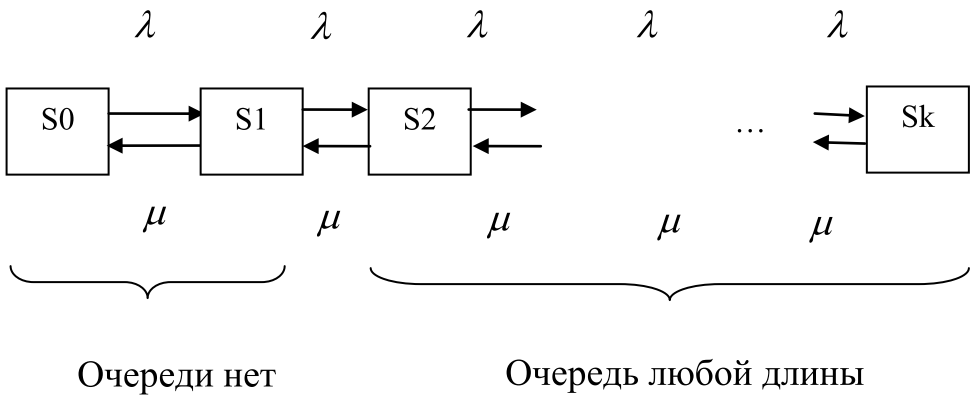
$Q = p_{обс} = 1$, соответственно $p_{отк} = 0$, а абсолютная пропускная способность $A = \lambda * Q = \lambda$.

Вероятность пребывания в очереди k заявок определяется по формуле:

$$p_k = \rho^k * (1 - \rho). \qquad (5.26)$$

Среднее число заявок в очереди определяется по формуле:

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1 + \rho}. \qquad (5.27)$$



(S_0 – канал свободен, очереди нет, $k = 0$; S_1 – канал занят обслуживанием, очереди нет; $k = 1$, S_2 – канал занят, одна заявка в очереди, $k = 2$, … S_k – канал занят $(k - 1)$, заявка в очереди)

Рисунок 5.5 – Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью

Среднее число заявок в системе рассчитывается по формуле:

$$L_{СМО} = L_{оч} + \rho = \frac{\rho}{1 - \rho}. \qquad (5.28)$$

Среднее время ожидания обслуживания в очереди определяется по формуле:

$$T_{оч} = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)} = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)} = \frac{L_{оч}}{\lambda}. \qquad (5.29)$$

Среднее время пребывания заявки в системе определяется по формуле:

$$T_{смо} = T_{оч} + \bar{t}_{обс} = \frac{1}{\mu(1 - \rho)} = \frac{L_{смо}}{\lambda}. \qquad (5.30)$$

Если интенсивность поступления заявок больше интенсивности обслуживания $\lambda > \mu$, то очередь будет постоянно увеличиваться. Наибольший интерес представляет анализ устойчивых СМО, работающих в стационарном режиме при $\lambda < \mu$, $\rho < 1$.

5.3.5 Многоканальная система массового обслуживания с ограниченной длиной очереди

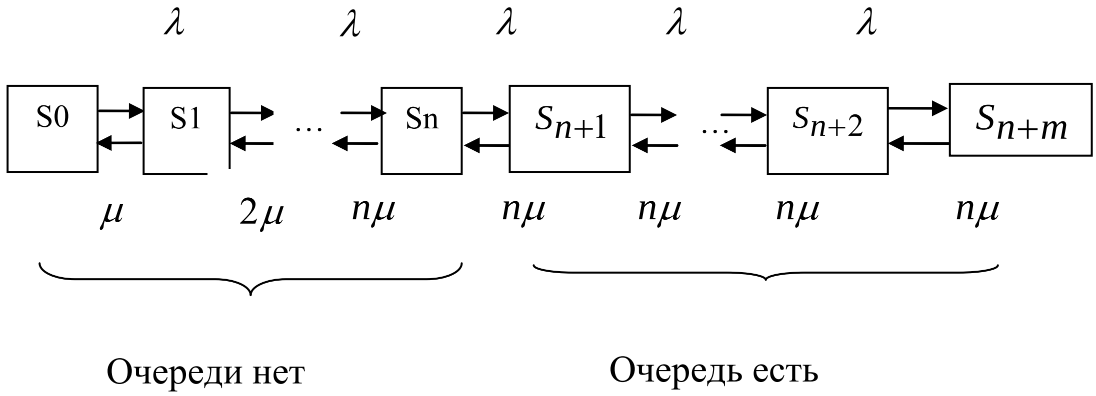
Многоканальная СМО (n>1), на вход которой поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ, а интенсивность обслуживания каждого канала составляет μ, максимально возможное число мест в очереди ограничено величиной m представлена на рисунке 5.6.

Образование очереди возможно, когда вновь поступившая заявка застанет в системе не менее n требований, т. е. когда в системе будет находиться *n*, *n+1*, *n+2*, …, *(n+m-1)* требований. Эти события независимы, поэтому вероятность того, что все каналы заняты, равна сумме вероятностей p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, …, p_{n+m-1}. Вероятность образования очереди рассчитывается по формуле:

$$p_{оч} = \sum_{k=n}^{n+m-1} p_k = \frac{\rho^n}{n!} * \frac{1-(\rho/n)^m}{1-\rho/n} * p_0 . \qquad (5.31)$$

Вероятность отказа в обслуживании наступит, когда все n каналов и все m мест в очереди заняты:

$$p_{отк} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m * n!} * p_0 ; \ k = n+m . \qquad (5.32)$$



(S_0– все каналы свободны, $k=0$; S_1 – занят только один канал (любой); $k=1$, S_2– заняты только два канала (любых), $k=2$, … S_n – заняты все n каналов, $k=n$. Пока СМО находится в любом из этих состояний очереди нет. После того как заняты все каналы обслуживания, последующие заявки образуют очередь, определяя дальнейшее состояние системы: S_{n+1} – заняты все n каналов и одна заявка стоит в очереди, $k=n+1$, S_{n+2} – заняты все n каналов и две заявки стоят в очереди, $k=n+2$, ,,,, $Sn+m$ – заняты все n каналов и все m мест в очереди, $k=n+m$)

Рисунок 5.6 – Граф состояний n-канальной СМО с ограничением на длину очереди m

Относительная пропускная способность рассчитывается по формуле:

$$Q = p_{обс} = 1 - p_{отк}. \tag{5.33}$$

Абсолютная пропускная способность рассчитывается по формуле:

$$A = \lambda * Q. \tag{5.34}$$

Среднее число занятых каналов определяется по формуле:

$$\overline{n}_з = A/\mu = \rho * Q. \tag{5.35}$$

Среднее число простаивающих каналов определяется по формуле:

$$\overline{n}_{пр} = n - \overline{n}_з. \tag{5.36}$$

Коэффициент занятости (использования) каналов определяется по формуле:

$$K_з = \overline{n}_з / n. \tag{5.37}$$

Коэффициент простоя каналов определяется по формуле:

$$K_{пр} = 1 - K_з. \tag{5.38}$$

Среднее число заявок, находящееся в очередях рассчитывается по формуле:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n * n!} * \frac{1 - (\rho/n)^m * (m + 1 - m * \rho/n)}{(1 - \rho/n)^2} * p_0. \tag{5.39}$$

Если $\rho/n = 1$ среднее число заявок, находящееся в очередях рассчитывается по формуле:

$$L'_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n * n!} * \frac{m * (m+1)}{2} * p_0. \tag{5.40}$$

Среднее время ожидания в очереди определяется формулами Литтла:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} \quad (\rho/n \neq 1), \tag{5.41}$$

$$T'_{оч} = \frac{L'_{оч}}{\lambda} \quad (\rho/n = 1). \tag{5.42}$$

Среднее время пребывания заявки в СМО определяется по формуле:

$$T_{смо} = \frac{L_{оч}}{\lambda} + \frac{Q}{\mu} \quad (\rho/n \neq 1), \tag{5.43}$$

$$T'_{смо} = \frac{L'_{оч}}{\lambda} + \frac{Q}{\mu} \quad (\rho/n = 1). \tag{5.44}$$

5.3.6 Многоканальная система массового обслуживания с неограниченной длиной очереди

Многоканальная СМО с ожиданием и неограниченной длиной очереди, на которую поступает поток заявок с интенсивностью λ и с интенсивностью обслуживания канала μ, представлена на рисунке 5.7. Отказов в обслуживании нет, поэтому характеристики пропускной способности равны: $p_{отк} = 0$; $Q = 1$; $A = \lambda$; $Q = \lambda$.

Среднее число заявок в очереди рассчитывается по формуле:

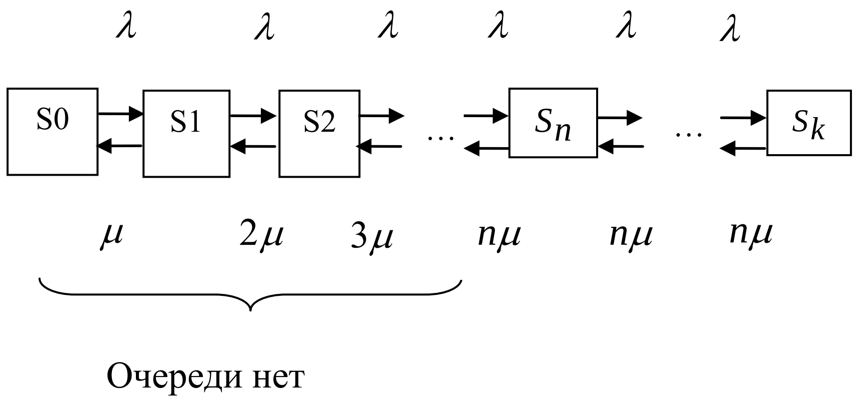
$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+r}}{n * n!(1 - \frac{\rho}{n})^2} * p_0. \quad (5.45)$$

Среднее время ожидания в очереди определяется по формуле:

$$T_{оч} = \frac{\rho^{n}}{n * \mu * n! * (1 - \frac{\rho}{n})^2} * p_0. \quad (5.46)$$

Среднее число заявок в СМО рассчитывается по формуле:

$$L_{смо} = L_{оч} + \rho. \quad (5.47)$$



(S_0– все каналы свободны, $k = 0$; S_1 – занят один канал, остальные свободны, $k = 1$; S_2– заняты два канала, остальные свободны $k = 2$; … S_n – заняты все n каналов, остальные свободны, $k = n$, очереди нет; S_{n+1} – заняты все n каналов, одна заявка в очереди, $k = n+1$; S_{n+r} – заняты все n каналов, r заявок в очереди, $k = n + r$)

Рисунок 5.7 – Граф состояний многоканальной СМО с неограниченной очередью m

Вероятность того, что СМО находится в состоянии S_0, когда нет заявок и не занято ни одного канала, определяется по формуле:

$$p_0 = [\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n! * (n-p)}]^{-1},\ k = 0. \quad (5.48)$$

Вероятность занятости обслуживания k заявок определяется по формуле:

$$p^k = \frac{\rho^k}{k!} * p_0,\ 1 \le k \le n. \quad (5.49)$$

Вероятность, или доля времени занятости всех каналов обслуживания определяется по формуле:

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} * p_0, \; k = n. \qquad (5.50)$$

Вероятность состояния, если все каналы заняты обслуживанием, определяется по формуле:

$$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n! * n^r} * p_0 = p_n * (\frac{\rho}{n})^r, \; k > n. \qquad (5.51)$$

Вероятность оказаться в очереди равна вероятности застать все каналы уже занятыми обслуживанием:

$$p_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n! * (n - p)} * p_0, \; k \geq n. \qquad (5.52)$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди и ожидающих обслуживания определяется по формуле:

$$L_{оч} = \frac{n}{n - p} * p_{оч}. \qquad (5.53)$$

Среднее время ожидания заявки в очереди начала обслуживания определяется по формуле:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}. \qquad (5.54)$$

Среднее время пребывания заявки в СМО определяется по формуле:

$$T_{смо} = T_{оч} + \bar{t}_{обс}. \qquad (5.55)$$

Среднее число занятых каналов обслуживания определяется по формуле:

$$\bar{n}_з = \lambda / \mu = \rho. \qquad (5.56)$$

Среднее число свободных каналов определяется по формуле:

$$\bar{n}_{св} = n - \rho. \qquad (5.57)$$

Коэффициент занятости каналов обслуживания определяется по формуле:

$$K_з = \bar{n}_з / n. \qquad (5.58)$$

Среднее число заявок в СМО определяется по формуле:

$$L_{смо} = L_{оч} + \bar{n}_з = L_{оч} + \rho. \qquad (5.59)$$

Параметр ρ характеризует степень согласования входного потока с интенсивностью входного обслуживания. Процесс обслуживания будет стабилен при $\rho < n$. Если $\rho \geq n$, в системе будут возрастать средняя длина очереди и среднее время ожидания начала обслуживания. В результате система массового обслуживания будет работать неустойчиво [4].

5.4 Практическая работа №5. Модели систем массового обслуживания

Цель: получить теоретические знания и практические навыки в моделировании систем методами теории массового обслуживания.

Используемые приемы и технологии: теория массового обслуживания, технология визуального проектирования и событийного программирования, среда программирования Visual Studio 2010 Professional, язык программирования Visual C++.

Ключевые термины: поток событий, интенсивность, вероятность, экспоненциальное распределение, пуассоновское распределение, модель системы массового обслуживания.

Постановка задачи: разработайте программное приложение, формализующее алгоритм решения задачи массового обслуживания.

5.4.1 Варианты заданий

Вариант 1. На оптовую базу прибывают автомашины с непродовольственными товарами. Поток простейший и поступает с интенсивностью 8 машин в час. На территории базы могут одновременно находиться не более 5 автомашин. На базе имеются 2 бригады грузчиков, которые разгружают автомашины. Среднее время разгрузки одной машины каждой бригады составляет 1 час. Определите основные показатели системы массового обслуживания оптовой базы и разработайте рекомендации по улучшению работы.

Вариант 2. В магазин самообслуживания поступает пуассоновский поток покупателей с интенсивностью 120 человек в час. В течение дня их обслуживают 3 контролёра-кассира с интенсивностью 90 покупателей в час. Интенсивность входного потока покупателей в часы «пик» возрастает до 400 покупателей/ч, а в часы «спада» достигает 100 покупателей/ч.

Определите вероятность образования очереди в магазине $P_{Оч}$ и среднюю длину очереди в течение дня, а затем необходимое число контролёров-кассиров в часы «пик» и часы «спада», обеспечивающих такую же длину очереди $L_{Оч}$ и вероятность её образования $P_{Оч}$ как и в номинальном режиме.

Вариант 3. Статистическими исследованиями в результате наблюдения установлено, что интенсивность потока телефонных звонков директору $\lambda = 1{,}2$ вызова в минуту, средняя продолжительность разговора (обслуживания заявки) $t_{Обс} = 2{,}5$ мин и все потоки событий (вызовов и обслуживания) имеют характер простейших пуассоновских потоков.

Определите предельную (относительную и абсолютную) пропускную способность системы массового обслуживания, вероятность отказа, полное число обслуженных и необслуженных (получивших отказ) заявок в течение 1 ч работы СМО.

Сравните фактическую пропускную способность СМО с номинальной, т. е. с пропускной, способностью, которой обладала бы система в том случае, если бы каждая заявка обслуживалась ровно 2,5 мин и все заявки следовали бы одна за другой без перерыва.

Вариант 4. Фирма занимается посреднической деятельностью по продаже автомобилей и осуществляет часть переговоров по 3 телефонным линиям. В среднем поступает 75 звонков в час. Среднее время предварительных переговоров справочного характера составляет 2 мин. Определите характеристики СМО, дайте оценку работы СМО.

Вариант 5. Туристическая фирма обслуживает клиентов по телефону, имеющему разветвление на 4 линии. Проведённые исследования показали, что в среднем за один час работы поступает 100 запросов. Среднее время переговоров референтов фирмы с клиентом по телефону составляет 2,5 мин.

Определите характеристики СМО, дайте оценку работы СМО.

Вариант 6. Булочная «Горячий хлеб» имеет одного контролёра-кассира. В течение часа приходят в среднем 54 покупателя. Средняя стоимость одной покупки составляет 7 рублей. Среднее время обслуживания контролёром-кассиром одного покупателя составляет 1 минута. Определите выручку от продажи, характеристики системы массового обслуживания и проведите анализ её работы.

Вариант 7. В парикмахерской работает один мужской мастер. Среднее время стрижки одного клиента составляет 20 минут. Клиенты в среднем приходят каждые 25 минут. Средняя стоимость стрижки составляет 60 рублей. В первую смену с 9 до 15 часов и во вторую смену с 15 до 21 часа работает по одному мастеру. Проведите анализ системы обслуживания.

Вариант 8. В магазин поступает поток покупателей с интенсивностью 6 покупателей в 1 минуту. Покупателей обслуживает три контролёра-кассира с интенсивностью 2 покупателя в минуту. Длина очереди ограничена 5 покупателями. Определите характеристики системы массового обслуживания.

Вариант 9. На плодоовощную базу в среднем через 30 минут прибывают автомашины с плодоовощной продукцией. Среднее время разгрузки одной машины составляет 1,5 часа. Разгрузку производят две бригады грузчиков. На территории базы у дебаркадера могут находиться в очереди в ожидании разгрузки не более 4 автомашин. Определите показатели и дайте оценку работы системы массового обслуживания.

Вариант 10. На автомойку в среднем за час приезжают 9 автомобилей, но если в очереди уже находятся 4 автомобиля, вновь подъезжающие клиенты, как правило, не встают в очередь, а проезжают мимо. Среднее время мойки автомобиля составляет 20 минут. Мест для мойки всего два. Средняя стоимость мойки автомобиля составляет 70 рублей. Определите среднюю величину потери выручки автомойки в течение дня.

5.4.2 Методические указания

1 Выбрать вариант задания по последней цифре номера зачетной книжки.

2 Разработать алгоритм решения задачи.

3 Разработать программное приложение.

4 Оформить отчет по самостоятельной работе.

Содержание отчета должно включать следующее.

Титульный лист.

1 Постановка задачи.
2 Описание алгоритма решения задачи.
3 Скриншоты.
4 Листинги программы.

5.4.3 Контрольные вопросы

1 Что называется системой массового обслуживания?
2 Какие существуют виды потоков событий?
3 Какой поток называется пуассоновским?
4 Какой процесс называется Марковским случайным процессом?
5 Что называется одноканальной системой массового обслуживания с отказами в обслуживании? Какие характеристики?
6 Что называется многоканальной системой массового обслуживания с отказами в обслуживании? Какие характеристики?
7 Что называется одноканальной системой массового обслуживания с ограниченной длиной очереди? Какие характеристики?
8 Что называется одноканальной системой массового обслуживания с неограниченной длиной очереди? Какие характеристики?
9 Что называется многоканальной системой массового обслуживания с ограниченной длиной очереди? Какие характеристики?
10 Что называется многоканальной системой массового обслуживания с ожиданием и неограниченной длиной очереди? Какие характеристики?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитие современных систем невозможно без эффективного управления, обеспечивающего переход из одного качественного состояния в другое. Процесс управления системой предусматривает выработку управленческих решений. Для выработки эффективных решений управления используют математическое моделирование.

Методические указания содержат теоретическое обоснование и варианты заданий для выполнения практических работ по дисциплине «Семинары специалистов».

Методические указания разработаны в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта по подготовке бакалавров по направлению 09.03.04 «Программная инженерия».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Боев В. Д. Имитационное моделирование систем. – Москва : Юрайт, 2017. – 253 с.
2 Акопов А. С. Имитационное моделирование. Учебник и практикум. – Москва: Юрайт, 2015. – 343 с.

3 Семахин А. М. Линейное программирование в моделировании информационных систем : учебное пособие. – Курган : Изд-во КГУ, 2016. – 68 с.

4 Семахин А. М. Сетевое моделирование информационных систем : учебное пособие. – Курган : Изд-во КГУ, 2016. – 62 с.

5 Таха Хемди. Введение в исследование операций. – Москва : Издательский дом «Вильямс», 2006. – 912 с.

Семахин Андрей Михайлович

СЕМИНАРЫ СПЕЦИАЛИСТОВ

Методические указания
к выполнению практических работ
для студентов направления подготовки 09.03.04
«Программная инженерия»

Редактор Н. Н. Погребняк

Подписано в печать 13.11.18	Формат 60х84 1/16	Бумага 65 г/м^2
Печать цифровая	Усл. печ. л. 3,75	Уч.-изд. л. 3,75
Заказ №197	Тираж 10	Не для продажи

БИЦ Курганского государственного университета.
640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.