МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Курганский государственный университет»

Кафедра «Прикладная математика и компьютерное моделирование»

МАТЕМАТИКА
(СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ)

Контрольные задания и методические указания
для студентов заочной формы обучения направлений 15.03.05, 15.03.04, 27.03.04, 20.03.01, 27.03.01, 15.03.01, 23.05.01, 23.05.02, 13.03.02, 23.03.03, 23.03.01

Курган 2018

Кафедра: «Прикладная математика и компьютерное моделирование».
Дисциплина: «Специальные главы».
Составил: доцент В.Д. Лугавова.
Утверждены на заседание кафедры «22» ноября 2017 г.
Рекомендованы редакционно-издательским советом университета
«20» декабря 2017г.

ВВЕДЕНИЕ

Контрольные задания и методические указания к их выполнению составлены в соответствии с программой по курсу Математика (специальные главы) для студентов заочной формы обучения. Они содержат 10 вариантов домашних контрольных заданий и методические рекомендации по их выполнению на примере подробного решения типового варианта.

Пример решения типового варианта

Дана выборка объема 50 из неизвестного распределения.

1 Построить эмпирическую функцию распределения и гистограмму.

2 Выдвинуть правдоподобную простую гипотезу о распределении.

Возможный набор:

а) $E(\theta)$, где θ=1, 2, 3,…, целое;

б) $R(0,\theta)$, где θ=1,2,3,…, целое;

в) $N(\theta,1)$, где θ=0,1,2,3,…, целое;

3 Проверить выдвинутую гипотезу с помощью критерия Колмогорова и критерия χ^2 Пирсона для уровня значимости α=0,05.

4 Найти методом моментов и максимального правдоподобия теоретические оценки для неизвестных параметров распределения (в соответствии с выдвинутой гипотезой).

5 Вычислить значения оценок для данной выборки:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,1	0,105	0,053	0,035	0,026	0,021	0,018	0,015	0,013	0,012
0,375	0,470	0,235	0,157	0,118	0,094	0,078	0,067	0,059	0,052
0,084	0,088	0,044	0,029	0,022	0,018	0,015	0,013	0,011	0,01
0,99	4,605	2,303	1,535	1,151	0,921	0,768	0,658	0,576	0,512
0,828	1,760	0,880	0,587	0,44	0,352	0,293	0,251	0,22	0,196
0,809	1,655	0,828	0,552	0,414	0,331	0,276	0,236	0,207	0,184
0,206	0,231	0,115	0,077	0,058	0,046	0,038	0,033	0,029	0,026
0,159	0,173	0,087	0,058	0,043	0,035	0,029	0,025	0,022	0,019
0,886	2,172	1,086	0,724	0,543	0,434	0,362	0,31	0,271	0,241
0,989	4,510	2,255	1,503	1,127	0,902	0,752	0,644	0,564	0,501
0,34	0,416	0,208	0,139	0,104	0,083	0,069	0,059	0,052	0,046
0,455	0,607	0,303	0,202	0,152	0,121	0,101	0,087	0,076	0,067
0,620	0,968	0,484	0,323	0,242	0,194	0,161	0,138	0,121	0,108
0,053	0,055	0,027	0,018	0,014	0,011	0,009	0,008	0,007	0,006
0,535	0,766	0,383	0,255	0,191	0,153	0,128	0,109	0,096	0,085
0,111	0,118	0,059	0,039	0,029	0,024	0,02	0,017	0,015	0,013
0,234	0,267	0,133	0,089	0,067	0,053	0,044	0,038	0,033	0,03
0,186	0,206	0,103	0,069	0,051	0,041	0,034	0,029	0,026	0,023
0,834	1,796	0,898	0,599	0,449	0,359	0,299	0,257	0,224	0,2
0,352	0,434	0,217	0,145	0,108	0,087	0,072	0,062	0,054	0,048
0,321	0,387	0,194	0,129	0,097	0,077	0,065	0,055	0,048	0,043

0,507	0,707	0,354	0,236	0,177	0,141	0,118	0,101	0,089	0,079
0,737	1,336	0,668	0,445	0,334	0,267	0,223	0,191	0,167	0,148
0,367	0,457	0,229	0,152	0,114	0,091	0,076	0,065	0,057	0,051
0,918	2,501	1,251	0,834	0,625	0,5	0,417	0,357	0,313	0,278
0,654	1,061	0,531	0,354	0,265	0,212	0,177	0,152	0,133	0,118
0,801	1,615	0,807	0,538	0,404	0,323	0,269	0,231	0,202	0,18
0,743	1,359	0,679	0,453	0,34	0,272	0,226	0,194	0,17	0,151
0,699	1,201	0,600	0,4	0,3	0,24	0,2	0,172	0,15	0,133
0,098	0,103	0,052	0,034	0,026	0,021	0,017	0,015	0,013	0,011
0,073	0,076	0,038	0,025	0,019	0,015	0,013	0,011	0,009	0,008
0,211	0,237	0,118	0,079	0,059	0,047	0,039	0,034	0,03	0,026
0,455	0,607	0,303	0,202	0,152	0,121	0,101	0.087	0,076	0,067
0,766	1,452	0,726	0,484	0,363	0,29	0,242	0,207	0,182	0,161
0,963	3,297	1,648	1,099	0,824	0,659	0,549	0,471	0,412	0,366
0,685	1,155	0,578	0,385	0,289	0,231	0,193	0,165	0,144	0,128
0,269	0,313	0,157	0,104	0,078	0,063	0,052	0,045	0,039	0,035
0,852	1,911	0,955	0,637	0,478	0,382	0,318	0,273	0,239	0,212
0,111	0,118	0,059	0,039	0,029	0,024	0,02	0,017	0,015	0,013
0,165	0,180	0,09	0,06	0,045	0,036	0,03	0,026	0,023	0,02
0,733	1,321	0,66	0,44	0,33	0,264	0,22	0,189	0,165	0,147
0,205	0,229	0,115	0,076	0,057	0,046	0,038	0,033	0,029	0,025
0,903	2,333	1,167	0,778	0,583	0,467	0,389	0,333	0,292	0,259
0,8	1,609	0,805	0,536	0,402	0,322	0,268	0,23	0,201	0,179
0,909	2,397	1,198	0,799	0,599	0,479	0,399	0,342	0,3	0,266
0,61	0,942	0,471	0,314	0,235	0,188	0,157	0,135	0,118	0,105
0,335	0,408	0,204	0,136	0,102	0,082	0,068	0,058	0,051	0,045
0,674	1,121	0,56	0,374	0,28	0,224	0,187	0,16	0,14	0,125
0,117	0,124	0,062	0,041	0,031	0,025	0,021	0,018	0,016	0,014
0,277	0,324	0,162	0,108	0,081	0,065	0,054	0,046	0,041	0,036

Вариационный и статистический ряды

Вариационным рядом выборки $X_1, X_2, ..., X_n$ называется расположение ее значений в порядке их возрастания: $X_{(1)} \le X_{(2)} \le ... \le X_{(n)}$. Пусть выборка $X_1, X_2, ..., X_n$ (или соответствующий вариационный ряд $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$) содержит m различных чисел $Z_1 < Z_2 < ... < Z_m$, причем значение Z_i встречается n_i раз ($i = 1, 2, ..., m$). Число n_i называется частотой элемента выборки Z_i.

Статистическим рядом называется таблица (таблица 1), первая строка которой содержит элементы Z_i, расположенные в порядке возрастания, а вторая – их частоты n_i.

Таблица 1 – Статистический ряд

Z_1	Z_2	...	Z_m
n_1	n_2	...	n_m

При большом объеме выборки ее элементы объединяются в группы (разряды). Для этого интервал, содержащий все элементы выборки, разбивается на k непересекающихся интервалов группировки $[x_1, x_2), [x_2, x_3), ..., [x_{k-1}, x_k), [x_k, x_{k+1}]$ и подсчитываются частоты n_i – количество элементов выборки, попавших в i-й интервал ($i = 1, 2, ..., m$).

Таблица, в первой строке которой указаны интервалы группировки (или их границы), а во второй – соответствующие им частоты, называется группированным статистическим рядом (таблица 2).

Таблица 2 – Группированный статистический ряд

x_1, x_2	x_2, x_3	...	x_k, x_{k+1}
n_1	n_2	...	n_k

Эмпирическая функция распределения

Пусть дана выборка $X_1, X_2, ..., X_n$ из генеральной совокупности с теоретической функцией распределения $F(x)$. Для оценивания функции $F(x)$ построим, так называемую, эмпирическую функцию распределения:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \qquad (1)$$

где n_x – число элементов выборки, значения которых меньше x. При каждом x значение $F^*(x)$, как функции от выборки, является случайной величиной. Значимость эмпирической функции распределения для математической статистики определяется следующим утверждением.

Теорема 1 (Гливенко). Пусть $F^*(x)$ – эмпирическая функция распределения, построенная по выборке объема n из генеральной совокупности с теоретической функцией распределения $F(x)$. Тогда для любого $x \in (-\infty; +\infty)$:

$$F^*(x) \underset{P}{\rightarrow} F(x) \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, при большом объеме выборки $F^*(x)$ является приближенным значением для $F(x)$ в каждой точке x.

Пусть дана выборка $X_1, X_2, ..., X_n$. Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$, построенная по этой выборке, обладает всеми свойствами функции распределения. Поэтому для нее можно определить начальный момент порядка k:

$$\nu_k^* = \frac{1}{n}\left(X_1^k + X_2^k + ... + X_n^k\right), \; k = 1, 2, ... \;;$$

центральный момент порядка k:

$$\mu_k^* = \frac{1}{n}\left[\left(X_1 - \nu_1^*\right)^k + \ldots + \left(X_n - \nu_1^*\right)^k\right], \; k = 1, 2, \ldots$$

и т.д. Перечисленные характеристики называют выборочными или эмпирическими (выборочный начальный момент порядка k, выборочный центральный момент порядка k и т.д.). Для выборочных моментов ν_1^* (выборочное среднее) и μ_2^* (выборочная дисперсия) распространены следующие обозначения: $\overline{X} = \nu_1^*$, $S^2 = \mu_2^*$. А для выборочного момента порядка k – $\overline{X^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$.

П р и м е р 1. В эксперименте наблюдалась целочисленная случайная величина X. Соответствующие выборочные значения оказались равными $3, 0, 4, 3, 6, 0, 3, 1$. Построить эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$ и вычислить ее выборочное среднее $\overline{X}$ и выборочную дисперсию S^2.
Р е ш е н и е. Составим статистический ряд выборки:

X_i	0	1	3	4	6
n_i	2	1	3	1	1

Для построения эмпирической функции распределения воспользуемся формулой (1). Эмпирическая функция распределения постоянна на каждом интервале $\left(X_i, X_{i+1}\right]$ и в точке X_i имеет скачок величины $\frac{n_i}{n}$. График $F^*(x)$ приведен на рисунке 1.

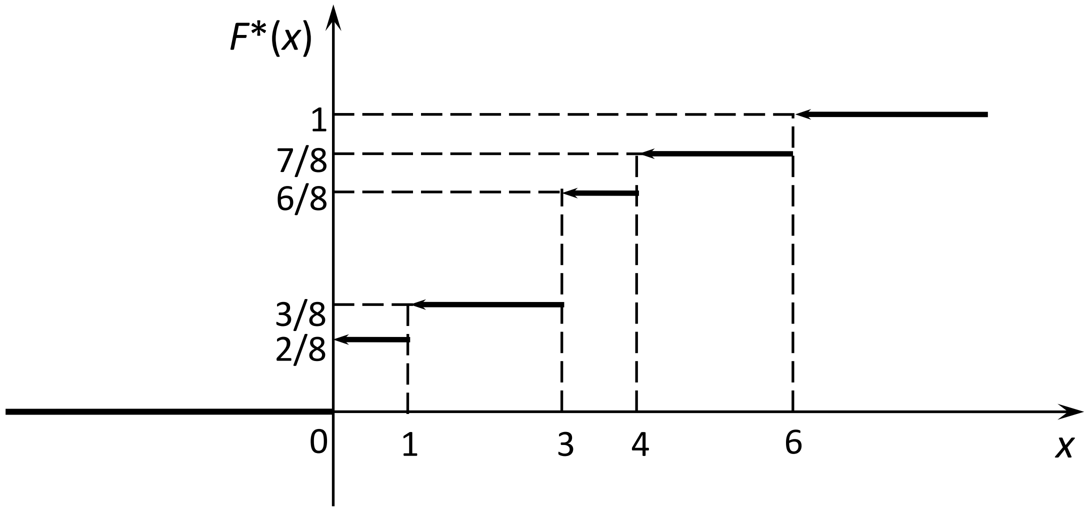

Рисунок 1 – Эмпирическая функция распределения

Для выборочных характеристик $\overline{X}$ и S^2 получим:

$$\overline{X} = \frac{1}{8}(1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1) = 2{,}5,$$

$$S^2 = \frac{1}{8}\left[2 \cdot (0 - 2{,}5)^2 + (1 - 2{,}5)^2 + 3(3 - 2{,}5)^2 + (4 - 2{,}5)^2 + (6 - 2{,}5)^2\right] = 3{,}75.$$

Полигон и гистограмма

В ряде случаев для наглядного представления выборки строят полигон частот. Для этого, используя представление выборки в виде статистического ряда (таблица 1), строят точки с координатами (Z_i, n_i), $i = 1, 2, ..., m$. Ломаная с вершинами в этих точках называется полигоном частот. Аналогично построение полигона относительных частот – ломаной с вершинами в точках $(Z_i, n_i/n)$, $i = 1, 2, ..., m$, где $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ – объем выборки.

Иногда (особенно для непрерывных случайных величин) более наглядное представление выборки дает гистограмма. Для ее построения воспользуемся представлением выборки в виде группированного статистического ряда (таблица 2) и на каждом i-м интервале группировки, как на основании, построим прямоугольник с высотой $n_i/(n\Delta_i)$, где $\Delta_i = (x_{i+1} - x_i)$ – длина i-го интервала, $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ – объем выборки. Получаемую при этом фигуру и называют гистограммой. Из построения гистограммы вытекает, что площадь ее равна 1. Верхнюю границу гистограммы можно рассматривать как статистический аналог плотности распределения наблюдаемой случайной величины.

П р и м е р 2. В результате измерения высоты полета самолета высотомером малых высот получены следующие значения (в метрах) случайной величины X – ошибки измерения:

– 5,9	– 3,5	1,8	– 5,6	2,8	3,5
– 1,3	4,4	– 1,1	– 5,4	– 2,3	0,4
– 6,2	– 9,9	1,6	– 3,1	4,8	1,5
8,1	5,8	2,5	5,6	1,4	1,4
6,2	7,7	4,8	– 3,2	1,6	– 8,6
– 1,6	– 9,3	– 1,8	4,3	– 4,6	– 1,7
6,1	– 0,6	1,9	3,4	– 1,8	7,3
9,3	3,5	– 0,6	– 0,9	– 3,9	– 2,2
5,5	– 2,9	– 1,9	– 2,4	1,2	– 5,3
0,2	4,7	8,7	– 4,5	– 0,4	6,3

Построить гистограмму выборки.

Р е ш е н и е

Составим группированный статистический ряд. Для этого отрезок $[-10,10]$, содержащий все наблюденные значения случайной величины X, разобьем на 5 интервалов:

$[-10,-6)$	$[-6,-2)$	$[-2,2)$	$[2,6)$	$[6,10]$
4	14	21	13	8

Гистограмма изображена на рисунке 2.

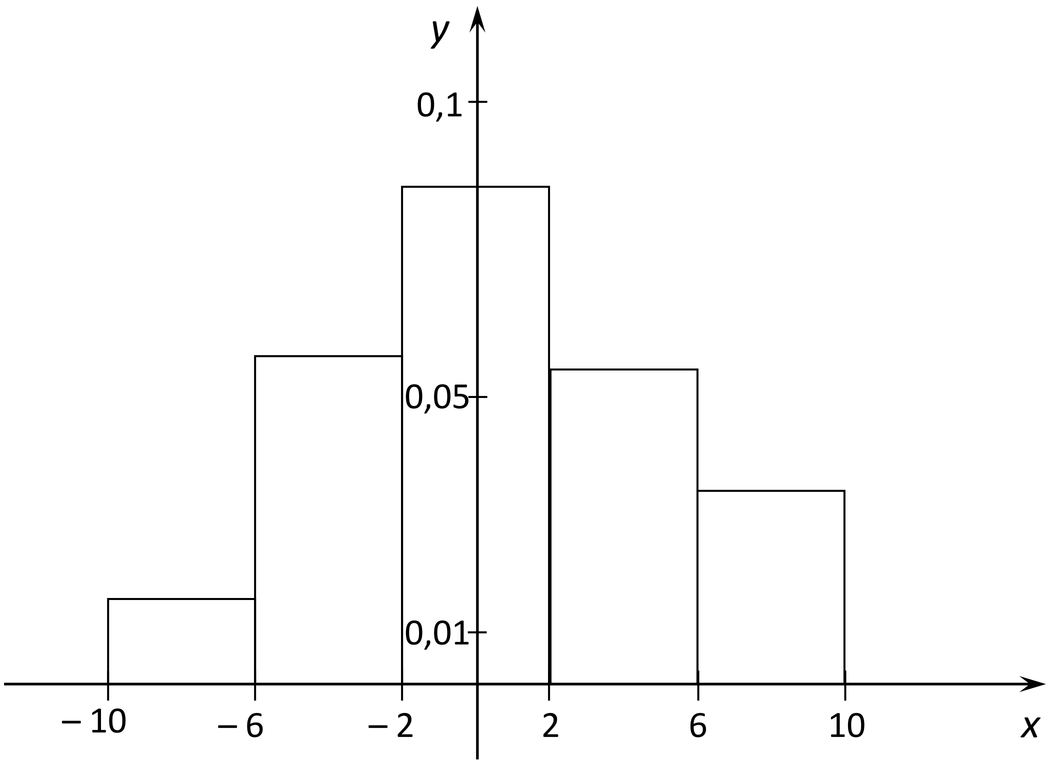

Рисунок 2 – Гистограмма

П р и м е р 3. При чтении шкалы некоторого прибора, где последняя цифра оценивается на глаз, наблюдатель часто предпочитает одни цифры другим. В следующей таблице даны частоты появления каждой цифры в последнем разряде для 200 выбранных случайным образом чтений шкалы, сделанных некоторым наблюдателем:

цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
частота	35	16	15	17	17	19	11	16	30	24

Таблица показывает, что цифры 0 и 8 появляются несколько чаще, чем другие. Не делает ли наблюдатель систематической ошибки?

Р е ш е н и е.

С помощью критерия χ^2 Пирсона проверим простую гипотезу H_0 о равновероятности появления каждой цифры против сложной дополнительной альтернативы. В нашем примере

$N=10,\ n=200,\ p_i=\dfrac{1}{10},\ np_i=20,\ i=1,2,\dots,10$ и

$$\chi^2_{200}=\sum_{i=1}^{10}\frac{(\nu_i-np_i)^2}{np_i}=\frac{1}{20}\left[15^2+4^2+5^2+3^2+3^2+1+9^2+4^2+10^2+4^2\right]=24{,}9.$$

Зададим уровень значимости $\alpha=0{,}05$. Критическое значение $C=\chi^2_{1-\alpha}(N-1)=\chi^2_{0,95}(9)$ находим из приложение А: $C\approx 16{,}9$. Так как $\chi^2_{200}>C$, то критерий χ^2 с уровнем значимости $\alpha=0{,}05$ отвергает гипотезу о равновероятности появления каждой цифры.

П р и м е р 4. В опытах наблюдалась непрерывная случайная величина X с неизвестной функцией распределения $F(x)$. Ее значения (упорядоченные по величине и округленные с точностью до 0,01) для $n=50$ опытов оказались равными: 0,01; 0,01; 0,04; 0,17; 0,18; 0,22; 0,22; 0,25; 0,25; 0,29; 0,42; 0,46; 0,47; 0,56; 0,59; 0,67; 0,68; 0,70; 0,72; 0,76; 0,78; 0,83; 0,85; 0,87; 0,93; 0,95; 1,00; 1,01; 1,01; 1,02; 1,03; 1,05; 1,32; 1,34; 1,37; 1,47; 1,50; 1,52; 1,54; 1,59; 1,71; 1,90; 2,10; 2,35; 2,46; 2,46; 2,50; 3,73; 4,07; 6,03. Проверить гипотезу $H_0: F(x)=1-e^{-x}$, $x\ge 0$, применяя метод группировки с четырьмя равновероятными интервалами (уровень значимости принять равным 0,1).

Р е ш е н и е.

Решая уравнения $1-e^{-x}=\dfrac{i}{4}, i=1,2,3$, найдем границы равновероятных интервалов: $a_1\approx 0{,}288;\ a_2\approx 0{,}693;\ a_3\approx 1{,}386$. Для нахождения значения статистики χ^2_n составим следующую таблицу:

интервал	$(-\infty;0{,}288)$	$[0{,}288;0{,}693)$	$[0{,}693;1{,}386)$	$[1{,}386;+\infty)$
ν_i	9	8	18	15
p_i	0,25	0,25	0,25	0,25
np_i	12,5	12,5	12,5	12,5
$(\nu_i-np_i)^2$	12,25	20,25	30,25	6,25
$\dfrac{(\nu_i-np_i)^2}{np_i}$	0,98	1,62	2,42	0,5

Таким образом, $\chi^2_{50}=0{,}98+1{,}62+2{,}42+0{,}5=5{,}52$. Критическое значение

$C=\chi^2_{1-\alpha}(N-1)=\chi^2_{0,9}(3)$ определяем из приложения А: $C=6{,}3$. Так как $\chi^2_{50}<C$, то результаты опытов согласуются с гипотезой.

При проведении практических занятий, выполнении семестровых заданий по математической статистике целесообразно решать одну и ту же задачу, чтобы получить целостное представление о статистической обработке результатов эксперимента. Приведём решение типового примера такого рода, в котором используются основные понятия математической статистики (способы группировки статистического материала, теория точечных и интервальных оценок параметров распределения, теория проверки статистических гипотез и т.д.).

П р и м е р 5. Дана выборка объёма 50 из неизвестного распределения. Построить эмпирическую функцию распределения и гистограмму. Выдвинуть гипотезу о распределении выборки. Проверить выдвинутую гипотезу с помощью критерия Колмогорова и критерия χ^2 Пирсона для уровня значимости α=0,05.

Р е ш е н и е.

Поместим данные в таблицу 3.

Таблица 3 – Выборочные данные

0,160	0,026	0,342	0,045	0,101
0,165	0,017	0,658	0,059	0,152
0,191	0,008	0,251	0,029	0,062
0,172	0,015	0,333	0,038	0,087
0,194	0,025	0,644	0,046	0,109
0,189	0,017	0,257	0,033	0,138
0,236	0,015	0,471	0,055	0,135
0,207	0,013	0,310	0,034	0,065
0,231	0,018	0,357	0,058	0,087
0,230	0,011	0,273	0,033	0,067

Минимальное и максимальное значение выборки равны:

$$x_{\min}=0{,}008,\; x_{\max}=0{,}658.$$

А также $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{7,469}{50} = 0,14938.$

Отрезок [0; 0,8] разобьем на 8 равных по длине промежутков. Тогда длина промежутков будет равна h = 0,1. Составим группированный статистический ряд для выборки из таблицы 3. Воспользуемся этим рядом для построения гистограммы. Высота прямоугольников гистограммы вычисляется по формуле $f_i = \frac{n_i}{h \cdot n}$. Занесём необходимые данные в таблицу 4.

Таблица 4 – Группированный статистический ряд выборки

i	**Промежуток**	**Частота,** n_i	f_i
1	[0;0,1)	25	5
2	[0,1;0,2)	11	2,2
3	[0,2;0,3)	7	1,4
4	[0,3;0,4)	4	0,8
5	[0,4;0,5)	1	0,2
6	[0,5;0,6)	0	0
7	[0,6;0,7)	2	0,4
8	[0,7;0,8]	0	0

Построим гистограмму, соединив для наглядности середины отрезков, ее составляющих (рисунок 3).

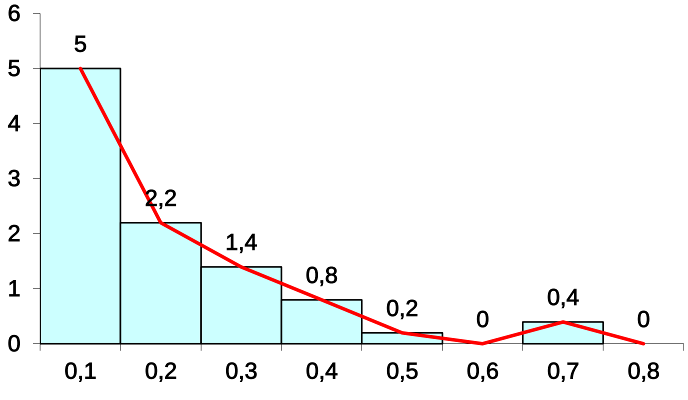

Рисунок 3 - Гистограмма

Составим статистический ряд для выборки из таблицы 3 (таблица 5).
Таблица 5 – Статистический ряд

z	0,008	0,011	0,013	0,015	0,017	0,018	0,025	0,026
n	1	1	1	2	2	1	1	1
z	0,029	0,033	0,034	0,038	0,045	0,046	0,055	0,058
n	1	2	1	1	1	1	1	1
z	0,059	0,062	0,065	0,067	0,087	0,101	0,109	0,135
n	1	1	1	1	2	1	1	1
z	0,138	0,152	0,16	0,165	0,172	0,189	0,191	0,194
n	1	1	1	1	1	1	1	1
z	0,207	0,23	0,231	0,236	0,251	0,257	0,273	0,31
n	1	1	1	1	1	1	1	1
z	0,333	0,342	0,357	0,471	0,644	0,658		
n	1	1	1	1	1	1		

По данному статистическому ряду построим эмпирическую функцию распределения (рисунок 4).

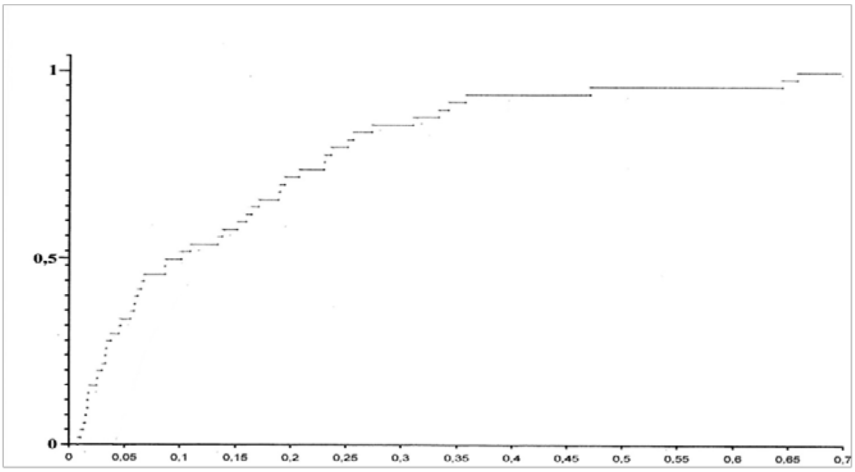

Рисунок 4 – Эмпирическая функция распределения

Исходя из вида гистограммы и эмпирической функции, можно выдвинуть гипотезу о показательном распределении выборки. Поскольку параметр λ этого закона неизвестен, то мы имеем дело со сложной гипотезой и сначала должны оценить λ. В качестве оценки λ^* используем оценку методом моментов:

$$\lambda^* = \frac{1}{\overline{X}} = \frac{1}{0{,}14938} = 6{,}69.$$

Теперь с помощью критерия Колмогорова будем проверять простую гипотезу $H_1 = \left\{F(x) = F_1(x) = 1 - e^{-6{,}69\cdot x},\ x>0\right\}$ против сложной альтернативы $H_2 = \left\{F(x) \neq F_1(x)\right\}$.

Найдём значение $\rho(X)$ статистики Колмогорова, определяемое формулой:

$$\rho(X) = \sqrt{n}\left(\max_{1\le i\le 50}\left|F_1\left(X_i^*\right) - \frac{2i-1}{2n}\right| + \frac{1}{2n}\right).$$

Для удобства вычислений составим таблицу значений выражений из этой формулы (таблица 6).

Таблица 6 – Статистика Колмогорова

i	X_i^*	$\frac{2i-1}{100}$	$F_1\left(X_i^*\right)$	$F_1\left(X_i^*\right) - \frac{2i-1}{100}$	i	X_i^*	$\frac{2i-1}{100}$	$F_1\left(X_i^*\right)$	$F_1\left(X_i^*\right) - \frac{2i-1}{100}$
1	0,008	0,01	0,052	0,042	**26**	0,101	0,51	0,491	-0,019
2	0,011	0,03	0,071	0,041	**27**	0,109	0,53	0,518	-0,012
3	0,013	0,05	0,083	0,033	**28**	0,135	0,55	0,595	0,045
4	0,015	0,07	0,095	0,025	**29**	0,138	0,57	0,603	0,033
5	0,015	0,09	0,095	0,005	**30**	0,152	0,59	0,638	0,048
6	0,017	0,11	0,108	-0,002	**31**	0,16	0,61	0,657	0,047
7	0,017	0,13	0,108	-0,022	**32**	0,165	0,63	0,668	0,038
8	0,018	0,15	0,113	-0,037	**33**	0,172	0,65	0,684	0,034
9	0,025	0,17	0,154	-0,016	**34**	0,189	0,67	0,718	0,048
10	0,026	0,19	0,160	-0,030	**35**	0,191	0,69	0,721	0,031
11	0,029	0,21	0,176	-0,034	**36**	0,194	0,71	0,727	0,017
12	0,033	0,23	0,198	-0,032	**37**	0,207	0,73	0,750	0,020

13	0,033	0,25	0,198	-0,052	**38**	0,23	0,75	0,785	0,035
14	0,034	0,27	0,203	-0,067	**39**	0,231	0,77	0,787	0,017
15	0,038	0,29	0,224	-0,066	**40**	0,236	0,79	0,794	0,004
16	0,045	0,31	0,260	-0,050	**41**	0,251	0,81	0,813	0,003
17	0,046	0,33	0,265	-0,065	**42**	0,257	0,83	0,821	-0,009
18	0,055	0,35	0,308	-0,042	**43**	0,273	0,85	0,839	-0,011
19	0,058	0,37	0,322	-0,048	**44**	0,31	0,87	0,874	0,004
20	0,059	0,39	0,326	-0,064	**45**	0,333	0,89	0,892	0,002
21	0,062	0,41	0,340	-0,070	**46**	0,342	0,91	0,899	-0,011
22	0,065	0,43	0,353	-0,077	**47**	0,357	0,93	0,908	-0,022
23	0,067	0,45	0,361	-0,089	**48**	0,471	0,95	0,957	0,007
24	0,087	0,47	0,441	-0,029	**49**	0,644	0,97	0,987	0,017
25	0,087	0,49	0,441	-0,049	**50**	0,658	0,99	0,988	-0,002

Из таблицы 6 имеем:

$\max\limits_{1\le i\le 50}\left|F_1\left(X_i^*\right)-\dfrac{2i-1}{2n}\right|=0{,}089$ и $\rho\left(X\right)=\sqrt{50}\cdot\left(0{,}089+0{,}01\right)=0{,}7$.

Квантиль уровня 0,95 распределения Колмогорова равна c = 1,36. Так как $\rho\left(X\right)<c$, то нет оснований отвергнуть гипотезу H_1.

Проверим выдвинутую гипотезу по критерию χ^2. Для нахождения значения статистики $\chi_n^2=\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{\left(\nu_i-np_i\right)^2}{np_i}$ составим 4 равновероятных интервала, границы которых получим из решения уравнений:

$F_1\left(x\right)=\dfrac{1}{4}, F_1\left(x\right)=\dfrac{2}{4}, F_1\left(x\right)=\dfrac{3}{4}$.

Построим таблицу (таблица 7).

Таблица 7 – Статистика χ_n^2

	[0;0,043)	[0,043;0.104)	[0,104;0,2)	[0,2;∞)
v_i	15	11	10	14
p_i	0,25	0,25	0,25	0,25
np_i	12,5	12,5	12,5	12,5
$(v_i - np_i)^2$	6,25	2,25	6,25	2,25
$\frac{(v_i - np_i)^2}{np_i}$	0,5	0,18	0,5	0,18

Найдём значение статистики χ_n^2 =1,36.

Сравнивая это значение с критическим $c = \chi_{0,95}^2(2) = 6$, убеждаемся, что и проверка по критерию χ^2 подтверждает гипотезу H_1.

Список литературы

1 Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория вероятностей. Математическая статистика. – 2-е изд. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – Доступ из ЭБС «Консультант студента».
2 Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. – Москва : Наука, 1965.
3 Боровков А. А. Математическая статистика. – Москва : Наука, 1984.
4 Крамер Г. Математические методы статистики. – Москва : Мир, 1975.
5 Лугавова В. Д. Избранные главы курса высшей математики : учебное пособие. – Курган : КГУ, 2006.
6 Чибисов Д. М., Пагурова В. И. Задачи по математической статистике. – Москва : изд-во Московского ун-та, 1990.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Квантили распределения хи-квадрат $\chi^2(n)$

Пусть F_n – функция распределения хи-квадрат $\chi^2(n)$ с n степенями свободы и $p \in (0,1)$. Тогда p-квантилем этого распределения называется число $\chi^2_p(n)$ такое, что $F_n(\chi^2_p(n)) = p$.

Таблица А.1 – Квантили $\chi^2_p(n)$ распределения хи-квадрат $\chi^2(n)$

n \ p	**0, 01**	**0, 05**	**0, 2**	**0, 5**	**0, 8**	**0, 9**
1	0, 00016	0, 0039	0, 064	0, 455	1, 64	2, 7
2	0, 020	0, 103	0, 446	1, 386	3, 22	4, 6
3	0. 115	0, 352	1, 005	2, 366	4, 64	6, 3
4	0, 297	0, 711	1, 65	3, 36	6, 0	7, 8
5	0, 554	1, 15	2, 34	4, 35	7, 3	9, 2
6	0, 872	1, 64	3, 07	5, 35	8, 6	10, 6
7	1, 24	2, 17	3, 82	6, 35	9, 8	12, 0
8	1, 65	2, 73	4, 59	7, 34	11, 0	13, 4
9	2, 09	3, 33	5, 38	8, 34	12, 2	14, 7
10	2, 56	3, 94	6, 18	9, 34	13, 4	16, 0
11	3, 05	4, 57	7, 0	10, 3	14, 6	17, 3
12	3, 57	5, 23	7, 8	11, 3	15, 8	18, 5
13	4, 11	5, 89	8, 6	12, 3	17, 0	19, 8
14	4, 66	6, 57	9, 5	13, 3	18, 2	21, 1
15	5, 23	7, 26	10, 3	14, 3	19, 3	22, 3
16	5, 81	7, 96	11, 2	15, 3	20, 5	23, 5
17	6, 41	8, 67	12, 0	16, 3	21, 6	24, 8
18	7, 01	9, 39	12, 9	17, 3	22, 8	26, 0
19	7, 63	10, 1	13, 7	18, 3	23, 9	27, 2
20	8, 26	10, 9	14, 6	19, 3	25, 0	28, 4
21	8, 90	11, 6	15, 4	20, 3	26, 2	29, 6
22	9, 54	12, 3	16, 3	21, 3	27, 3	30, 8
23	10, 2	13, 1	17, 2	22, 3	28, 4	32, 0
24	10, 9	13, 8	18, 1	23, 3	29, 6	33, 2
25	11, 5	14, 6	18, 9	24, 3	30, 7	34,4
26	12, 2	15, 4	19, 8	25, 3	31, 8	35, 6

Продолжение таблицы А.1

27	12, 9	16, 2	20, 7	26, 3	32, 9	36, 7
28	13, 6	16, 9	21, 6	27, 3	34, 0	37, 9
29	14, 3	17, 7	22, 5	28, 3	35, 1	39, 1
30	15, 0	18, 5	23, 4	29, 3	36, 3	40, 3

Таблица А.2 – Квантили $\chi_p^2(n)$ распределения хи-квадрат $\chi^2(n)$

n \ p	**0, 95**	**0, 975**	**0, 99**	**0, 995**	**0, 999**
1	3, 8	5, 0	6, 6	7, 9	10, 8
2	6, 0	7, 4	9, 2	10, 6	13, 8
3	7, 8	9, 4	11, 3	12, 8	16, 3
4	9, 5	11, 1	13, 3	14, 9	18, 5
5	11, 1	12, 8	15, 1	16, 8	20, 5
6	12, 6	14, 4	16, 8	18, 5	22, 5
7	14, 1	16, 0	18, 5	20, 3	24, 3
8	15, 5	17, 5	20, 1	22, 0	26, 1
9	16, 9	19, 0	21, 7	23, 6	27, 9
10	18, 3	20, 5	23, 2	25, 2	29, 6
11	19, 7	21, 9	24, 7	26, 8	31, 3
12	21, 0	23, 3	26, 2	28, 3	32, 9
13	22, 4	24, 7	27, 7	29, 8	34, 5
14	23, 7	26, 1	29, 1	31, 3	36, 1
15	25, 0	27, 5	30, 6	32, 8	37, 7
16	26, 3	28, 8	32, 0	34, 3	39, 3
17	27, 6	30, 2	33, 4	35, 7	40, 8
18	28, 9	31, 5	34, 8	37, 2	42, 3
19	30, 1	32, 9	36, 2	38, 6	43, 8
20	31, 4	34, 2	37, 6	40, 0	45, 3
21	32, 7	35, 5	38, 9	41, 4	46, 8
22	33, 9	36, 8	40, 3	42, 8	48, 3
23	35, 2	38, 1	41, 6	44, 2	49, 7
24	36, 4	39, 4	43, 0	45, 6	51, 2
25	37, 7	40, 6	44, 3	46, 9	52, 6
26	38, 9	41, 9	45, 6	48, 3	54, 1
27	40, 1	43, 2	47, 0	49, 6	55, 5
28	41, 3	44, 5	48, 3	51, 0	56, 9
29	42, 6	45, 7	49, 6	52, 3	58, 3
30	43, 8	47, 0	50, 9	53, 7	59, 7

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Распределение Колмогорова

В таблице приведены значения функции распределения Колмогорова $K(y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{-2n^2y^2}$, y>0.

Таблица Б.1 – Значения функции распределения Колмогорова K(y), y>0

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,3	,0000	,0000	,0000	,0001	,0002	,0003	,0005	,0008	,0013	,0019
0,4	,0028	,0040	,0055	,0074	,0097	,0126	,0160	,0200	,0247	,0300
0,5	,0361	,0428	,0503	,0585	,0675	,0772	,0876	,0987	,1104	,1228
0,6	,1357	,1492	,1632	,1778	,1927	,2080	,2236	,2396	,2558	,2722
0,7	,2888	,3055	,3223	,3391	,3560	,3728	,3896	,4064	,4230	,4395
0,8	,4559	,4720	,4880	,5038	,5194	,5347	,5497	,5645	,5791	,5933
0,9	,6073	,6209	,6343	,6473	,6601	,6725	,6846	,6964	,7079	,7191
1,0	,7300	,7406	,7508	,7608	,7704	,7798	,7889	,7976	,8061	,8143
1,1	,8223	,8300	,8374	,8445	,8514	,8580	,8644	,8706	,8765	,8823
1,2	,8878	,8930	,8981	,9030	,9076	,9121	,9164	,9206	,9245	,9283
1,3	,9319	,9354	,9387	,9418	,9449	,9478	,9505	,9531	,9557	,9580
1,4	,9603	,9625	,9646	,9665	,9684	,9702	,9718	,9734	,9750	,9764
1,5	,9778	,9791	,9803	,9815	,9826	,9836	,9846	,9855	,9864	,9873
1,6	,9880	,9888	,9895	,9902	,9908	,9914	,9919	,9924	,9929	,9934
1,7	,9938	,9942	,9946	,9950	,9953	,9956	,9959	,9962	,9965	,9967
1,8	,9969	,9971	,9973	,9975	,9977	,9979	,9980	,9981	,9983	,9984
1,9	,9985	,9986	,9987	,9988	,9989	,9990	,9991	,9991	9992	,9992
2,0	,9993	,9994	,9994	,9995	,9995	,9996	,9996	,9996	,9997	,9997
2,1	,9997	,9997	,9998	,9998	,9998	,9998	,9998	,9998	,9999	,9999

K(2,2)=0,999874; K(2,25)=0,999920;
K(2,3)=0,999949; K(2,35)=0,999968;
K(2,4)=0,999980; K(2,45)=0,999988;
K(2,49)=0,999992.

Лугавова Валентина Дмитриевна

МАТЕМАТИКА
(СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ)

Контрольные задания и методические указания
для студентов заочной формы обучения направлений 15.03.05, 15.03.04, 27.03.04, 20.03.01, 27.03.01, 15.03.01, 23.05.01, 23.05.02, 13.03.02, 23.03.03, 23.03.01

Редактор Н. Н. Погребняк

Подписано в печать 06.06.18	Формат 60 84 1/16	Бумага 65 г/м^2
Печать цифровая	Усл. печ. л. 1,25	Уч.- изд. л.1,25
Заказ №107	Тираж 25	Не для продажи

РИЦ Курганского государственного университета
640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет