

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.С.ПАРАХИН

**РЕШЕНИЕ  
ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ  
НА ЭВМ**

Учебное пособие

Курган 2000

УДК 53+621.391+518.5:518.61 (075.8)

П - 18

Парахин А.С. Решение физических задач на ЭВМ: Учебное пособие. – Курган: Изд-во Курганского гос. ун-та, 2000. – 71 с.

В учебном пособии раскрываются основные методы численного решения физических задач, приводятся алгоритмы и программы для реализации этих методов на ЭВМ. Подробно исследуются вопросы точности численных методов, контроля погрешности округлений и возможности уточнения результатов счёта. Каждый метод иллюстрируется конкретным физическим примером, что позволяет читателю лучше понять тонкости реализации в физике того или иного численного метода.

Предназначено для студентов вузов, обучающихся по специальности 010400 “Физика”.

Рис. 12, библиограф. - 6 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Курганского государственного университета.

Рецензенты: кафедра физики Курганской государственной сельскохозяйственной академии им. Т.С.Мальцева (зав. кафедрой – доцент, канд. физ.-мат. наук В.И. Аленкин); доцент кафедры естественно-математического образования института повышения квалификации и переподготовки работников образования Курганской области, канд. пед. наук Л.Л.Кайнина.

ISBN 5-86328-229-0

© Курганский  
государственный  
университет, 2000

## ***Предисловие автора***

Предлагаемый вниманию учебник обобщает учебный материал, преподаваемый его автором в течение 7 лет на кафедре общей физики физико-математического факультета Курганского государственного университета.

Необходимость такого курса в учебном плане назрела давно и обусловлена наличием в физике, даже в рамках вузовской программы, таких задач, решение которых невозможно аналитически. К такого рода задачам относятся почти все задачи более-менее отвечающие реальным условиям. А именно такие задачи и представляют особый интерес, поскольку они полнее и точнее описывают реальные процессы. С другой стороны для решения таких задач недостаточно обычных средств. Их, как правило, нужно решать численно, что сопряжено со значительным объёмом вычислительной работы и значит с использованием специальных численных методов решения задач, что в свою очередь влечет за собой необходимость преподавания численных методов решения задач для студентов физических специальностей вузов.

С другой стороны большой объем вычислительной работы, связанный с использованием численных методов, делает необходимым применение в таком процессе обучения вычислительной техники. Поэтому преподавание такого курса стало возможным лишь после появления в достаточном количестве персональных компьютеров.

Материал в учебнике собран в виде нескольких глав, каждая из которых посвящена одному из численных методов в объеме достаточном для решения соответствующего класса физических задач.

Необходимость такой работы вызвана отсутствием достаточно хороших учебников по этому курсу. Есть учебники по численным методам, есть учебники по решению физических задач, но мало учебников по численному решению физических задач на ЭВМ. Но как показывает опыт, применение теоретических знаний на практике часто вызывает затруднения у студентов. Именно поэтому, целью данного учебного пособия является научить студентов применять общие численные методы для решения конкретных физических задач.

Материал, изложенный в учебнике самодостаточен, т.е. включает в себя доказательства всех использующихся основных фактов и не требует обращения к другим источникам для своего понимания. В то же время автор старался избегать глубоких теоретических исследований по численным методам, не имеющих существенного значения для физиков и поэтому надеется, что учебник будет полезен студентам, аспирантам и преподавателям физических факультетов, а также всем интересующимся численными методами решения физических задач.

Автор будет благодарен всем неравнодушным, нашедшим время сообщить автору свою оценку учебника и предложения по его улучшению.

# ВВЕДЕНИЕ

В процессе физических исследований, а с некоторого времени и в процессе обучения физике, часто возникают задачи, аналитическое решение которых невозможно вообще или затруднено, например, по причине большого объёма вычислительной работы. В этом случае для решения задачи необходимо использовать ЭВМ, быстрота выполнения логических и арифметических операций для которой позволяет выполнять огромные объёмы вычислительной работы за приемлемые временные интервалы.

Для решения физических задач на ЭВМ можно предложить следующую общую схему.

1. Решение физической части задачи, что предполагает нахождение расчётной формулы задачи. Расчётной формулой может быть некоторая функция, описывающая тот или иной физический процесс, и решить задачу означает исследовать эту функцию. Расчётной формулой может быть некоторое уравнение или система уравнений, корни которой нужно найти для решения физической задачи. В качестве расчётной формулы может выступать некоторый определённый интеграл, численное значение которого и является решением физической задачи. Расчётной формулой может быть и некоторое дифференциальное уравнение, как обыкновенное, так и в частных производных. В этом случае решением задачи является функция, удовлетворяющая этому уравнению и определённым начальным и граничным условиям. Дифференциальные уравнения могут объединяться в систему, тогда расчётной формулой будет система дифференциальных уравнений и т.д.

2. Составить алгоритм решения данной задачи. В первую очередь составить словесный алгоритм, а при необходимости и блок-схему. Это особенно необходимо тогда, когда алгоритм достаточно сложный, со многими связями и переходами

3. Составить программу, реализующую данный алгоритм, имея в виду конкретный язык программирования и конкретную ЭВМ.

4. Ввести программу в ЭВМ и отладить её.

5. Исследовать задачу, т.е. меняя исходные данные, исследовать, как меняются при этом результаты решения задачи.

При начальном изучении методов решения физических задач на ЭВМ полезно пунктуально следовать предложенной схеме, а по мере накопления опыта можно пропускать некоторые этапы или сокращать их.

Все задачи физики, требующие применения ЭВМ можно разделить на несколько классов: графическое исследование физических функций, численное решение уравнений, численное дифференцирование, численное интегрирование, поиск экстремумов функций, численное решение дифференциальных уравнений и т.п.

# 1. ГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

## 1.1 АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ

Часто в физике бывает необходимо исследовать ту или иную функцию  $y = f(x)$ . Если эта функция достаточно проста, то ее можно исследовать методом классического матанализа и построить график.

Если же функция слишком сложна, то воспользоваться методом математического анализа бывает невозможно, т.к. в этом случае приходится находить производные от достаточно сложных функций и решать уравнения, аналитическое решение которых либо невозможно, либо его трудно найти. В этом случае единственным методом исследования функции является графический метод, т.е. метод построения графика функции по точкам без предварительного аналитического исследования. Но при этом для детального исследования нужно достаточно подробно построить график, что требует многократного расчета исследуемой функции. Большой объем вычислительной работы требует применения компьютера. И поэтому использовать данный метод стало возможным лишь после появления достаточно мощных персональных компьютеров.

Алгоритм построения графика функции, в том числе и на экране дисплея состоит в следующем:

1. Выбрать шаг построения графика  $\Delta x$ , т.е. изменение аргумента от одного фрагмента графика к другому. Выбор шага построения графика определяется, с одной стороны, требуемой точностью построения графика, с другой стороны, временем. Чем подробнее нужно исследовать функцию, тем меньше нужно взять шаг построения графика, но тем больше потребуется времени на такое построение. И наоборот, чем быстрее нужно построить график, тем больше нужно взять шаг  $\Delta x$ , тем реже на графике будут расположены расчетные значения, и тем меньше будет точность построения графика. Ситуация, похожая на данную, очень часто встречается в исследовательской практике. Погрешность и время эксперимента, как в соотношении неопределенностей, не могут быть одновременно нулевыми.
2. Задать начальное значение аргумента функции  $x$ . Это значение аргумента определяется исключительно потребностью пользователя.
3. Рассчитать значение функции при данном значении аргумента.
4. Вывести фрагмент графика. Самый простой вид фрагмента графика - точка, самый сложный – часть графика какой-либо достаточно простой функции, например отрезок параболы.
5. Изменить аргумент функции на один шаг  $x = x + \Delta x$ .
6. Проверить, если не выполнено условие завершения построения графика, идти к п.3. В противном случае - стоп.

Указанный алгоритм не ориентирован специально на какой-нибудь способ построения графиков. Он справедлив, как для построения графика на листе бумаги, вручную, так и на экране дисплея компьютера.

Однако построение графика на экране дисплея имеет некоторые особенности, которые не учитывать нельзя. Эти особенности состоят в первую очередь в необходимости преобразования реальных координат точки в т.н. экранные коор-

динаты с помощью масштабных множителей и преобразование системы координат.

## 1.2 МАСШТАБНЫЕ МНОЖИТЕЛИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

При построении графика функции на экране дисплея нужно учитывать тот факт, что значение аргумента и функции (назовем их реальными координатами точек графика) могут меняться в самых разнообразных пределах в зависимости от вида аргумента и функции от самых маленьких пределов до самых больших. Например, при построении графика траектории движения тела, брошенного под углом к горизонту для шарика, вылетевшего из детского пистолета, координаты  $x$  и  $y$  могут меняться в пределах от 0 до 5 м. В то время как для артиллерийского снаряда эти координаты меняются от 0 до 30000 м.

С другой стороны, координаты пикселя на экране дисплея (назовем их экранными координатами) могут меняться лишь в ограниченных пределах в зависимости от вида дисплея и режима его работы. Так для компьютера "Корвет"  $x$  меняется в пределах от 0 до 511, а  $y$  - от 0 до 255. Поэтому, если не учесть отличие реальных координат от экранных, график будет либо слишком сжат, так что все его детали будут нивелированы, либо выйдет за пределы экрана и не будет виден. Для того чтобы график функции был представлен на экране оптимальным образом, реальные координаты точек графика надо перевести в экранные. Этому и служат в первую очередь т.н. масштабные множители, благодаря умножению на которые, интервалы изменения реальных координат сжимаются или растягиваются до интервала изменения экранных координат.

Масштабные множители определяются следующим образом:

1. Определить интервал изменения откладываемой по данной оси величины, т.е.  $\Delta x = x_{max} - x_{min}$  и  $\Delta y = y_{max} - y_{min}$ .
2. Выбрать  $N_x$  и  $N_y$  - количество точек вдоль осей  $ox$  и  $oy$  для вывода графиков.  $N_x$  и  $N_y$  не могут быть больше максимального числа точек экрана вдоль соответствующих осей. Однако иногда часть экрана может быть свободна от графиков, и в этом случае  $N_x$  и  $N_y$  могут быть меньше максимальных значений.
3.  $G_x = N_x / \Delta x$ ;  $G_y = N_y / \Delta y$ , где  $G_x$  - масштабный множитель вдоль оси  $ox$ , а  $G_y$  - масштабный множитель вдоль оси  $oy$ .

**Замечание.** Если по осям координат откладываются однородные величины, масштабные множители для этих осей должны быть одинаковы. Однако у некоторых дисплеев плотность точек по осям координат неодинакова, например, у дисплея компьютера Корвет плотность точек по горизонтали в 1.3 раза больше, чем по вертикали, поэтому масштабные множители должны отличаться в 1.3 раза, т.е.  $G_y = G_x / 1.3$ .

Второе обстоятельство, которое нужно учесть при построении графика, это смещение начала координат. Дело в том, что практически во всех дисплеях начало экранных координат графических экранов расположено в левом верхнем углу, а ось  $oy$  направлена не вверх, а вниз. Это приводит к тому, что формулы преобразования реальных координат в экранные выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}x_{экр} &= x_{нач} + (x - x_{мин}) \cdot G_x, \\y_{экр} &= y_{нач} - (y - y_{мин}) \cdot G_y.\end{aligned}\quad (1.1)$$

Здесь  $x_{\text{экр}}, y_{\text{экр}}$  – экранные координаты точек графика, а  $x, y$  – реальные координаты этих точек,  $x_{\text{нач}}, y_{\text{нач}}$  – смещение начала координат, зависящее от необходимости размещения графиков в том или ином месте экрана.

В некоторых языках программирования существуют операторы переназначения начала координат. В таких языках начало координат можно установить заранее, в нужную точку экрана и тогда начальные смещения можно сделать равными нулю, т.е.

$$\begin{aligned} x_{\text{экр}} &= (x - x_{\text{мин}}) \cdot GX, \\ y_{\text{экр}} &= - (y - y_{\text{мин}}) \cdot GY. \end{aligned} \quad (1.2)$$

С помощью данных формул преобразования строится часть графика в пределах от  $x_{\text{мин}}$  до  $x_{\text{макс}}$ , развёрнутая на всю отведённую для графика часть экрана. При этом линии координат, соответствующие нулевым значениям, могут не попасть в эту часть экрана, если интервал изменения аргумента или функции лежит полностью либо в положительной, либо в отрицательной области. Чтобы иметь возможность вывести и оси координат, необходимо расширить интервал изменения аргумента и функции таким образом, чтобы он включал в себя и нулевое значение.

### 1.3 СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ

Самым простым способом построения графиков является точечное построение графика, т.е. построение графиков в виде набора точек, расположенных достаточно близко друг к другу, чтобы они сливались в одну кривую. Фрагментами графиков в этом случае являются точки. В языках BASIC этому соответствует оператор PSET, его общий вид

$$\text{PSET } (x_{\text{нач}} + (x - x_{\text{мин}}) \cdot GX, y_{\text{нач}} - (y - y_{\text{мин}}) \cdot GY), C.$$

В языках PASCAL это обычно операторы

$$\text{Putpixel}(x_{\text{нач}} + \text{round}((x - x_{\text{мин}}) \cdot GX), y_{\text{нач}} - \text{round}((y - y_{\text{мин}}) \cdot GY), C).$$

здесь  $x_{\text{нач}}$  и  $y_{\text{нач}}$  - начальные координаты,  $x$  и  $y$  - реальные координаты точек,  $C$  - номер цвета точки.

#### ПРИМЕР 1.1

Тело брошено под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $V_0$ . Требуется построить график траектории движения тела.

1. Решение физической части задачи состоит в написании уравнения движения тела для конкретных начальных условий

$$\begin{aligned} x &= x_0 + V_0 t \cos \alpha, \\ y &= y_0 + V_0 t \sin \alpha - gt^2/2. \end{aligned}$$

Эти формулы и есть расчетные формулы для задачи.

2. Алгоритм построения графика уже составлен (см. выше).

3. Составим программу на языке BASIC для компьютера "Корвет", чтобы не отвлекаться на детали языка PASCAL.

#### ПРОГРАММА 1.1

```
10 CLS : PCLS
20 XO=O:YO=O:VO=5:G=9.81:DT=0.01:GX=500/2.5:GY=GX/1.3
30 A = 45: A1 = A*3.14/180
```

```

31     T = 0
32     X = X0 + V0 * COS (A1) * T : Y = Y0 + V0 * SIN (A1) * T -
G * T ^ 2 / 2
33     PSET (X * GX, 250 - Y * GY)
34     T = T + DT
35     IF Y > = 0 THEN 50

```

В данной программе первая строка (под номером 10) предназначена для очистки экрана.

Строка 20 - задание исходных данных.

При этом масштабные множители, согласно их определению, вычисляются как отношение числа точек для графика вдоль соответствующей оси к величине интервала изменения откладываемой величины

$$N_x = 500; \Delta x = x_{max} - x_{min} = 2.5 - 0 = 2.5,$$

$$\text{здесь } x_{max} = V_0^2 / g.$$

Масштабные множители по оси оу должны быть такими же, как и для оси ох с учетом разной плотности точек.

Строка 30 - задание угла бросания в градусной мере и перевод его в радианную.

Строка 40 - начальное значение времени.

Строка 50 - расчет координат новой точки.

Строка 60 - вывод новой точки на экран.

Строка 70 - изменение аргумента на один шаг.

Строка 80 - если координата у стала меньше нуля, прекратить расчёт.

Этот способ используется в том случае, когда исследуемая функция достаточно проста и не требует для расчетов слишком много времени, тогда точки можно расположить достаточно близко друг к другу. Но если функция сложна, и точки графика нельзя расположить достаточно близко друг к другу, то они плохо сливаются в одну кривую, что затрудняет исследование функции. Это особенно актуально в том случае, когда на экране одновременно присутствуют несколько графиков, тогда бывает трудно отнести точки к тому или иному графику и воспринять совокупность точек, как несколько графиков. В этом случае вместо точечного нужно использовать метод построения графика сплошными линиями. Самым простым способом построения графиков сплошными линиями является использование отрезков прямой для соединения соседних точек графика. Для этого во всех языках программирования, расширенных графическими операторами, имеются операторы вывода отрезка прямых. В языке BASIC это оператор LINE, общий вид которого следующий:

```
LINE (X1, Y1) - (X2, Y2), C
```

где (X1, Y1) – координаты начала отрезка прямой, (X2, Y2) – координаты конца, C – номер цвета выводимого отрезка прямой.

В языке PASCAL

```
LINE (X1, Y1, X2, Y2)
```

Естественно, координаты, использующиеся здесь, должны быть экранными, т.е. учитывающие как масштабные множители, так и смещение начала координат. Кроме того, в последнем операторе переменные должны быть целого типа, для этого нужно использовать функцию ROUND.



Для использования этих операторов нужно в памяти ЭВМ одновременно хранить координаты конца и начала отрезка. Это бывает совершенно необходимо, когда одновременно на экране строятся несколько графиков. Однако если строится один график или несколько графиков строятся последовательно, то проще использовать эти операторы в укороченном виде:

```
LINE - (X2, Y2), C ;  
LINETO ( X2, Y2 ).
```

Эти операторы строят отрезок от текущего положения курсора до точки с координатами, указанными в операторе. Это удобно для построения графика. Однако в этом случае возникает трудность в начале графика. Дело в том, что в начале построения графика графический курсор расположен произвольным образом, не связанным с задачей. Поэтому первый фрагмент графика может оказаться неверным. Для устранения этого неверного фрагмента нужно использовать условный оператор перед оператором вывода отрезка прямой, а именно, для языка BASIC:

```
IF < НАЧАЛО ГРАФИКА > THEN PSET (X, Y)  
ELSE LINE - (X, Y)
```

для языка Pascal:

```
IF <НАЧАЛО ГРАФИКА> THEN MOVETO(X, Y)  
ELSE LINETO(X, Y)
```

Здесь <начало графика> - есть некоторое условие, истинность которого означает, что выводится начальный фрагмент графика. Таким условием чаще всего бывает равенство значения аргумента своему начальному значению. Так в приведенной выше программе вместо строки 60 нужно использовать строку

```
IF T = 0 THEN PSET (X*GX, 250 - Y*GY)  
ELSE LINE - (X*GX, 250 - Y*GY)
```

В том случае, когда необходимо построить несколько графиков, нужно одну и ту же программу повторить несколько раз, воспользовавшись для этого оператором цикла. Есть два способа построения нескольких графиков: последовательно один за другим и одновременно.

Для последовательного построения нескольких графиков достаточно часть программы, строящей один график, взять внутрь цикла по тому параметру, которым отличаются графики друг от друга.

Так в предыдущем примере вместо оператора A=45 в 30 строке нужно использовать оператор FOR A = 15 TO 75 step 15, а в строке 100 оператор NEXT A и вместо одного графика машина построит пять графиков, соответствующих пяти различным углам бросания.

Если же графики должны строиться одновременно, то тогда: во-первых, оператор LINE нужно использовать в полной форме и, во-вторых, цикл, параметром которого отличаются графики, должен быть внутренним.

Так в программе построения траектории тела, брошенного под углом к горизонту, начиная со строки 30, можно предложить следующую программу (фрагмент к программе 1.1)

```
30 T = 0  
40 FOR I = 1 TO 5: A = I * 15: A1 = A * 3.14 / 180  
50 X2 = X0 + V0 * COS(A1) * T: Y2 = Y0 + V0 * SIN(A1) * T -
```

G\*T^2/2

```
60     IF T>0 THEN
LINE (X(I)*GX, 250-Y(I)*GY) - (X2*GX, 250-Y2*GY)
70 X(I)=X2 : Y(I)=Y2
80     NEXT I
81     T = T + DT
82     IF T < 2* V0* SIN(A1)/G THEN 40
```

Особенности этой программы в том, что на каждом этапе построения графика приходится хранить в памяти в виде массива старое значение координат точки.

## 1. 4 КООРДИНАТНЫЕ СЕТКИ

Часто по построенному графику функции требуется определить не только общий характер ее поведения, но и найти конкретные значения функции при том или ином значении ее аргумента. В таком случае график функции должен быть построен на фоне т.н. координатной сетки.

Координатной сеткой называется совокупность равностоящих прямых, параллельных координатным осям на плоскости (совокупность равноотстоящих координатных линий). Расстояние между координатными линиями, выраженное в единицах откладываемой вдоль данной оси величины, называется ценой деления координатной сетки вдоль этой оси.

Зная цену деления координатной сетки, можно определить реальные координаты любой точки экрана и в частности найти значение функции при заданном значении аргумента.

При построении координатной сетки с заданной ценой деления в единицах откладываемых по осям координат величин должны использоваться масштабные множители, поэтому процедура построения координатной сетки должна располагаться после определения масштабных множителей. Координатная сетка в программе может быть построена с помощью следующих фрагментов программы

```
FOR X = X1 TO XMAX STEP DX
LINE (XНАЧ + (X-XМИН) *GX, YНАЧ) -
(XНАЧ + (X-XМИН) *GX, YНАЧ - (YМАХ-YМИН) *GY)
NEXT X
FOR Y = Y1 TO YМАХ STEP DY
LINE (XНАЧ, YНАЧ - (Y-YМИН) *GY) -
(XНАЧ + (XМАХ-XМИН) *GX, YНАЧ - (Y-YМИН) *GY)
NEXT Y
```

Первые три строки отвечают за построение вертикальных координатных линий, расстояние между которыми в единицах откладываемой вдоль оси *ox* величин равно  $\Delta x$ . При этом  $\Delta x$  выбирают таким образом, чтобы сетка была достаточно подробной, с одной стороны, с другой стороны,  $\Delta x$  должен быть круглым числом, чтобы легко можно было использовать его для отыскания реальных координат точек на координатной сетке.

Последние три строки строят ряд координатных линий, параллельных оси *oy*.  $\Delta y$  - цена деления сетки вдоль оси *oy*, выраженная в единицах той величины, которая откладывается по оси *oy*. Здесь  $X_{min}$  и  $X_{max}$  - минимальное и максималь-

ное значение аргумента функции,  $Y_{min}$  и  $Y_{max}$  - те же значения для функции.  $X_{нач}$  и  $Y_{нач}$  – экранные координаты левого нижнего угла части экрана, предназначенной для построения графиков,  $X1$  и  $Y1$  – реальные координаты начальной линии координатной сетки. Они выбираются из условий: 1)  $X1 > X_{min}$ ,  $Y1 > Y_{min}$ ; 2)  $X1 - X_{min} < \Delta x$ ,  $Y1 - Y_{min} < \Delta y$ ; 3)  $X1$  и  $Y1$  должны быть круглыми числами, например, кратными цене деления сетки, чтобы с их помощью легко можно было находить значения аргумента и самой функции.

## 1.5 АВТОМАТИЧЕСКИЙ ВЫБОР МАСШТАБНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ И ЦЕНЫ ДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТНОЙ СЕТКИ

При построении графиков некоторых функций часто заранее бывают неизвестны ни масштабные множители, ни цена деления сетки. В таком случае необходим автоматический выбор этих параметров. Для этого нужно сначала исследовать функцию на максимум и минимум, т.е. найти её максимальное и минимальное значения.

Обозначим  $x_{min}$ ,  $x_{max}$ ,  $y_{min}$ ,  $y_{max}$  - минимальное и максимальное значение аргумента и функции соответственно. Тогда масштабный множитель определяется просто, как указано выше. А именно:

$$\begin{aligned} G_x &= N_x / (x_{max} - x_{min}) \\ G_y &= N_y / (y_{max} - y_{min}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Отличие от предыдущих формул определения масштабных множителей состоит лишь в автоматическом определении максимальных и минимальных значений аргумента и функции.

Для автоматического определения цены деления сетки обозначим  $D_x = x_{max} - x_{min}$ ;  $D_y = y_{max} - y_{min}$  и определим порядок этих чисел  $p$  и мантиссу  $m$ , имея в виду запись чисел  $D_x$  и  $D_y$  в форме с порядком

$D_x = m_x \cdot 10^{p_x}$ ,  $D_y = m_y \cdot 10^{p_y}$ . Тогда

$$\begin{aligned} p_x &= [\lg D_x]; \lg m_x = \{\lg D_x\}, \\ p_y &= [\lg D_y]; \lg m_y = \{\lg D_y\}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

И значит:

$$m_x = 10^{\{\lg D_x\}}; m_y = 10^{\{\lg D_y\}} \quad (1.5)$$

Где фигурными скобками обозначена дробная, а прямыми – целая часть числа.

Цена деления координатной сетки определится следующим образом. Если мантисса числа заключена в пределах от 1 до 2, то цена деления может быть равной  $0,1 \cdot 10^p$ , если мантисса заключена в пределах от 2 до 4, то цена деления может быть равна  $0,2 \cdot 10^p$ , для  $4 < m < 7$  цена деления может быть выбрана равной  $0,4 \cdot 10^p$  или  $0,5 \cdot 10^p$  и для  $m > 7$  цена деления может быть равной  $0,5 \cdot 10^p$  или  $1 \cdot 10^p$ .

## ПРИМЕР 1.2

Для примера рассмотрим задачу построения графика функции распределения Максвелла по модулю скорости [2].

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{\mu}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left( -\frac{\mu v^2}{2RT} \right) v^2.$$

Здесь  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $\mu$  – молярная масса газа.

Для определения масштабных множителей и цены деления координатной сетки необходимо найти максимальное и минимальное значения, как функции, так и аргумента. Из теории распределения Максвелла известно, что наиболее вероятная скорость определяется заданной температурой и параметрами газа следующим образом:

$$v = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

Пользуясь этой формулой, можно найти значение скорости, при котором функция достигает максимального значения. Тем самым можно найти максимальные и минимальные значения, как функции распределения, так и скорости.

Составим программу для решения этой задачи.

## ПРОГРАММА 1.2

```
10 PCLS:CLS
20 M=.029:R=8.310001:T=20:PI=4*ATN(1)
30 DEF FNF(V)=4*PI*(M/(2*PI*R*T))^.5*
EXP(-M*V^2/(2*R*T))*V^2
40 V1=0:V2=3*SQR(2*R*T/M):F1=0:F2=FNF(V2/3)
50 DV=V2-V1:DF=F2-F1:GV=500/DV:GF=150/DF
60 LV=LOG(DV)/LOG(10):PV=INT(LV):MV=10^(LV-PV)
70 IF MV<2 THEN CV=.1*10^PV ELSE IF MV<4 THEN
CV=.2*10^PV ELSE IF MV<6
THEN CV=.4*10^PV ELSE IF MV<8 THEN CV=.5*10^PV ELSE
CV=10^PV
80 LF=LOG(DF)/LOG(10):PF=INT(LF):MF=10^(LF-PF)
90 IF MF<2 THEN CF=.1*10^PF ELSE IF MF<4 THEN CF=.2*10^PF
ELSE IF MF<6
THEN CF=.4*10^PF ELSE IF MF<8 THEN CF=.5*10^PF ELSE
CV=10^PF
100 V3=INT(V1/CV)*CV:IF V3<V1 THEN V3=V3+CV
110 FOR V=V3 TO V2 STEP CV
120 LINE((V-V1)*GV,0)-((V-V1)*GV,150)
130 NEXT V :PRINT"CV=";CV
140 F3=INT(F1/CF)*CF:IF F3<F1 THEN F3=F3+CF
145 FOR F=F3 TO F2 STEP CF
```

```

150 LINE (0, 150 - (F - F1) * GF) - (500, 150 - (F - F1) * GF)
160 NEXT F: PRINT "CF="; CF
170 FOR V=V1 TO V2 STEP CV/10
180 IF V=V1 THEN PSET ((V - V1) * GV, 150 - (FNF(V) - F1) * GF)
ELSE LINE - ((V -
V1) * GV, 150 - (FNF(V) - F1) * GF)
190 NEXT V

```

В данной программе двадцатой строкой определены основные данные задачи. В тридцатой строке функция распределения Максвелла определена, как функция пользователя. В сороковой строке определяются максимальные и минимальные значения функции и аргумента. В строке 50 определяются интервалы изменения аргумента и функции и масштабные множители. В строках 60-90 определяются цены делений координатной сетки по описанному выше словесному алгоритму. В строках 100 и 140 определяются начальные значения величин для построения координатной сетки. Эти величины должны быть кратны цене деления и удовлетворять условиям, указанным в тексте. В строках 110 – 160 строится координатная сетка с определённой ранее ценой деления. И в строках 170-190 строится график распределения Максвелла.

## 1.6 ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Часто решением какой-либо физической задачи является функция нескольких переменных, которую нужно исследовать. Для графического исследования функций нескольких переменных можно построить график исследуемой функции по одной из переменных, оставляя фиксированными остальные переменные. Однако этот способ исследования функции не очень нагляден, хотя для функций более чем двух переменных, он единственен. Но для функций двух переменных возможно наглядное исследование с помощью построения графика функции в виде поверхности в пространстве. Для этого необходимо построить на экране дисплея некоторую проекцию этой поверхности, отражающую все или большинство особенностей поведения функции.

Для разворачивания в пространстве изображаемой поверхности строят её сечения координатными плоскостями, смещая каждое из них в определённом направлении на одну и ту же величину. Это означает, что при преобразовании реальных координат в экранные необходимо учитывать не только две координаты точек исследуемой поверхности, но и все три. А именно формулы преобразования реальных координат в экранные при построении поверхностей выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 x_{экр} &= x_0 + (y - y_{min} - (x - x_{min})k_1)G_y, \\
 y_{экр} &= y_0 - (z - z_{min} + (x - x_{min})k_2)G_z.
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

Такое преобразование координат соответствует смещению сечений в левый нижний угол экрана, т.е. точка наблюдения поверхности расположена в первом квадранте.

Параметры  $k_1$  и  $k_2$  определяют поворот графика относительно осей  $ox$  и  $oy$  соответственно и задаются пользователем произвольно, а параметры  $G_y$  и  $G_z$

определяются максимальными и минимальными значениями реальных координат. Так для экранной координаты  $x$  минимальное значение достигается при  $y=y_{min}$ ,  $x=x_{min}$  и поэтому  $x_0$  определяется координатой левого края участка экрана, отведённого для графика, т.е.  $x_0=x_{нач}$ . Максимальное значение этой координаты наблюдается при  $x=x_{max}$ ,  $y=y_{max}$ . Тогда

$$x_{экр} = x_{нач} + (y_{max} - y_{min} + (x_{max} - x_{min})k_1)G_x = x_1. \quad (1.7)$$

Отсюда найдём масштабный множитель

$$G_y = \frac{x_1 - x_{нач}}{y_{max} - y_{min} + k_1(x_{max} - x_{min})}. \quad (1.8)$$

Здесь  $x_1$  – координата правого края участка экрана, предназначенного для вывода графика.

Аналогично можно найти и параметры  $y_0$  и  $G_z$ , предварительно задав параметр поворота  $k_2$ . Однако, в отличие от предыдущего случая,  $z$  и  $x$  не являются независимыми, и поэтому экранная координата  $y_{экр}$  может достигать максимума, вообще говоря не тогда, когда  $z=z_{max}$  или  $x=x_{max}$ . Для нахождения масштабного множителя необходимо найти минимальное и максимальное значение функции

$$f = z - z_{min} + k_2(x - x_{min}), \quad (1.9)$$

т.е.  $f_{max}$  и  $f_{min}$ . Тогда

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 - f_{min}G_z, \\ y_2 &= y_0 - f_{max}G_z. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Где  $y_1$  и  $y_2$  – экранные координаты верхнего и нижнего края участка экрана, предназначенного для вывода графика. Тогда

$$G_z = \frac{y_1 - y_2}{f_{max} - f_{min}}, \quad (1.11)$$

и

$$y_0 = \frac{f_{max}y_1 - f_{min}y_2}{f_{max} - f_{min}}. \quad (1.12)$$

### **ПРИМЕР 1.3**

В плоскости  $xOy$  расположены два заряда  $q_1$  в точке  $(x_1, y_1)$  и  $q_2$  в точке с координатами  $(x_2, y_2)$ . Построить график потенциала в точках плоскости  $z = z_0$ .

Расчётная формула для данной задачи имеет вид:

$$\varphi = k \frac{q_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z_0^2}} + k \frac{q_2}{\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + z_0^2}}.$$

Составим программу.

## ПРОГРАММА 1.3

```
10 PCLS:CLS
20 K=9E+09:Q1=2E-06:Q2=-1E-06:X1=-1:Y1=1:
X2=1:Y2=1:Z0=.1:GX=100/4:GY=400/2:GF=1/5000
30 FOR X=2*X1 TO -2*X1 STEP .1
40 FOR Y=0 TO 2*Y1 STEP .05
50 F=K*(Q1/SQR((X-X1)^2+(Y-Y1)^2+Z0^2)+
Q2/SQR((X-X2)^2+(Y-Y2)^2+Z0^2))
60 IF Y=0 THEN PSET(150+Y*GY-X*GX,100-F*GF+X*GX) ELSE
LINE-(150+Y*GY-
X*GX,100-F*GF+X*GX)
70 NEXT Y,X
80 FOR Y=0 TO 2*Y1 STEP .05
90 FOR X=2*X1 TO -2*X1 STEP .1
100 F=K*(Q1/SQR((X-X1)^2+(Y-Y1)^2+Z0^2)
+Q2/SQR((X-X2)^2+(Y-Y2)^2+Z0^2))
110 IF X=2*X1 THEN
PSET(150+Y*GY-X*GX,100-F*GF+X*GX) ELSE
LINE-(150+Y*GY-X*GX,100-F*GF+X*GX)
120 NEXT X,Y
```

## 2. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

### 2.1 МЕТОД ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Часто в физике бывает необходимо находить производную от различных функций. В том случае, когда функция достаточно проста, её производную можно найти аналитически. Однако часто бывает, что найти эту производную аналитически нельзя, и поэтому приходится находить её численно.

Суть численного дифференцирования состоит в отыскании отношения приращения функции к приращению аргумента. Такое отношение называют конечной разностью. Т.к. производная функции есть предел этого отношения при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, то точность замены производной указанным выше отношением будет тем большей, чем меньше будет приращение аргумента.

$$\text{Т.е.} \quad y' = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Однако точность приближения определяется не только величиной  $\Delta x$ , но и способом вычисления  $\Delta y$ . А именно. Разложим функцию  $y = y(x)$  в ряд Фурье вблизи точки  $x_0$  до квадратичного члена. Получим:

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + y'(x_0)\Delta x + y''(x_0)\frac{\Delta x^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta x^3). \quad (2.1)$$

Отсюда следует, что

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = y'(x_0)\Delta x + y''(x_0)\frac{\Delta x^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta x^3). \quad (2.2)$$

и тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) + y''(x_0)\frac{\Delta x}{2} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (2.3)$$

Отсюда следует, что

$$y'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - y''(x_0)\frac{\Delta x}{2} - \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (2.4)$$

и значит главная часть погрешности приближения  $y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$  пропорциональна первой степени  $\Delta x$ , или как говорят, такое приближение имеет первый порядок точности.

## 2.2 УТОЧНЕНИЕ РАСЧЁТА ПРОИЗВОДНЫХ

Изменим способ отыскания производной. А именно. Будем искать приращение функции в виде:

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x / 2) - y(x_0 - \Delta x / 2). \quad (2.5)$$

Снова разложим функцию в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_0$ ,

$$y(x_0 - \Delta x / 2) = y(x_0) - y'(x_0)\frac{\Delta x}{2} + y''(x_0)\frac{\Delta x^2}{8} - \mathcal{O}(\Delta x^3), \quad (2.6)$$

$$y(x_0 + \Delta x / 2) = y(x_0) + y'(x_0)\frac{\Delta x}{2} + y''(x_0)\frac{\Delta x^2}{8} + \mathcal{O}(\Delta x^3).$$

Тогда

$$\Delta y = y'(x_0)\Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^3) \text{ и } \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (2.7)$$

Таким образом, в этом случае главная часть ошибки пропорциональна второй степени приращения аргумента и поэтому говорят, что порядок точности данного метода равен двум. Это значит, что уменьшение приращения аргумента в два раза влечёт за собой уменьшение погрешности в четыре раза.

Аналогично можно уточнить производные до более высоких порядков, но для этого нужно рассчитывать функцию уже не в двух, а большем количестве точек, что естественно снова приводит к увеличению времени счёта. Так для достижения порядка точности выше второго нужно рассчитать функцию как минимум в четырёх точках.

Предположим, что производная определяется через четыре значения функции в виде линейной комбинации:



$$\begin{aligned} \tilde{y}' = & Ay(x_0 - \frac{3}{2}\Delta x) + By(x_0 - \frac{1}{2}\Delta x) + \\ & Cy(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x) + Dy(x_0 + \frac{3}{2}\Delta x). \end{aligned} \quad (2.8)$$

При этом параметры  $A, B, C, D$  должны быть подобраны таким образом, чтобы общая погрешность такой аппроксимации была выше второго порядка. Разложим все значения функции, входящие в выражение, в ряд Тейлора.

$$\begin{aligned} y(x_0 - 3\Delta x / 2) = & y(x_0) - y'(x_0)\frac{3}{2}\Delta x + \frac{y''(x_0)}{2}\left(\frac{3}{2}\Delta x\right)^2 - \\ & - \frac{y'''}{6}\left(\frac{3}{2}\Delta x\right)^3 + \frac{y''''}{24}\left(\frac{3}{2}\Delta x\right)^4 - \Theta(\Delta x^5), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} y(x_0 - \Delta x / 2) = & y(x_0) - y'(x_0)\frac{1}{2}\Delta x + \frac{y''(x_0)}{2}\left(\frac{1}{2}\Delta x\right)^2 - \\ & - \frac{y'''}{6}\left(\frac{1}{2}\Delta x\right)^3 + \frac{y''''}{24}\left(\frac{1}{2}\Delta x\right)^4 - \Theta(\Delta x^5), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} y(x_0 + \Delta x / 2) = & y(x_0) + y'(x_0)\frac{1}{2}\Delta x + \frac{y''(x_0)}{2}\left(\frac{1}{2}\Delta x\right)^2 + \\ & + \frac{y'''}{6}\left(\frac{1}{2}\Delta x\right)^3 + \frac{y''''}{24}\left(\frac{1}{2}\Delta x\right)^4 + \Theta(\Delta x^5), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} y(x_0 + 3\Delta x / 2) = & y(x_0) + y'(x_0)\frac{3}{2}\Delta x + \frac{y''(x_0)}{2}\left(\frac{3}{2}\Delta x\right)^2 + \\ & + \frac{y'''}{6}\left(\frac{3}{2}\Delta x\right)^3 + \frac{y''''}{24}\left(\frac{3}{2}\Delta x\right)^4 + \Theta(\Delta x^5). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Подставив это в выражение для производной, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{y}' = & A \left[ y(x_0) - y'(x_0)\frac{3}{2}\Delta x + \frac{y''(x_0)}{2}\left(\frac{3}{2}\Delta x\right)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{y'''}{6}\left(\frac{3}{2}\Delta x\right)^3 + \frac{y''''}{24}\left(\frac{3}{2}\Delta x\right)^4 - \Theta(\Delta x^5) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + B \left[ y(x_0) - y'(x_0) \frac{1}{2} \Delta x + \frac{y''(x_0)}{2} \left( \frac{1}{2} \Delta x \right)^2 - \right. \\
& \left. - \frac{y'''}{6} \left( \frac{1}{2} \Delta x \right)^3 + \frac{y''''}{24} \left( \frac{1}{2} \Delta x \right)^4 - \Theta(\Delta x^5) \right] + \\
& + C \left[ y(x_0) + y'(x_0) \frac{1}{2} \Delta x + \frac{y''(x_0)}{2} \left( \frac{1}{2} \Delta x \right)^2 + \right. \\
& \left. + \frac{y'''}{6} \left( \frac{1}{2} \Delta x \right)^3 + \frac{y''''}{24} \left( \frac{1}{2} \Delta x \right)^4 + \Theta(\Delta x^5) \right] + \\
& + D \left[ y(x_0) + y'(x_0) \frac{3}{2} \Delta x + \frac{y''(x_0)}{2} \left( \frac{3}{2} \Delta x \right)^2 + \right. \\
& \left. + \frac{y'''}{6} \left( \frac{3}{2} \Delta x \right)^3 + \frac{y''''}{24} \left( \frac{3}{2} \Delta x \right)^4 + \Theta(\Delta x^5) \right].
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Для того, чтобы это равенство было верным с точностью, по крайней мере, до кубических членов, необходимо выполнение следующих условий:

$$A + B + C + D = 0, \tag{2.14}$$

т.е. сумма коэффициентов при  $y(x_0)$  должна быть равна нулю.

$$-\frac{3}{2} \Delta x A - \frac{1}{2} \Delta x B + \frac{1}{2} \Delta x C + \frac{3}{2} \Delta x D = 1, \tag{2.15}$$

т.е. сумма коэффициентов при  $y'(x_0)$  должна быть равна единице. И аналогично:

$$\left( \frac{3}{2} \Delta x \right)^2 A + \left( \frac{1}{2} \Delta x \right)^2 B + \left( \frac{1}{2} \Delta x \right)^2 C + \left( \frac{3}{2} \Delta x \right)^2 D = 0, \tag{2.16}$$

$$-\left( \frac{3}{2} \Delta x \right)^3 A - \left( \frac{1}{2} \Delta x \right)^3 B + \left( \frac{1}{2} \Delta x \right)^3 C + \left( \frac{3}{2} \Delta x \right)^3 D = 0. \tag{2.17}$$

Решив полученную систему уравнений относительно коэффициентов  $A, B, C$  и  $D$ , получим:

$$A = -D = \frac{1}{24 \Delta x}, B = -C = \frac{27}{24 \Delta x}. \tag{2.18}$$

При таких коэффициентах сумма слагаемых пропорциональных  $\Delta x^4$  также будет равна нулю, а сумма слагаемых пропорциональных  $\Delta x^5$  отлична от нуля, но т.к. коэффициенты обратно пропорциональны  $\Delta x$ , то общая погрешность приближения оказывается пропорциональной  $\Delta x^4$ , т.е.

$$\tilde{y}' = \frac{27}{24} \frac{y(x_0 + \Delta x / 2) - y(x_0 - \Delta x / 2)}{\Delta x} - \frac{1}{24} \frac{y(x_0 + 3\Delta x / 2) - y(x_0 - 3\Delta x / 2)}{\Delta x} = y' + \Theta(\Delta x^4). \quad (2.19)$$

### 2.3 ОШИБКИ ОКРУГЛЕНИЙ

Однако при вычислении производной на компьютере источником погрешности становится не только способ представления производной, но и так называемая погрешность округления, связанная с тем, что в компьютере любое число представляется с помощью конечного числа десятичных разрядов. И если полученное в результате какой-либо операции число имеет больше разрядов, чем имеет компьютер, оно округляется, что естественно приводит к ошибке, которая и носит название ошибки округления. Чаще всего компьютеры имеют достаточно много разрядов в представлении числа и ошибки округления существенной роли не играют. Но иногда приходится учитывать возможные ошибки округлений. Эти ошибки могут быть существенными в двух случаях.

1. Когда операции проводятся много раз и ошибка округления чаще оказывается одного какого-либо знака и при вычислениях нарастает. Такого типа вычислительные процессы называются неустойчивыми к ошибкам округлений или плохо обусловленными. Для борьбы с ошибками округлений в этом случае либо увеличивают разрядную сетку представления чисел в компьютере, например, используют представление чисел с двойной точностью, либо меняют вычислительный процесс таким образом, чтобы ошибки округлений разного знака появлялись в среднем одинаково часто.

2. Ошибки округлений могут быть существенными тогда, когда приходится вычитать близкие по величине числа. Это приводит к тому, что количество верных цифр исходных чисел уменьшается и тем самым увеличивается относительная погрешность результата.

Последний случай особенно актуален при вычислении производных. Чем меньше  $\Delta x$ , тем ближе друг к другу вычитаемые числа. Это приводит к тому, что уменьшение  $\Delta x$  увеличивает точность вычисления производной лишь до некоторого предела, за которым уменьшение приращения аргумента ведёт уже к возрастанию погрешности результата и уменьшению порядка точности формул расчёта производной.

### 2.4 МЕТОД УТОЧНЕНИЯ ЭЙТКЕНА

Контролировать погрешность округлений в общем случае задача довольно сложная, но при вычислении производной может быть предложен довольно простой способ, основанный на так называемом методе уточнения Эйткена. Этот метод имеет общее значение для контроля порядка и величины погрешности некоторого процесса вычислений и для уточнения результатов этого процесса, поэтому мы рассмотрим его в общем случае.

Пусть в результате некоторого вычислительного процесса получены последовательно один за другим три значения величины  $Y$  с увеличением её точнос-

ти. Будем считать, что погрешность с каждым разом уменьшается по геометрической прогрессии, но знаменатель её заранее не известен. Т.е.:

$$\begin{aligned} y_1 &= y + \alpha q, \\ y_2 &= y + \alpha q^2, \\ y_3 &= y + \alpha q^3. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Эти три равенства представляют собой систему уравнений, из которых можно найти не только порядок и величину погрешности расчёта, но и уточнить сам результат, учтя найденную погрешность.

Вычтем из третьего уравнения второе, а из второго - первое. Получим:

$$\begin{aligned} y_3 - y_2 &= \alpha q^2 (q - 1), \\ y_2 - y_1 &= \alpha q (q - 1). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Поделим первое уравнение на второе, получим:

$$\frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1} = q, \tag{2.22}$$

т.е. тем самым найдем знаменатель геометрической прогрессии, соответствующей закону убывания ошибки. После этого из второго уравнения можно найти погрешность первого результата:

$$\alpha q = \frac{y_2 - y_1}{q - 1} \tag{2.23}$$

и уточнить искомую величину:

$$y = y_1 - \alpha q = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{q - 1}. \tag{2.24}$$

Если вычислительный процесс связан с использованием некоторого шага по аргументу  $\Delta x$  и имеет порядок погрешности  $p$ , то ошибка процесса имеет структуру  $\alpha \Delta x^p$ . Это значит, что если рассчитывать искомую величину несколько раз, уменьшая каждый раз шаг по аргументу в  $r$  раз, то погрешность будет уменьшаться как:

$\alpha \Delta x^p, \alpha \Delta x^p / r^p, \alpha \Delta x^p / (r^p)^2 \dots$ , т.е. как геометрическая прогрессия со знаменателем  $1 / r^p$ . Вычисляя этот знаменатель методом Эйткена, найдём, что

$$\frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1} = r^p. \tag{2.25}$$

Отсюда можно найти порядок погрешности процесса.

$$p = \log_r \left( \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} \right). \tag{2.26}$$

Обычно полагают  $r = 2$ , тогда

$$p = \log_2 \left( \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} \right). \quad (2.27)$$

### **ПРИМЕР 2.1**

Найдём производную функции  $y = e^x$  в точке  $x = 0$  по формулам с порядком точности 2. Рассчитаем производную для трёх значений  $\Delta x: 0.8; 0.4; 0.2$ .

$$y'_1 = 1.0268808; y'_2 = 1.0066802; y'_3 = 1.0016675$$

тогда:  $q = 0.248$  и значит  $p = 2.01$ , т.е. порядок погрешности действительно близок к 2. Найдём погрешность.

$$\alpha q = \frac{y'_2 - y'_1}{q - 1} = 0.02686.$$

Тогда уточнённое значение будет

$$y' = y'_1 - \alpha q = 1.0000131,$$

т.е. после уточнения производная стала гораздо ближе к точному значению, чем самое точное из приведённых выше.

Для контроля за погрешностью можно, уменьшая  $\Delta x$ , находить каждый раз  $p$ . Процесс продолжать до тех пор, пока порядок погрешности расчёта не будет существенно отличаться от гарантированного методом расчёта, в нашем случае от двух. Дальнейшее уменьшение шага будет уже приводить к возрастанию, а не уменьшению ошибки вычислений производной.

Возвращаясь к предыдущему примеру, найдём, что для  $\Delta x = 0.05$ ;  $p = 2.12$ , а для  $\Delta x = 0.025$ ;  $p = 1.58$ , что существенно ниже 2 и значит  $\Delta x = 0.05$  оптимальное значение приращения аргумента для вычисления производной в данном случае.

## **3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ**

### **3.1 ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ**

Часто в физике бывает необходимо решить некоторое уравнение

$$f(x) = 0. \quad (3.1)$$

Если функция  $f(x)$  - есть многочлен до 4-ой степени включительно, то для отыскания корня уравнения (3.1) существуют формулы выражающие корень уравнения через коэффициенты многочлена. Если же функция  $f(x)$  есть многочлен 5-ой и выше степени или не многочлен вообще, то чаще всего для отыскания корней уравнения (3.1) вообще не существует формул или, как говорят, эти корни не выражаются в радикалах. В этом случае уравнения называются трансцендентными. Часто бывает также, что расчетные формулы для корней уравнения слишком сложны, как формулы Кордона, что затрудняет их использование. В таких случаях единственной возможностью решения задачи является метод численного расчета корней уравнения (3.1).

Однако прежде, чем решать уравнение (3.1), необходимо, как говорят, отделить его корни, т.е. найти интервалы, хотя бы приближённо, внутри которых

имеется точно один корень.

Одним из возможных методов отделения корней может быть следующий. Задаётся начальное значение аргумента таким образом, чтобы оно было заведомо меньше самого малого корня. Вычисляется значение функции в этой точке и запоминается её знак. Аргумент увеличивается на один шаг и снова вычисляется функция. Её знак сравнивается со знаком предыдущего значения функции. Если знаки противоположны, то промежуток от предыдущего значения аргумента до текущего содержит корень и его нужно запомнить для последующего исследования с целью уточнения корня. В противном случае промежуток пропускается и находится следующий. Таким образом, можно предварительно определить положение всех корней уравнения (3.1) из некоторого промежутка.

Алгоритм такого метода отделения корней может быть следующим.

1. Задать начальное значение аргумента  $x$  и шаг приращения аргумента  $\Delta x$ . Шаг должен быть достаточно малым, чтобы не пропустить ни одного корня при отделении, но с другой стороны он должен быть достаточно большим, чтобы процесс отделения корней не был слишком длительным.
2. Вычислить значение функции в данной точке.
3. Если расчёт производится первый раз, запомнить значение функции и идти к пункту 5.
4. Сравнить текущее значение функции с предыдущим. Если знаки текущего значения функции и предыдущего противоположны, запомнить предыдущее значение аргумента в специальном массиве промежутков, имеющих корень уравнения (3.1). Достаточно запомнить лишь левый конец промежутка, т.к. правый можно определить путём добавления шага к левому концу. Если знаки текущего значения функции и предыдущего одинаковы, данный промежуток пропускается.
5. Запомнить текущее значение функции вместо предыдущего.
6. Изменить аргумент на один шаг:  $x = x + \Delta x$ .
7. Если значение аргумента не вышло за правый конец промежутка исследования, повторить процесс с п. 2, в противном случае приступить к уточнению корней.

### **ПРИМЕР 3.1**

Найти объём газа Ван-дер-Ваальса при заданных давлении и температуре. Исследуемое уравнение при этом будет иметь вид:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) - RT = 0. \quad (3.2)$$

Здесь  $p, V, T$  - давление, объём и температура одного моля газа Ван-дер-Ваальса,  $a, b$  - константы Ван-дер-Ваальса,  $R$  - универсальная газовая постоянная. Тогда для отделения корней нужно исследовать функцию

$$f(V) = \left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) - RT. \quad (3.3)$$

В качестве начального значения аргумента можно выбрать  $V = b$ , т.к. с физической точки зрения объём газа не может быть меньше  $b$ . А в качестве

шага поиска можно выбрать  $0.1b$ . Если шаг поиска окажется слишком малым, и процесс отделения корней будет слишком длительным, можно будет увеличить шаг. Если подробность поиска будет недостаточной, шаг можно уменьшить. Правый конец промежутка исследования может быть выбран равным  $20b$ . Если в этом промежутке не будет найдено ни одного корня, значит необходимо расширить промежуток.

Составим программу.

### ПРОГРАММА 3.1

```

10 CLS:PCLS
20 R=8.31:T=115:P=2000000!:
A=.141:B=.0000392:DV=.1*B
25 I=0
30 FOR V=B+.1*B TO 20*B STEP DV
40 F=(P+A/V^2)*(V-B)-R*T
50 IF V=B THEN 70
60 IF F*F1<0 THEN I=I+1:V(I)=V
70 F1=F
80 NEXT V:N=I
90 PRINT"КОРНИ НАХОДЯТСЯ В ПРОМЕЖУТКАХ:"
100 FOR I=1 TO N
110 PRINT"ОТ ";V(I)-.1*B;"ДО ";V(I)
120 NEXT I
130 STOP

```

В процессе отделения корней возможно одновременное их уточнение. Для этого необходимо добавить к программе небольшую подпрограмму, уточняющую корень. А именно.

```

140 V1=V:D1=-DV/10:F2=F
150 F3=(P+A/V1^2)*(V1-B)-R*T
160 IF F3*F2<0 THEN 180
170 F2=F3:V1=V1+D1:GOTO 150
180 IF ABS(D1)<E THEN 200
190 D1=-D1/10:GOTO 170
200 PRINT"V(";I;")=";V1-D1/2;"С ПОГРЕШНОСТЬЮ";ABS(D1/2)
210 RETURN

```

В строке 60 добавить обращение к этой подпрограмме. А в строке 20 добавить параметр, характеризующий погрешность определения корня.  $E = 0.01 * b$ .

Результаты работы этой программы следующие. При данных параметрах газа программа определяет три промежутка: от  $7.6 \cdot 10^{-5}$  до  $8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$ , от  $10.8 \cdot 10^{-5}$  до  $11.2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$ , от  $32.8 \cdot 10^{-5}$  до  $33.2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$ . Уточнение корней позволило найти три корня  $V_1=7.76 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$ ,  $V_2=11.00 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$ ,  $V_3=33.02 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$ . При других значениях давления корень может быть только один. Так, например, для  $P=1 \cdot 10^6 \text{ Па}$  корень находится в промежутке от  $8.32 \cdot 10^{-4}$  до  $8.36 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$  и равен  $8.348 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$ , а для  $P=3 \cdot 10^6 \text{ Па}$  корень находится в промежутке от  $6.8 \cdot 10^{-5}$  до  $7.2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$  и равен  $7.034 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$ .

## 3.2 МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

Кроме указанного в первом параграфе метода уточнения корней уравнений вместе с отделением корней существуют другие методы численного решения уравнений. Самый простой из них и, в то же время, общеприменимый есть метод половинного деления. Суть его состоит в следующем.

Пусть относительно функции  $f(x)$  известно, что она определена и непрерывна в промежутке  $[a, b]$  и на концах его принимает значения разных знаков. В этом случае график этой функции хотя бы один раз, пересекает ось  $ox$  внутри отрезка  $[a, b]$ , как показано на рисунке 3.1. Эта точка пересечения и является корнем уравнения (3.1). Если корни предварительно отделены, то такая точка только одна на этом промежутке.

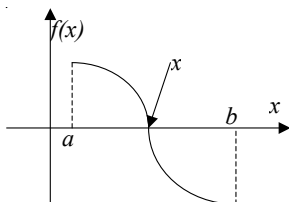


Рисунок 3.1

Алгоритм метода половинного деления состоит в следующем.

1). Поделить отрезок  $[a, b]$  пополам, т.е. найти  $x = (a + b) / 2$ .

2). Из двух получившихся половинок отрезка  $[a, b]$  для дальнейшего рассмотрения выбрать ту, на концах которой функция принимает значение разных знаков.

3). Выбранную половинку снова разделить пополам.

4). Процесс деления продолжать до тех пор, пока длина вновь получившейся половинки не станет меньше некоторого наперед заданного числа, характеризующего точность расчета.

5). Тогда корнем уравнения считается середина последнего отрезка, а погрешностью в определении корня - половина длины отрезка.

Время расчета этим алгоритмом достаточно велико, но это вполне окупается универсальностью этого метода. Кроме того, этот метод легко может быть переведен на программу.

Блок-схема этого алгоритма выглядит следующим образом.

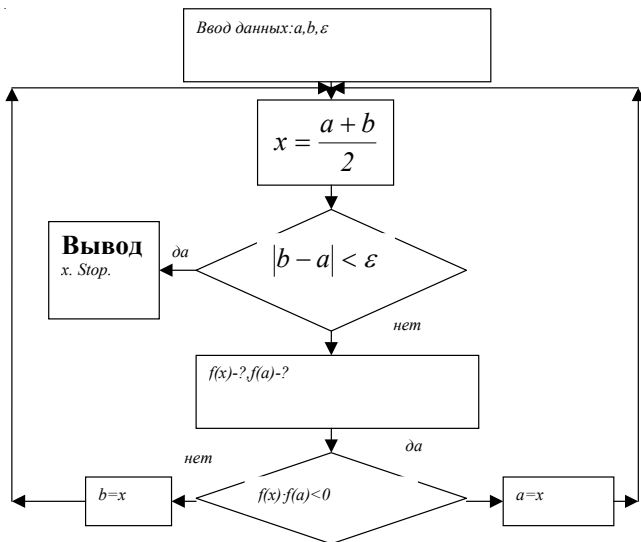


Рисунок 3.2



### ПРИМЕР 3.2

На тонких не растяжимых, непроводящих, невесомых нитях подвешены две одинаковые, одинаково заряженные, легкие гильзы. Требуется найти угол, под которым разойдутся нити гильз от вертикали в результате отталкивания.

Для решения физической части задачи изобразим гильзы с действующими на них силами, как на рисунке 3.3.

В силу одинаковости гильз, силы, которые на них действуют, будут одинаковы по величине. Выберем оси координат, как показано на рисунке. Запишем первое условие равновесия гильз и спроецируем его на оси координат.

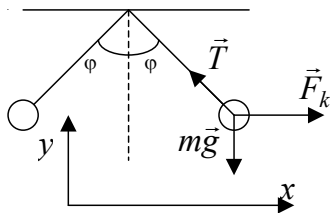


Рисунок 3.3

$$\begin{aligned} \vec{T} + \vec{F}_k + m\vec{g} &= 0 \\ ox : -T \sin \varphi + F_k &= 0 \\ oy : T \cos \varphi - mg &= 0 \end{aligned}$$

или  $T \sin \varphi = F_k, T \cos \varphi = mg$ .

Поделим первое на второе

$$tg \varphi = \frac{F_k}{mg}$$

но  $F_k = k \frac{q^2}{r^2}$ , где  $r = 2l \sin j$  - расстояние между гильзами,  $k$  – электростатическая постоянная,  $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Нм}^2/\text{Кл}^2$ .

Тогда

$$tg \varphi = k \frac{q^2}{mg 4l^2 \sin^2 \varphi} \quad (3.4)$$

В данное уравнение, как неизвестное, входит угол  $j$ , который и нужно найти для решения задачи. Это уравнение лучше представить в виде

$$tg \varphi \cdot \sin^2 \varphi - \frac{kq^2}{mg 4l^2} = 0 \quad (3.5)$$

Здесь мы естественно предполагаем, что  $\varphi \neq 0$ , что может быть корнем уравнения лишь при  $q = 0$ .

Полученное уравнение, по-видимому, трансцендентно и поэтому его лучше решать численно.

Составим программу для такого решения

### ПРОГРАММА 3.2

```
10 CLS:PCLS
20 K=9E+09 : L=1: G=9.81
30 M=.001
40 Q=.000001
50 A=0:B=1.57:E=.01
60 FI=(A+B)/2
70 IF B-A<E THEN 120
```

```

80 FA=TAN(A)*SIN(A)^2-K*Q^2/(4*L^2*M*G)
90 FFI=TAN(FI)*SIN(FI)^2-K*Q^2/(4*L^2*M*G)
100 IF FA*FFI<=0 THEN B=FI ELSE A=FI
110 GOTO 60
120 PRINT "FI=";FI;"+"-";(B-A)/2

```

Результаты работы программы  $\varphi=0.948\pm 0.003$  рад.

Строки 10-40 - очищают экран и задают исходные данные, в том числе и константы. Данные  $m$  и  $Q$  внесены отдельными строками для того, чтобы эту программу легко можно было изменить для включения в нее циклов, что нужно при построении графиков.

Так, если нужно построить один график зависимости  $\varphi(Q)$ , то в строке 40 нужно установить оператор начала цикла, например, FORQ = -1E -5 TO 1E -5 STEP 1E -6. В строке 130 подставить оператор конца цикла NEXT Q, а вместо 120 строки записать следующую IF Q=-1E-05 THEN PSET(250+Q\*2,5E07,250-FI\*150) ELSE LINE-(250+Q\*2.5E07,250-FI\*150).

В результате работы программы на экране будет построен график функции  $\varphi(Q)$ .

Чтобы построить несколько графиков, нужно в строке 40 записать оператор FORM=1E-3 TO 5E-3 STEP 1E-3, а в конце программы строкой 140 - оператор конца цикла - NEXT M.

Далее программа следует алгоритму, представленному в блок-схеме.

### 3.3 МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Второй метод решения уравнений - метод итераций или метод последовательных приближений. Он менее универсален, но часто более быстро сходящийся. Суть этого метода состоит в следующем. Уравнение  $f(x) = 0$  представляют в равносильном виде:  $x = \varphi(x)$ . Такое представление можно осуществить несколькими способами, но не все из них могут использоваться для итераций. Для этого необходимо, чтобы функция  $\varphi(x)$  удовлетворяла некоторым условиям, о которых речь пойдет ниже. После выбора функции  $j(x)$  выбирают некоторое значение  $x_0 \in [a, b]$ , считая его так называемым нулевым приближением. С его помощью находят т.н. первое приближение

$$x_1 = \varphi(x_0), \text{ затем второе}$$

$$x_2 = \varphi(x_1) \text{ и т.д.}$$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),$$

в общем случае отыскание каждого последующего приближения называется итерацией.

Такой процесс, вообще говоря, всегда бесконечен, но существует два принципиально разных процесса итераций. А именно. Первым процессом является процесс, последовательные приближения в котором всё время удаляются друг от друга, т.е.

$$|x_{n+1} - x_n| \geq |x_n - x_{n-1}|. \quad (3.6)$$

Такой процесс итераций называется расходящимся и он естественно неприменим к решению задачи.

Во втором процессе последовательные приближения сближаются, т.е.

$$|x_{n+1} - x_n| < |x_n - x_{n-1}|. \quad (3.7)$$

В этом случае процесс называется сходящимся и пределом этого процесса, как можно строго показать, является точное значение корня уравнения (3.1).

Сходимость процесса итераций во многом определяется видом функции  $\varphi(x)$ . Полное исследование сходимости процесса итераций – вопрос сложный, но можно отметить, что достаточным условием сходимости является условие

$$\forall x \in [a, b] \quad |\varphi'(x)| < 1 \text{ и } \varphi(x) \in [a, b]. \quad (3.8)$$

Так в предыдущем примере уравнение можно представить в следующем виде

$$j = \arctg \left( \frac{kQ^2}{4l^2 m y \sin^2 \varphi} \right). \quad (3.9)$$

Однако при малых  $\varphi$  данная функция перестаёт удовлетворять условию сходимости процесса итераций, и процесс перестаёт сходиться. Для больших же  $\varphi$  этот процесс достаточно хорошо сходится.

Необходимому условию сходимости процесса итерации удовлетворяют функции

$$\varphi(x) = x + \lambda f(x), \quad (3.10)$$

где  $\lambda = \pm \frac{1}{M}$ ,  $M = \max |f'(x)|$ ,  $x \in [a, b]$ . При этом  $\lambda < 0$ , если  $f(x)$  монотонно

возрастает, и  $\lambda > 0$ , если  $f(x)$  монотонно убывает.

В предыдущем примере итерационный процесс можно организовать в виде

$$\varphi = \varphi + \lambda \left( \operatorname{tg} \varphi \sin^2 \varphi - \frac{kQ^2}{4l^2 mg} \right). \quad (3.11)$$

И при  $\lambda = -0.5$  этот процесс хорошо сходится, но при малых  $j$  он также плохо обусловлен.

Часто при использовании такого метода трудно бывает определить знак производной  $f'(x)$  и её максимальное значение модуля. В этом случае параметр  $\lambda$  можно находить подбором, т.е. выбрать произвольным образом  $\lambda$  и проверить процесс, если он расходится, уменьшить  $|\lambda|$ , если сходится, но медленно, можно немного увеличить  $|\lambda|$ . Если подобрать  $\lambda$  не удаётся, можно попробовать сменить знак  $\lambda$  и повторить подбор.

Для решения предыдущей задачи методом итераций нужно составить следующую программу:

### **ПРОГРАММА 3.3**

```

10 CLS: PCLS
20 K=9E9: L=1: G=9.81
30 M=1E-03
40 Q=2E-06
50 F1=1: E=0.01
60 F2=ATN(K*Q^2/(4*L^2*M*G*SIN(F1)^2))
70 IF ABS(F2-F1)>E THEN F1=F2: GOTO 60
80 PRINT "FI="; F2

```

Результат расчёта  $\varphi=0.94\pm 0.01$  рад. При малых значениях  $Q$  процесс плохо обусловлен, а при больших, сходится довольно быстро.

Для расчёта корня уравнения вторым способом программу нужно изменить следующим образом

$$45 \quad U = -0.5$$

$$60 \quad F2 = F1 + U * (\text{TAN}(F1) * \text{SIN}(F1) ^2 - K * Q ^2 / (4 * L ^2 * M * G))$$

При этом решение уравнения будет достигнуто за 6 итераций и значение корня будет равно  $\varphi = 0.95\pm 0.01$  рад. При этом процесс сходится для любых величин заряда гильз.

### 3.4 МЕТОД СЕКУЩИХ И КАСАТЕЛЬНЫХ

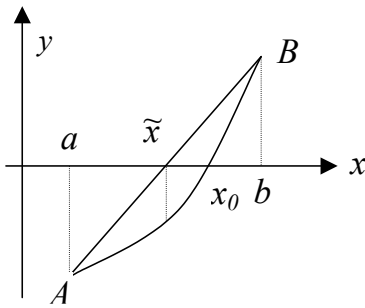


Рисунок 3.4

Одним из частных случаев метода итераций является метод секущих. Суть этого метода состоит в следующем.

Пусть функция  $y=f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и на его концах принимает значения разных знаков. В таком случае график этой функции хотя бы раз пересечет ось  $ox$  внутри отрезка  $[a, b]$ , как показано на рисунке 3.4. Обозначим через  $x_0$  корень уравнения. Один раз обязательно пересечет ось  $ox$  внутри отрезка  $[a, b]$  и секущая  $AB$ . Обозначим  $\tilde{x}$  точку пересечения секущей с осью  $Ox$ .

Очевидно, что значение  $\tilde{x}$  может считаться приближением  $x_0$  с погрешностью не более чем  $b-a$ .

Для отыскания  $\tilde{x}$  найдём уравнение секущей (хорды)  $AB$ .

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \tag{3.12}$$

Если  $y=0$ , то  $x = \tilde{x}$  и тогда

$$-\frac{f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{\tilde{x} - a}{b - a} \Rightarrow \tilde{x} = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a) \tag{3.13}$$

После этого находим значение функции  $f(\tilde{x})$  и сравниваем его со значениями на концах промежутка и из двух частей отрезка  $[a, b]$  для рассмотрения выбираем ту, на концах которой функция принимает значения разных знаков и снова по этой же формуле делим отрезок на части. И т.д. Процесс длится до тех пор, пока модуль функции  $f(x)$  не станет меньше некоторой заданной величины, в этом случае погрешность в определении корня определяется разностью двух последовательных итераций.

Таким образом, метод секущих похож на метод половинного деления и отличается от него лишь тем, что в нем отрезки делятся не на равные части.

Блок-схема алгоритма представлена на рисунке 3.5.

Для решения той же задачи, что и в примере 3.2 методом секущей нужно в

строке 55 разместить оператор

55 FA=TAN (A) \* SIN (A) ^2-K\*Q^2 / (4\*L^2\*M\*G) :

FB=TAN (B) \* SIN (B) ^2-K\*Q^2 / (4\*L^2\*M\*G)

в строке 60 вместо оператора X=(A+B)/2 поставить оператор

60 X=A-F1 / (F2-F1) \* (B-A) ,

а строку 80 исключить.

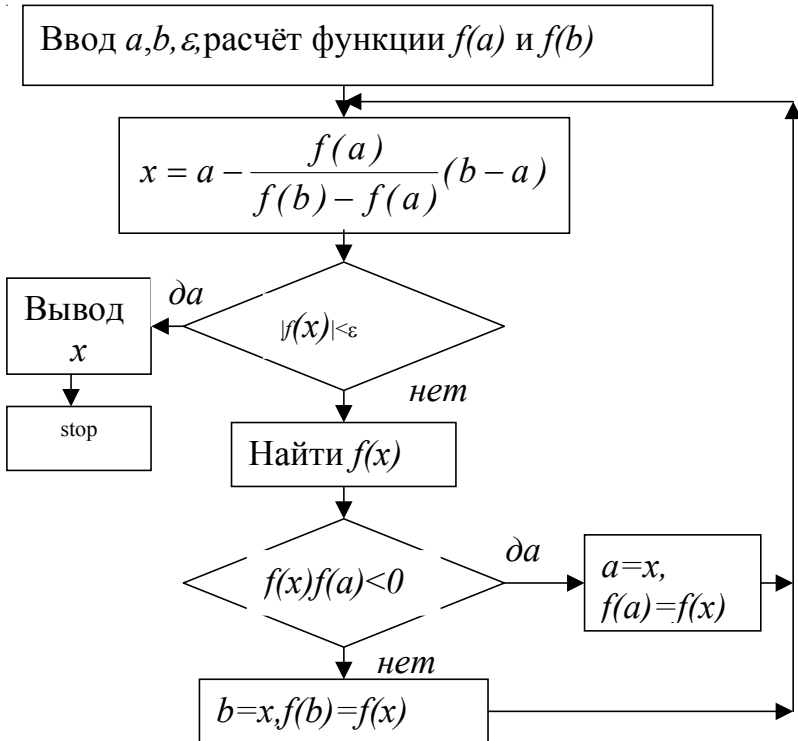


Рисунок 3.5

### ПРОГРАММА 3.4

10 CLS: PCLS

20 K=9E9: L=1: G=9.81

30 M=1E-03

40 Q=2E-06

50 A=0: B=1.57: E=0.01

60 FA=TAN (A) \* SIN (A) ^2-K\*Q^2 / (4\*L^2\*M\*G)

70 FB=TAN (B) \* SIN (B) ^2-K\*Q^2 / (4\*L^2\*M\*G)

90 FI=A-FA\* (B-A) / (FB-FA)

100 FFI= TAN (FI) \* SIN (FI) ^2-K\*Q^2 / (4\*L^2\*M\*G)

```

110 IF ABS(FFI)<E THEN 140
120 IF FFI*FA<0 THEN B=FI: FB=FFI: ELSE A=FI: FA=FFI
130 GOTO 90
140 PRINT "FI="; FI; "±"; B-A

```

Результат работы программы  $\varphi = 0.94 \pm 0.01$  рад.

Данный метод во многих случаях несколько быстрее сходится в силу того, что при достаточно малых интервалах  $[a, b]$  функция  $f(x)$  монотонна и мало выпукла. Это приводит к тому, что её график на отрезке  $[a, b]$  мало отличается от хорды и точка  $x_0$  ближе к  $\tilde{x}$ , чем  $(a+b)/2$ .

С методом секущих тесно связан метод касательных, суть которого состоит в том, что находится точка пересечения касательной к графику функции  $y=f(x)$  в точке  $a$  или  $b$ . Уравнение касательной

$$y-f(a)=f'(a)(x-a) \quad (3.14)$$

или  $y-f(b)=f'(b)(x-b)$

и при  $y=0$   $x=\tilde{x}$ . Тогда

$$-f(a) = f'(a) \cdot (\tilde{x} - a) \Rightarrow \tilde{x} = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

или

$$\tilde{x} = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \quad (3.15)$$

Однако в отличие от секущей касательная не всегда пересекает ось  $ox$  внутри отрезка  $[a, b]$  и поэтому этот процесс не всегда сходится. В силу этого на практике метод касательных не нашел широкого применения, тем более что требует нахождения производной от функции, что бывает часто очень затруднительно.

## 4. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Часто в физике бывает необходимо найти некоторый определенный интеграл

$$J = \int_a^b f(x) dx. \quad (4.1)$$

Если функция  $f(x)$  имеет первообразную  $F'(x)=f(x)$ , то вычислить интеграл можно используя формулу Ньютона-Лейбница

$$J=F(b)-F(a). \quad (4.2)$$

Однако часто первообразная  $F(x)$  либо не выражается через элементарные функции, либо слишком сложна. В этом случае единственным методом вычисления интеграла является какой-либо численный метод.

Существует несколько численных методов интегрирования, но все они, так или иначе, основываются на геометрическом смысле интеграла. Мы рассмотрим три метода: метод прямоугольников, метод трапеций и метод парабол или метод Симпсона.

### 4.1 МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Согласно геометрическому смыслу определённого интеграла он равен площади криволинейной трапеции заключенной между графиками функции  $y=f(x)$  осью  $ox$  и прямыми  $x=a$  и  $x=b$ , как показано на рисунке 4.1. Это значит, что если

каким-либо образом найти площадь криволинейной трапеции  $aABb$ , то тем самым будет найден и интеграл.

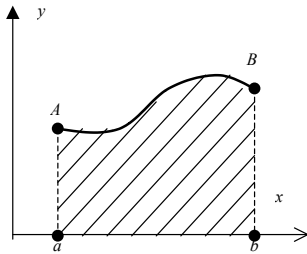


Рисунок 4.1

Для этого разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  частей точками  $x_0=a, x_1, \dots, x_n=b$ . Обозначим  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Эта величина называется шагом интегрирования. На этих отрезках, как на основаниях, построим прямоугольники, высоты которых обозначим  $h_i$ . Эти высоты можно выбрать по-разному: а)  $h_i=f(x_{i-1})$ , б)  $h_i=f(x_i)$ , в)  $h_i=f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)$ , г)  $h_i=(f(x_{i-1})+f(x_i))/2$ . Во всех случаях криволинейная трапеция почти сплошь будет покрыта прямоугольниками и её площадь будет приблизительно равна суммарной площади этих прямоугольников. И чтобы найти интеграл, нужно про-

суммировать площади всех прямоугольников. Поэтому метод носит название метода прямоугольников. При этом в случае а) он называется методом левых прямоугольников, б) правых, в) центральных прямоугольников, а в случае г) высота  $i$ -го прямоугольника выбирается такой, чтобы его площадь была равна площади трапеции с основанием  $f(x_{i-1})$  и  $f(x_i)$ , поэтому последний метод еще называют методом трапеций.

Т.к. площадь каждого прямоугольника равна произведению его основания на высоту, то

$$S_i = h_i \Delta x_i \text{ и значит}$$

$$S = \sum_{i=1}^n h_i \Delta x_i,$$

т.е. 
$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n h_i \Delta x_i. \quad (4.3)$$

Эта формула и носит название формулы прямоугольников. Однако для удобства расчёта для разных методов она несколько преобразуется. Обычно, если выпуклость или вогнутость функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  невелика, шаг интегрирования выбирают одинаковым для всех участков отрезка  $[a, b]$ , т.е.  $\Delta x_i = \Delta x = (b-a)/n$ . Тогда формулы упрощаются:

а) для метода левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}), \quad (4.4)$$

б) для метода правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad (4.5)$$

в) для метода центральных прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \quad (4.6)$$

и г) для метода трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)]. \quad (4.7)$$

Последняя формула, в силу того, что под знаком суммы стоит сумма 2-х следующих друг за другом слагаемых, может быть преобразована

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(b) + f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right). \quad (4.8)$$

Из этих 4-х методов наиболее часто используется метод центральных прямоугольников. Это обусловлено тем, что сложность расчетной формулы такая же, как для метода боковых прямоугольников, а точность при той же подробности разбиения выше. Метод трапеций имеет ту же точность, что и метод центральных прямоугольников, но для него несколько сложнее формула и в ней функция  $f(x)$  рассчитывается на один раз больше.

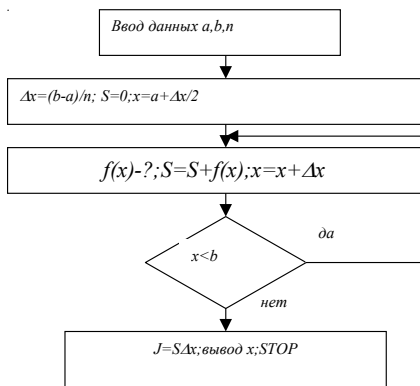


Рисунок 4.2

Приведем блок-схему алгоритма метода центральных прямоугольников, как наиболее часто используемую из 4-х вышеуказанных (рисунок 4.2.)

В этом алгоритме на первом этапе вводятся необходимые данные. Вторым этапом определяется шаг интегрирования, обнуляется так называемый сумматор, чтобы затем накапливать в нём сумму значений функции, и определяется начальное значение аргумента. Добавление к левому концу отрезка половины шага диктуется логикой самого метода центральных прямоугольников, определяющего высоту каждого прямоугольника не на концах его оснований, а в центре. Третий этап - расчет подынтегральной функции, изменение сумматора на одно слагаемое и изменение аргумента функции на один шаг. Такое изменение позволяет из середины одного отрезка  $\Delta x$  перейти в середину следующего. Четвёртый - завершение цикла, алгоритм возвращается на 3-й этап, пока процесс интегрирования не будет закончен.

Прежде чем привести примеры на использование данного алгоритма, отметим опять, как и в 2-х предыдущих главах, что от выбора шага интегрирования  $\Delta x$  зависит с одной стороны точность расчета, а с другой стороны - время счета и эта зависимость альтернативна - уменьшение погрешности влечет за собой увеличение времени счета и наоборот.

### ПРИМЕР 4.1

В плоскости  $xy$  расположено тонкое равномерно заряженное кольцо радиусом  $R$  и с центром в начале координат, как показано на рисунке 4.3. Найти потен-



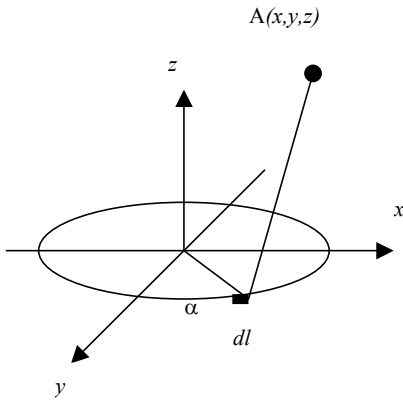


Рисунок 4.3

заряды можно было считать точечными. В этом случае можно воспользоваться формулой точечного заряда, заменив в ней потенциал и заряд, входящие в эту формулу, элементарными величинами. Т.е.

$$d\varphi = k \frac{dq}{r} \quad (4.10)$$

Т.к. линейная плотность заряда  $\lambda$  известна, то можно найти и  $dq$

$$dq = \lambda \cdot dl, \quad (4.11)$$

но  $dl = R d\alpha$ . Тогда

$$d\varphi = k \frac{\lambda R d\alpha}{r} \quad (4.12)$$

Согласно формуле расстояний между двумя точками с заданными координатами

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}, \quad (4.13)$$

где  $y_0$  и  $x_0$  - координаты элемента кольца  $dl$ , т.к.  $x_0 = R \cos \alpha$ ,  $y_0 = R \sin \alpha$ , то:

$$\begin{aligned} d\varphi &= k \frac{\lambda R d\alpha}{\sqrt{(x - R \cos \alpha)^2 + (y - R \sin \alpha)^2 + z^2}} = \\ &= \frac{k \lambda R d\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xR \cos \alpha - 2yR \sin \alpha + R^2}}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

И, наконец, чтобы найти потенциал, создаваемый всем кольцом, нужно проинтегрировать. Т.е.

$$\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{k R \lambda d\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - 2xR \cos \alpha - 2yR \sin \alpha}} \quad (4.15)$$

циал электростатического поля в точке **A** с координатами  $(x, y, z)$ , если линейная плотность заряда -  $\lambda$ .

Согласно формуле электростатического потенциала точечного заряда

$$d\varphi = k \frac{dq}{r}, \quad (4.9)$$

где  $q$  - величина точечного заряда,  $r$  - расстояние от заряда до точки наблюдения,

$k = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$  В·м/Кл - электростатическая константа.

Однако в нашем случае, заряд не точечный и непосредственно к нему эта формула не применима. Чтобы использовать ее, разобьем все кольцо на элементы длиной  $dl$  столь малые, чтобы их

заряды можно было считать точечными. В этом случае можно воспользоваться формулой точечного заряда, заменив в ней потенциал и заряд, входящие в эту формулу, элементарными величинами. Т.е.

$$d\varphi = k \frac{dq}{r} \quad (4.10)$$

Т.к. линейная плотность заряда  $\lambda$  известна, то можно найти и  $dq$

$$dq = \lambda \cdot dl, \quad (4.11)$$

но  $dl = R d\alpha$ . Тогда

$$d\varphi = k \frac{\lambda R d\alpha}{r} \quad (4.12)$$

Согласно формуле расстояний между двумя точками с заданными координатами

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}, \quad (4.13)$$

где  $y_0$  и  $x_0$  - координаты элемента кольца  $dl$ , т.к.  $x_0 = R \cos \alpha$ ,  $y_0 = R \sin \alpha$ , то:

$$\begin{aligned} d\varphi &= k \frac{\lambda R d\alpha}{\sqrt{(x - R \cos \alpha)^2 + (y - R \sin \alpha)^2 + z^2}} = \\ &= \frac{k \lambda R d\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xR \cos \alpha - 2yR \sin \alpha + R^2}}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

И, наконец, чтобы найти потенциал, создаваемый всем кольцом, нужно проинтегрировать. Т.е.

$$\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{k R \lambda d\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - 2xR \cos \alpha - 2yR \sin \alpha}} \quad (4.15)$$

Составим программу для расчёта этого интеграла по методу центральных прямоугольников:

### ПРОГРАММА 4.1

```

10 CLS:PCLS
20 K=9E+09: R=1: L=.000001
30 X=0: Y=0: Z=0: PI=ATN(1)*4
40 A=0: B=2*PI: N=100
50 DA=(B-A)/N
60 S=0
65 A1=A+DA/2
70 F=1/SQR(X^2+Y^2+Z^2+R^2-2*X*R*COS(A1)-
2*Y*R*SIN(A1))
80 S=S+F
90 A1=A1+DA
100 IF A1<B THEN 70
110 J=S*DA*K*L
120 PRINT "J="; J

```

В этой программе мы старались пунктуально следовать алгоритму, и поэтому составленная программа не совсем оптимальна. А именно: в ней можно воспользоваться оператором цикла. Строкой 65 записать

```
65 FOR A1= A +DA/2 TO B STEP DA.
```

Вместо строк 90 и 100 записать одну

```
100 NEXT A.
```

Для изменения программы по методу левых прямоугольников нужно изменить строку 60, а именно

```
60 FOR A1 = A TO B-DA STEP DA,
```

для правых прямоугольников -

```
60 FOR A1 = A +DA TO B STEP DA.
```

Для метода трапеций -

```
60 FOR A1 = A TO B STEP DA
```

```
80 IF A1=A OR A1>(B-DA) THEN S=S+F/2 ELSE S=S+F.
```

Воспользовавшись методом уточнения Эйткена можно определить, что метод левых и правых прямоугольников есть методы первого, а метод центральных прямоугольников – второго порядка точности. Кроме того метод Эйткена позволяет оценить погрешность расчёта интеграла и, если она превышает допустимую, можно увеличить число разбиений и повторить расчёт.

## 4.2 МЕТОД ПАРАБОЛ (МЕТОД СИМПСОНА)

Суть этого метода состоит в том, что при разбиении отрезка  $[a,b]$  на части  $\Delta x$ , на этих отрезках как на основаниях строятся не прямоугольные, а криволинейные трапеции, верхние стороны которых не график подинтегральной функции, а график параболы, проходящей через точки

$$\left(x_{i-1}, f(x_{i-1})\right); \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)\right); \left(x_i, f(x_i)\right). \quad (4.16)$$

Это равносильно разложению функции  $f(x)$  на каждом из отрезков  $\Delta x_i$  в ряд Тейлора:

$$f(x) \cong f(\xi_i) + f'(\xi_i) \cdot (x - \xi_i) + f''(\xi_i) \cdot \frac{(x - \xi_i)^2}{2}. \quad (4.17)$$

Здесь  $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$  - середина отрезка  $\Delta x_i$ . Такое разложение позволяет найти площади криволинейных трапеций на каждом  $\Delta x_i$  аналитическим интегрированием. А именно:

$$\begin{aligned} S_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[ f(\xi_i) + f'(\xi_i) \cdot (x - \xi_i) + f''(\xi_i) \frac{(x - \xi_i)^2}{2} \right] dx = \\ &= f(\xi_i) \Delta x_i + f''(\xi_i) \frac{\Delta x_i^3}{24}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Если производную  $f''(\xi_i)$  найти трудно, её можно вычислить численно, заменив второй конечной разностью, как часто и поступают на практике:

$$f''(\xi_i) = \frac{f(x_i) + f(x_{i-1}) - 2f(\xi_i)}{(\Delta x_i / 2)^2}. \quad (4.19)$$

Подставив это в формулу для  $S_i$ , получим:

$$\begin{aligned} S_i &= f(\xi_i) \Delta x_i + \frac{\Delta x_i^3}{24} \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i-1}) - 2f(\xi_i)}{\Delta x_i^2} \cdot 4 = \\ &= f(\xi_i) \Delta x_i + \frac{1}{6} \Delta x_i (f(x_i) + f(x_{i-1}) - 2f(\xi_i)) = \\ &= \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{6} \Delta x_i + \frac{2}{3} f(\xi_i) \Delta x_i. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Тогда сам интеграл представляется суммой

$$\int_a^b f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{6} \Delta x_i + \frac{2}{3} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right]. \quad (4.21)$$

Будем считать разбиение равномерным, как это часто и используют, тогда:

$$J = \frac{\Delta x}{6} \sum_{i=1}^n [f(x_i) + f(x_{i-1})] + \frac{2}{3} \Delta x \sum_{i=1}^n f(\xi_i). \quad (4.22)$$

Выделив в этой сумме первое слагаемое  $\frac{\Delta x \cdot f(a)}{6}$ , добавив и вычтя

последнее слагаемое  $\frac{\Delta x \cdot f(b)}{6}$ , получим

$$J = \frac{\Delta x}{3} \sum_{i=1}^n [f(x_i) + 2f(\xi_i)] + \frac{f(a) - f(b)}{6} \Delta x. \quad (4.23)$$

Эта формула и носит название *формулы Симпсона*.

Для примера рассмотрим ту же задачу, что и в предыдущем параграфе:

#### **ПРОГРАММА 4.2**

```

10 CLS:PCLS
20 K=9E+09: L=.000001: R=1
30 X=.5: Y=0: Z=.5: PI=4*ATN(1)
35 DEF FNF(U)=1/SQR(X^2+Y^2+Z^2+R^2-2*R*X*COS(U)-
2*R*Y*SIN(U))
40 A=0: B=2*PI: N=100
50 DU=(B-A)/N
60 S=(FNF(A)-FNF(B))/2
70 FOR U=A+DU TO B STEP DU
80 S=S+FNF(U)+2*FNF(U-DU/2)
90 NEXT U
100 J=S*DU/3*K*L
120 PRINT "J="; J

```

Метод Симпсона имеет четвёртый порядок точности.

### **4.3 КРАТНЫЕ И НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ**

Часто в физике бывает необходимо найти кратные интегралы вида:

$$\iint_S f(x, y) dx dy \quad (4.24)$$

или

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \quad (4.25)$$

Если область интегрирования достаточно проста, т.е. прямоугольник, со сторонами параллельными осям координат в случае двойного интеграла, или параллелепипед, с гранями параллельными координатным плоскостям в случае тройного интеграла, то численное интегрирование сводится лишь к кратному суммированию по формулам, аналогичным предыдущим:

$$\iint_S f(x, y) dx dy = h_1 h_2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{j-1} + y_j}{2}\right) \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = h_1 h_2 h_3 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{j-1} + y_j}{2}, \frac{z_{k-1} + z_k}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Здесь  $h_1, h_2, h_3$  - шаги интегрирования вдоль осей координат,  $m, n, l$  - количество разбиений вдоль этих осей.

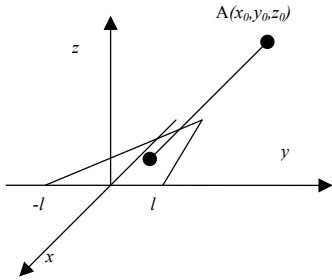
Если же области интегрирования сложные, то максимальные значения внутренних индексов суммирования  $n$  и  $l$  зависят от внешнего индекса  $i$ .

**ПРИМЕР 4.2**

Определить потенциал точки  $A(x_0, y_0, z_0)$ , создаваемый заряженным треугольником, расположенным в плоскости  $xy$  с вершинами в точках  $(0, -l)$ ,  $(0, l)$ ,  $(x_1, y_1)$ , как показано на рисунке 4.4. Если поверхностная плотность заряда треугольника равна  $s(x, y)$ , то потенциал точки  $A$  определяется интегралом:

$$\varphi = \iint_S k \frac{\sigma(x, y) dx dy}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}}. \quad (4.28)$$

Область интегрирования при этом заключена в пределах от оси  $ox$  в промежутке от  $-l$  до  $l$  и прямыми



$$y = \frac{y_1}{x_1 + l} (x + l) \quad (4.29)$$

и

$$y = \frac{y_1}{x_1 - l} (x - l). \quad (4.30)$$

Рисунок 4.4

Для вычисления этого интеграла воспользуемся формулами численного интегрирования. При этом будем считать, что шаг интегрирования одинаков вдоль обеих осей координат и равен  $h = 2l / n$ , где  $n$  - число разбиений. Пределы внешнего интегрирования при этом будут  $-l$  и  $l$ , а для внутреннего нижний предел равен 0, а верхний - значению ординат соответствующих точек боковых сторон треугольника.

Составим программу.

**ПРОГРАММА 4.2**

```

10 CLS
20 K=9.000001E+09:N=100:L=1:H=L/N:SI=.000001
30 X0=.1:Y0=.1:Z0=.1:Y1=1:X1=.5
40 S=0
50 FOR X=-L+H/2 TO L STEP H
60 Y=H/2
70 IF Y>Y1*(X+L)/(X1+L) OR Y>Y1*(X-L)/(X1-L) THEN 110
80 F=SI/SQR((X-X0)^2+(Y-Y0)^2+Z0^2)
90 S=S+F
100 Y=Y+H:GOTO 70
110 NEXT X
120 F=S*K*H^2
    
```

130 PRINT "F="; F

В этой программе через **SI** обозначена поверхностная плотность заряда треугольника. В строке 60 проверяется условие невыхода переменных интегрирования за область интегрирования. В остальном программа вполне стандартна и не нуждается в особых пояснениях.

Иногда в физике, особенно квантовой механике, приходится иметь дело с несобственными интегралами, т.е. интегралами с бесконечными пределами или с бесконечно разрывной подынтегральной функцией. Мы рассмотрим только интегралы с бесконечными пределами, т.к. с бесконечно разрывной подынтегральной функцией интегралы в физике встречаются сравнительно редко.

Интегралы с бесконечным нижним пределом легко могут быть сведены к интегралу с бесконечным верхним пределом, поэтому будем рассматривать только интегралы с бесконечным верхним пределом.

$$J = \int_a^{\infty} f(x) dx. \quad (4.30)$$

Такие интегралы можно рассматривать как предельное значение интеграла с переменным верхним пределом для той же подынтегральной функции при условии, что значение верхнего предела стремится к бесконечности. Если интеграл с бесконечным верхним пределом сходится, то величина подынтегральной функции стремится к нулю при стремлении аргумента к бесконечности. Этим можно воспользоваться для расчёта интеграла с бесконечным верхним пределом. А именно. Рассчитываем интеграл, заменив бесконечное значение верхнего предела конечным, любым из возможных методов численного интегрирования. Затем увеличиваем верхний предел на некоторую малую величину, например на один шаг интегрирования, и вновь рассчитываем интеграл. Если отличие нового значения от предыдущего значительно, вновь увеличиваем предел интегрирования. Если изменение интеграла по абсолютной величине стало меньше наперёд заданной погрешности, расчёт интеграла можно прекратить и считать, что последнее его значение отличается от истинного на величину заданной погрешности.

Возможен и другой способ вычисления интеграла с бесконечным верхним пределом, основанный на замене аргумента функции таким образом, чтобы его новые значения заключались в конечных пределах. В этом случае интеграл становится собственным и его можно рассчитать обычными методами численного интегрирования. Такие методы необходимо использовать тогда, когда интеграл сходится медленно, и предыдущий способ его вычисления приводит к значительной ошибке или требует существенного увеличения верхнего предела для достижения приемлемой точности.

Алгоритм первого способа может быть следующим.

1. Выбрать предел интегрирования таким, чтобы он был заведомо больше значения аргумента, с которого начинает убывать абсолютное значение подынтегральной функции, становясь существенно меньше по модулю её максимального значения.
2. Рассчитать интеграл каким-либо из методов численного интегрирования, контролируя, при необходимости, точность расчёта интегралов методом Эйткена. Если расчёт производится первый раз, запомнить это значение

и перейти к пункту 4.

3. Найти разность между текущим и предыдущим значением интеграла и сравнить её по модулю с заданной ошибкой расчёта. Если заданная точность достигнута, идти к п. 5
4. Увеличить верхний предел на некоторую заданную величину, предыдущее значение интеграла сделать равным текущему и перейти к п.2.
5. Вывести значение интеграла, найденное последним.

Этот алгоритм предполагает постоянное число разбиений области интегрирования и значит переменным шаг интегрирования. Его можно изменить таким образом, чтобы переменным было число разбиений области интегрирования и постоянным шаг интегрирования.

1. Выбрать шаг интегрирования  $h$  таким образом, чтобы он обеспечивал достаточную точность при расчёте интеграла с конечным пределом, равным тому значению аргумента подынтегральной функции, начиная с которого модуль подынтегральной функции становится существенно меньше её максимального значения. Для оценки возможной погрешности можно воспользоваться методом Эйткена.
2. Обнулить сумматор:  $S=0$ , задать начальное значение аргумента:  $x = a + h / 2$ .
3. Рассчитать подынтегральную функцию  $f(x)$ .
4. Изменить сумматор:  $S = S + f(x)$  и значение аргумента  $x = x + h$ .
5. Если абсолютное значение функции, рассчитанное в предыдущем пункте, больше заданной погрешности, продолжить процесс с пункта 3.
6. В противном случае искомый интеграл равен  $Sh$ .

В данном алгоритме при расчёте собственного интеграла был использован метод центральных прямоугольников.

### **ПРИМЕР 4.3**

Вычислить концентрацию носителей заряда в металле при заданном уровне Ферми. Расчётная формула [3]:

$$n = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m_e}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{E} dE}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1}. \quad (4.31)$$

Здесь  $n$  – концентрация носителей зарядов в металле,  $m_e$  – масса электрона,  $\hbar$  – приведённая постоянная Планка,  $E$  – энергия электронов,  $E_F$  – энергия Ферми,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура.

Составим программу для расчёта этого интеграла.

### **ПРОГРАММА 4.3**

```
10 CLS:PCLS
20 M=9.1E-31:H1=1.05E-34:K=1.38E-23:
T=300:EF=1.12E-18/(K*T)
30 H=EF/100:E1=.01:PI=4*ATN(1)
40 E=H/2:S=0
50 F=SQR(E)/(EXP(E-EF)+1)
60 S=S+F
```

```

70 E=E+H
80 IF ABS(F)/S>E1 THEN 50
90 N=1/(2*PI^2)*(2*M/H1*K*T/H1)^1.5*N*S
100 PRINT N

```

В этой программе сделана замена переменной  $E = E/(kT)$ .

Расчёт по этой программе даёт  $n = 8.54 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ , что разумно согласуется с известной концентрацией носителей зарядов в металлах.

## 5. ПОИСК ЭКСТРЕМУМОВ (МИНИМАКСНЫЕ ЗАДАЧИ)

### 5.1 ПОИСК ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Часто в физике бывает необходимо найти экстремум (максимум или минимум) некоторой функции  $y=f(x)$ .

Если функция  $y=f(x)$  имеет довольно простые первую и вторую производные, то задача отыскания её экстремума будет равносильна задаче решения уравнения  $f'(x)=0$  с последующей проверкой условия  $f''(x) \neq 0$ .

Однако часто бывает так, что аналитически вычислить производные невозможно или слишком трудно. Тогда единственным способом отыскания экстремума является численный метод отыскания экстремума.

Алгоритм одного из методов отыскания экстремумов может состоять в следующем:

1. С помощью графического исследования функции, предварительно определяются область изменения аргумента, в которой наблюдается экстремум функции и количество локальных экстремумов. Затем уточняется их положение на числовой оси. Если экстремумов несколько, выбирается среди них один, нужный или исследуются все.
2. Выбирается некоторый шаг по аргументу  $\Delta x$  таким образом, чтоб он был достаточно мал, для достижения требуемой точности, но, во всяком случае, не больше расстояния между соседними экстремумами. С другой стороны он не должен быть слишком мал, чтобы процесс поиска не был слишком длительным.
3. Для уточнения нужного экстремума задаётся значение аргумента заведомо меньшее, чем значение аргумента в точке экстремума.
4. Рассчитывается значение функции в данной точке и сравнивается с предыдущим значением.
5. Если предыдущее значение функции меньше текущего при отыскании максимума (или больше текущего при отыскании минимума), то увеличивается аргумент на 1 шаг и процесс повторяется с п.4.
6. В противном случае предыдущая точка была ближе других к экстремуму и её можно считать точкой экстремума. При этом погрешность в определении точки экстремума будет  $\Delta x$ .
7. Если погрешность в определении точки экстремума больше требуемой, процесс необходимо повторить, начиная с пункта 3, предварительно изменяя шаг на противоположный и уменьшив его величину с тем, чтобы снова удовлетворить условию достаточной быстроты процесса с одной



стороны и достаточной подробности – с другой.

8. Если погрешность расчета экстремума удовлетворительна, можно остановить процесс.

Для примера рассмотрим задачу отыскания максимума на изотермах Ван-дер-Ваальса. Согласно уравнению для одного моля вещества [2]:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT;$$

где **a**, **b** – константы Ван-дер-Ваальса.

Откуда

$$P = \frac{mRT}{\mu(V - b)} - \frac{a}{V^2}. \quad (5.1)$$

Найти экстремум этой функции можно с помощью теоремы Ферма. Однако она приводит к уравнению третьего порядка, решить которое непросто.

Аналитическое исследование функции (5.1) показывает [2], что объём  $V_k = 3b$ , являющийся т. н. критическим объемом, находится между максимумом и минимумом этой функции. Так что, если задать положительный шаг поиска от этого объёма, будет найден максимум при отрицательном шаге - минимум.

### **ПРОГРАММА 5.1**

```
10 CLS
20 R=8.310001 : T=115: A=.141 : B=.0000392 : E=1E-07
30 DV=B/10
40 V=B*3
50 P=R*T/(V-B) - A/V^2
60 IF V=B*3 THEN 80
70 IF P<P0 THEN 90
80 P0=P : V=V+DV : GOTO 50
90 IF ABS(DV)<E THEN 110
100 DV=-DV/10 : GOTO 80
110 PRINT"V=";V-DV;" + - "; ABS(DV)
```

Если необходимо найти минимум изотермы Ван-дер-Ваальса, то, во-первых: в строке 30 шаг взять отрицательным, т.е.

```
30 DV=-B/10,
```

а во-вторых: изменить в строке 70 знак отношения "<" на знак отношения ">".

В этой программе нужно отметить строку 60. В ней проверяется, который раз выполняется программа. Если первый, то строку 70 нужно пропустить, т.к. величина  $P_0$  ещё не определена.

Часто, однако, бывает неизвестно в какую сторону нужно изменять шаг. В этом случае необходимо сначала определить направление поиска. Одним из возможных вариантов определения направления может быть использование дополнительной переменной целого типа (в языке Pascal переменной логического типа). А именно в строке 30 вместе с начальным значением шага задаётся значение дополнительной переменной, например  $L=0$ , в строке 75 изменяется её значение, т.е. 75  $L=1$ . А строку 90 изменить, используя проверку переменной  $L$ , следующим образом:

```

90 IF L=0 THEN DV = -DV: GOTO 40
ELSE IF ABS (DV) < E THEN 110.

```

Использование дополнительной переменной **L** позволяет программе разоб- раться: в первый раз происходит сравнение в строке 70 или же нет. Если первый раз и сразу условие выполнено, то это значит, что процесс идёт в неправильном направлении и нужно изменить шаг на противоположный, что и выполняет строка 90. Условием того, что сравнение в строке 70 происходит первый раз, соответ- ствует значение **L=0**. Если же сравнение в строке 70 выполняется не в первый раз, то строка 75 также уже выполнялась и значит **L ≠ 0** и поэтому в строке 90 не будет перехода к строке 40.

**Замечание.** Смена направления поиска при уточнении экстремума, вообще говоря, сама по себе позволяет найти правильное направление поиска, но только при этом будет уменьшен шаг, что приведёт к затягиванию времени поиска.

Часто в физике бывает необходимо найти не один какой-либо экстремум од- ной функции, а несколько. В этом случае предложенный выше алгоритм без уточ- нения не применим, т.к. после нахождения какого-либо экстремума каждый шаг будет соответствовать выполнению условия в строке 70, хотя экстремумами соответствующие точки могут и не быть.

Для изменения алгоритма могут использоваться два метода. Первый метод состоит в использовании дополнительной переменной логического типа, а при отсутствии такого типа в языке, может использоваться переменная целого типа. Эта переменная должна иметь значение “истина” или 1, если исследуемая функ- ция на данном участке возрастает (при поиске максимума или убывает при по- иске минимума) в противном случае эта переменная имеет значение “ложь” или 0. При этом проверка условия экстремума должна осуществляться вместе с про- веркой дополнительной переменной. И экстремумом является та точка, в которой выполняется условие экстремума и дополнительная переменная имеет значение 1.

### **ПРИМЕР 5.2**

Найти максимумы интенсивности дифракционной картины при дифракции от щели.

Согласно теории дифракции Фраунгофера на щели [4] интенсивность диф- фракционной картины в этом случае определяется по формуле:

$$J = J_0 \left( \frac{\sin \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}}{\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}} \right)^2.$$

Здесь  $J_0$  - интенсивность падающей волны, **b**- ширина щели, **l**- длина волны, **j**- угол между перпендикуляром к плоскости решётки и направлением, в котором определяется интенсивность дифракционной картины. Чтобы на экране уложи- лось несколько максимумов нужно соблюсти условие:

$$\sin \varphi = \frac{n \pi \lambda}{\pi b} = n \frac{\lambda}{b} < 1,$$

где **n**- количество максимумов, тогда  $\frac{\lambda}{b} < \frac{1}{n}$ .

Составим программу для нахождения всех максимумов

### **ПРОГРАММА 5.2**

```
10 CLS:PCLS
20 PI = 4*ATN(1): B =.00001: L=.000001:
   J0=1: E=.000001
30   F=L/B : R=0
40   DF=L/(50*B)
50   J=J0*(SIN (PI*B*SIN(F)/L) / (PI*B*SIN(F)/L) ) ^2
60   IF F=L/B THEN 80
70   IF J<J1 THEN 90
75   R=1
80   J1=J : F=F+DF : IF F<PI/2 THEN 50 ELSE STOP
90   IF R=0 THEN 80
100  IF ABS (DF)<E THEN 120
110  DF = -DF/10 : GOTO 80
120  R=0 : PRINT "F=" ; F: GOTO 40
```

В том случае, когда нужно выводить только т.н. главные максимумы, например при исследовании интенсивности дифракционной решётки, нужно ввести ещё одну переменную соответствующую росту интенсивности в главных максимумах.

Второй способ отыскания нескольких экстремумов состоит в одновременном хранении текущего значения исследуемой функции наряду с двумя предыдущими.

В этом случае программа поиска максимумов интенсивности дифракционной картины при дифракции на щели может быть следующей

### **ПРОГРАММА 5.3**

```
10 CLS
20 PI=4*ATN(1) : B=.00001: L=.0000005 :
   J0=1: E=.001
30   F=L/B
40   F1=F:DF=L/(5*B)
50   J=J0*(SIN(PI*B*SIN(F)/L) / (PI*B*SIN(F)/L) ) ^2
60   IF F<F1+DF THEN 100
70   IF F<F1+2*DF THEN 90
80   IF (J<J1) AND (J1>J2) THEN 110
90   J2=J1
100  J1=J : F=F+DF : IF F<PI/2 THEN 50 ELSE STOP
110  IF ABS (DF)<E THEN 130
120  DF=-DF/10 : GOTO 90
130  PRINT "F="; F : GOTO 40
```

## **5.2 ПОИСК ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Различают несколько способов поиска экстремума для функций многих переменных. Поскольку поиск максимума ничем принципиально не отличается от

поиска минимума, будем говорить о поиске минимума.

1) Метод спуска по координатам

Для простоты рассмотрим этот метод на примере функции двух переменных. Пусть требуется найти минимум функции

$$Z=f(x,y).$$

Выберем некоторую начальную точку  $x_0, y_0$ . Зафиксируем теперь  $y$ , положив его равным  $y_0$ , тем самым получим функцию одной переменной

$$Z=f(x, y_0).$$

Определим минимум этой функции одним из методов, описанных выше. Получим значение  $x=x_1$ , соответствующее предварительному минимуму. Теперь зафиксируем координату  $x$ , сделав её равной  $x_1$ . Тогда получим функцию

$$Z=f(x_1, y).$$

Снова найдём минимум этой функции. Пусть ему соответствует  $y=y_1$ .

Таким образом, на одном цикле поиска мы нашли точку  $x_1, y_1$ , значение функции в которой меньше, чем в точке  $x_0, y_0$ . Процесс спуска продолжаем до тех пор, пока отличие  $x_n$  и  $y_n$  от  $x_{n-1}$  и  $y_{n-1}$  не станут меньше некоторых наперёд заданных величин, характеризующих степень точности определения минимума вдоль по оси  $x$  и  $y$ .

В качестве примера использования изложенного выше алгоритма рассмотрим задачу из электростатики.

**ПРИМЕР 5.3**

В плоскости  $xoy$  в точках с координатами  $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3)$  заданы три заряда  $q_1, q_2, q_3$ , среди которых хотя бы один отрицательный.

Требуется найти точку в плоскости, параллельной плоскости  $xoy$  и отстоящей от неё на расстоянии 1 м, потенциал которой минимален.

Согласно формуле электростатического потенциала точечного заряда, потенциал, создаваемый каждым зарядом в точке наблюдения, определяется по формуле

$$\varphi_i = k \frac{q_i}{r_i},$$

где  $\varphi_i$ - потенциал, создаваемый зарядом  $q_i$  в точке наблюдения,  $k$ -электростатическая постоянная.

Согласно принципу суперпозиции

$$\varphi_{общ} = k \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} \right).$$

Пусть  $x, y$ - координаты точки наблюдения, тогда

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad \text{и} \quad \varphi_{общ} = k \sum_{i=1}^3 \frac{q_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}.$$

Составим программу поиска минимума этой функции.

**ПРОГРАММА 5.4**

```
10   CLS
20   K= 9.000001E+09
```

```

30 DIM Q(3),X(3),Y(3):X(1)=-1:Y(1)=0:
Q(1)=-.000001: X(2)=1:Y(2)=0:Q(2)=.000001:
X(3)=0:Y(3)=1.73: Q(3)=.000001 :
E=.0005: X1=0: Y1=0
40 X=0: Y=0
50 DX=.1: DY=.1
60 Z=0
70 FOR I=1 TO 3
80 Z=Z+K*Q(I)/SQR((X-X(I))^2+(Y-Y(I))^2+1)
90 NEXT I
100 IF X=0 THEN 120
110 IF Z>Z1 THEN 130
120 Z1=Z: X=X+DX: GOTO 60
130 IF ABS(DX)>E THEN DX=-DX/10: GOTO 120
140 X=X-DX
150 Z=0
160 FOR I=1 TO 3
170 Z=Z+K*Q(I)/SQR((X-X(I))^2+(Y-Y(I))^2+1)
180 NEXT I
190 IF Z>Z1 THEN 210
200 Z1=Z: Y=Y+DY: GOTO 150
210 IF ABS(DY)>E THEN DY=-DY/10: GOTO 200
220 Y=Y-DY
230 IF SQR((X-X1)^2+(Y-Y1)^2)<E THEN 250
240 X1=X: Y1=Y: GOTO 50
250 PRINT "XMIN=";X;"YMIN=";Y

```

В этой программе строка 20 есть снова строка определения исходных данных.

Строка 30 –определяет массив значений зарядов и их координат. В принципе задача может быть обобщена на случай большего количества зарядов.

Строка 40 задаёт начальные значения координат, а строка 50 –первоначальное значение шага поиска минимума.

Строки 60-140 находят X, соответствующее минимуму потенциала при заданном Y, т.е. производят спуск вдоль координаты X. Строки 150-220 –спуск вдоль координаты Y. Смысл этих двух процедур аналогичен программе поиска экстремума, рассмотренного выше, поэтому не будем на этом подробно останавливаться.

Строки 230-240 определяют необходимость дальнейшего спуска. Если расстояние между двумя последовательными точками процесса поиска минимума меньше заданного числа, то можно считать, что минимум потенциала достигнут, и можно вывести полученные координаты. В противном случае нужно повторить процесс.

## 2) Метод послойного поиска

Второй метод поиска минимума можно назвать послойным поиском. Суть его состоит в том, что график исследуемой функции разбивают на слои плос-

костями, параллельными одной из координатных плоскостей  $zox$  или  $zoy$ . Определяют минимум функции в каждом слое и выбирают наименьший из них.

Для демонстрации данного способа поиска рассмотрим снова задачу из предыдущего примера. Программа для этого метода может быть следующей.

### ПРОГРАММА 5.5

```
10   CLS
20   K= 9.000001E+09 : E=.001: X0=-1.1:Y0=0
30   DIM Q (3),X(3),Y(3)
40   X(1)=-1: Y(1)=0: Q(1)=-.000004: X(2)=1: Y(2)=0:
Q(2)=.000001: X(3)=0: Y(3)=1.73: Q(3)=.000001
50   Y=Y0: DY=.1 : DX=.1
60   X=X0
70   Z=0
80   FOR I=1 TO 3
90   Z=Z+K*Q(I)/SQR((X-X(I))^2+(Y(I)-Y)^2+1)
100  NEXT I
105  IF X=X0 THEN 120
110  IF Z1<Z THEN 130
120  Z1=Z: X=X+DX: GOTO 70
130  IF Y=Y0 THEN 140
135  IF Z2<Z1 THEN 150
140  Z2=Z1: X1=X-DX:Y=Y+DY: GOTO 60
150  IF SQR(DX^2+DY^2)<E THEN 170
160  X0=X-DX: DY=-DY/10: DX=-DX/10: Y=Y+DY: Z2=Z1: GOTO 60
170  PRINT "X=";X1; "Y=";Y-DY
```

В этой программе **Z1** есть минимальное значение функции в слое, **Z2** - минимальное значение функции среди слоёв. Они заранее не определяются и поэтому перед проверкой условий достижения минимума приходится проверять, в который раз происходит сравнение. Если это сравнение происходит первый раз (на что указывает неравенство  $X>X0$  или равенство  $Y=1.1$ ), то сравнение пропускается, т.к. в это время ещё не определены **Z1** и **Z2** или определены неверно. В этом случае сравнение не происходит, а определяются лишь **Z1** или **Z2**. В следующий же раз сравнение по обнаружению минимума в слое или между слоями уже выполняется.

Эта программа сначала грубо определяет точку минимума, а затем уточняет её, уменьшая шаги поиска в 10 раз (строка 160).

### 3) Метод наискорейшего спуска

Третий способ поиска экстремума называется методом наискорейшего спуска (при поиске минимума) или наискорейшего подъёма (при поиске максимума).

Суть этого метода состоит в том, что направление наискорейшего подъёма определяется направлением градиента функции  $Z=f(x,y)$ , а направление быстрого спуска ему противоположно, т.к. градиент функции всегда направлен в сторону быстрого роста функции. Это значит, что в процессе поиска максимума функции нужно продвигаться в сторону направления градиента, а при

поиске минимума – в сторону противоположную градиенту.

Трудность этого метода состоит, прежде всего, в нахождении градиента, т.к. это связано с отысканием производной функции. Если функция достаточно проста, её производная, а значит и градиент, можно найти аналитически. Тогда движение по градиенту будет означать определение приращений координат

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot b, \\ \Delta y &= \frac{\partial f}{\partial y} \cdot b,\end{aligned}\tag{5.2}$$

где  $b$  – некоторая константа, определяемая таким образом, чтобы шаги  $\Delta x$  и  $\Delta y$  не были слишком велики, по крайней мере, они должны быть меньше линейных размеров области поиска экстремума.

По вычисленным значениям приращений определяются новые значения координат

$$\begin{aligned}x &= x + \Delta x, \\ y &= y + \Delta y.\end{aligned}\tag{5.3}$$

И в новой точке  $(x, y)$  вновь определяется градиент, и снова находят новые значения координат  $x$  и  $y$ . Процесс продолжается до тех пор, пока модуль градиента не будет меньше некоторой наперёд заданной величины, т.к. в точке экстремума градиент функции равен нулю. Вторым условием прекращения процесса может служить смена направления градиента на прямо противоположное. Описанный выше алгоритм относится к поиску максимума. Для поиска минимума приращения координат определяются формулами

$$\begin{aligned}\Delta x &= -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot b, \\ \Delta y &= -\frac{\partial f}{\partial y} \cdot b.\end{aligned}\tag{5.4}$$

Если же аналитически производные функции найти нельзя, их определяют численно, как описано выше. А именно

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &\approx \frac{f(x + h_x, y) - f(x - h_x, y)}{2h_x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &\approx \frac{f(x, y + h_y) - f(x, y - h_y)}{2h_y}.\end{aligned}\tag{5.5}$$

Параметр  $b$  выбираем таким образом, чтобы шаг вдоль линии градиента был равен  $\Delta r$ , где  $\Delta r$  достаточно малый шаг. Тогда

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 b^2 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] b^2 = \Delta r^2.\tag{5.6}$$

Отсюда

$$b = \frac{\Delta r}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}. \quad (5.7)$$

Алгоритм данного метода поиска экстремума (для определённости опять будем полагать минимумом) может быть следующим:

1. Выбирается начальное приближение, т.е. координаты  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ .
2. Выбирается шаг поиска  $\Delta r$ .
3. Находятся производные функции  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  в данной точке, либо аналитически, либо численно. В последнем случае для достижения удовлетворительной точности в вычислении производных нужно следовать правилам вычисления конечных разностей (по методу Эйткена определяем порядок погрешности; если он стал меньше 2, для конечных разностей, аппроксимирующих производные с порядком 2, то это значит  $h$  слишком мало). Находится модуль градиента

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = |\vec{\nabla}f|. \quad (5.8)$$

4. Определяются новые значения координат

$$\Delta x = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\Delta r}{|\vec{\nabla}f|}; \Delta y = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\Delta r}{|\vec{\nabla}f|}; \quad (5.9)$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}+\Delta \mathbf{x}; \mathbf{y}=\mathbf{y}+\Delta \mathbf{y}.$$

5. Вычисляется функция  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .
6. Если значение функции меньше предыдущего, продолжается процесс с п. 3.
7. Если значение функции больше предыдущего, то проверяется величина шага  $\Delta r$ . Если шаг больше требуемой погрешности, он уменьшается в 10 раз и процесс повторяется с п.3.
8. Если заданная точность достигнута, выводятся координаты минимума  $\mathbf{x}-\Delta \mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}-\Delta \mathbf{y}$ .

Составим программу расчёта

### **ПРОГРАММА 5.6**

```
10 CLS
20 K=9.000001E+09: E=.0001: H1=.001: H2=.001
30 DIM Q(3), X(3), Y(3)
40 X(1)=-1: Y(1)=0: Q(1)=-.000004: X(2)=1: Y(2)=0:
Q(2)=-.000001: X(3)=0:Y(3)=1.73:
50 X=0: Y=0
60 DR=.1:Y1=Y:
```



```

70 X1=X+H1/2:Y1=Y: GOSUB 200: F1=F
80 X1=X-H1/2: GOSUB 200: F2=F
90 UX=(F1-F2)/H1
100 Y1=Y+H2/2:X1=X: GOSUB 200: F1=F
110 Y1=Y-H2/2: GOSUB 200: F2=F
120 UY=(F1-F2)/H2
130 U=SQR(UX^2+UY^2)
140 DX=UX*DR/U: DY=UY*DR/U
145 X=X-DX: Y=Y-DY
150 X1=X:Y1=Y:GOSUB 200
160 IF F0>F THEN F0=F:GOTO 70
170 IF DR>E THEN DR=DR/10: GOTO 70
180 PRINT "X=",X-DX, "Y=", Y-DY
190 STOP
200 F=O
210 FOR I=1 TO 3
220 F=F+Q(I)/SQR((X1-X(I))^2+(Y1-Y(I))^2+1)
230 NEXT I
240 RETURN

```

В этой программе особенностью является тот факт, что расчет функции, минимум которой находится, организован с помощью подпрограммы с 200-й строки.

Поиск экстремумов функций 3-х переменных производится аналогично, но в алгоритмах методов добавляются дополнительные циклы в первых 2-х методах и дополнительные составляющие градиента в последнем методе.

### 5.3 ПОИСК ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИОНАЛОВ

К необходимости отыскания экстремумов функционалов приводят многие задачи физики.

Определение. Если каждой функции из некоторого класса поставлено в соответствие единственное число, то говорят, что задан функционал на данном классе функций и пишут

$$\Phi = \Phi(y(x)).$$

Функционал может зависеть от нескольких функций, а сами функции могут быть функциями многих переменных. Самым простым функционалом т.о., является функционал, зависящий от одной функции одной переменной.

Задача отыскания экстремума функционала формулируется следующим образом.

Среди данного класса функций нужно подобрать такую, значение функционала для которой было бы максимальным или минимальным.

К такого типа задачам приводят, например, задачи распределения заряда внутри тел, чтоб потенциальная энергия была минимальной.

Аналитически такая задача решается методом аналогичным методу поиска экстремума функции, использующим теорему Ферма, т.е. находят такую функцию, в которой т.н. первая вариация функционала (аналог производной, точ-

нее дифференциала функции) была бы равна нулю. Однако аналитически могут быть решены далеко не все задачи по поиску экстремума функционала. Многие задачи такого типа приходится решать численно. Существует несколько способов численного отыскания экстремума функционала

### 1. Сеточный метод

Суть этого метода состоит в том, что область определения функций, на которых определен функционал, т.е. отрезок  $[a, b]$  разбивают на  $n$  частей точками  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ , называемых узлами сетки, а само разбиение называется сеткой. Обозначим  $y_i$  – значение функции в узле сетки с номером  $i$ , и заменим искомую функцию  $y(x)$  её таблицей. Тогда функционал  $\Phi(y(x))$  станет обычной функцией от  $n+1$  неизвестных. И тем самым задача сведётся к отысканию экстремума функции многих неизвестных.

Часто бывает, что функционал квадратично зависит от функции. В этом случае преобразованный функционал также будет квадратично зависеть от узловых значений функции и определить экстремум функционала можно аналитически, приравняв производные от функционала (в этом случае, как было отмечено выше, он является обычной функцией нескольких переменных) по каждому из узловых значений функции к нулю и решив полученную систему линейных уравнений.

### ПРИМЕР 5.4.

Рассмотрим задачу распределения заряда в проводнике в виде стержня длиной  $l$ . Для этого определим потенциальную энергию зарядов тела в поле, создаваемого ими самими. А именно:

$$U = \frac{k}{2} \int_0^l \int_0^l \frac{\lambda(x)\lambda(y)}{|x-y|} dx dy, \quad (5.10)$$

где  $\lambda(x)$  и  $\lambda(y)$  есть линейная плотность заряда,  $x$  и  $y$  – координаты двух взаимодействующих между собой зарядов,  $k$  – электростатическая константа.

Кроме условия минимальности потенциальной энергии (5.10) необходимо также выполнение закона сохранения заряда:

$$\int_0^l \lambda(x) dx = Q = const. \quad (5.11)$$

Таким образом сформулированная задача относится к так называемым задачам на поиск условного экстремума.

Разобьём отрезок  $[a, b]$  на  $n$  частей и обозначим  $h = (b-a)/n$ ;  $x_i = (i+1/2)h$ ;  $l_i = l(x_i)$ . Тогда, заменив интегралы суммами, получим:

$$U = \frac{k}{2} h^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_i \lambda_j}{|x_i - x_j|} = \frac{k}{2} h \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_i \lambda_j}{|i - j|}. \quad (5.12)$$

В этой формуле в знаменателе стоит разность координат зарядов, которая может быть равна нулю, а значит полная потенциальная энергия равна бесконечности. Это знаменитая трудность классической электродинамики (как, впрочем, и квантовой) – трудность бесконечно большой собственной потенциальной энергии точечного заряда. Для устранения этой трудности введём небольшое

дополнительное слагаемое в знаменателе каждой дроби, соответствующей собственной энергии зарядов, которое не позволит обратиться в нуль знаменателю.

В выражении (5.12) выделим слагаемые собственной потенциальной энергии зарядов отдельно и во внутренней сумме суммирование будем начинать с  $i+1$ , что позволит избежать повторного учёта энергии взаимодействия зарядов. Тогда получим:

$$U = \frac{kh^2}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{\delta} + hk \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\lambda_i \lambda_j}{|i-j|}. \quad (5.13)$$

Закон сохранения заряда в виде сумм выглядит следующим образом

$$h \sum_{j=0}^n \lambda_j = Q. \quad (5.14)$$

Найдём из него  $\lambda_n$

$$\lambda_n = \frac{Q}{h} - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \quad (5.15)$$

и подставим в формулу потенциальной энергии (5.13)

$$U = \frac{kh^2}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i^2}{\delta} + \frac{kh^2}{2} \frac{\left(\frac{Q}{h} - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right)^2}{\delta} + kh \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{\lambda_i \lambda_j}{j-i} + kh \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{n-i} \left(\frac{Q}{h} - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j\right). \quad (5.16)$$

Продифференцируем по  $\lambda_m$  и приравняем производные к нулю.

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda_m} = \frac{kh^2}{2} \frac{2\lambda_m}{\delta} + \frac{kh^2}{2} \frac{2}{\delta} \left(\frac{Q}{h} - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right) (-1) + hk \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left(\frac{\lambda_j \delta_{im}}{|i-j|} + \frac{\lambda_i \delta_{jm}}{|i-j|}\right) + \frac{Kh}{n-m} \left(\frac{Q}{h} - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j\right) - kh \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{n-i} = 0. \quad (5.17)$$

Здесь  $\delta_{ik}$  и  $\delta_{jk}$  – т.н. символы Кронекера.

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k \\ 1, & \text{если } i = k \end{cases}. \quad (5.18)$$

Тогда уравнения (5.17) запишутся так:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda_m} = \frac{kh^2}{2} \frac{2\lambda_m}{\delta} + \frac{kh^2}{2} \frac{2}{\delta} \left( \frac{Q}{h} - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) (-1) + hk \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{n-1} \frac{\lambda_i}{|i-m|} + \frac{Kh}{n-m} \left( \frac{Q}{h} - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \right) - kh \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{n-i} = 0. \quad (5.19)$$

Или, преобразовав (5.19), получим:

$$\left( \frac{2h}{\delta} - \frac{2}{n-m} \right) \lambda_m + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{n-1} \left( \frac{h}{\delta} + \frac{1}{|i-m|} - \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n-i} \right) \lambda_i = \left( \frac{1}{\delta} - \frac{1}{(n-m)h} \right) Q. \quad (5.20)$$

Таким образом, матрица искомой системы уравнений имеет вид:

$$A_{mi} = \begin{cases} \frac{h}{\delta} + \frac{1}{|i-m|} - \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n-i}, & \text{если } i \neq m \\ \frac{2h}{\delta} - \frac{2}{n-m}, & \text{если } i = m \end{cases}, \quad (5.21)$$

$$D_m = \left( \frac{1}{\delta} - \frac{1}{(n-m)h} \right) Q. \quad (5.22)$$

Полученную систему уравнений можно решить разными способами, а для малых  $n$ , можно методом Гаусса. Определив неизвестные  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ , из (5.15) найдём  $\lambda_n$ .

### **ПРОГРАММА 5.7**

```

10 CLS:PCLS
20 L=3 : N=20: H=L/N:Q=.00001:GX=400/L:
GY=5E+07:D1=H/2
30 DIM A(N,N), D(N),U(N)
50 FOR K=1 TO N-1
60 FOR J=1 TO N-1
70 IF K=J THEN A(K,J)=2*H-2*D1/(N-K) ELSE A(K,J)=D1*(1/
ABS(K-J)-1/(N-K)-1/(N-J))+H
80 D(K)=(1-D1/(H*(N-K)))*Q
90 NEXT J,K
110 FOR K=1 TO N-2: J=K
120 FOR I=K+1 TO N-1
130 IF A(I,K) > A(J,K) THEN J=I
140 NEXT I
150 IF J=K THEN 190
160 FOR I=K TO N-1
170 B=A(K,I):A(K,I)=A(J,I):A(J,I)=B
180 NEXT I: B=D(K):D(K)=D(J):D(J)=B
190 FOR I=K+1 TO N-1

```

```

200 IF A(I,K)=0 THEN 260
210 B=A(K,K)/A(I,K)
220 FOR J = K+1 TO N-1
230 A(I,J)=B*A(I,J)-A(K,J)
240 NEXT J
250 D(I)=B*D(I)-D(K)
260 NEXT I, K
270 U(N-1)=D(N-1)/A(N-1,N-1)
280 FOR I=N-2 TO 1 STEP-1
290 S=0:FOR J=I+1 TO N-1
300 S=S+A(I,J)*U(J)
310 NEXT J
320 U(I)=(D(I)-S)/A(I,I)
330 NEXT I:S=0
340 FOR I=1 TO N-1
350 PSET (I*H*GX, 250-U(I)*GY)
360 PRINT U(I)*H; :S=S+U(I)
370 NEXT I
380 U(N)=(Q-S*H)/H:PRINT U(N)*H:PSET (N*H*GX, 250-
U(N)*GY)

```

В этой программе **B** - некоторая вспомогательная переменная, используемая по мере необходимости.

Неизвестные значения искомой плотности зарядов обозначены **U(I)**.

## 2.Метод пробных функций

Пусть из некоторых физических соображений следует, что искомая функция, минимизирующая функционал, принадлежит определенному классу. Выбираем в этом классе функций некоторую функцию, зависящую, кроме своего аргумента, от нескольких постоянных параметров, т.е.  $Y=f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

Тогда функционал

$$\Phi(y(x)) = \Phi(f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \quad (5.19)$$

превращается по сути дела в функцию многих переменных, представляющих собой параметры функции  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , которые нужно найти. Это значит, что минимизация функционала в этом случае снова сводится к минимизации функции многих переменных.

Для примера вновь рассмотрим предыдущую задачу:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l \frac{\lambda(x)\lambda(y)}{|x-y|} dx dy, \quad (5.20)$$

$$\int_0^l \lambda(x) dx = Q = const.$$

Для устранения расходимости интегралов при  $x=y$  снова введём в знаменатель дополнительное малое слагаемое  $\delta$ , которое не даст обратиться в нуль

знаменателю. Поскольку  $\delta$  - мало, то на результате расчёта оно должно сказаться мало. Таким образом будем считать

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l \frac{\lambda(x)\lambda(y)}{\delta + |x - y|} dx dy. \quad (5.21)$$

Будем искать решение этой задачи в виде:

$$I(\mathbf{x}) = \mathbf{ax}^2 + \mathbf{bx} + \mathbf{c}, \quad (5.22)$$

тогда

$$U = \frac{k}{2} \int_0^l \int_0^l \frac{(ax^2 + bx + c)(ay^2 + by + c)}{\delta + |x - y|} dx dy \quad (5.23)$$

$$\int_0^l (ax^2 + bx + c) dx = a \frac{l^3}{3} + b \frac{l^2}{2} + cl = Q. \quad (5.24)$$

Раскрыв в (5.23) скобки, получим:

$$U = \frac{k}{2} \int_0^l \int_0^l \frac{a^2 x^2 y^2 + abx^2 y + acx^2 + baxy^2 + b^2 xy + bcx + acy^2 + bcy + c^2}{\delta + |x - y|} dx dy, \quad (5.25)$$

что можно представить в виде:

$$U = J_1 a^2 + J_2 ab + J_3 ac + J_4 b^2 + J_5 bc + J_6 c^2, \quad (5.26)$$

где

$$J_1 = \frac{k}{2} \int_0^l \int_0^l \frac{x^2 y^2}{\delta + |x - y|} dx dy, \quad (5.27)$$

$$J_2 = \frac{k}{2} \int_0^l \int_0^l \frac{(x^2 y + xy^2)}{\delta + |x - y|} dx dy, \quad (5.28)$$

$$J_3 = \frac{k}{2} \int_0^l \int_0^l \frac{(x^2 + y^2)}{\delta + |x - y|} dx dy, \quad (5.29)$$

$$J_4 = \frac{k}{2} \int_0^l \int_0^l \frac{xy}{\delta + |x - y|} dx dy, \quad (5.30)$$

$$J_5 = \frac{k}{2} \int_0^l \int_0^l \frac{(x+y) dx dy}{\delta + |x-y|}, \quad (5.31)$$

$$J_6 = \frac{k}{2} \int_0^l \int_0^l \frac{dx dy}{\delta + |x-y|}. \quad (5.32)$$

Из (5.24) найдём

$$c = \frac{Q}{l} - a \frac{l^2}{3} - b \frac{l}{2} \quad (5.33)$$

и подставим в (5.26)

$$\begin{aligned} U = & J_1 a^2 + J_2 ab + J_3 a \left( \frac{Q}{l} - a \frac{l^2}{3} - b \frac{l}{2} \right) + \\ & + J_4 b^2 + J_5 b \left( \frac{Q}{l} - a \frac{l^2}{3} - b \frac{l}{2} \right) + J_6 \left( \frac{Q}{l} - a \frac{l^2}{3} - b \frac{l}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Теперь продифференцируем по  $a$  и  $b$  и производные приравняем к нулю

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial a} = & 2J_1 a + J_2 b + J_3 \left( \frac{Q}{l} - \frac{al^2}{3} - \frac{bl}{2} \right) - J_3 \frac{al^2}{3} + \\ & + J_5 \frac{bl^2}{3} + 2J_6 \left( \frac{Q}{l} - \frac{al^2}{3} - \frac{bl}{2} \right) \left( -\frac{l^2}{3} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial b} = & J_2 a - J_3 \frac{l}{2} a + 2J_4 b + J_5 \left( \frac{Q}{l} - \frac{al^2}{3} - \frac{bl}{2} \right) - J_5 \frac{bl}{2} + \\ & + 2J_6 \left( \frac{Q}{l} - \frac{al^2}{3} - \frac{bl}{2} \right) \left( -\frac{l}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Сгруппировав слагаемые, получим:

$$\begin{aligned} & (2J_1 - 2J_3 l^2 / 3 + 2J_6 l^4 / 9) a + (J_2 - J_3 l / 2 - J_5 l^2 / 3 + J_6 l^3 / 3) b = \\ & = \left( \frac{2}{3} J_6 l - J_3 / l \right) Q, \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} & (J_2 - J_3 l / 2 - J_5 l^2 / 3 + J_6 l^3 / 3) a + (2J_4 - J_5 l + J_6 l^2 / 2) b = \\ & = (J_6 - J_5 / l) Q. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Обозначим

$$I_3 = 2J_1 - 2J_3l^2 / 3 + 2J_6l^4 / 9; I_1 = J_2 - J_3l / 2 - J_5l^2 / 3 + J_6l^3 / 3;$$

$$I_5 = (\frac{2}{3}J_6l - J_3 / l)Q; I_2 = 2J_4 - J_5l + J_6l^2 / 2; I_4 = (J_6 - J_5 / l)Q,$$

тогда

$$\begin{cases} I_3a + I_1b = I_5 \\ I_1a + I_2b = I_4 \end{cases} \quad (5.39)$$

Решив полученную систему уравнений, найдём:

$$a = \frac{I_5I_2 - I_4I_1}{I_3I_2 - I_1^2}; b = \frac{I_3I_4 - I_5I_1}{I_3I_2 - I_1^2}, \text{ а из (5.33) найдём коэффициент } c.$$

Составим программу

### **ПРОГРАММА 5.8**

```

10 CLS:PCLS
20 L=1:N=20:H=L/N:D=H/2:Q=.00001:
K=9.000001E+09:GX=500/L:GY=200!/Q
40   FOR I=1 TO 6 : S=0
50   FOR X=H/2 TO L STEP H
60   FOR Y=H/2 TO L STEP H
70   ON I GOSUB 350, 360, 370, 380, 390, 400
80   S=S+F
90   NEXT Y, X
100  ON I GOSUB 120, 130, 140, 150, 160, 170
110  NEXT I: GOTO 180
120  J1=S*H^2*K/2 : RETURN
130  J2=S*H^2*K/2 : RETURN
140  J3=S*H^2*K/2 : RETURN
150  J4=S*H^2*K/2 : RETURN
160  J5=S*H^2*K/2 : RETURN
170  J6=S*H^2*K/2 : RETURN
180  I1=J2-J3*L/2-J5*L^2/3+J6*L^3/3
190  I2=2*J4-J5*L+J6*L^2/2
200  I3=2*J1-2*J3*L^2/3+2*J6*L^4/9
210  I4=(J6-J5/L)*Q
220  I5=(J6*L^2/3-J3/L)*Q
230  A=(I4*I1-I2*I5)/(I1^2-I2*I3)
240  B=(I5*I1-I3*I4)/(I1^2-I2*I3)
250  C=Q/L-A*L^2/3-B*L/2
300  FOR X=0 TO L STEP L/100
310  Y=A*X^2+B*X+C

```



```

320 IF X=0 THEN PSET (X*GX, 300-Y*GY) ELSE
LINE - (X*GX, 300-Y*GY)
330 NEXT X
340 STOP
350 F=X^2*Y^2 / (D+ABS (X-Y)) : RETURN
360 F= (X^2*Y+X*Y^2) / (D+ABS (X-Y)) : RETURN
370 F= (X^2+Y^2) / (D+ABS (X-Y)) : RETURN
380 F=X*Y / (D+ABS (X-Y)) : RETURN
390 F= (X+Y) / (D+ABS (X-Y)) : RETURN
400 F=1 / (D+ABS (X-Y)) : RETURN

```

В этой программе строкой 20 задаются данные, среди которых особо отметим  $D$  - параметр  $\delta$ , для устранения расходимости интегралов.

В строках 40-90 определяются коэффициенты решаемой системы уравнений. В строках 50-90 вычисляются шесть различных интегралов, подынтегральные функции которых рассчитываются подпрограммно в строках 350-400.

В строках 180-220 непосредственно определяются коэффициенты матрицы системы уравнений для вычисления  $a$  и  $b$ .

Строки 230-250 – определение коэффициентов параболы  $a, b$  и  $c$ .

Строки 300-330 - построение графика найденной функции распределения заряда по проводнику.

## 6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Одним из самых широких классов физических задач, требующих численного решения, являются задачи, приводящие к некоторым дифференциальным уравнениям вида:

$$y'' = f(x, y, y') \quad (6.1)$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y'_0. \quad (6.2)$$

Таковыми задачами являются практически все задачи, использующие уравнение Ньютона

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \text{ но т.к. } \vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}, \text{ то уравнение Ньютона}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (6.3)$$

есть дифференциальное уравнение. В тех случаях, когда сила есть постоянная величина или достаточно просто зависит от координат или времени, уравнение Ньютона можно решить аналитически. Однако это бывает лишь в ограниченном числе случаев, когда реальные задачи сильно упрощены. Чаще всего решить аналитически уравнение Ньютона не представляется возможным, в этом случае единственным способом анализа задачи является численное решение уравнения Ньютона.

Существует несколько методов численного решения дифференциального уравнения. Разные методы отличаются разной степенью сложности и, как следствие, разной точностью.

### 6.1 МЕТОД ЭЙЛЕРА

Самым простым из них и, естественно, наименее точным является так называемый метод Эйлера. Суть этого метода состоит в следующем. Пусть нужно решить уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{6.4}$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0. \tag{6.5}$$

Заменим в уравнении производную  $y'$  конечной разностью, т.е.

$$y'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{6.6}$$

Причем это равенство тем точнее, чем меньше  $\Delta x$ . Тогда уравнение (6.4) принимает вид

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f(x, y) \tag{6.7}$$

или

$$\Delta y = f(x, y) \Delta x. \tag{6.8}$$

Т.к.  $\Delta y = y - y_0$ , то  $y - y_0 = f(x, y) \cdot \Delta x$ .

Отсюда

$$y = y_0 + f(x, y) \cdot \Delta x. \tag{6.9}$$

Если справа от равенства при расчете  $f(x, y)$  положить  $x = x_0, y = y_0$ , то можно будет рассчитать новое значение функции  $y$  и аргумента т.е.

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \Delta x; x_1 = x_0 + \Delta x. \tag{6.10}$$

Таким образом, в дополнение к начальным условиям  $x_0, y_0$  на первом этапе расчета можно получить значение  $x_1$  и  $y_1$ . Считая их начальными, можно найти  $x_2$  и  $y_2$ . А именно

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \Delta x; x_2 = x_1 + \Delta x. \tag{6.11}$$

Продолжая такой процесс и далее, мы получим таблицу значений функции

$$\begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_n & \dots \end{matrix}$$

Эта таблица значений функций и называется численным решением уравнения (6.4). Естественно, что в силу приближённого характера равенства производной, и конечно разности, все последующие равенства и само численное решение носит лишь приближённый характер.

Уравнение Ньютона есть дифференциальное уравнение второго порядка, поэтому для решения задачи динамики метод Эйлера должен быть обобщен на случай уравнений высоких порядков.

Обобщение метода Эйлера происходит путем замены дифференциального уравнения второго порядка системой из двух уравнений первого порядка. А именно в уравнении

$$y'' = f(x, y, y') \quad (6.12)$$

сделаем замену переменной  $y' = z$ . Тогда  $y'' = z'$  и вместо одного уравнения получаем два уравнения

$$y' = z \quad \text{и} \quad z' = f(x, y, z), \quad (6.13)$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{и} \quad z(x_0) = z_0 = y_0'. \quad (6.14)$$

Будем полагать для общности, что первое уравнение также имеет вид второго, т.е. решим систему уравнений:

$$y' = \varphi(x, y, z), \quad (6.15)$$

$$z' = f(x, y, z) \quad (6.16)$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0. \quad (6.17)$$

На первом этапе находим значение аргумента и функции по следующим формулам:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta x, \\ y_1 &= y_0 + \varphi(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x, \\ z_1 &= z_0 + f(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x. \end{aligned} \quad (6.18)$$

В этих равенствах в правых частях вновь стоят лишь известные величины, что позволяет произвести расчет.

На втором этапе находим  $x_2; y_2; z_2$  по формуле

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \Delta x, \\ y_2 &= y_1 + \varphi(x_1, y_1, z_1) \cdot \Delta x, \\ z_2 &= z_1 + f(x_1, y_1, z_1) \cdot \Delta x. \end{aligned} \quad (6.19)$$

И т.д.

Процесс может продолжаться до тех пор, пока пользователь не выяснит все интересующие его детали в поведении искомым функций.

Естественно этот метод лишь приближенный. Однако при достаточно малом  $\Delta x$  он позволяет достичь приемлемой точности.

Поскольку в физике большую часть задач, приводящих к необходимости решать дифференциальные уравнения, составляют задачи динамики, приведем расчетную схему метода Эйлера для решения таких задач.

Любой задаче динамики материальной точке соответствует уравнение

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)}{m} \quad (6.20)$$

с начальными условиями

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0; \vec{v}(t_0) = \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0. \quad (6.21)$$

$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$  - равнодействующая всех сил, действующих на материальную точку,  $m$  - масса материальной точки.

Уравнение Ньютона приведем к системе уравнений путем замены  $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ . Тогда задача примет вид

$$\begin{cases} \dot{\vec{v}} = \frac{\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)}{m} \\ \dot{\vec{r}} = \vec{v} \end{cases} \quad (6.22)$$

с начальными условиями

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0; \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0. \quad (6.23)$$

Для численного решения задачи нужно выбрать достаточно малый шаг по времени  $\Delta t$  и по начальным условиям найти первые значения радиус-вектора и скорости, а именно:

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + \Delta t, \\ \vec{r}_1 &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot \Delta t, \\ \vec{v}_1 &= \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t_0)}{m} \Delta t. \end{aligned} \quad (6.24)$$

По этим найденным первым значениям находим вторые по аналогичным формулам

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + \Delta t, \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_1 + \vec{v}_1 \cdot \Delta t, \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_1 + \frac{\vec{F}(\vec{r}_1, \vec{v}_1, t_1)}{m} \Delta t. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Продолжая этот процесс и далее, можно выяснить все детали характера движения материальной точки.

**Замечание.** В данном методе все равенства векторные. Это значит, что им соответствует три скалярных. И система из двух уравнений соответствует на самом деле шести уравнениям, соответствующим проекциям на оси координат радиуса вектора и скорости материальной точки.

В том случае, когда исследуемое тело не является материальной точкой, кроме уравнений поступательного движения, написанных выше и относящихся теперь к центру масс тела, нужно учитывать еще уравнение динамики вращательного движения

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

$$\vec{L} = J\vec{\omega} = J \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (6.26)$$

Когда исследуется система тел, количество уравнений возрастает пропорционально количеству тел.

### ПРИМЕР 6.1

Исследовать траекторию движения маятника Фуко на северном полюсе при малых амплитудах колебания.

Решим физическую часть задачи. Рассмотрим силы, действующие на маятник. Ось  $oy$  и ось  $ox$  выберем направленными взаимно перпендикулярно в горизонтальной плоскости,  $oz$  - вертикально вверх, как показано на рисунке 6.1. Тогда на маятник будут действовать следующие силы:

- сила тяжести, которую будем считать направленной вертикально вниз;
- сила натяжения нити  $\vec{T}$ , направленная по нити к точке подвеса;
- сила Кориолиса, направленная вправо по ходу движения;
- центробежная сила.

Тогда

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_k + \vec{F}_{цб}. \quad (6.27)$$

Проецируем на оси координат

$$ox: ma_x = mg_x + T_x + F_{kx} + F_{цбx}. \quad (6.28)$$

$$g_x = 0; T_x = T \sin \theta \cos \alpha,$$

$$F_{kx} = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}]_x = 2mv_y \omega, \quad (6.29)$$

$$F_{цбx} = m\omega^2 r \cos \alpha,$$

тогда

$$ma_x = -T \sin \theta \cos \alpha + 2mv_y \omega + m\omega^2 r \cos \alpha, \quad (6.30)$$

$$\text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$oy: ma_y = mg_y + T_y + F_{ky} + F_{цбы}, \quad (6.31)$$

$$g_y = 0; T_y = -T \sin \theta \sin \alpha; F_{ky} = -2mv_x \omega;$$

$$F_{цбы} = m\omega^2 r \sin \alpha, \quad (6.32)$$

$$ma_y = -T \sin \theta \sin \alpha - 2mv_x \omega + m\omega^2 r \sin \alpha.$$

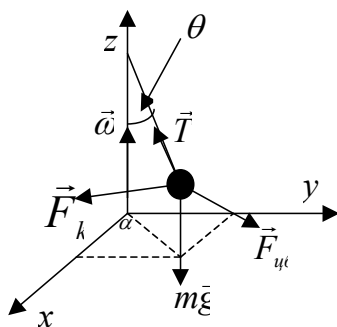


Рисунок 6.1

$$\text{oz: } ma_z = mg_z + T_z + F_{kz} + F_{ц\bar{\omega}z}, \quad (6.33)$$

$$g_z = -g; T_z = T \cos \theta; F_{kz} = 0; F_{ц\bar{\omega}z} = 0$$

$$ma_z = -mg + T \cos \theta \quad , \quad (6.34)$$

$\bar{\omega}$  - угловая скорость вращения Земли.

Учтем теперь тот факт, что колебания малые, т.е.

$$\theta \approx 0; \cos \theta \approx 1; \sin \theta \approx \theta; a_z = 0,$$

тогда уравнения примут вид:

$$ma_x = -T \sin \theta \cos \alpha + 2mv_y \omega + m\omega^2 r \cos \alpha, \quad (6.35)$$

$$ma_y = -T \sin \theta \sin \alpha - 2mv_x \omega + m\omega^2 r \sin \alpha, \quad (6.36)$$

$$0 = -mg + T \cos \theta \quad . \quad (6.37)$$

Из последнего уравнения сразу находим, что  $T=mg$ . Подставив это в два первых уравнения и сократив на  $m$ , получим:

$$a_x = -g \sin \theta \cos \alpha + 2v_y \omega + \omega^2 r \cos \alpha, \quad (6.38)$$

$$a_y = -g \sin \theta \sin \alpha - 2v_x \omega + \omega^2 r \sin \alpha. \quad (6.39)$$

Т.к. кроме того

$$r \cos \alpha = x; r \sin \alpha = y; \sin \theta = \frac{r}{l}; \cos \alpha = \frac{x}{r}; \sin \alpha = \frac{y}{r},$$

поэтому получим систему уравнений

$$a_x = -g \frac{x}{l} + 2v_y \omega + \omega^2 x, \quad (6.40)$$

$$a_y = -g \frac{y}{l} - 2v_x \omega + \omega^2 y. \quad (6.41)$$

Это и есть система дифференциальных уравнений для маятника Фуко, её лишь нужно дополнить начальными условиями:

$$x(t_0) = x_0; y(t_0) = y_0; v_x(t_0) = v_{0x}; v_y(t_0) = v_{0y}. \quad (6.42)$$

По описанному выше алгоритму метода Эйлера составим программу.

### **ПРОГРАММА 6.1**

```

10 CLS: PCLS
20 G=9.81:L=100:W=6.28/(24*3.6):DT=0.1:
GX=300/100:Y=GX/1.3
30 X=0: Y=100: VX=0: VY=0: T=0
40 AX=-G*X/L+2*VY*W+W^2*X
50 AY=-G*Y/L-2*VX*W+W^2*Y
60 X=X+VX*DT
70 Y=Y+VY*DT

```

```

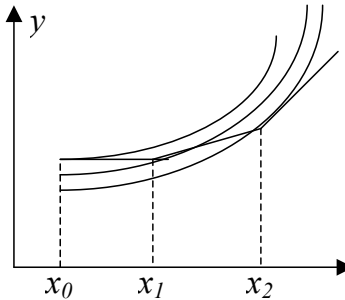
80 VX=VX+AX*DT: VY=VY+AY*DT
90 IF T=0 THEN PSET(250+X*GX,125-Y*GY)
ELSE LINE-(250+X*GX,125-Y*GY*GY)
100 T=T+DT
110 GOTO 40

```

В программе пришлось в 1000 раз увеличить скорость вращения Земли, чтобы заметить эффект поворота плоскости маятника.

## 6.2 УТОЧНЕННЫЙ МЕТОД ЭЙЛЕРА

Метод Эйлера, несмотря на его простоту, мало используется в настоящее время, в силу его малой точности. Чаще используют так называемые уточненные методы Эйлера. Суть одного из них можно уяснить из рисунка 6.2, на котором изображены несколько интегральных кривых, т.е. графиков функций, являющихся решением дифференциальных уравнений для различных начальных условий.



Из рисунка видно, что на каждом этапе расчета метод Эйлера заменяет дугу интегральной кривой отрезком касательной, проведенной в начальной точке этой дуги. Естественно поэтому, что значение функции  $f(x)$ , рассчитываемое в точке  $x_1$  по методу Эйлера, далеко не совпадает с истинным значением  $f(x_1)$ .

Рисунок 6.2

Из рисунка следует также и способ уточнения. Каждый отрезок дуги интегральной кривой заменяется секущей, параллельной касательной, но проведенной не в точке начала дуги, а в ее середине, рисунок 6.3. Как видно из рисунка, это должно дать более точное значение функции  $f(x_1)$ . Действительно, если провести прямую, параллельную касательной, проведенной в середине дуги из точки начала дуги, то эта прямая пересечет прямую  $x=x_1$  в точке, расположенной ближе к интегральной кривой, чем прежде.

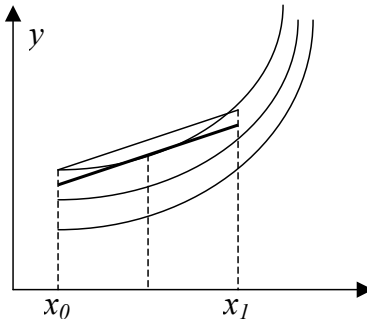


Рисунок 6.3

Алгоритм уточненного метода Эйлера отличается от алгоритма метода Эйлера тем, что расчет каждого нового значения функции происходит в два этапа.

На первом этапе метода Эйлера определяется значение функции в середине отрезка  $[x_0, x_1]$ , т.е.

$$\begin{aligned}
 y'_1 &= y_0 + f(x_0, y_0) \Delta x / 2, \\
 x'_1 &= x_0 + \Delta x / 2.
 \end{aligned}
 \tag{6.43}$$

На втором этапе находятся уже уточненные значения  $y_1$  и  $x_1$  в конце отрезка  $[x_0, x_1]$ , т.е. в точке  $x_1$ , а именно

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x'_0, y'_0) \Delta x, \\ x_1 &= x_0 + \Delta x. \end{aligned} \quad (6.44)$$

И так продолжается до тех пор, пока не будут выяснены все особенности поведения функции. Для этого алгоритма программа в указанном выше примере может быть модифицирована следующим образом. Фрагмент программы 6.1.

```

60 X1=X+VX*DT/2
70 Y1=Y+VY*DT/2
80 V1=VX+AX*DT/2: V2=VY+AY*DT/2
82 AX=-G*X1/L+2*V2*W+W^2*X1
84 AY=-G*Y1/L-2*V1*W+W^2*Y1
86 X=X+V2*DT: Y=Y+V2*DT
88 VX=VX+A1*DT: VY=VY+A2*DT

```

Второй метод уточнения состоит в том, что угловой коэффициент наклона прямой, которая заменяет дугу искомой интегральной кривой, выбирается равным среднему арифметическому между коэффициентами наклона касательных в начале и в конце дуги. Алгоритм меняется следующим образом. На первом этапе находится значение, функции и аргумента обычным методом Эйлера

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta x, \\ y'_1 &= y_0 + f(x_0, y_0) \Delta x, \end{aligned} \quad (6.45)$$

на втором этапе уточняется значение функции

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta x, \\ y_1 &= y_0 + (f(x_0, y_0) + f(x_1, y'_1)) \Delta x / 2, \end{aligned} \quad (6.46)$$

и так продолжается процесс до полного исследования искомого решения. Для задач динамики этот метод модифицируется следующим образом:

#### 1 ЭТАП

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + \Delta t, \\ \vec{r}'_1 &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot \Delta t, \\ \vec{v}'_1 &= \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t) \Delta t}{m}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

#### 2 ЭТАП

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + \Delta t, \\ \vec{r}_1 &= \vec{r}_0 + \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}'_1}{2} \Delta t, \\ \vec{v}_1 &= \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t_0) + \vec{F}(\vec{r}'_1, \vec{v}'_1, t_1)}{2m} \Delta t. \end{aligned} \quad (6.48)$$



Программа для этого метода модифицируется следующим образом.

Фрагмент программы 6.1.

60 X1=X+VX\*DT: Y1=Y+VY\*DT

70 V1=VX+AX\*DT: V2=VY+AY\*DT

80 A1=-G\*X1/L+2\*V2\*W+W^2\*X1

81 A2=-G\*Y1/L+2\*V1\*W+W^2\*Y1

82 X=X+(VX+V1)\*DT/2: Y=Y+(VY+V2)\*DT/2

84 VX=VX+(AX+A1)\*DT/2: VY=VY+(AY+A2)\*DT/2

90 (по тексту)

### 6.3 МЕТОД РУНГЕ-КУТТА

Одним из самых точных методов численного решения дифференциальных уравнений является метод Рунге-Кутты. Суть этого метода состоит в следующем. Весь процесс расчета значений для уравнения  $y' = f(x, y)$  состоит из 4-х этапов.

#### 1 ЭТАП

$$K_1 = f(x_0, y_0) \Delta x. \quad (6.49)$$

#### 2 ЭТАП

$$K_2 = f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}\right) \Delta x. \quad (6.50)$$

#### 3 ЭТАП

$$K_3 = f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}\right) \Delta x. \quad (6.51)$$

#### 4 ЭТАП

$$K_4 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + K_3) \Delta x. \quad (6.52)$$

#### 5 ЭТАП

$$x_1 = x_0 + \Delta x, \quad (6.53)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2(K_2 + K_3) + K_4). \quad (6.54)$$

Этот метод может быть обобщен и на случай системы уравнений

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = \varphi(x, y, z) \end{cases}, \quad (6.55)$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}. \quad (6.56)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 K_1 &= f(x_0, y_0, z_0) \Delta x; L_1 = \varphi(x_0, y_0, z_0) \Delta x, \\
 K_2 &= f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}, z_0 + \frac{L_1}{2}\right) \Delta x; \\
 L_2 &= \varphi\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}, z_0 + \frac{L_1}{2}\right) \Delta x, \\
 K_3 &= f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}, z_0 + \frac{L_2}{2}\right) \Delta x; \\
 L_3 &= \varphi\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}, z_0 + \frac{L_2}{2}\right) \Delta x,
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

$$\begin{aligned}
 K_4 &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + K_3, z_0 + L_3) \Delta x; \\
 L_4 &= \varphi(x_0 + \Delta x, y_0 + K_3, z_0 + L_3) \Delta x, \\
 x_1 &= x_0 + \Delta x, \\
 y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4); \\
 z_1 &= z_0 + \frac{1}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4).
 \end{aligned} \tag{6.58}$$

И, наконец, для задач динамики

$$\begin{cases} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)}{m}, \\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \end{cases} \tag{6.59}$$

с граничными условиями

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0; \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0. \tag{6.60}$$

$$1 \text{ этап: } \vec{K}_1 = \vec{a}(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t_0) \Delta t; \vec{L}_1 = \vec{v}_0 \Delta t. \tag{6.61}$$

$$2 \text{ этап: } \vec{K}_2 = \vec{a}\left(\vec{r}_0 + \frac{\vec{L}_1}{2}, \vec{v}_0 + \frac{\vec{K}_1}{2}, t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right) \Delta t; \vec{L}_2 = \left(\vec{v}_0 + \frac{\vec{K}_1}{2}\right) \Delta t. \tag{6.62}$$

$$\mathbf{3 \text{ этап: } } \vec{K}_3 = \vec{a}(\vec{r}_0 + \frac{\vec{L}_2}{2}, \vec{v}_0 + \frac{\vec{K}_2}{2}, t_0 + \frac{\Delta t}{2}) \Delta t; \vec{L}_3 = \left( \vec{v}_0 + \frac{\vec{K}_2}{2} \right) \Delta t. \quad (6.63)$$

$$\mathbf{4 \text{ этап: } } \vec{K}_4 = \vec{a}(\vec{r}_0 + \vec{L}_3, \vec{v}_0 + \vec{K}_3, t_0 + \Delta t) \Delta t; \vec{L}_4 = (\vec{v}_0 + \vec{K}_3) \Delta t. \quad (6.64)$$

$$\mathbf{5 \text{ этап } } \vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \frac{1}{6}(\vec{L}_1 + 2\vec{L}_2 + 2\vec{L}_3 + \vec{L}_4), \quad (6.65)$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \frac{1}{6}(\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4). \quad (6.66)$$

При решении конкретных задач динамики, нужно будет векторные равенства заменить скалярными путем проецирования по координатным осям.

Для примера снова рассмотрим задачу о маятнике Фуко на северном полюсе. Начало программы до сороковой строки можно оставить прежним.

#### **ФРАГМЕНТ ПРОГРАММЫ 6.1.**

```

40 KX(1) = (-G*X/L+2*VY*W+W^2*X) *DT:
   KY(1) = (-G*Y/L-2*VX*W+W^2*Y) *DT:
   LX(1) = VX*DT:   LY(1) = VY*DT
50 KX(2) = (-G*(X+LX(1)/2)/L+2*(VY+KY(1)/2)*W
+W^2*(X+LX(1)/2)) *DT:
   KY(2) = (-G*(Y+LY(1)/2)/L-2*(VX+KX(1)/2)*W
+W^2*(Y+LY(1)/2)) *DT:
   LX(2) = (VX+KX(1)/2) *DT:   LY(2) = (VY+KY(1)/2) *DT
60 KX(3) = (-G*(X+LX(2)/2)/L+2*(VY+KY(2)/2)*W
+W^2*(X+LX(2)/2)) *DT:
   KY(3) = (-G*(Y+LY(2)/2)/L-2*(VX+KX(2)/2)*W
+W^2*(Y+LY(2)/2)) *DT:
   LX(3) = (VX+KX(2)/2) *DT:   LY(3) = (VY+KY(2)/2) *DT
70 KX(4) = (-G*(X+LX(3))/L+2*(VY+KY(3))*W
+W^2*(X+LX(3))) *DT:
   KY(4) = (-G*(Y+LY(3))/L-2*(VX+KX(3))*W+
+W^2*(Y+LY(3))) *DT:
   LX(4) = (VX+KX(3)) *DT:   LY(4) = (VY+KY(3)) *DT
80 X=X+(LX(1)+2*LX(2)+2*LX(3)+LX(4))/6:
   Y=Y+(LY(1)+2*LY(2)+2*LY(3)+LY(4))/6:
   VX=VX+(KX(1)+2*KX(2)+2*KX(3)+KX(4))/6:
   VY=VY+(KY(1)+2*KY(2)+2*KY(3)+KY(4))/6:
90 (ПО ТЕКСТУ)

```

Все методы численного решения дифференциальных уравнений можно уточнить методом Эйткена и попутно определить порядок точности этих методов. Так метод Эйлера является методом первого порядка точности, уточнённые методы Эйлера – второго, а метод Рунге-Кутты - четвёртого порядка точности.

Одним из возможных методов улучшения метода Эйлера является разло-

жение искомой функции в ряд Тейлора. А именно. Пусть нужно решить уравнение  $y' = f(x, y)$  с начальными условиями  $y(x_0) = y_0$ . Снова выберем малый шаг  $\Delta x$ , но в разложении функции в ряд Тейлора ограничимся не линейными членами, как это было в методе Эйлера, а членами до четвёртого порядка, т.е.:

$$y_I = y_0 + y' \Delta x + y'' \frac{\Delta x^2}{2} + y''' \frac{\Delta x^3}{6} + y^{IV} \frac{\Delta x^4}{24} + \dots \quad (6.67)$$

Если в этом разложении найти производные численно, заменив их конечными разностями, то придем к методу Рунге-Кутты. Если ограничиться линейными членами и численно найти производные, то придем к методу Эйлера. Если же ограничиться второй степенью слагаемых – то к уточнёному методу Эйлера. Однако иногда производные в ряде Тейлора можно найти явно, если функция  $f(x, y)$  достаточно проста и имеет производные нужного порядка, а именно:

$$y' = f(x_0, y_0); y'' = f'(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=x_0} \text{ и т.д.}$$

Применим это способ для решения задачи с маятником Фуко. Согласно условиям задачи заданы  $x_0, y_0, v_x, v_y$ , находим

$$\begin{aligned} a_x &= -gx/l + 2v_y \omega + \omega^2 x, \\ a_y &= -gy/l + 2v_x \omega + \omega^2 y \end{aligned} \quad (6.68)$$

и производные от этих же функций по времени

$$\begin{aligned} \dot{a}_x &= -g\dot{x}/l + 2\dot{v}_y \omega + \omega^2 \dot{x} = -gv_x/l + 2a_y \omega + \omega^2 v_x, \\ \dot{a}_y &= -g\dot{y}/l - 2\dot{v}_x \omega + \omega^2 \dot{y} = -gv_y/l + 2a_x \omega + \omega^2 v_y, \\ \ddot{a}_x &= -g\dot{v}_x/l + 2\dot{a}_y \omega + \omega^2 \dot{v}_x = -ga_x/l + 2\dot{a}_y \omega + \omega^2 a_x, \\ \ddot{a}_y &= -g\dot{v}_y/l - 2\dot{a}_x \omega + \omega^2 \dot{v}_y = -ga_y/l + 2\dot{a}_x \omega + \omega^2 a_y. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Определив эти производные, находим значение функций  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$ ,  $\mathbf{v}_x(t)$ ,  $\mathbf{v}_y(t)$  в новой точке.

$$x_I = x_0 + v_x \Delta t + \frac{a_x \Delta t^2}{2} + \frac{\dot{a}_x \Delta t^3}{6} + \frac{\ddot{a}_x \Delta t^4}{24}, \quad (6.70)$$

$$y_I = y_0 + v_y \Delta t + \frac{a_y \Delta t^2}{2} + \frac{\dot{a}_y \Delta t^3}{6} + \frac{\ddot{a}_y \Delta t^4}{24}, \quad (6.71)$$

$$v_x = v_x + a_x \Delta t + \frac{\dot{a}_x \Delta t^2}{2} + \frac{\ddot{a}_x \Delta t^3}{6}, \quad (6.72)$$

$$v_y = v_y + a_y \Delta t + \frac{\dot{a}_y \Delta t^2}{2} + \frac{\ddot{a}_y \Delta t^3}{6} \quad (6.73)$$

и весь процесс снова продолжается.

По рассмотренному алгоритму легко составить программу для расчета траектории маятника этим способом. Порядок точности этого метода зависит от количества членов разложения в ряд Тейлора, сохранённых для расчёта.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурсиан Э.В. Задачи по физике для компьютера. М., Просвещение. 1991. – 255 с.
2. Матвеев А.Н. Молекулярная физика. М., Высшая школа. 1981. - 395 с.
3. Девис Д.А. Волны, атомы и твёрдые тела. Киев. 1981. – 283 с.
4. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. М., Наука. 1988. - 495 с.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы. М., Наука. 1978. –508 с.
6. Данилина Н.И., Дубровская Н.С., Кваша О.П., Смирнов Г.Л. Вычислительная математика. М., Высшая школа. 1985. – 471 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие автора.	3
Введение.	4
<i>1. ГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ</i>	5
1.1 Алгоритмы построения графиков.	5
1.2 Масштабные множители и преобразование координат.	6
1.3 Способы построения графиков.	7
1.4 Координатные сетки.	10
1.5 Автоматический выбор масштабных множителей и цены деления координатной сетки.	11
1.6 Построение графиков функций двух переменных.	13
<i>2. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ</i>	15
2.1 Метод численного дифференцирования	15
2.2 Уточнение расчёта производных.	16
2.3 Ошибки округлений.	19
2.4 Метод уточнения Эйткена.	19
<i>3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ</i>	21
3.1 Отделение корней	21
3.2 Метод половинного деления.	24
3.3 Метод последовательных приближений.	26
3.4 Метод секущих и касательных.	28
<i>4. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ</i>	30
4.1 Метод прямоугольников.	30
4.2 Метод парабол (метод Симпсона)	34
4.3 Кратные и несобственные интегралы.	36
<i>5. ПОИСК ЭКСТРЕМУМОВ (МИНИМАКСНЫЕ ЗАДАЧИ)</i>	40
5.1 Поиск экстремумов функции одной переменной.	40
5.2 Поиск экстремумов функции нескольких переменных.	43
5.3 Поиск экстремума функционалов.	49
<i>6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ</i>	57
6.1 Метод Эйлера.	58
6.2 Уточненный метод Эйлера.	63
6.3 Метод Рунге-Кутта	65
Список литературы.	69
Содержание	70

Парахин Александр Сергеевич

# РЕШЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ЭВМ

Учебное пособие

Редактор Кокина Н.М.

Лицензия ЛР N 020376 от 17. 06.97

---

Подписано в печать	Формат 60*84 1/16	Бумага тип. N 1
Плоская печать	Усл. печ. л.5.75	Уч-изд. л.5.75
Заказ	Тираж 100	Цена свободная

---

Издательство Курганского государственного университета.  
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.  
Курганский государственный университет, ризограф.

Издательство КГУ  
**2-316-024**