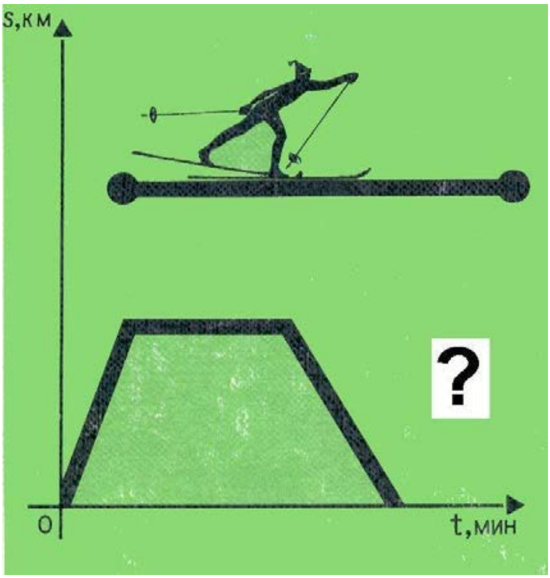
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

З.П. МАТУШКИНА

ПРИЕМЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



Курган 2003

УДК 371.3: 512.0
М 34

Матушкина З.П. Приемы обучения учащихся решению математических задач: Учебное пособие. – Курган: Изд-во Курганского гос. ун-та, 2003. - 140 с.

В предлагаемом учебном пособии раскрываются психолого- педагогические основы обучения решению задач, содержание процессов решения и составления математических задач при обучении математике, структура и требования системы заданий, ориентированных на формирование умений решать задачи, а также приемы работы учителя и учащихся на каждом этапе процесса решения задачи. Пособие адресуется студентам и учителям-практикам.
Библиограф. – 51 назв.

Научный редактор: *Федосимов Г.М.*, канд. пед. наук, профессор кафедры педагогики Курганского государственного университета

Рецензенты: кафедра математики и информатики Курганского военного института ФПС (зав. каф., канд. физ-мат. наук *Лугавов В.С.*), завуч по учебно-воспитательной работе МУ «Средняя общеобразовательная школа № 38» *Вахина Н.Г.*

Печатается по решению редакционно-издательского совета Курганского государственного университета

ISBN 5 – 86328 – 315 – 7

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время потребности общества выдвигают на первый план не только обеспечение усвоения учащимися определенной информации, но и проблему развития обучаемых. Вот почему сейчас ведется настойчивый поиск путей совершенствования форм и методов обучения, в том числе и математике. Причем, внедрение в школу общеобразовательных стандартов обязывает научить каждого ученика решению задач определенного уровня сложности и развить их творческие способности. Одной из составных частей математической подготовки учащихся является обучения решению задач.

По своему научному содержанию математика располагает богатыми возможностями для развития учащихся. Основным средством развития учащихся при обучении математике являются задачи. Как организовать деятельность учащихся по решению задач? Как обучать решению задач?

Вопросы совершенствования обучения решению математических задач постоянно ставились и ставятся математиками, методистами, психологами и педагогами. В работах Ю.М. Колягина, Л.М. Фридмана, Д. Пойа и др. подчеркивается огромная роль задач при обучении математике как средства приобщения учащихся к математической деятельности и их развития. Чтобы учащиеся успешно усвоили тот или иной учебный материал по математике, они должны уметь решать задачи, а для формирования умения решать задачи недостаточно усвоения ими определенного запаса математических фактов. С этой целью необходимо специально ставить задачу формирования у учащихся умений решать задачи. Хорошо от этом сказал известный математик и педагог Д. Пойа: "Что означает овладение математикой? Это есть умение решать задачи, причем не только стандартные, на и требующие известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности" [36. С.13.]

Исследования психологов подтверждают необходимость разработки методики, обеспечивающей активную деятельность обучаемых в процессе формирования умений. А известно, что обучение представляет собой единство взаимосвязанных и взаимодействующих процессов деятельности учителя и деятельности учащихся. Сам процесс решения задач учащимися не всегда является средством обучения их решению. Нередко главное внимание учащихся и учителей направлено только на то, чтобы как можно быстрее найти ответ на поставленный вопрос задачи. Изучение и анализ теоретических поисков и практических разработок позволяют сделать вывод о необходимости усиления внимания учащихся и учителей на начальном этапе изучения задачи и на заключительном этапе решения задачи.

С этой целью, как показали наши теоретические и практические исследования, необходимо:

1. Специально формировать умение решать задачи.

2. Разработать систему заданий, ориентированных на обучение решению задач.

3. Использовать специальные приемы работы на каждом этапе процесса решения задачи.

Этим вопросам и посвящено данное учебное пособие.

1 . ПСИХОЛОГО-ДИДАКТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ УМЕНИЙ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПРИ ОБУЧЕНИИ УЧАЩИХСЯ МАТЕМАТИКЕ

1.1 Понятие деятельности

Психологическая концепция теории обучения в деятельности реализована в исследованиях В.Н. Богословского, А.Н. Леонтьева, Н.А. Менчинской, С.Л. Рубинштейна, К.А. Славской, Н.Ф. Талызиной и др. [1, 27, 31, 34, 40, 44]. Мы будем опираться на понятия “деятельность”, “умение”, “навык”, разработанные в психолого-методической литературе. Деятельности учащихся по решению задач присущи все характеристики общей деятельности человека: цель, мотив, структура, содержание, умения и т.д. Составляющими конкретных видов деятельности являются осуществляющие их действия. Действие – это процесс, подчиненный сознательной цели [27. С. 103], это любое движение субъекта (физическое, мысленное), направленное на предмет и преследующее определенную цель [34. С. 138]. Действие является относительно самостоятельным элементом различных видов деятельности и по форме может быть внешним (практическим) или внутренним (умственным), но в содержание практической деятельности могут входить и умственные действия, точно так же в содержание теоретической деятельности – внешние действия.

В свою очередь, каждое действие включает в себя совокупность операций, выполняемых в определенном порядке и в соответствии с определенным правилом. В отличие от действий, операции отвечают не цели, а условиям, поэтому одни и те же операции могут входить в состав разных действий. Операции, как и действия, могут иметь форму как внешних, так и внутренних процессов и способны переходить из одной формы в другую. Внешняя деятельность всегда протекает под контролем внутренних действий. Ученик, решающий задачу, всегда сравнивает ход своих внешних действий с планом решения задачи, существующим в виде образов и мыслей. Происходит сравнение реального результата с желаемым, вносятся коррективы, направленные на достижение окончательной цели. Деятельность осуществляется посредством некоторой совокупности действий, выполнение которых подчинено частным целям, ведущим, в конечном счете, к общей цели.

В каждом действии можно выделить три части (компонента): ориентировочную, исполнительную и контрольную. Ориентировочная – отражение человеком совокупности объективных условий, необходимых для успешного выполнения заданного действия. Исполнительная – система операций, с помощью которых производятся изменения в объекте действия, и достигается результат. Контрольная часть действия направлена на слежение за ходом действия, на сопоставление полученного результата с заданным образом действия [44. С. 56]. Одновременно присутствие всех выделенных частей действия во всех действиях обязательно. Человек, выполняя действие, всегда на что-то ориентируется, хотя и не всегда явно осознает это.

Психологи [8; 44] различают три типа ориентировочной основы действия и, соответственно им, три типа ориентировки в задании. Ориентировочную основу первого типа составляют только образцы действия и его продукты. Учащийся выполняет задание самостоятельно, методом проб и ошибок. Действие остается неустойчивым к изменению условий, не дает переноса на новые задания. Ориентировочную основу второго типа составляют не только образцы, но и указания на правильное выполнение действия с новым материалом. Действие становится устойчивым и переносится на новые задания, хотя перенос ограничен.

Ориентировочная основа третьего типа отличается от первых двух тем, что здесь происходит планомерное обучение такому анализу новых заданий, который позволяет не только выполнить правильно задание, но и выделить опорные точки. Происходит формирование действия, которое может быть использовано при выполнении любого задания данной области [44. С. 87]. Данные психологии о типах ориентировки будем использовать в своей работе.

Решение задачи будет выполняться учеником успешно, если он владеет действиями на уровне умений и навыков. Процесс овладения учащимися навыками и умениями носит осмысленный характер, и эффективность их образования зависит от раскрытия мотива учебной деятельности, осознания целей, задач и способов осуществления тех или иных действий, а также результатов выполнения учебных заданий.

За основу для работы возьмем определение навыка как элементарной операции (или действия), который автоматизируется путем упражнений и становится компонентом более сложного действия. “Навык

– действие, характеризующееся высокой мерой усвоения; на этой ступени действие становится автоматизированным – сознательный контроль настолько свернут, что возникает иллюзия его полного отсутствия" [6. С. 15]. Экспериментальные исследования психологов подтверждают концепцию, согласно которой действия, автоматизируясь, не становятся бессознательными или менее сознательными, а лишь иначе осознаются. Действия выполняются слитно, как единое целое, и настолько легко и быстро, что кажется, выполнение идет само собой.

При обучении математике чаще всего используются умственные навыки (мысленные математические действия или операции), волевые (дисциплинированность, готовность выполнять действия), реже – двигательные (действия, связанные с перемещением частей тела в процессе использования измерительных, счетных инструментов). Некоторые математические навыки в результате системы упражнений становятся автоматическими, но при этом они всегда остаются подконтрольными сознанию, только иначе осознаются [45. С. 5]. Навыки, усвоенные при выполнении действий одного вида, могут оказать влияние на успех овладения действиями другого вида. И.Т. Огородниковым охарактеризована возможность положительного или отрицательного влияния ранее установленных умений и навыков на овладение новыми действиями и выделены этапы обучения умениям и навыкам [36. С. 215].

Одна из точек зрения: "Положительное влияние усвоенных навыков на овладение другим действием называется переносом навыков" [40. С. 46]. Перенос навыков наблюдается тогда, когда новые действия имеют много общего с уже усвоенными, если обучение основано на осознании общих способов действий. Этот факт имеет непосредственное применение при разработке методики обучения учащихся решению задач. Учащиеся при выполнении тех или иных действий опираются на свой прежний опыт, на уже приобретенные умения и навыки. Большой опыт и большое количество умений, которыми обладают учащиеся, способствуют более быстрому овладению умениями и навыками.

Для того, чтобы разобраться с существующими точками зрения в вопросе причисления навыков к действию высшего или низшего порядка по сравнению с умениями, необходимо взять за основу представление о взаимосвязи между главными компонентами познавательной деятельности, а именно:

1. ЗНАНИЯ – УМЕНИЯ – НАВЫКИ [27; 36; 40].
2. ЗНАНИЯ – НАВЫКИ – УМЕНИЯ [7; 22; 24; 34].
3. ЗНАНИЯ – УМЕНИЯ – НАВЫКИ – УМЕНИЯ [6; 27; 31; 45].

На наш взгляд, авторы третьего направления правомерно подразделяют умения по степени сложности на два вида: умение в узком (первоначальные, элементарные умения) и широком (вторичные, сложные умения) его значении. Наиболее полно эта точка зрения выражена А.А.

Степановым. “Умением, – пишет он, – называется и самый элементарный уровень выполнения действий, и мастерство человека в данном виде деятельности. Очевидно, следует различать элементарные умения, идущие вслед за знаниями, и умения, выражающие ту или иную степень мастерства в выполнении деятельности, которая следует за этапом выработки навыков. Элементарные умения – это действия, возникающие на основе знаний или в результате подражания. Умение – мастерство возникает в ходе выполнения деятельности, на основе уже отработанных навыков и знаний” [34. С. 138].

Таким образом, сначала на основе знаний возникают элементарные умения, на их основе вырабатываются (формируются) навыки и лишь затем – сложные умения (умение-мастерство). Чтобы сформировать у учащихся умение решать задачи (обобщенное умение, умение-мастерство), необходимо на основе знаний сформировать у них элементарные умения, затем – навыки, на основе которых образуется сложное действие обобщенного умения. Взаимосвязь между знаниями, умениями и навыками выражается в следующем. Навыки и умения вырабатываются на основе знаний и необходимы для дальнейшего приобретения знаний. Обогащение знаниями и навыками способствует совершенствованию умений. Кроме того, навыки являются необходимым условием быстрого выполнения действий.

В качестве рабочих определений умений возьмем: “Элементарные умения – это действия на основе знаний или в результате подражания”. “Умение – мастерство, способность учащегося выполнять какую-либо деятельность или действие на основе ранее приобретенного опыта, знаний и навыков” [34. С. 138]. Поясним этот выбор. Элементарные умения образуются и функционируют на основе приобретенных знаний при постоянстве условий, в которых происходит та или иная деятельность. Общая структура таких действий, способы их выполнения не варьируются, они остаются неизменными. Действия на уровне элементарных умений еще недостаточно отработаны, выполняются медленно. В результате последующего повторения они могут быть доведены до уровня навыка. Психолого-педагогической основой умений является понимание цели деятельности, условий и способов его выполнения. По психологическому признаку действия на стадии умения совершаются всегда при сосредоточении произвольного внимания и волевых усилий, под контролем сознания, проявляющегося в постановке цели, в обдумывании способов выполнения операций, достигаемых результатов. Физиологической основой умений человека являются системы временных связей (условные рефлексы), образовавшиеся ранее в условиях совместной деятельности двух сигнальных систем с преобладающей ролью второй сигнальной системы.

Особенность умений в широком смысле, в отличие от элементарных, состоит в том, что сложное действие обобщенного умения образуется и базируется всегда на системе ранее усвоенных знаний, простейших умений и навыков. Обобщенное умение отвечает разнообразным условиям деятельности. Структура и способы выполнения таких умений не остаются постоянными, на одном и том же уровне, они варьируются и не могут быть автоматизированы. Важно отметить, что совершенствование умений выступает как все более успешное и самостоятельное использование учащимися наиболее рациональных приемов и способов действий в постановке и решении новых задач. По психологическому признаку обобщенное умение из-за наличия в составе его общей структуры автоматизированных неизменных компонентов выполняется всегда при сосредоточении произвольного внимания, волевых усилий, под контролем сознания, что проявляется в планировании деятельности, установлении связи между условиями и средствами ее достижения, проверке правильности выполнения задания.

Умение – мастерство опирается на знания, умения и навыки, приобретенные ранее. В умении всегда проявляется взаимодействие системы навыков и их использование в разных задачных ситуациях. Умение как синтез знаний и навыков, формируясь, становится свойством личности – умелостью или мастерством человека. Формирование умения – мастерства представляет собой качественно новую ступень в культуре труда учащихся, а не простое выполнение совокупности навыков. Для обучения учащихся решению задач большое значение имеет формирование обобщенных умений и навыков, широкий их перенос. Чем выше уровень формирования умений, чем легче осуществляется перенос формируемых умений и навыков, тем отчетливее проявляется творчество в формируемой деятельности.

Поиск рациональных способов формирования умений и навыков, как указывает, например, А.В. Усова [45], может быть успешно осуществлен на основе анализа структуры действия. Следовательно, учитель при формировании того или иного умения у учащихся должен провести анализ структуры действия, определить состав и последовательность выполнения отдельных операций, из которых складывается действие в целом. На основе этого можно перейти к формированию более сложных действий, что осуществляется при обучении математике организацией выполнения специальных заданий.

1.2 Умение решать задачи

Для успешного овладения математическими знаниями, как и другими знаниями, необходимо не только понять и запомнить их, но и уметь применять и переносить их при решении различных задач, использовать знания и навыки, способы деятельности в новых жизненных ситуациях. Без преувеличения можно сказать, что формирование математических умений у учащихся – одна из главных целей обучения математике. В процессе изучения математики формируются различные математические умения. Но с какой бы точки зрения не рассматривался состав этих умений, одним из основных математических умений является умение решать задачи. Причем именно оно является одним из сложных и ведущих умений. Принято считать, что учащиеся овладели математикой, если они умеют решать задачи, поскольку успех формирования этого умения зависит от наличия активно действующих математических знаний, от опыта в применении знаний, от сформированности свойств мышления.

Исследования психологов [14; 24; 31; 34; 48] показывают, что знания не могут быть ни усвоены, ни сохранены вне деятельности обучаемого и качество усвоения знаний зависит от содержания деятельности, в состав которой они вошли. При обучении математике одной из таких деятельностей является деятельность учащихся по решению задач, причем решение задач для учащихся выступает как цель учебной деятельности. Результатом этой деятельности и является формирование у учащихся умений решать задачи. Формирование умений решать задачи при обучении математике не гарантировано ни количеством затрачиваемого учебного времени на решение задач, ни количеством решаемых учащимися задач. Возникает вопрос: какие должны быть соблюдены условия, чтобы в процессе решения задач у учащихся формировалось умение решать задачи?

Прежде всего, отметим, что стихийное формирование умений, в том числе и умений решать задачи, происходит медленно и не всегда достаточно эффективно. Отсюда следует вывод о необходимости целенаправленного, специально организованного обучения умению решать задачи. Работа по формированию умений решать задачи должна проводиться систематически на всех этапах обучения. При обучении математике она осуществляется путем выполнения специально подобранных упражнений, а также в процессе решения каждой задачи. Разрабатываемая методика обучения учащихся решению задач должна быть направлена на всестороннее развитие и формирование умений, в совокупности образующих умение решать задачи. При этом, как показывают наши исследования и опыт работы школ, выполняемая деятельность по решению задач должна стать специальным предметом усвоения.

Вопросы обучения учащихся решению задач, формирования у них умений решать задачи ставились и ставятся постоянно в исследованиях психологов, дидактов, методистов [6; 7; 18; 19; 20; 31; 38; 45; 47]. Сложное умение решать задачи авторами представляется в виде частных умений по-разному. Нами проанализированы эти умения решать задачи и соотнесены с практикой решения задач при обучении математике. Кроме того, составляющие умения решать задачи рассмотрены нами в соответствии со структурой задачи и процессом ее решения. Все это позволило нам выявить основные умения решать задачи, которые необходимо формировать у учащихся при обучении математике:

I УМЕНИЕ АНАЛИЗИРОВАТЬ ТЕКСТ ЗАДАЧИ:

1) внимательно читать задачу;

2) проводить первичный анализ текста задачи: выделять вопрос и условие;

3) оформлять краткую запись текста задачи;

4) выполнять чертежи, рисунки по тексту задачи.

II УМЕНИЕ ПРОВОДИТЬ ПОИСК СПОСОБА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1) проводить вторичный (более детальный) анализ текста задачи: выделять данные и искомые, устанавливать связи между данными и искомыми, между данными, между искомыми;

2) переводить словесный текст задачи на математический язык;

3) устанавливать полноту постановки задачи;

4) актуализировать теоретические знания, необходимые для решения задачи;

5) осуществлять поиск и находить план решения задачи.

III УМЕНИЕ ОФОРМЛЯТЬ НАЙДЕННЫЙ СПОСОБ ЕЕ РЕШЕНИЯ:

1) записывать найденный способ решения;

2) записывать результат решения задачи.

IV УМЕНИЕ ИЗУЧАТЬ НАЙДЕННОЕ РЕШЕНИЕ:

1) осуществлять контроль решения задачи;

2) давать оценку результатам решения задачи;

3) заканчивать работу над задачей: уяснять способ решения, получать выводы по задаче и решению и т.п.;

4) составлять новые задачи.

Для задач школьного курса математики будем считать перечисленные умения общими, хотя для отдельных типов задач могут быть рассмотрены еще и некоторые специфичные умения. Конечно, при обучении учащихся решению задач реализуются составляющие общего умения решать задачи в различных сочетаниях. Будем рассматривать процесс решения каждой задачи и всей системы задач как средство формирования у учащихся умений решать задачи при обучении математике.

2. ПРОЦЕССЫ РЕШЕНИЯ И СОСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

2.1 Роль задач в обучении математике

С целью исследования проблемы совершенствования методики обучения учащихся решению задач мы обратились к анализу состояния обучения учащихся решению задач. Мы наблюдали за работой учителей школ; анализировали тетради учащихся, выполненные ими самостоятельные и контрольные работы; проводили и анализировали анкеты для учащихся, студентов и учителей математики. При этом ставились вопросы, выясняющие:

- уровень знаний о процессе решения задачи, о ее структуре;
- содержание и структуру системы задач, предлагаемых учащимся;
- приемы обучения учащихся решению задач и т.п.

Анализ протоколов посещенных уроков свидетельствует о том, что наиболее часто учителями математики и учащимися используются следующие приемы:

оформление краткой записи задачи в виде схемы; оформление чертежей, рисунков при решении задач; поиск способа решения задачи по образцу; решение задач составлением уравнения.

При решении задач учащиеся чаще всего освобождаются от одного из важнейших составных элементов процесса решения задач – этапа поиска способа решения задачи, этапа актуализации знаний, необходимых для решения задачи, этапа завершающей работы над задачей. Кроме того, структуры задач, предлагаемых учащимися, как правило, однообразны и требуют от учащихся лишь действий по образцу. Анализ методики обучения учащихся решению задач и практики работы школы, привел нас к необходимости рассмотреть основные вопросы теории задач, процессов их решения и составления в обучении математике.

Известно, что задачи играют большую роль в обучении, особенно математике, поскольку именно задачи, процессы их решения используются для глубокого усвоения теоретического материала и выработки основных умений и навыков. Остановимся на характеристике основных понятий: задача, структура задачи, классификация задач, функции задач. Детальный анализ попыток определения понятия “задача” имеется в работах Ю.М. Колягина, Л.М. Фридмана [22; 47]. Ими указано на отсутствие единого определения задачи ввиду емкости и многогранности этого понятия, а также исследований с различных точек зрения: математической, логической, психологической, кибернетической. Некоторые авторы рассматривают задачу как систему, не требующую для своей характеристики субъекта действия (А.В. Брушлинский, В.И. Крупич, А.М. Матюшкин, Л.М. Фридман) Например, Л.М. Фридман рассматривает задачу как объект специального изучения, как знаковую модель проблемных ситуаций [47. С. 15].

Рассмотрим вопрос о функциях задач в обучении математике. Задача обладает разнообразными функциями, которые в тот или иной момент проявляются явно или скрытно. В зависимости от конкретных условий того или иного этапа обучения, на котором ставится данная задача, можно говорить о ведущей функции. Вообще, в обучении математике принято выделять три основные функции: познавательную, развивающую и дидактическую. Все задачи школьных учебников подчиняются предложенной классификации. Задачи с дидактическими функциями, которых большинство в школьном курсе, предлагаются в основном для закрепления теоретических положений. Они имеют наиболее важное значение при формировании абстрактных понятий, для раскрытия существенных связей между различными понятиями.

Задачи с познавательными функциями ориентированы на усвоение основного содержания школьного курса математики. В процессе их решения учащиеся углубляют отдельные обязательные для усвоения всеми учащимися вопросы, знакомятся с новыми методами решения задач. Эти задачи являются объектом изучения, поэтому они должны быть прочно усвоены всеми учащимися, умение решать такие задачи должно быть доведено до “прочного навыка”. Для этого требуется целая система хорошо продуманных по содержанию, простых по форме задач. Их решение должно быть непосредственным следствием изучаемых теоретических положений. Все это так, но последнее замечание с таким же основанием можно отнести и к задачам с дидактическими функциями.

Если же задача такова, что при ее решении применяются искусственные приемы, не рассматриваемые специально программой, то ее относят к задачам с развивающими функциями, которые каждый ученик должен решать в меру своих способностей. Эти задачи должны иметь посильные для учащихся трудности и предлагаться в процессе всего обучения, а не от случая к случаю. Такое деление задач по их функциям условно, так как каждая задача несет в себе все функции. Другое дело – та или иная функция в данных конкретных условиях представлена задачей в качестве ведущей.

Ю.М. Колягин предлагает говорить о функциях задач в зависимости от того, какой вид деятельности учащихся проявляется в процессе их решения, или в зависимости от того, какая конкретная цель обучения, воспитания или развития реализуется при постановке той или иной задачи в конкретных условиях. Он указывает, что в практическом плане не так важны подразделения задач по их функциям, как установление локальных учебных функций каждой задачи в процессе обучения и четкая реализация этих целей.

Задача должна решаться не ради ответа и хорошей оценки за его правильность, хотя для учащихся это немаловажно. Он пишет: “Для школьника решить данную задачу – не главная цель (как у производственника): главное – научиться чему-то связанному с изучением математики, узнать и усвоить новые математические факты, овладеть новыми математическими методами, накопить определенный опыт, научиться мыслить” [23. С. 9]. Это как бы продолжение утверждения Д. Пойа: “Главная цель обучения – научить молодежь думать”[37. С. 152].

2.2 Структура задачи

Большинство исследователей включают субъекта в само понятие задачи (Г.А. Балл, М.А. Данилов, Ю.М. Колягин, А.Н. Леонтьев, Д. Пойа, К.А. Славская и др.). Они рассматривают задачу как ситуацию, в которой должен действовать субъект. При таком подходе невозможно изучение задачи независимо от рассмотрения деятельности субъекта. Фактически здесь определяются и изучаются процессы решения задач, а не сами задачи. Например, Д. Пойа отождествляет понятия “задача” и “проблемная ситуация”: “субъект не может непосредственно воздействовать на объект для достижения поставленной цели” [37. С. 25]. Такая характеристика Д. Пойа индивидуализирует понятие “задача”: одно и то же задание может оказаться задачей для одного субъекта и незадачей для другого. С помощью данного определения нельзя объективно отличить задачу от незадачи.

Г.А. Балл рассматривает задачу только как психологическое понятие, которое характеризует требование к деятельности субъекта и условия ее протекания [5. С. 79]. А.Н. Леонтьев, систематизируя аналогичные определения, дает краткое и четкое определение понятия задачи как “цели, данной в определенных условиях” [27. С. 232]. Ю.М. Колягин, давая характеристику понятия “задача”, рассматривает сложную систему S – R – человек – задачная система, где под последней понимается некоторый объект, также представляющий систему. И далее – “при наличии каким бы то ни было образом выраженных потребности и возможности в установлении неизвестных данному человеку элементов; свойств и отношений из множества R, проблемный характер которого зафиксирован, последнее становится задачей для данного субъекта”. [22. С. 49].

Рассмотрение двух подходов к определению понятия задачи позволяет нам придерживаться той точки зрения, при которой понятие “задача” не зависит от субъекта, так как мы хотим исследовать роль задач в обучении учащихся математике. Термином “задача” мы будем пользоваться в широком смысле этого слова. Для определенности будем придерживаться понятия задачи, описанного А.М. Матюшкиным: “Задача – способ знакового предъявления задания одним человеком другому (или самому себе), включающий указания на цель и условия выполнения” [30. С. 189].

Для анализа задачи многие исследователи (Ю.М. Колягин, В.И. Крупич, Е.И. Лященко, Ф.Ф. Нагибин, Л.М. Фридман и др.) применяют системно-структурный подход, так как “задача” относится к категории целостных образований, состоящих из взаимосвязанных элементов. Будем рассматривать задачу как систему, а “под системой понимается непустое множество элементов (объектов), на котором реализовано заранее данное отношение R с фиксированными свойствами P” [46. С. 19].

В любой рассматриваемой задаче можно выделить ее элементы как элементы сложной системы, связи (отношения) между элементами задачи как системообразующие связи. Будем рассматривать задачи со всеми внутренними и внешними связями и их свойствами, которые обеспечивают целостность задачи, ее устойчивость, организацию. Все элементы задачи подчинены одной цели – вопросу задачи. Задача как система обладает свойствами, которые не присущи в отдельности ни одному из ее элементов. Задача характеризуется сложностью, зависящей от ее структуры в целом. Изменения, которые претерпевает задача в процессе ее решения, вызывают взаимодействие внешних и внутренних факторов. Характер изменений, преобразований задачи определяется взаимодействием ее элементов и связей между ними, что связано с трудностью задачи. Трудность задачи – субъективная характеристика, отражающая деятельность решающего задачу. Отличая трудность задачи от ее сложности, мы будем рассматривать сложность задачи как объективную характеристику, а задачу как единое целое и в то же время выделять ее структурные элементы.

Задача как система имеет свою структуру, которая определяется через ее элементы и связи между ними. Особенность каждой задачи проявляется в ее структуре: чем сложнее структура, тем сложнее и деятельность по ее решению. Рассмотрим некоторые подходы к пониманию структуры задачи.

Л.М. Фридман рассматривает структуру задачи как “инвариантный аспект задачи, то есть то, что остается неизменным при любых преобразованиях задачи, не затрагивающих ее основного содержания” [47. С. 22]. Для установления структуры задачи Л.М. Фридман предлагает сначала выявить все основные ее элементы и отношения между ними, отбросить все лишнее и второстепенное, не влияющее на структуру задачи. Затем построить высказывательную модель задачи (как систему высказываний, высказывательных форм и требований).

А.М. Сохор говорит, что “под структурой задачи следует понимать характер внутренних отношений (связей, зависимостей) между данными и искомыми величинами”, и предлагает для изучения структуры задачи рассматривать не ее условие как таковое, а ее решение [43. С. 132].

В.И. Крупич рассматривает структуру задачи на основе процесса поиска ее решения и строго разграничивает структуру задачи и структуру процесса ее решения. Для текстовых задач выделяется одна или несколько ситуаций (событий, случаев). Каждая ситуация формируется тем или иным отношением. Текстом задачи всегда определено основное отношение между данными и искомыми величинами, о которых говорится в задаче [18. С. 13]. Структура задачи определяет стратегию способа ее решения. Психологические исследования подтверждают, что именно решением задачи определяется ее структура. Таким образом, структура задачи и структура ее решения взаимосвязаны.

В своих исследованиях Ю.М. Колягин нигде явно не говорит о структуре задачи как таковой, но структурная форма ACRB может служить в качестве структуры задачи. Действительно, в любой задаче автор выделяет основные компоненты А, В, R, С, отражающие определенное состояние системы P_x в системе (S, P), где S – субъект, P – множество, образующее абстрактную (конкретную) систему. А – начальное состояние – характеристика проблемности системы (фактически это условие задачи: данные элементы и связи между ними), В – конечное состояние – характеристика стационарности системы P (это заключение или цель задачи – искомые элементы и связи между ними).

Решение задачи R – преобразование системы P_x в систему P – один из возможных способов перехода от начального состояния ситуации к конечному. Базис решения задачи – С – множество факторов, определяющих некоторое решение R, то есть теоретическая или практическая основа для преобразования P_x в R посредством данного решения (обоснование решения) [22. С. 51]. Такой подход к пониманию структуры задачи как системы наиболее приемлем для нас, так как это позволяет рассмотреть систему задач, разнообразных по своей структуре и ориентированных на формирование у учащихся умений решать задачи. Итак, задача как система имеет структуру, последняя определяется сложностью задачи. Структуру каждой задачи будем различать по основным компонентам условия, базиса, решения, заключения – вопроса задачи.

Далее остановимся кратко на классификации задач. Существование различных классификаций учебных задач объясняется тем, что все зависит от основания, по которому проводится классификация. Попытки создать классификацию в виде единого дерева, охватывающего все виды задач, неудачны. В методической литературе известны разные подходы к классификации учебных математических задач. Наиболее известное, традиционное деление всех математических задач по характеру их требования: задачи на нахождение искомого, на доказательство или объяснение, на преобразование или построение. Широкое распространение до последней реформы математического образования получила так называемая классификация школьных математических задач по определенным типам (И.И. Александров, И.В. Арнольд, В.М. Брадис и др.). Цель обучения решению задач при таком подходе сводилась к выделению определенных типов задач и разучиванию с учащимися определенных способов решения задач этих типов. В практике школы данная классификация учебных математических задач не прижилась, поскольку все большее распространение получила другая точка зрения обучать учащихся общим методам решения различных задач. Приведем примеры классификации задач, раскрывающих тот или иной аспект понятия задачи.

Л.М. Фридман, используя обобщенную высказывательную модель задачи, для вида задач указал ее структурную модель. На основе семантического анализа и моделирования он проводит, например, структурную классификацию сюжетных задач – одного из подвидов задач на разыскание искомого. Граф сюжетной задачи выступает в качестве модели ее структуры, то есть структура сюжетной задачи – это соответствующий ей трехчленный граф. Исчисление трехчленных графов позволяет рассмотреть все виды структур сюжетных задач. Выводы, полученные автором при исследовании сюжетных задач с помощью трехчленных графов, ценны, хотя неясно, можно ли как-то использовать их для разработки структур других видов задач [47].

В своих исследованиях В.И. Крупичем за основание классификации текстовых задач по их структурам принято количество входящих в них ситуаций и связей, показано, что такая классификация адекватна задаче, связанной с разбиением натурального числа на части: $n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k$, где a_i – число единиц в каждой части. На этой основе выполнена систематизация текстовых задач по их структурам, результаты которой представлены в виде таблицы, причем сложность задачи определяется количеством элементов и связей, содержащихся в ней [18. С. 20]. Из анализа таблицы следует, что задачи школьного курса “попадают” в небольшое количество клеток таблицы, что свидетельствует о неполноте системы школьных математических задач.

А.М. Сохор классифицирует задачи на основе числа замкнутых контуров графа поиска решения; средней степени структурной формулы [43. С. 132]. Е.И. Лященко добавляет еще два критерия сложности задачи: взаимосвязь контуров и количество замкнутых контуров, имеющих начало в одной вершине [28. С. 13]. Используя эти критерии, Е.И. Лященко провела сравнительный анализ сложности наборов задач в существующих задачниках и современных учебниках по математике.

Наконец, более подробно остановимся на классификации задач, предложенной Ю.М. Колягиным. Исходя из характеристики проблемности ситуации (задачи) по ее основным компонентам A, B, R, C, им предложена типология задач в зависимости от числа компонентов, являющихся неизвестными и придающими ситуации проблемный характер, а именно:

I-й тип – неизвестен один компонент:

а) XCRB; б) AXRB; в) ACXB; г) ACRB.

II-й тип – неизвестны два компонента:

а) AXУB; б) XCRУ; в) XУRB; г) ACXУ; д) AXRУ; е) XCУB.

III-й тип – неизвестны три компонента:

а) XУZB; б) AXУZ; в) XCУZ; г) XУRZ.

Первая группа задач названа обучающими, вторая – поисковыми, третья – проблемными. Сама по себе данная типология, может быть, и не представляет большого интереса для ее практического использования, но если эту типологию задач применить при исследовании роли и места задач в обучении математике, то могут быть получены интересные результаты. При построении системы заданий, ориентированных на формирование у учащихся умений решать задачи при обучении математике, мы воспользуемся данной типологией задач, рассмотрев ее в зависимости от качества задания выделенных компонентов.

Психологи рассматривают задачу всегда в определенном отношении к человеку и различают условия и требования задачи. “Условия – это то, что дано, ради чего надо исходить при попытках решения. Требуемое положение, которое нужно вывести, или положение, которое дано в готовом виде, но его нужно доказать, к нему нужно прийти”. Более полное определение одной из составных частей задачи – условия – дано С.Л. Рубинштейном: “Под условиями задачи в собственном смысле слова подразумеваются те данные, которые обуславливают решение и включаются в качестве необходимых посылок в ход рассуждения, ведущего к решению” [40. С. 85]. Согласно А.В. Брушлинскому [7. С. 122], “в требовании задачи указаны, иногда прямо даны определенные положения, исходные для выделения и характеристики искомого. Но искомое потому и является таковым, что оно не дано (а только задано условиями и требованием задачи)”.

При существующем разнообразии задач по содержанию и по форме, как ни кажется парадоксальным, в них можно выделить общие черты, инварианты задач. Остановимся на некоторых подходах к этому вопросу. Л.М. Фридман различает в задаче такие составные части: 1) предметную область задачи (класс фиксированных – названных, обозначенных объектов (предметов), о которых идет речь в задаче); 2) отношения, которые связывают объекты предметной области; 3) требование задачи – это указание о цели задачи – то, что необходимо установить в результате решения задачи; 4) оператор задачи (совокупность тех действий, операций, которые надо произвести над условиями задачи, чтобы выполнить требование) [47. С. 21]. Первые две части автор называет условиями задачи.

По Ф.Ф. Нагибину, каждая задача содержит: входную информацию (то, что дано в задаче: данные задачи, характер искомых, связи и зависимости между данными и искомыми); указание на то, какого характера должна быть выходная информация (на какие вопросы должны быть найдены ответы); перечисление средств, которыми можно пользоваться для переработки информации [20. С. 39]. П.М. Эрдниев выделяет в задаче сюжет, числовые данные, математические зависимости и действия, посредством которых решается задача [52. С. 29]. Мы будет говорить о сюжетном и математическом содержании задачи, а в тексте любой задачи будем выделять условие и вопрос, различать требование и искомое задачи. Анализ состава задачи может быть представлен структурной схемой.

2.3 Этапы решения задачи

Термином “решение задачи” в методике преподавания математики часто обозначают два понятия: сам процесс и его результат. Конечно, в каждом конкретном случае более или менее ясно, в каком смысле применяется термин “решение задачи”. Мы будем строго различать процесс решения задачи (деятельность человека по решению задачи), план (способ, метод) решения задачи (способ преобразования проблемной системы в стационарную), решение задачи (результат выполнения плана решения).

Процесс решения задачи может быть рассмотрен с разных точек зрения и с разной целью, но для методики преподавания математики желательно исследовать его с таких сторон:

– как начинать этот процесс, как его вести, как поддерживать; где заканчивать?;

– как помогать учащимся во время решения задачи?;

– сколько и каких задач предлагать учащимся?

Согласно Д. Пойа, процесс решения задачи распадается на четыре больших этапа: 1. Понимание постановки задачи. 2. Составление плана решения задачи. 3. Осуществление плана. 4. Взгляд назад [37. С. 203].

М.А. Данилов отмечает пять этапов: 1. Осознание условия, ее главного вопроса, зависимостей между величинами. 2. Отбор теорем, правил, на основании которых решается задача, и план ее решения. 3. Выполнение требований задачи, построение, вычисление. 4. Анализ способа выполнения и доказательства его правильности. 5. Проверка полученных результатов путем сопоставления их с условием [16. С. 61].

И.Я. Лернер считает целесообразным производить такое разбиение процесса решения задачи: сознание проблемы; расчленение задачи на данное и искомое; выявление зависимости между данными и вопросом; осуществление плана решения; проверка решения [16. С. 49].

Е.Ф. Данилова в своих исследованиях выделяет следующие этапы процесса решения задачи: ясное понимание сущности задачи; составление плана перехода от данных к искомым; выполнение намеченного плана; доказательство; исследование; проверка [33. С.176].

Е.С. Канин, Ф.Ф. Нагибин предлагают такие этапы процесса решения задачи:

1. При стремлении решать задачу и сосредоточенном внимании необходимо понять задачу (увидеть, какие в ней данные и искомые;
2. Выделяя область поисков и предвидя решение, составить план решения задачи (усмотреть связи данных, данных и искомых, связи всех элементов задачи и наметить порядок выполнения необходимых операций для решения задачи);
3. Мобилизуя и организуя необходимые сведения, используя в задаче входную информацию и память, хранящую сведения, необходимые для решения задачи;
4. Поскольку человеку свойственно ошибаться, есть необходимость проанализировать решение, проверить правильность решения [20. С. 37].

Л.М. Фридман, исходя из анализа деятельности по решению задачи, разбивает процесс решения задачи на восемь этапов:

1. Анализ задачи;
2. Схематическая запись задачи;
3. Поиск способа решения задачи;
4. Осуществление решения задачи;
5. Проверка решения задачи;
6. Исследование задачи;
7. Формирование ответа задачи;
8. Анализ решения задачи [47. С. 29].

Некоторые исследователи, например Ю.М. Колягин, предлагают условно выделять внешнюю и внутреннюю структуры процесса решения задачи. Внешняя структура процесса решения задачи – это совокупность операционных факторов: последовательности в осуществлении решения задачи, расчленения процесса решения задачи на определенные рабочие этапы. Внутренняя структура представлена мыслительными операциями, которые обеспечивают восприятие и переработку условия задачи, внутренний механизм поиска и планирования решения задачи. Внешняя структура процесса решения задачи выражается в поведении решающего, а внутренняя – в открытой умственной деятельности решающего. Формирование внутренней структуры процесса решения задачи является управляемым: например, посредством некоторой последовательности эвристик. Существуют реальные возможности обучения учащихся решению задач вообще, а не разучивание решений типовых задач.

Ю.М. Колягин пишет: “Решение каждой математической задачи осуществляется, вообще говоря, по четырем основным этапам: понимание условия и требования задачи; ясное усвоение и осмысливание отдельных элементов условия; составление плана решения; практическая реализация плана во всех его деталях; окончательное рассмотрение задачи и ее решения с целью усвоения тех моментов, которые могут стать полезными для дальнейшего решения задач”[22. С. 68].

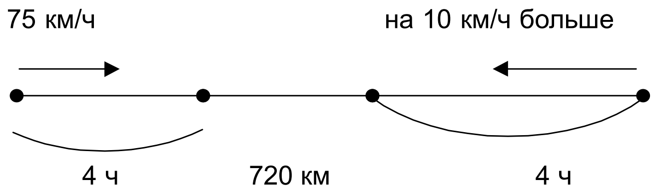
Эта точка зрения поддерживается психологами: например, Н.А. Менчинская выделяет следующие этапы процесса решения текстовых арифметических задач: осознание задачи как проблемы, способы решения которой еще не известны; расчленение рассматриваемых математических задач на искомое и данные; выявление зависимости между искомыми и данными, часто сопровождаемые выдвижением гипотезы и ее частичной проверкой; осуществление решения; проверка решения задачи [31. С. 34].

Приведенный перечень представлений дидактов, психологов, методистов о том, что такое процесс решения задачи, свидетельствует об отсутствии особых противоречий в толковании его этапов. На основе анализа содержания понятия “процесс решения задачи” сохраним традиционно установившиеся четыре этапа:

1. Изучение и проведение анализа текста задачи.
2. Проведение поиска способа ее решения.
3. Оформление найденного способа решения задачи.
4. Изучение найденного решения задачи.

Выделенные этапы процесса решения задачи служат той ориентировочной основой, опираясь на которую, учитель управляет учебной деятельностью учащихся по формированию умений решать задачи. Каждый этап процесса решения задачи имеет свои ориентиры, которые постепенно сообщаются учителем и формируются у учащихся в процессе обучения математике.

На первом этапе процесса решения задачи происходит осознание условия и вопроса задачи, анализ ее состава. Например, учащимся предложена задача: “С двух станций, расстояние между которыми 720 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Скорость первого – 75 км/ч, а второго на 10 км/ч больше скорости первого. На каком расстоянии друг от друга будут поезда через 4 ч?”. Учитель ориентирует учащихся на выделение условия и вопроса, обращается к ним с просьбой прочитать вопрос задачи, затем ее условие. Постепенно учащиеся самостоятельно выделяют условие и вопрос задачи, что является шагом к проведению более детального анализа текста задачи. Здесь же учащиеся выполняют краткую запись, чертеж задачи. При решении рассматриваемой задачи учащиеся предлагают выполнить ее чертеж:



Выполняя чертеж, учащиеся выделяют искомое (расстояние между поездами), данные (720 км, 75 км/ч, 10 км/ч, 4 ч), связи между данными (поезда движутся навстречу друг другу, скорость второго поезда на 10 км/ч больше скорости первого поезда). Фактически это уже переход ко второму этапу процесса решения задачи. С целью актуализации знаний, необходимых для решения задачи, учитель ставит вопросы: “Как найти расстояние, зная скорость и время?”. “Как найти скорость сближения поездов?”. Перевод текста задачи на математический язык в результате проведенной работы почти завершен. Вся деятельность учащихся по решению задачи нацелена на отыскание идеи решения. С.Л. Рубинштейн указывал, что в процессе мышления над объектом субъект, а значит и в процессе решения задачи ученик переформулирует многократную задачу, поворачивает ее разными сторонами, находит все новое и новое содержание [40. С. 47].

Анализ задачи проводится до тех пор, пока не возникает какая-нибудь идея решения. Если идея решения задачи в процессе анализа возникает быстро, то анализ длится недолго, проходит свертывание процесса анализа. Найдя идею будущего решения, учащиеся применяют ее к конкретным условиям данной задачи. Идея решения была высказана учащимися и реализована: найти путь, пройденный обоими поездами за 4 ч, затем найти искомое расстояние.

Этот второй этап – этап поиска способа решения задачи является наиболее сложным. Существует не одно исследование, посвященное вопросам поиска идеи решения задачи. И для некоторых конкретных групп задач существуют системы рекомендаций, эвристик, алгоритмических предписаний, позволяющих ускорить процесс поиска идеи решения. Например, К.А. Славская процесс поиска способа решения описывает следующим образом. Для решения задачи необходимо выбрать какой-нибудь метод (принцип). Этот метод может выражаться в виде алгоритма или эвристического приема. Для того, чтобы привлечь метод или эвристический прием для решения задачи, необходимо провести два вида переформулирований: а) надо переформулировать само условие так, чтобы появилась возможность применения этого метода для решения задачи, б) необходимо в этом методе выявить такие моменты, так его конкретизировать, чтобы увидеть возможности применения [1. С. 190].

На третьем этапе происходит практическая реализация и оформление записи найденного способа решения задачи. А именно:

1) 75 + 10 = 85 (км/ч) – скорость второго поезда;

2) 75 + 85 = 160 (км/ч) – скорость сближения;

3) 160 · 4 = 640 (км) – расстояние, на которое сблизились поезда;

4) 720 – 640 = 80 (км) – расстояние между поездами.

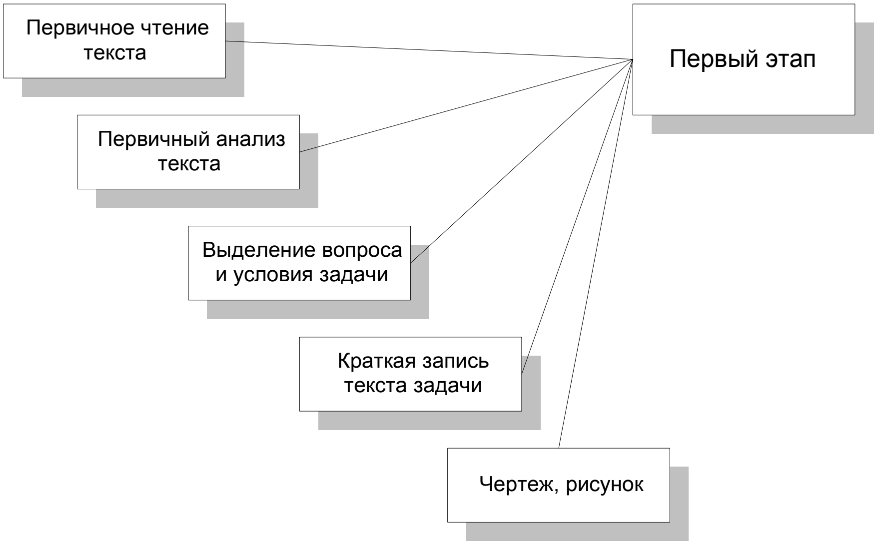
Отметим, что некоторые учащиеся оформили найденное решение, записав лишь действия. Ответ задачи: расстояние между поездами – 80 км.

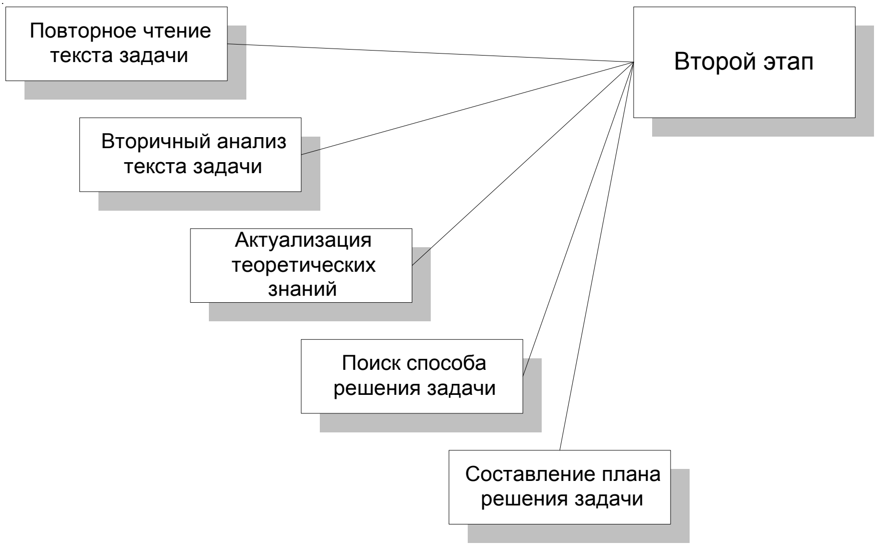
Очень часто процесс решения задачи на этом заканчивается, так как решение в собственном смысле этого слова завершено, но работу над задачей нельзя считать завершенной: необходимо провести проверку правильности полученного результата и анализ решения. Учитель, ориентируя учащихся на изучение найденного решения задачи, реализует четвертый этап процесса решения задачи. Например, предлагает составить задачу, обратную данной, с вопросом: “Каково расстояние между станциями?”. Учащиеся составили такие обратные задачи:

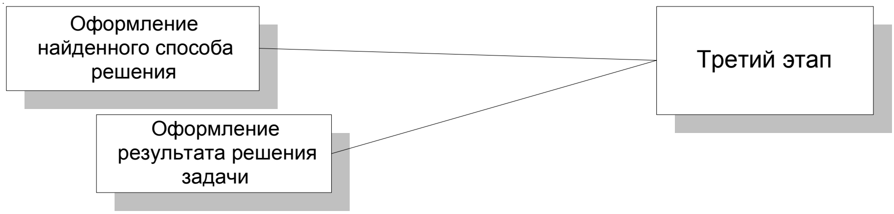
- С двух станций вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Скорость первого поезда – 75 км/ч, а скорость второго – на 10 км/ч больше скорости первого. Через 4 ч расстояние между ними стало 80 км. Каково расстояние между станциями?

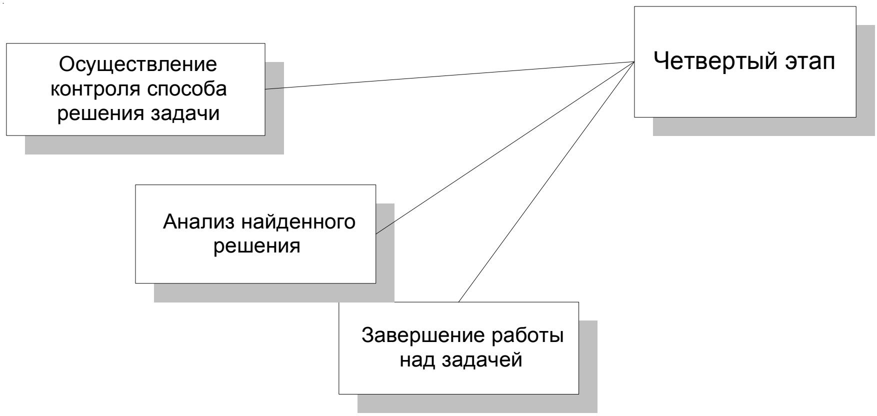
- С двух станций вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Скорость одного из них – 75 км/ч, скорость второго – 85 км/ч. Через 4 ч расстояние между ними стало 80 км. Каково расстояние между станциями?

Организация последнего этапа процесса решения задачи может быть проведена путем постановки вопросов типа: “В чем состоит идея решения?”, “Как решалась задача?”, “Как решить аналогичную задачу?”. При ответах на эти вопросы учащиеся повторяют способ решения задачи, в лучшем случае – воспроизводят план решения задачи. Заключительный этап имеет важное значение для расширения и углубления знаний, усвоения понятий, для выработки навыков контроля, а самое главное для обучения решению задач. Итак, процесс решения задачи может быть представлен схематически следующим образом.


Первичное чтение текста
Первый этап
Первичный анализ текста
Выделение вопроса и условия задачи
Краткая запись текста задачи
Чертеж, рисунок


Повторное чтение текста задачи
Второй этап
Вторичный анализ текста задачи
Актуализация теоретических знаний
Поиск способа решения задачи
Составление плана решения задачи





Будем считать приведенный перечень содержания процесса решения задачи за норму этой деятельности. Процесс решения задачи – это процесс взаимосвязи субъекта с задачей, целенаправленная мыслительная или практическая деятельность человека, осуществляющего ее решение; деятельность учащихся и учителя по анализу, синтезу, оформлению способа решения, изучению результатов решения задачи. В процессе решения задачи следует различать внешнее проявление мыслительных процессов в виде операций и действий, а также умственную деятельность решающего, которая осуществляется в специальных формах: анализе, синтезе, сравнении, обобщении.

Как показывают наши исследования, процесс решения задач не всегда в должной мере используется как средство обучения учащихся их решению. Объясним этот парадокс. На первый взгляд кажется, что само собой разумеется, – в процессе решения задач учащиеся и так обучаются решению задач. Это не совсем так. Анализ анкет учащихся и личных бесед с ними подтверждает: нередко для учащихся при решении задачи главным становится лишь получение ответа или хорошей оценки учителя. Поэтому процесс решения задачи, как и любая деятельность, должен быть определенным образом организован. С точки зрения деятельностного подхода процессу решения задач необходимо специально учить учащихся. Поэтому мы считаем, что сам процесс решения задач может стать хорошим средством обучения лишь при определенных условиях.

При организации деятельности учащихся по изучению и проведению анализа текста задачи учитель путем соответствующих приемов может формировать у них умение проводить первичный анализ текста задачи, оформлять краткую запись и чертеж задачи. Учащиеся сами (а на первых порах – с помощью учителя) ищут ориентиры, помогающие перейти к проведению второго этапа процесса решения задачи: это внимательное чтение текста задачи, выделение вопроса и условия, выполнение чертежей, рисунков и оформление краткой записи. Аналогичным образом происходит обучение решению задач (по третьему типу ориентировки [44. С. 56]) на других этапах процесса решения задач. Большие возможности по обучению учащихся решению задач имеются на четвертом этапе процесса решения задачи: учащиеся приучаются осуществлять контроль за способом решения, давать оценку результатам решения, получать выводы по решению и т.д.

Изучение процессов решения задач позволяет сделать вывод, что наиболее благоприятные условия для формирования умений решать задачи создаются на этапах закрепления и повторения учебного материала, поскольку именно здесь имеются возможности, наряду с усвоением учащимися учебного материала, формировать у них умения решать задачи. Например, учащимся предложено решить задачу при закреплении темы “Сложение дробей с одинаковыми знаменателями”.

Задача: “Для посадки леса выделили участок, площадь которого равна 300 га. Дуб высадили на 7/10 участка, а сосну – на 4/10 участка. Сколько гектаров участка занято дубом и сосной?”. Учащиеся выделяют вопрос задачи: “Сколько гектаров участка занято дубом и сосной?” и приходят к необходимости найти общую площадь, занимаемую дубом и сосной (то есть искомое выделено), оформляют краткую запись:

$$\left.\begin{array}{lcl} \textit{участок} & - & 300\ \textit{га} \\ \textit{дуб} & - & 7/10\ \textit{участка} \\ \textit{сосна} & - & 4/10\ \textit{участка} \end{array}\right\} \quad ?$$

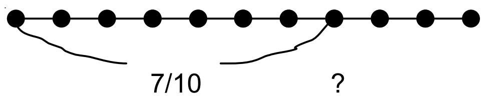
Поскольку эта задача решается сразу после изучения рассматриваемой темы, когда учащиеся не раз уже вспоминали правила нахождения числа по его дроби и сложения дробей с одинаковыми знаменателями, то знания, необходимые для ее решения, актуализируются без особых затруднений. Идея решения возникает быстро, и учащиеся записывают найденный способ решения:

1) $\frac{7}{10}+\frac{4}{10}=\frac{11}{10}$;

2) 300 : 10 · 11 = 330 (га).

Ответ: дубом и сосной занято 330 га.

В тех классах, где учащиеся приучены к проведению контроля и оценке результата решения, сразу обнаружили, что такой ответ не может быть. Стали искать ошибку: проверяли способ решения задачи, вычисления. Один из учащихся высказал предположение: “Может быть, задача записана неправильно?”. Учитель предложил построить чертеж по тексту задачи:



Нашлись учащиеся, которые предположили, что на 30 га посеяли и дуб, и сосну. Как видно, при решении этой задачи учитель наряду с формированием других умений специально формирует у учащихся умения по осуществлению контроля за способом решения задачи. Таким образом, рассмотрение задачи как средства формирования умений обязывает учителя использовать такие задачи, которые бы содержали в себе не только мотивацию деятельности по ее решению, но и возможность для организации этой деятельности.

2.4 Составление задач

При поиске эффективной методики решения задач возникает вопрос о самостоятельном составлении задач учащимися как средстве обучения их решению. Остановимся на некоторых положениях о составлении задач.

Существует ряд специальных исследований, посвященных составлению задач учащимися: Э.А. Страчевского, Е.Н. Тальяновой, Э.А. Ясинового и др. На полезность применения таких упражнений в практике работы школ указывали еще методисты конца XIX и начала XX веков (В.К. Белюстин, Е.Я. Голант, Ф.И. Егоров, В.А. Евтушевский). Дальнейшее развитие идеи о составлении задач учащимися получили в работах отечественных методистов и психологов (Б.П. Богоявленского, З.И. Калмыковой, М.И. Моро, А.С. Пчелко, Л.Н. Скаткина, П.М.Эрдниева и др.).

Составление задач учащимися высоко оценивается методистами, психологами, учителями потому, что оно является:

– важным средством глубокого овладения теорией, усвоения математических знаний;

– важным средством развития мышления, средством активизации мыслительной деятельности учащихся, подводящей к умственному развитию;

– средством развития интереса;

– средством, позволяющим облегчить решение задач;

– средством связи с окружающей действительностью;

– средством развития речи учащихся.

На вопрос о месте составления задач в общем процессе обучения учащихся решению задач нет определенного и научно обоснованного ответа, а на практике этот вопрос решается по-разному. Одни методисты и учителя (их большинство) используют составление задач после того, как решалась готовая задача аналогичного вида, другие придерживаются противоположного мнения. Например, польский методист Л. Еленьска отмечает, что для успешного овладения арифметикой через задачи необходимо сначала составлять задачи: “Узел следует завязать, а затем развязывать”, но другие (например, Н.Ф. Менчинская) возражают: в жизни очень часто необходимо “развязать узел”, не зная, как он был завязан [31. С. 93].

Большинство исследователей считают, что решение любой задачи учащиеся могут получить через ее составление. Как утверждает Д. Пойа, “приняв активное участие в постановке задачи, ученик гораздо активнее будет решать ее” [37. С. 202]. П.М. Эрдниев предлагает такой метод введения нового вида задач, когда учитель вместе с учащимися составляет задачу, а затем они вместе ее решают. Понимание процесса составления задачи облегчает и ее решение [52. С. 14]. Совершенно справедливо отмечается психологами, что учащиеся в составляемой задаче отражают усвоенную ими математическую структуру, поэтому ее решение затруднений обычно не вызывает. Обучение должно идти вперед, следовательно, учащиеся должны уметь справляться не только с задачами известной структуры, но и новыми задачами. Этим объясняется ведущая роль решения задач в обучении.

Мы будем придерживаться той точки зрения, при которой составление задач самими учащимися должно идти вслед за решением. Действительно, учащиеся при составлении задачи должны четко представить ее составные части, жизненные процессы, используемые для сюжета, знать числовые данные, которые характеризуют количественную сторону процессов, положенных в основу задачи. Работа по составлению задач может производиться только после некоторой подготовки: ознакомления с типом задачи, с вопросами теории, с практическими упражнениями, непосредственно опирающимися на приобретенные знания. Тем не менее, не исключена возможность использования иногда составления задач перед их решением.

Теоретические познания учащихся при составлении задач применяются в более активной форме, чем при решении готовых задач. Составляя задачи, учащиеся привлекают определенный фактический материал, ощущается потребность в знаниях, тем самым раскрывается значение изучаемого теоретического материала. При составлении задач, в отличие от их решения, процессы синтеза преобладают над процессами анализа. Это способствует правильному развитию у учащихся умения пользоваться анализом и синтезом. Составление задач также активизирует у учащихся мыслительные процессы обобщения и конкретизации. Составляя задачи по какой-либо теме, учащиеся видят процесс, обратный тому, по которому решается задача. Развитие обратного мыслительного процесса способствует развитию математического мышления.

В работах, посвященных вопросам составления задач учащимися, крайне редко можно встретить описание процесса составления задач. Приведем пример, раскрывающий некоторые этапы этого процесса:

– составление в своем воображении жизненной ситуации, соответствующей заданию;

– установление вида или структуры задачи, соответствующей жизненной ситуации;

– постановка вопроса, соответствующего виду или структуре задачи и выбранной ситуации;

– выбор числового значения величины;

– формулировка условия и вопроса задачи [22, 23].

В результате наблюдения за деятельностью учащихся по составлению задач и анализа протоколов уроков, а также теоретических исследований, целесообразно выделить следующие этапы работы по составлению задачи:

1. Установление математической ситуации составления задачи.
2. Выбор сюжета задачи.
3. Нахождение вопроса задачи.
4. Подбор числовых данных.
5. Формулирование текста задачи.
6. Оформление текста задачи.

Действительно, получив задание на составление задачи, учащиеся должны представить тип составляемой задачи, ее структуру, найти математическую ситуацию, установить связи между данными, искомыми, данными и искомыми, определить ее математическое содержание. Удерживая все это в памяти (во внимании) они должны определить сюжетную сторону содержания задачи. Затем – установить цель решения задачи, сформулировать вопрос, подобрать числовые данные, используя справочный материал и свои жизненные представления об окружающей действительности. Наступает этап непосредственного составления задачи, формулирование ее текста. Чаще всего текст задачи формулируется устно, а в тетради оформляется краткая ее запись, хотя полезно приучать учащихся записывать текст задачи полностью.

Рассмотрим пример. Задача: “В куске было 240 м материи. На пошив детских халатов пошло $^3/_4$ всей материи. Из 7/10 оставшейся материи сшили косынки для девочек. Сколько метров материи осталось в куске?”. После решения этой задачи учащимся предложено составить задачу, аналогичную данной. Они анализируют структуру составляемой задачи. Приведем некоторые высказывания учащихся: “Задача аналогичная, значит, она должна решаться так же”, “В аналогичной задаче должно говориться о том же по-другому”, “В задаче должно быть известно все число, какая часть его использована и какая часть от оставшейся части взята. Найти нужно остаток всего числа”. Математическое содержание определено. Для сюжета предлагают взять следующее: “Давайте составим задачу про мороженое”, “Про путь, который туристы должны были пройти” и т.д.

Большинство учащихся предложили составить задачу про путь, вопрос которой должен быть сформулирован так, чтобы найти оставшуюся часть всего пути: “Сколько километров пути туристам осталось пройти?”. Используя краткую запись текста задачи, учащиеся осуществляют поиск числовых данных и предлагают обозначить весь путь – 24 км, в первый день – $\frac{1}{2}$ всего пути, во второй – $\frac{1}{3}$ оставшейся части. Подбирая числовые данные, учащиеся неоднократно выполняют прикидку, чтобы, по их словам, задача решалась: 24 : 2 · 1 = 12; 12 : 4 · 3 = 9; 24 – 12 = 12; 9 + 12 = 21; 24 – 21 = 3. Проговаривая текст задачи, учащиеся записывают ее кратко:

$$\text{Весь путь – 24 км} \quad \begin{cases} I & - \quad 1/2 \textit{ всего пути}, \\ II & - \quad 3/4 \textit{ оставшегося пути}, \\ III & - \quad ? \end{cases}$$

Приведем текст составленной задачи: “Туристам нужно пройти 24 км. В первый день они прошли $^1/_2$ всего пути, во второй $^3/_4$ оставшегося пути. Сколько километров пути осталось пройти туристам в третий день?". Таким образом, выполняя данное задание, учащиеся выбрали математическое содержание задачи, затем сюжет и вопрос задачи, подобрали числовые данные, сформулировали текст задачи и записали его. Проведение этой работы в полном объеме требуется не всегда. Развернутость этапов работы по составлению задачи зависит от характера и цели выполняемого задания: если числовые данные присутствуют в задании, то отпадает необходимость их подбора; если вопрос задачи сформулирован, то третий этап будет отсутствовать и т.д.

Процесс составления задач учащимися является надежным средством, формирующим умение решать задачи. Действительно, при составлении задач учащиеся устанавливают связи между данными, искомыми, данными и искомыми, что способствует формированию у учащихся умения проводить первичный анализ текста задачи. Составляя задачу по уравнению, учащиеся должны перевести ее математическое содержание на словесный текст, тем самым формируется умение переводить текст задачи на математический язык.

Итак, при обучении математике, особенно на этапах закрепления и повторения знаний, имеются большие возможности использования процесса решения и составления задач как средства обучения их решению. Содержание процесса решения задачи может помочь раскрыть содержание деятельности по обучению решению задач. При этом у учащихся могут быть сформированы знания о структуре задач и способах их решения, о содержании деятельности по решению задач и т.п. С этой целью необходимо использовать специальную систему заданий, при выполнении которых у учащихся формируются умения решать задачи.

3. СИСТЕМА ЗАДАНИЙ, ОРИЕНТИРОВАННЫХ НА ФОРМИРОВАНИЕ У УЧАЩИХСЯ УМЕНИЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ

3.1 Требования, предъявляемые к системе задач

Термин “система заданий (упражнений, задач)” широко используется в научно-методической литературе [12; 16; 18; 20; 22; 28; 29; 32; 45; 47]. Как правило, под системой заданий (упражнений, задач) понимают произвольную совокупность, набор заданий, объединенных в единое целое по какому-то единому или сразу по нескольким признакам: функциям задач, их внешней форме, месту в процессе усвоения изучаемого материала и т.д. До настоящего времени нет единого подхода к толкованию понятия “система задач”. Этим термином в равной степени обозначают как совокупность заданий, так и деятельность по их выполнению.

При рассмотрении системы заданий, направленных на формирование умений решать задачи, будем учитывать принципы системного подхода [45; 46]. Согласно этому для построения системы заданий недостаточно указать только элементы системы, следует перечислить связи и отношения между ними или указать характер той целостности, которую образуют эти элементы. При этом возникает потребность в рассмотрении вопроса о требованиях, предъявляемых к конструируемой системе задач. Обычно авторы сборников не указывают методы, принципы и требования, положенные в основу составления системы задач. Анализ же содержания, структуры задач, последовательность их расположения в задачнике говорят о том, что они придерживаются тех или иных требований, которым должна отвечать система задач.

Вопрос о требованиях, которыми должен руководствоваться учитель или составитель учебника (задачника), конструируя системы задач к той или иной теме, достаточно подробно освещен в методической литературе [16; 22; 33; 36; 47]. Однако в работах по методике преподавания математики нет всеобъемлющего ответа на вопрос: каким требованиям должна отвечать система задач, чтобы обеспечить изучение того или иного вопроса. Хотя существует ряд исследований, посвященных разработке системы задач, для изучения определенного понятия или темы курса.

Одни авторы выдвигают более общие дидактические требования к системе задач: требования научности, систематичности, последовательности и т.д. Другие конкретизируют требования к системе задач в зависимости от цели ее создания. Например, при разработке системы упражнений, способствующих сознательному и прочному усвоению понятий алгебры, рекомендуют учитывать следующие требования: соответствие программе; разделение задач и упражнений по их методическому значению; увеличение числа устных упражнений и задач; разнообразие форм задач и упражнений; расположение задач "от простого к сложному"; количество однотипных упражнений не более трех – четырех. Ф.А. Орехов называет более общие требования: гносеологический принцип познания (единства анализа и синтеза); методико-математический принцип (конструктивный, ретроспективный подходы к решению задач, принцип обратной связи) [35. С. 98].

М.Б. Волович, например, выдвинул критерии, позволяющие отобрать задачи для системы, обеспечивающей усвоение формулировок теорем и их доказательство, а также усвоение определений понятий. Е.И. Лященко сформулировала требования к системе задач с точки зрения их роли в формировании свойств изучаемых понятий: полнота и наличие контрпримеров в системе. В связи с формированием теоретического мышления при построении системы задач берут за основу требования полноты (обеспечения формирования всех его компонентов), перспективности (содержания потенциальной возможности повышения его уровня), простоты с точки зрения дидактических принципов обучения и другие.

Большинство из указанных разными авторами требований важны как в психолого-дидактическом, так и в математическом плане, но многие из них не могут служить основой для составления системы задач. Объясняется это неопределенностью некоторых из них, а также неразработанностью или неконструктивностью их в теоретическом плане. Действительно, принцип последовательности расположения задач не может быть основополагающим принципом построения системы из-за отсутствия объективных, надежных, достаточно научных критериев трудности (или сложности) задач, хотя необходимость учета этого принципа при построении каждой системы очевидна.

Анализ работ, посвященных исследованию требований к системе задач, позволяет заключить следующее. Система заданий, ориентированных на формирование умений решать задачи, должна:

- обеспечивать математическое содержание материала по курсу математики;
- отвечать общим педагогическим подходам и принципам дидактики;
- решать проблему обучения учащихся решению задач и способствовать формированию у них необходимых умений при ведущей роли теоретических знаний.

В связи с отсутствием в настоящее время объективных критериев учета общих принципов дидактики, как и другие исследователи, будем учитывать их эмпирически, на интуитивном уровне.

Обычно при конструировании системы задач вопрос о ее содержании не выделяется в качестве самостоятельного, поскольку логика учебного предмета определяет содержание системы задач, но этого недостаточно. Содержание системы задач зависит и от других параметров (например, от цели построения системы). Все требования, предъявляемые к системе задач, должны отражать ее структуру, цель, содержание. Отношение между структурой и содержанием системы зависит от характера системообразующей связи и от специфики самих задач, которые одновременно являются элементами содержания учебного материала и компонентами учебной деятельности учащихся. В данном случае существует зависимость и от цели построения системы задач. Остановимся на характеристике цели, ради которой строится система заданий.

Рассматриваемая система заданий должна обеспечивать математическое содержание материала, отвечающего программе по математике, а именно: обучать учащихся математике, в том числе решению задач; обеспечивать формирование у учащихся знаний по математике и умений решать задачи.

Кроме того, система заданий, обеспечивая математическое содержание программного материала и отвечая общим дидактическим принципам (научности, систематичности, последовательности, прочности знаний, сознательного усвоения материала и т.д.), должна содержать задачи, специально формирующие следующие умения:

- читать и записывать текст задачи;
- проводить поиск способа ее решения;
- осуществлять найденный способ ее решения;
- изучать найденное решение.

В структурном плане, как показывают наши исследования, система должна содержать задания:

- на решение готовых задач: правильно поставленных задач, а также задач с недостающими, лишними и противоречивыми данными;
- на преобразование задач;
- на составление задач.

При построении системы заданий необходимо учитывать требования к составляемым задачам. Разными авторами выдвигаются различные требования. Мы будем придерживаться следующих требований:

1. Задача должна относиться к изучаемой теме, числовой материал необходимо подбирать в соответствии с программой по математике .
2. Трудности задачи должны быть приспособлены к возможностям учащихся.
3. Сюжет задачи и числовые данные задачи должны отражать прогрессивные стороны окружающей действительности, носить воспитывающий, познавательный характер, возбуждать любознательность, интерес к математике.
4. Числовые данные должны быть реальными .
5. Формулировка задачи должна быть краткой, доступной для понимания учащихся.

Заметим, что все эти требования ничего не значат без учета здравого смысла. Приступим к описанию системы заданий, направленных на формирование умений решать задачи при обучении математике. Прежде всего, конструируемая система заданий будет обеспечивать усвоение программного материала полностью, поскольку будет содержать все задачи действующих учебников математики соответствующего класса. Действительно, система заданий может быть получена из системы задач действующих учебников путем методической обработки с целью реализации указанных выше требований к системе задач. Нужно предусмотреть в системе наличие таких заданий, которые специально формируют у учащихся умения решать задачи. А именно: в системе должны быть задания на решение не только правильно поставленных задач, но и задач с лишними, недостающими, противоречивыми данными, а также на преобразование и составление задач.

3.2 Структура и содержание системы задач

Исходя из принятой нами характеристики задачи по ее основным компонентам (условию, вопросу, способу решения, базису), в структурном плане система заданий может быть представлена таким образом: неизвестных компонентов нет; неизвестен один компонент задачи; неизвестны два компонента; неизвестны три компонента [22. С. 65]. В зависимости от того, какой или какие компоненты неизвестны, можно рассмотреть все виды задач:

- с неизвестным условием;
- с неизвестным базисом решения;
- с неизвестным способом решения;
- с неизвестным вопросом задачи;
- с неизвестными способом решения и базисом;
- с неизвестными условием и вопросом;
- с неизвестными условием и базисом;
- с неизвестными вопросом и способом решения;
- с неизвестными базисом и вопросом;
- с неизвестными условием и способом решения;
- с неизвестными условием, базисом и способом решения;
- с неизвестными базисом, способом решения и вопросом;
- с неизвестными условием, базисом и вопросом.

Общая структурная формула этих задач в общем случае имеет вид – УBCR. Например: если неизвестны два компонента задачи, то будут известны: или способ решения и базис; или условие и вопрос; или условие и базис; или способ решения и вопрос; или базис и вопрос; или условие и способ решения (ХХСБ; УВХХ и т.п.).

3.3 Типы задач системы

В зависимости от того, как представлены условие задачи, ее вопрос, способ решения, базис получим различные задачи. Если все компоненты задачи представлены полностью, тогда деятельность учащихся по ее выполнению сводится к воспроизведению определения какого-либо понятия, правила или приведению примера или контрпримера. Условие задачи может быть: сформулировано правильно и полностью; иногда – с недостающими, лишними, противоречивыми данными; а также – частично представлено: только числовыми данными, только словесным текстом задачи с пропусками числовых данных; краткой записью или чертежом. Условие задачи как таковое может совсем отсутствовать в задаче. Приведем соответствующие примеры.

– Из проволоки длиной 15 м делают обручи длиной 2 м. На сколько обручей хватит проволоки?

– Из двух сел вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода и встретились. Расстояние между селами – 36 км. Скорость одного пешехода – 4 км/ч. Найдите скорость другого пешехода.

– Составьте задачу, используя числа 30 и 5/6.

– Вставьте пропущенные данные и решите задачу: “Найдите площадь прямоугольника, стороны которого в … раза больше сторон другого прямоугольника длиной … см и шириной … см”.

–Составьте задачу по ее краткой записи:

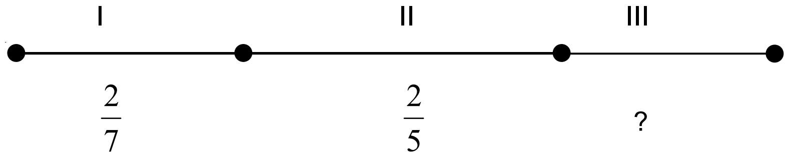
было вывезли стало

I – в 2 раза больше, чем 580 *т* 2360 т

II – –

Сколько тонн зерна было в каждом элеваторе первоначально?

– Составьте задачу по чертежу:



– Составьте задачу по ее вопросу: “Через сколько часов поезда встретятся?”.

Базис задачи известен учащимся, если задача решается сразу после изучения темы (этап закрепления) или тема указана при постановке задачи. Для всех задач, используемых на этапе повторения знаний, базис для учащихся (относительно) неизвестен, если он не указан специально. В этом случае учащиеся должны сами выбрать те знания, которые будут необходимы для обоснования решения задачи. Сразу после изучения темы “Объем прямоугольного параллелепипеда” учащимся предложена задача: “Объем комнаты равен 72 м^3. Найдите высоту комнаты, если ее длина 6 м, а ширина 4 м”. Базис решения задачи учащимся известен. Если эта же задача была предложена на этапе повторения знаний, то базис задачи в этом случае учащимся не известен.

Способ решения задачи известен, если учащимся предложена его запись или способ решения задач данного типа им хорошо знаком. Примером такого рода может служить задание составить задачу по ее решению:

1) 35 : 7 · 4 =20; 2) 35– 20 = 15.

В этом случае, учащиеся выбирают сюжет задачи, придумывают вопрос задачи, определяют базис задачи. Вопрос задачи может быть сформулирован полностью или частично, иногда может отсутствовать как таковой. Приведем соответствующие примеры.

– Один из смежных углов на 24^0 больше другого. Сколько градусов содержит каждый их этих углов?

$$\left.\begin{array}{lll} I & - & ? \\ II & - & на\ 24^0\ больше,\ чем \uparrow\ ? \end{array}\right\} 180^0$$

– Сформулируйте вопрос задачи и решите ее: “Купили кусок ткани длиной 250 см и его пятую часть израсходовали на платье куклам … ”.

– В двух корзинах было поровну яблок. Если из первой корзины взять 8,2 кг яблок, то во второй будет в 2 раза больше. Сколько яблок было … ?

Возможные случаи представления каждого компонента задачи оформим в виде следующей таблицы.

<table>
<tr><th>Условие</th><th>Вопрос</th><th>Способ решения</th><th>Базис</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Задано полностью</td><td rowspan="2">Задан полностью</td><td rowspan="2">Указан конкретный способ решения</td><td>Указан</td></tr>
<tr><td>Частично указан</td></tr>
<tr><td>Содержит лишние, недостающие, противоречивые данные</td><td>Задан частично</td><td>Указан один из известных способов решения задачи</td><td>Не указан</td></tr>
<tr><td>Задано только числовыми данными</td><td>Отсутствует</td><td>Отсутствует</td><td></td></tr>
<tr><td>Задано словесным текстом с пропусками числовых данных</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Задано краткой записью или чертежом</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Отсутствует</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Если рассмотреть различные их сочетания, то получим виды заданий, ориентированных на формирование у учащихся умений решать задачи. Эти задания представляют собой систему, где отношение порядка является системообразующей связью. Остановимся на анализе заданий системы.

Как показали наши исследования и многолетний опыт преподавания в школе, для формирования у учащихся умений проводить первичный анализ текста задачи следует систематически предлагать им задания на решение задач с лишними, недостающими, противоречивыми данными. Именно при работе с задачами такого рода учащиеся обращают внимание на взаимосвязь данных и искомых, на слова, влияющие и не влияющие на способ решения задач. Например, задача: “Из двух сел одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода и встретились. Расстояние между селами – 36 км. Скорость одного пешехода – 4 км/ч. Найдите скорость другого пешехода”.

Дополнительно учащимся можно предложить вопрос: “Достаточно ли данных для решения задачи?” или задание дополнить недостающими данными условие задачи и решить ее. Аналогичные задания даются учащимся при решении задач с лишними, противоречивыми данными. Выполняя такого рода задания, учащиеся обращают особое внимание на условие задачи и ее вопрос, тем самым формируется умение анализировать текст задачи.

Выделению вопроса в тексте задачи способствуют следующие задания. Например, по задаче: “От Харькова до Севастополя 770 км, а от Харькова до Москвы на 10 км больше” и ее решению: 770 + 10 = 780 (км), 770 + 780 = 1550 (км). Сформулируйте вопрос задачи. Другой пример: сформулируйте вопрос задачи и решите ее: “На 66 р. 50 к. купили несколько комплектов шахмат, по 9,5 р. за комплект. На 97 р. 50 к. купили несколько комплектов шашек, по 7,5 р. за комплект”. Такие задания можно использовать на этапах закрепления и повторения учебного материала. Кроме этого, следует давать учащимся обратные задания на составление задачи по ее решению (или одному из способов ее решения). Например, учащиеся должны по вопросу: “Чему равна длина третьего отрезка?” и решению: “14 · 3 = 42 (см); 42 + 8 = 50 (см)” составить задачу.

Иногда, если способ решения задачи знаком учащимся, им предлагают составить задачу только по ее вопросу “Какую часть дороги заасфальтировали?” (или “Чему равен процент выхода крупы при обработке риса?”). Задания на составление задач по краткой записи (или чертежу) способствуют формированию у учащихся умений оформлять краткую запись (чертеж) задачи. Если задания такого рода учащиеся выполняют сразу после изучения темы, то базис решения задач им известен. На этапе повторения учащимся приходится определять базис. Эти задания направлены на формирование умений читать и записывать текст задачи.

Чтобы научить учащихся отыскивать необходимые данные для решения задачи, нужно использовать задания типа: вставьте пропущенные данные, если известен способ ее решения; вставьте пропущенные данные и решите задачу. Например, задача: “Расстояние между пристанями … км. Сколько времени потребуется теплоходу, чтобы проплыть туда и обратно, если его скорость по течению реки … км/ч, а против течения … км/ч?”. Если записано ее решение: 378 : 27 = 14 (ч); 378 : 21 = 18 (ч); 14 + 18 = 32 (ч), то учащимся необходимо найти пропущенные данные из решения и выполнить задание. Если учащимся дан текст задачи с пропусками, то им приходится подбирать реальные числовые данные, а затем решать ее. Кроме этого, учитель должен использовать задания на составление задач по числовым данным, если указан способ ее решения или вопрос. Например, требуется составить задачу, используя числа 50 и 76, чтобы она решалась так: 100 – 76 = 24 (%); 50 : 100 · 24 = 12. Возможна другая форма задания: составьте задачу, используя числа 50 и 76, чтобы она решалась с помощью действия деления. Учащиеся формулируют условие и вопрос задачи, осознавая при этом их значение для нахождения способа ее решения.

Задания, направленные на формирование умений переводить словесный текст задачи на математический язык, предусматривают составление задач по записи их решения. Приведем пример: составить задачу по ее решению: 4 · 3 = 12 (км); 21 – 12 = 9 км); 9 : 3 = 3 (км/ч) или составить задачу, чтобы при ее решении использовалась формула нахождения объема прямоугольного параллелепипеда. Выполнение заданий на составление задач по уравнению приучает учащихся переводить математические зависимости на словесный текст задачи. С этой целью можно предложить учащимся ответить на вопрос: как изменится текст задачи, если при ее решении составлено уравнение.

С целью обучения учащихся умению устанавливать полноту постановки задачи необходимо использовать задания типа: укажите лишнее данное в задаче и решите ее; дополните недостающими данными текст задачи и решите ее; исключите противоречивое данное и решите задачу. Рассмотрим примеры.

– “Объем прямоугольного параллелепипеда – 264 дм^2. Найдите площадь основания этого параллелепипеда, если длина прямоугольного параллелепипеда равна 11 дм, а высота – 4 дм”. Укажите лишнее данное и решите задачу, исключив его.

– Найдите противоречивое данное, исключите его и решите задачу: “Два поезда вышли одновременно навстречу друг другу из двух городов, расположенных на расстоянии 1160 км, через два часа после выхода они встретились. Скорость одного из них – 80 км/ч. Найдите скорость другого поезда”.

– Дополните текст задачи недостающими данными и решите ее: “Из станицы в город ехал мотоциклист со скоростью 55 км/ч. На всю дорогу он потратил 3 ч. Из города в станицу ехал велосипедист со скоростью 11 км/ч., сколько времени потратил велосипедист на весь путь от города до станицы?”.

Задания, ориентированные на формирование умений актуализировать теоретические знания, необходимые для решения задачи, требуют обоснования способа ее решения. Например, на этапе повторения учащимся дана задача и запись ее решения (или указан способ ее решения), необходимо обосновать найденный способ решения задачи. Если учащимся дан только текст задачи, то можно поставить вопросы:

- как обосновать решение данной задачи?
- какие знания необходимы, чтобы ответить на вопрос задачи?

Иногда предлагаются только вопросы задачи и требуется назвать необходимые данные для ответа на них. Выполняя такие задания, учащиеся актуализируют знания, необходимые для решения задачи, осуществляют поиск способа ее решения. Умению актуализировать знания для решения задачи способствует составление задач на данную тему.

Таким образом, система заданий, направленных на обучение решению задач, должна содержать задачи, специально формирующие умения анализировать текст задачи, проводить поиск способа ее решения, завершать работу над решенной задачей.

4 МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ УМЕНИЙ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ

4.1 Приемы деятельности учителя и учащихся по решению задач на каждом этапе процесса решения

При разработке методики обучения учащихся решению задач, исходя из самой задачи как системы, мы будем выделять деятельность учителя и деятельность учащегося по решению задач и рассматривать содержание выделенных четырех этапов процесса решения задачи и умение решать задачи. Будем считать перечисленные этапы процесса решения задачи за норму деятельности по ее решению. Причем, с точки зрения возможности обучения учащихся решению задач нас будет интересовать не столько результат решения задачи, сколько сам процесс ее решения, деятельность учащихся по решению задачи. На наш взгляд, отличие предлагаемой методики состоит в том, что обучение учащихся решению задач происходит не только в процессе решения каждой задачи, но и в процессе решения в целом, всей системы задач. Достаточно подробный анализ рассматриваемой системы позволяет все задания разбить на две группы: задания на решение готовых задач и задания на составление задач.

Одной из особенностей методики обучения учащихся решению задач, на наш взгляд, является организация специальной работы учащихся на первом и четвертом этапах, хотя не умаляется роль второго и третьего этапов. Важность проведения тщательной работы с учащимися на первом и четвертом этапах процесса решения задачи покажем при описании соответствующих приемов работы учителя и учащихся.

Как установлено в результате нашего исследования, учащиеся, а нередко и студенты, зачастую не знают, с чего начать решение задачи, не умеют анализировать ее текст. Вот почему необходимо организовывать работу учащихся по изучению самой задачи и задачу рассматривать как предмет изучения. Это подтверждается и достижениями психологии: для овладения какими-либо умениями и навыками необходимы знания тех основ, на которых базируются эти умения и навыки. Поэтому для обучения учащихся решению задач необходимо дать им знания о задаче и ее составе, о процессе ее решения. Какова должна быть деятельность учащихся по решению задач? Эти знания учащиеся получают не только при проведении анализа текста той или иной задачи, но и при выполнении специальных заданий. Например, можно предложить учащимся назвать вопрос, условие задачи; перечислить искомые, данные задачи, установить связь между данными, данными и искомыми и т.п.

При решении каждой задачи и в процессе решения всех задач системы учитель должен заботиться о том, чтобы у учащихся формировались знания о задачах. Это позволяет учащимся сознательно и целенаправленно проводить анализ текста задачи, находить способ ее решения, овладеть общим подходом к решению задач.

4.1.1 Приемы формирования умений анализировать текст задачи

Вот почему на первом этапе процесса решения задачи целесообразно знакомить учащихся со строением задачи, особенностями ее вопроса и условия, с процессом ее решения.

Проведение анализа текста задачи является одним из главных моментов процесса ее решения. При решении задачи учащиеся должны усвоить условие задачи, которую они собираются решать, овладеть теми понятиями, на которые они будут опираться при ее решении, осознать цель и выбрать в связи с этим способ решения. Это этап ориентировки в условии задачи, этап анализа текста задачи.

Многие задачи по курсу математики особенно на первых порах обучения математике, как кажется на первый взгляд, не требуют тщательного проведения анализа задачи, и это создает иллюзию его отсутствия.

Дальнейшее обучение учащихся решению задач без умения проводить тщательный анализ текста задачи становится затруднительным. На наш взгляд, необходимо систематически и целенаправленно обращать на это внимание и формировать у учащихся на первом этапе процесса решения задачи, по крайней мере, следующие умения:

1. Внимательно читать текст задачи.
2. Проводить первичный анализ текста задачи: выделять вопрос и условие задачи.
3. Оформлять краткую запись текста задачи.
4. Выполнять чертежи, рисунки по тексту задачи.

Как показывает практика, большинство учащихся при решении задачи не успевают ее прочитать, а лишь бегло просматривают ее, и сразу начинают ее решать вместе со всем классом. Недостатки в области чтения возникают из-за несформированности навыка в чтении про себя при самостоятельном решении задач или от некоторой небрежности при чтении, вследствие которой ученик часто решает часть задачи, выхватывая отдельные фразы из ее условия.

Неумение учащихся читать текст задачи считаем одной из причин затруднений в решении задач, поэтому учитель должен учить читать и вчитываться в текст задачи. Решение любой задачи начинается со знакомства с ее условием – чтения текста задачи. В процессе чтения учащиеся стремятся понять задачу в целом. На этом этапе происходит восприятие задачи, направленное на сознательное овладение ее условием, на “принятие” задачи учащимися. Одной из особенностей работы по обучению учащихся решению задач является использование в своей работе учителем специальных приемов, способствующих обучению учащихся чтению текста задачи. А именно:

· хорошее чтение текста задачи учителем, показ образцов правильного чтения задачи;

· обращение специального внимания учащихся на необходимость внимательного чтения задачи, предоставление им необходимого времени для прочтения ее текста;

· проведение специальной работы над текстом задачи по усвоению его содержания.

Чтение задачи требует от учащихся других навыков, отличных от навыков чтения обычного текста. Необходимо добиваться, чтобы учащиеся читали текст задачи правильно, без искажения слов, ясно, выразительно, с надлежащими остановками. Следует рекомендовать учащимся после прочтения задачи в целом читать каждое ее слово и стремиться понять, что оно означает, обращать внимание на вопрос задачи. Учащиеся должны вдумываться в смысл каждого слова текста задачи. Обязательно, особенно на первых порах обучения учащихся решению задач, учитель разъясняет смысл трудных слов текста задачи. В процессе чтения текста задачи не все данные, входящие в условие, в равной степени привлекают внимание решающего: некоторые данные остаются незамеченными, некоторые выдвигаются на передний план, становятся основными центрами творческой работы мысли.

Задача учителя помочь учащимся вчитаться в текст задачи, выделить главное в нем.

Этому способствуют различные формы предъявления задачи: текстом (сплошным текстом, текстом задачи с числовыми данными), краткой записью текста задачи, рисунком (чертежом). Приведем соответствующие примеры.

– “В классе тридцать человек. Из них шестнадцать получили паспорт. Какая часть учащихся этого класса не получила паспорт?”

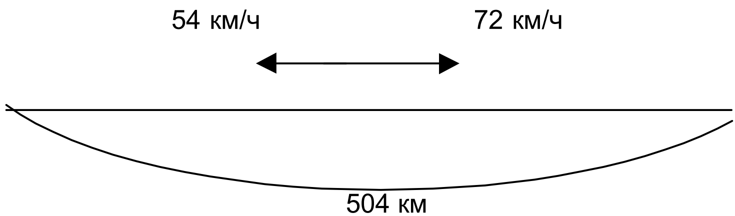
– “Велосипедист проехал 2/5 намеченного пути. Каков намеченный путь, если он проехал 20 км?”

–“

	Было	Изменили	Стало
I	в 3 раза больше, чем	отлили 46 л	184 л
II		долили 18 л	

Сколько литров бензина было первоначально в каждой бочке?”

–“



Через какое время расстояние между поездами будет 504 км?”

Остановимся на основных приемах работы учителя и учащихся над текстом задачи. Успех решения задачи зависит во многом от понимания ими смысла слов, входящих в текст задачи. Все слова текста задачи можно подразделить на две большие группы: слова, которые не влияют на выбор действия, способа решения задачи; слова, которые влияют на выбор действия, способа ее решения.

Слова первой группы не влияют на математическую сторону задачи, однако это не означает, что они не оказывают влияния на ее решение. Благодаря именно таким словам задача приобретает реальное, жизненное значение и тем самым реализуется один из воспитательных аспектов обучения. Вместе с тем понимание значения таких слов позволяет учащимся быстрее уловить смысл задачи, способствует нахождению способа ее решения.

С помощью слов второй группы устанавливаются связи (отношения) между данными, искомыми, между данными и искомыми. Эти слова приобретают значение определенных математических терминов, поэтому важно научить учащихся понимать их и “переводить” слова текста задачи на язык математических терминов, прямо указывающих на нахождение выбора действия. При работе над текстом задачи, особенно над словами второй группы, обращается внимание учащихся на то, что отдельно взятое слово само по себе не определяет выбора действия, важно учесть сочетание слов и их последовательность расположения в тексте задачи.

Например, при решении задачи перед учащимися ставятся вопросы, выясняющие значение того или иного слова или сочетания слов для нахождения способа ее решения, влияние их изменений на способ решения задачи. Задача: “В мешке 20 кг крупы. После того, как из него наполнили несколько пакетов по 3 кг, в мешке осталось 5 кг. Сколько пакетов наполнили крупой?” Вопросы:

– Изменится ли способ решения задачи, если вместо крупы взять муку? сахар? или другой любой сыпучий продукт?

– Изменится ли способ решения задачи, если мука была не в мешке, а в ящике?

– Изменится ли способ решения, если не “из мешка наполнили”, а “в мешок добавили”?

– Как изменится способ решения, если в мешке было крупы не 20 кг, а 52кг, 85 кг, 94 кг?

– Как изменится способ решения, если пакеты наполняли по 5 кг, 1 кг, 16 кг?

– Можно ли ответить на какие-либо другие вопросы, кроме сформулированного в задаче?

В процессе ответов на вопросы такого рода, у учащихся формируются представления о процессах получения задач из реальных и абстрактных ситуаций, о составных частях задачи, о математической зависимости известных и неизвестных компонентов задачи, о логической согласованности в условиях задачи, о зависимости данных задачи от реальных жизненных обстоятельств.

При обучении учащихся работе над текстом задачи мы пришли к необходимости своего рода некоторой упорядоченности. В зависимости от изменения числовых данных, сюжетного и математического содержания задачи можно проследить изменение способа решения задачи. Представим виды работ над текстом задачи таблицей, где П – постоянно, М – меняется:

№ п/п	Сюжетные связи	Числовые данные	Математические Связи	Способ решения	Виды работ над текстом задачи
1	П	П	П	П	Решение
2	М	П	П	П	Преобразование
3	П	М	П	П	Преобразование
4	П	П	М	М	Составление
5	М	М	П	П	Преобразование
6	П	М	М	М	Составление
7	М	П	М	М	Составление

Кратко остановимся на ее анализе. В первом случае учащимся требуется просто решить предложенную им задачу. Такой вид работы характерен для первого этапа методики обучения учащихся решению задач. Второй и третий случаи соответствуют выполнению учащимися заданий по замене числовых данных или сюжетных связей в тексте задачи. Эти изменения касаются лишь слов, не влияющих на способ решения задачи, и проводятся на втором этапе методики обучения решению задач – этапе преобразования задач.

Сущность приемов работы над усвоением содержания задачи – изменение числовых данных задачи и изменение сюжета задачи – проста. Обычно при решении задач учитель предлагает (чаще всего в форме полуписьменных работ) задания:

– “Замените числовые данные задачи. Изменится ли способ решения задачи?”

– “Измените сюжет задачи. Изменится ли способ ее решения?”

При решении полученных задач у учащихся формируются навыки обобщения решения подобных задач. Это способствует тому, что при чтении текста задачи учащиеся обращают внимание не на числовые данные, а на их связи, на математическое содержание задачи. Учащиеся решили задачу: “Два мотоциклиста едут навстречу друг другу. Расстояние между ними 232 км. Скорость одного из них 62 км/ч, а скорость другого 54 км/ч. Через сколько часов мотоциклисты встретятся?” Затем они получают задание заменить данные задачи и решить получившуюся задачу. При выполнении задания им приходится подбирать реальные числовые данные задачи. Учащиеся убеждаются в том, что способ решения этих задач одинаков.

Выполняя задания, направленные на изменение сюжетных связей задачи, учащиеся приобретают навыки нахождения слов, определяющих способ решения задачи, что способствует правильному чтению текста задачи, нахождению существенных ее связей, отвлечению от сюжетных подробностей. Рассмотрим задачу: “Маляр израсходовал 4/5 купленной краски. Сколько краски осталось, если купили ее 100 кг?” При выполнении заданий по изменению сюжета, учащиеся приводят тексты, например, таких задач: “Собрали 5600 кг винограда и 3/4 собранного винограда отправили в город. Сколько осталось винограда?” или “Заасфальтировали 4/5 дороги. Сколько километров дороги осталось заасфальтировать, если длина дороги 100 км?”

Изменяя сюжет и числовые данные в задаче, учащиеся фактически составляют новую задачу, подобную данной. Например, учащиеся решили задачу: “Купили кусок ткани длиной 250 см и его пятую часть израсходовали на платья куклам. Сколько сантиметров ткани осталось?”. Затем они составляют задачи типа: “Туристам необходимо пройти 24 км за три дня. За первые два дня они прошли 2/3 пути. Сколько километров пути им осталось пройти?”. Именно при выполнении таких заданий учащиеся убеждаются в значении слов текста задачи для нахождения способа ее решения. Это способствует обращению внимания учащихся уже при чтении задачи на необходимость выделять, отыскивать слова, влияющие на нахождение способа решения, и стремиться уяснить их смысл.

Следующий этап работы над текстом задачи – расчленение текста задачи на условие и вопрос. Учитель должен так организовать работу по проведению первичного анализа текста задачи, чтобы учащиеся выделили условие и вопрос, соотнесли условие и вопрос задачи. Обучение учащихся пониманию вопроса задачи и ее условия должно стать специальным приемом работы над текстом задачи. Как указывают психологи, например, Н.А. Менчинская, у учащихся нередко возникает трудность отделения вопроса задачи от ее условия.

Наши исследования подтверждают это. Из пяти задач, предложенных учащимся, две были без вопроса. Большинство учащихся находят решение и этих двух задач. По словам учащихся, они такие задачи уже решали и знают, какой может быть вопрос задачи. Одной из ошибок при составлении задач является запись условия задачи без вопроса. Все это свидетельствует о необходимости воспитания у учащихся культуры решения задачи.

Выделение вопроса задачи – это узловой момент работы над задачей. Учитель должен постоянно обращать внимание учащихся на важность ясного и точного понимания вопроса учащимися, не ограничиваясь стереотипным обращением к ним: “Что спрашивается в задаче?”. Именно с вопроса начинается процесс мышления, поэтому важно не только выделить вопрос задачи, но и стремиться понять его, изучить цель, поставленную вопросом задачи. От непонимания какого-либо одного слова в вопросе может быть не понят и весь вопрос, а это повлечет непонимание задачи и обусловит трудности при ее решении.

Учащиеся должны четко представлять, что каждая задача состоит из вопроса и условия. Они должны уметь находить и понимать вопрос задачи, устанавливать связь между условием и вопросом, понимать, что без вопроса нет задачи и что в задаче вопрос должен быть поставлен в соответствии с ее условием. Этому способствует решение задач, представленных в учебниках по математике и различающихся по характеру формулировки и месту расположения в них вопроса. А именно:

- “Одна из сторон прямоугольника 24 см, а другая в 3 раза больше. Найти периметр и площадь прямоугольника”.

- “Найдите площадь поверхности куба, у которого длина ребер равна 5 см”.

- “Маляр израсходовал 4/5 купленной краски. Сколько краски осталось, если купили ее 100 кг?”

- “Зрительный зал имеет 360 мест. Сколько осталось свободных мест после того, как восемь классов, по 42 человека в каждом, заняли свои места в зале?”

- “Какую часть числа составляют его 20 %?”

Поскольку этого далеко не достаточно, то рассмотрим приемы работы учителя и учащихся, способствующие формированию умений выделять условие и вопрос задачи:

· воспитание у учащихся потребности выделять условие и вопрос (выявление роли вопроса в нахождении способа решения задачи; переформулирование вопроса);

· нахождение необходимых данных для ответа на вопрос задачи;

· формулирование какого-либо одного или всевозможных вопросов к условию задачи;

· составление задачи по её вопросу.

Проводя аналитический разбор задачи, учитель ориентирует учащихся на нахождение вопроса задачи, на уяснение искомого. Это не исключает использования другого приема разбора задачи – синтеза, при котором, исходя из числовых данных условия задачи, с помощью цепочки выкладок подходят к вопросу задачи. Учитель показывает образцы решения задачи с одним и тем же условием, но с разными вопросами и разными способами решения. Учащиеся убеждаются в необходимости выявления вопроса задачи.

Например, задача: “По плану рабочий должен был сделать 35 деталей. Однако он сделал 14 деталей сверх плана….”Учитель показывает, что в зависимости от вопроса задачи находится способ ее решения. Если вопрос – “На сколько процентов рабочий выполнил план”, то способ решения – один. Если вопрос другой – “Сколько деталей сделал рабочий?”, то и способ решения – другой.

Иногда при формулировке вопроса задачи полезно изменить не весь вопрос задачи, а лишь часть его. Цель такого приема – показать учащимся, что при решении задачи ее вопрос определяет все последующие преобразования исходных данных. Переформулирование вопроса сразу же изменяет весь последующий процесс решения задачи. Причем, успешность решения задачи обусловлена точностью формулировки вопроса задачи. Суть методического приема – переформулирование вопроса задачи – состоит в том, что от учащихся требуется заменить поставленный в задаче вопрос.

Например, задача: “С огорода принесли 42 кг огурцов и 5/7 всех огурцов засолили. Сколько килограммов огурцов засолили?”. Учащимся предложено задание: замените вопрос задачи при том же условии и укажите способ решения полученной задачи. Вопрос задачи может быть изменен и сформулирован следующим образом: 1. Сколько килограммов огурцов осталось? 2. Сколько килограммов огурцов засолили и сколько осталось?. Выполняя это задание, учащиеся осмысливают значение вопроса, его роль в задаче и влияние на способ ее решения.

При обучении учащихся умению выделять условие и вопрос задачи в процессе ее решения следует использовать прием, направленный на постановку вопроса задачи по ее условию. Суть заключается в следующем. Учащимся дается неполный текст задачи (условие задачи без вопроса) и предлагается сформулировать вопрос задачи по ее условию или все возможные вопросы по ее условию. Достигается это постановкой учителем перед учащимися заданий типа: “Сформулируйте вопрос задачи и укажите способ ее решения” или “Сформулируйте все возможные вопросы задачи и решите одну из них”.

Приведем пример. В условии задачи сказано: “Скорость теплохода 45 км/ч, а скорость электровоза на 90 км/ч больше”. Какой вопрос можно поставить к этому условию, чтобы получить задачу? Что еще можно узнать по этим данным? Каким действием решается задача? В результате выполнения такого задания учащиеся сформулировали такие вопросы:

– На сколько километров в час скорость электровоза (теплохода) больше (меньше) скорости теплохода (электровоза)?

(Задача решается действием вычитания).

– Во сколько раз скорость электровоза больше скорости теплохода?

(Задача решается действием деления).

Иногда полезно предложить учащимся назвать всевозможные вопросы задачи: “Купили кусок ткани длиной 250 см и его пятую часть израсходовали на платья куклам”. Они предлагают такие вопросы:

– Сколько сантиметров ткани израсходовали на платья куклам?

– Сколько сантиметров ткани осталось?

– Какая часть купленной ткани осталась?

Постановку учащимися вопросов к одному и тому же условию учителю следует всячески поощрять. Разнообразие вопроса заставляет глубже вникнуть в содержание задачи, полнее использовать отраженные в тексте задачи данные и их связи, повышает интерес к решению задач.

Перейдем к рассмотрению следующего приема – нахождение необходимых данных для ответа на поставленный вопрос задачи. Учащимся предлагаются задания на подбор данных для ответа на поставленный вопрос, что способствует формированию умений анализа текста задачи. Часто учащиеся не знают, с чего начать решение задачи, ждут подсказки со стороны учителя. Это обязывает нас учить школьников самостоятельно выяснять, какие данные необходимы (достаточны) для ответа на тот или иной вопрос.

С этой целью учитель предлагает учащимся вопрос и задание найти необходимые данные для ответа на него. Учащимся предложено ответить на вопрос: “Назовите данные для составления задачи, в которой спрашивается – какую часть всех учащихся восьмого класса составляют девочки и какую мальчики?”. Результат выполнения данного задания таков. Для ответа на поставленный вопрос необходимо знать: количество всех учащихся класса, количество девочек или количество мальчиков.

Иногда учащиеся не только дают ответ на поставленный вопрос, но и указывают способ решения получившейся задачи. Некоторым учащимся полезно сначала подобрать конкретные числовые данные и затем обобщить ответ на поставленный вопрос. Хотя в большинстве же случаев для таких заданий не требуется выполнять какие-либо действия над числами, а нужно лишь применять знания некоторых математических фактов, закономерностей. В результате выполнения таких заданий учащиеся убеждаются в необходимости проведения анализа текста задачи, обращения особого внимания на вопрос задачи.

Интересен еще один прием, способствующий формированию у учащихся умений проводить анализ текста задачи. Учащимся предлагают вопрос и задания составить задачи по ее вопросу. Например, для составления задач предложены вопросы:

- Сколько процентов всей площади, занятой свеклой, осталось убрать?
- Сколько (в среднем) кубических метров воды расходует в месяц каждый житель г. Кургана?
- Чему равна средняя скорость автомобиля за все время движения?
- Чему равен процент выхода крупы при обработке риса?

При выполнении таких заданий учащимся приходится осмысливать содержание вопроса задачи, подбирать не только данные для ответа на вопрос задачи, но и составлять ее текст. Учитель обращает внимание учащихся на то, что по одному и тому же вопросу можно составить разные задачи, с разными способами решения. Учащиеся приходят к выводу о необходимости четко и точно формулировать вопрос задачи, различать в задаче вопрос и условие, проводить анализ ее условия и вопроса.

В ходе проведения первичного анализа задачи там, где это необходимо и целесообразно, оформляется краткая запись задачи. Фактически краткая запись задачи является результатом фиксации проведенного первичного анализа текста задачи. Оформление краткой записи всегда преследует цель подготовки решающего задачу к проведению вторичного (более детального) анализа. Краткая запись служит не только хорошей формой, организующей глубокий и планомерный анализ задачи, но и хорошим средством для уяснения, понимания содержания задачи, зависимости между данными и искомыми, для облегчения поиска путей решения задачи. Действительно, когда решающий задачу записывает кратко условие, он глубже вникает в ее содержание, лучше осмысливает значение числовых данных и связи между ними. Все это способствует не только решению конкретной задачи, но и обучению учащихся решению задач вообще.

Иногда сюжетная картина условия задачи поглощает внимание учащихся, а, овладевая краткой математической терминологией, учащиеся приводят задачи с различной формулировкой к единой схеме посредством слов-терминов. Нередко учителя считают, что запись текста задачи необязательна, если она взята из имеющегося учебника. Наше исследование показало, что краткую запись при обучении решению задач использует примерно пятая часть учителей. А игнорирование краткой записью при решении задач отрицательно сказывается на обучении учащихся их решению.

Именно краткая запись задачи, выступая в роли опоры для памяти решающего, способствует более быстрому и всестороннему усвоению условия, осмысливанию данных задачи и их связей . Правильное оформление краткой записи задачи свидетельствует об усвоении содержания задачи. Краткая запись задачи, выступая в роли опоры для памяти учащихся, способствует более быстрому и всестороннему усвоению условия задачи, осмысливанию данных задачи и их связей.

Краткая запись может служить формой фиксации анализа задачи. Например, задача: “Поле состоит из трех участков. Площадь первого участка на 324 га, или в 4 раза больше площади второго, а площадь третьего участка 256 га. Какова площадь всего поля?” Краткая запись:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I – на 324 га больше, чем или в 4 раза больше, чем} \\ \text{II} \\ \text{III – 256 га} \end{array}\right\} ?$$

Краткая запись может служить средством, отражающим содержание задачи. Задача: “В одном элеваторе было зерна в 2 раза больше, чем в другом. Когда из первого элеватора вывезли 580 т зерна, то после этого в двух элеваторах стало 2360 т. Сколько тонн зерна было в каждом элеваторе первоначально?” Краткая запись:

	Было	Изменили	Стало
I II	в 2 раза больше, чем	580 т	2360 т

Сколько тонн зерна было в каждом элеваторе первоначально?

Краткая запись задачи может служить средством, облегчающим поиски способов решения задачи. Задача: “Площадь земли, засеянная пшеницей, в 6 раз больше площади, засеянной ячменем, а площадь, засеянная рожью, в 3 раза меньше площади, засеянной пшеницей. Сколько гектаров земли засеяно каждой культурой, если рожью засеяно на 120 га больше, чем ячменем?” Краткая запись:

П. – в 6 раз больше, чем
Я. –
Р. – в 3 раза меньше, чем, на 120 га больше, чем

Сколько гектаров земли засеяно каждой культурой?

Рассмотрим приемы работы учителя и учащихся, способствующие формированию умений оформлять краткую запись задачи. Прием оформления краткой записи в виде таблицы используется учителем и учащимися в тех случаях, когда в задаче содержатся сведения об изменении трех взаимосвязанных величин. Оформление сетки таблицы отнимает много времени, поэтому следует использовать суть табличного метода: по горизонтали отмечаются различные величины, а по вертикали – соответствующие их состояния. Наименование величины может быть вынесено в столбец, а числовое значение – в соответствующую клетку строчки. Данные и искомые при заполнении таблицы следует расположить так, чтобы яснее была выражена связь между ними. Учитель требует от учащихся записывать числовые данные, связанные друг с другом, в строчку, рядом; одноименные числовые данные – одно под другим; если данное связано с несколькими данными, то оно должно быть повторено несколько раз или эта связь оговаривается и указывается в таблице. Требование записи вопроса под таблицей не должно быть категоричным: запись вопроса выполняется по возможности, не загромождая краткую запись задачи.

Например, задача: “Со станции вышел товарный поезд со скоростью 50 км/ч. Через 3 ч с той же станции вслед за ним вышел электропоезд со скоростью 80 км/ч. Через какое время после своего выхода электропоезд догонит товарный поезд?” Учащиеся выполнили краткую ее запись в виде таблицы:

	Скорость	Время	Расстояние
Т Э	50 км/ч 80 км/ч	на 3 ч больше, чем	одинаковое

Через какое время после своего выхода электропоезд догонит товарный поезд?

По окончании записи задачи в виде таблицы иногда необходимо требовать от учащихся повторения текста задачи. Например, предложена задача: “В одной бочке было в 3 раза больше бензина, чем в другой. Когда в первую налили еще 46 л, а во вторую – 18 л, то в двух бочках стало 184 л бензина. Сколько литров бензина было в каждой бочке первоначально?”. Учащиеся, выполнив краткую запись в виде таблицы, смогут по ней составить уравнение и записать найденный способ решения задачи.

	Было	Изменили	Стало
I II	в 3 раза больше, чем	46 л 18 л	184 л

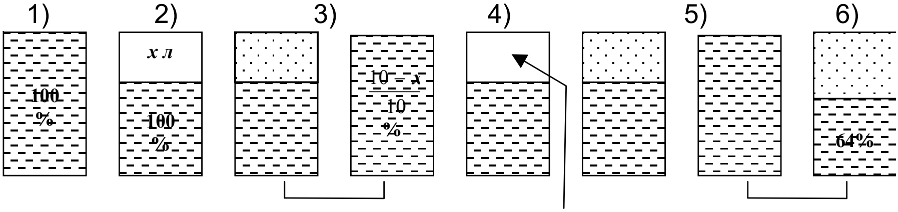
Сколько литров бензина было первоначально в каждой бочке?

Для того, чтобы проверить усвоение учащимися содержания задачи, учитель просит повторить по таблице текст задачи. Это способствует формированию у учащихся умения читать краткую запись задачи. Кроме того, по таблице учащиеся видят, что проще обозначить за неизвестное – первоначальное количество бензина во второй бочке, затем составить уравнение: $x + 18 + 3x + 46 = 184$, решить его и найти ответ на вопрос задачи. Учитель обращает внимание учащихся на эффективность использования этой формы записи текста задачи для отыскания способа ее решения.

Учителем и учащимися при решении задач нередко используется прием оформления краткой записи в виде схемы. Следует различать два случая использования этого приема: а) когда схематическая запись используется для всей задачи; б) когда схематическая запись используется лишь для части ее условия. Это объясняется тем, что для нахождения способа решения задачи иногда полезно составлять схематическую запись лишь для части условия. В схематической записи задачи должны быть отражены лишь самые необходимые сведения из условия задачи: числовые данные, единицы наименования, обозначения, к какому объекту эти данные относятся, а иногда и связи между ними. Рекомендуем требовать от учащихся при оформлении краткой записи наименование писать рядом с данными задачи, располагать данные и искомые так, чтобы само расположение по возможности указывало на связь между ними ($a * b = c$, соответствующие столбцы: a; b; c).

Приведем пример оформления записи при решении задач на “смеси”.

Задача: “В сосуде – 10 л кислоты, в первый раз кислоту отлили и долили воды, во второй раз столько же отлили и долили воды, осталось 64 % кислоты. Сколько литров кислоты отливали каждый раз?”. Анализ текста задачи с точки зрения процессов, описываемых в задаче, может быть оформлен следующим образом:



10 (л) 10–*х* (л) 10–*х* (л) $\frac{10-x}{10}\cdot x$ (л) 6,4 (л)

отлили
кислоты

х л кислоты отлили в первый раз,

10 – *х* (л) кислоты осталось после первого переливания,

$\frac{10-x}{10}$ – концентрация кислоты,

$\frac{10-x}{10}\cdot x$ (л) – кислоты отлили во второй раз.

$10-x-\frac{10-x}{10}\cdot x$ (л) – кислоты осталось после второго переливания, а это по условию задачи равно 6,4 л.

$$10-x-\frac{10-x}{10}\cdot x=6{,}4$$

$$100-10x-10x+x^2=64,$$

$x^2-20x+36=0$, D > 0 по теореме Виета:

$x_1+x_2=20 \quad x_1=18$

$x_1\cdot x_2=36 \quad x_2=2$.

18 – не удовлетворяет смыслу задачи

2 л – отливали кислоты первый раз, 1,6 л – второй раз.

Ответ: 2 л; 1,6 л.

На наш взгляд, такая краткая запись текста задачи может служить хорошим средством, облегчающим поиск способа решения и составления уравнения.

Обратим внимание на некоторые основные требования, предъявляемые к оформлению краткой записи задачи: краткость и ясность; использование символов и принятых сокращений; словесные пояснения должны быть немногословными и четкими; взаимосвязанные величины сближены в расположении. При решении задач, имеющих два-три данных и одну-две связи, целесообразно использовать прием записи текста задачи в строчку или столбик. Например, задача: “Три измерения прямоугольного параллелепипеда равны 4 см, 25 см и 13 см. Найдите объем”. Краткая запись строчкой или столбцом достаточна для нахождения способа ее решения: 4 см, 25 см, 13 см. При оформлении такой записи указываются лишь числовые данные и их наименования, а связи указать невозможно.

Использование перечисленных приемов оформления краткой записи задачи будет эффективным, если учитель проводит специальную работу с учащимися по формированию умений читать краткие записи задачи. С этой целью при проведении устной работы учитель предлагает учащимся прочитать краткую запись задачи или после выполнения краткой записи некоторой задачи ставится задание – прочитать ее. При этом у учащихся формируются навыки перевода текста задачи в виде схемы, таблицы на словесный язык, выделения данных и искомых в тексте, а также обобщения связей данных и искомых задачи.

Интересен прием установления соответствия между краткими записями (записью) и данными текстами задач (и наоборот), как правило, не решая эти задачи. Учащиеся анализируют: в чем отличие, сходство краткой записи и данного текста задачи, выясняют связи между данными, искомыми, данными и искомыми задачи, вникают в каждое слово текста задачи. Не находя решения этих задач, учащиеся готовятся к решению такого рода задач.

Обучению учащихся выполнению краткой записи задачи способствует прием работы учителя, требующий составления текста задачи по ее краткой записи. Например, задание: сформулируйте текст задачи и решите ее, используя краткую запись:

“Какова площадь всего поля, если

I. – на 324 га больше, чем   или в 4 раза больше, чем
II. –
III. – 256 га

Учащиеся должны осмыслить те связи и данные, которые выделены краткой записью, перевести символические знаки на язык текста, записать вопрос задачи и ее условие. Выполняя такие задания, учащиеся овладевают одним из общих приемов работы над текстом задачи – рациональной записью ее условия.

Таким образом, обучая учащихся оформлению краткой записи текста задачи, используя соответствующие приёмы, учитель должен сформировать у учащихся умения оформлять краткую запись в виде таблицы, схемы, строчки или столбца; читать краткую запись задачи; составлять задачу по её краткой записи.

Оформление рисунков, чертежей при решении задач является хорошим средством обучения учащихся решению задач. В тех случаях, когда выполнение рисунков, чертежей действительно необходимо, следует шире их использовать при решении задач.

Выполнение рисунка, чертежа по тексту задачи способствует наглядной конкретизации содержания задачи, пониманию ее условия и вопроса, нахождению способа ее решения. Верно выполненный чертеж, рисунок по тексту задачи позволяет фиксировать ход мыслей, рассуждений при решении задачи, в некотором смысле гарантирует правильное понимание условия задачи. Чертеж, рисунок при решении задачи используется как средство, иллюстрирующее условие задачи, облегчающее поиски решения задачи, формирующее умение решать задачи. Учитель при реализации приёмов оформления краткой записи руководствуется тем, что главное не в оформлении таблиц и схем. Главное – выработать умение рассуждать, обобщать, сравнивать и т.п.

Заметим, что при выполнении чертежей, рисунков по тексту задачи следует придерживаться некоторых требований к ним:

– чертеж, рисунок должен соответствовать задаче;

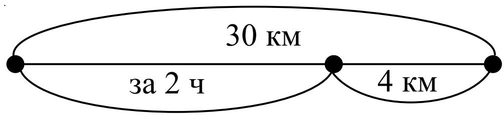
– чертеж, рисунок должен быть наглядным, четким;

– на чертеже, рисунке должны быть (по возможности) все данные, входящие в условие задачи;

– выделенные на рисунке, чертеже данные и искомые должны соответствовать тексту задачи или общепринятым обозначениям.

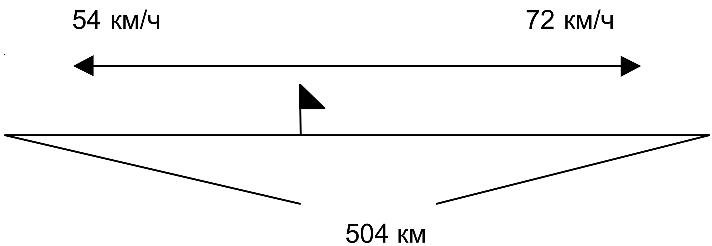
Например, при решении задач на движение, нахождение числа по его части или доле данного числа, вычисление площади или объема фигур, почти всегда требуется выполнение чертежей, рисунков. Выполняя чертеж (рисунок), учащиеся глубже вдумываются в содержание задачи, наглядно представляют его, абстрагируясь от некоторых сюжетных подробностей, скорее находят путь к решению задачи.

Для формирования у учащихся умения выполнять чертеж по тексту задачи оказывается недостаточно постоянного обращения учителя к учащимся с просьбой выполнить чертеж. Нужны специальные задания, способствующие формированию этого умения. Иногда полезно давать учащимся задания по выполнению чертежей или рисунков по тексту задач. Например, оформить чертеж к задаче: “Велосипедист ехал 2 ч с некоторой скоростью. После того, как он проедет еще 4 км, его путь станет равным 30 км. С какой скоростью ехал велосипедист?”. Выполнение чертежа к данной задаче облегчает нахождение способа её решения.



Учитель обращает внимание учащихся на четкое и правильное выполнение чертежей по тексту задачи, показывает образцы оформления чертежей, обучает выполнению чертежей и рисунков. Учащиеся убеждаются в необходимости выполнения чертежей и рисунков как для проведения анализа текста задачи, так и для нахождения способов её решения.

Учитель нередко использует прием, в некотором смысле обратный предыдущему: чтение чертежей, рисунков, выполненных по тексту задачи. Например, учащимся предлагается чертеж.



и задание: не добавляя данных, составьте задачу. Учащимся необходимо, осуществив анализ чертежа, понять, что в задаче идет речь о движении двух тел в противоположных направлениях из одного и того же места, скорости их движения известны, известно расстояние, которое будет или стало между ними в результате движения. В результате попыток сформулировать вопрос задачи учащиеся получают вывод, что в вопросе задачи речь должна идти о нахождении времени движения этих тел.

Приведем один из текстов составленных задач: “С одной станции одновременно в противоположных направлениях вышли два поезда. Скорость одного из них 54 км/ч, а скорость другого – 72 км/ч. Через сколько часов расстояние между ними будет равно 504 км?”. Здесь учащиеся должны не только прочитать текст задачи, правильно выделить данные и искомые, связи между ними, но и осуществить переход от отвлеченных математических обозначений к словесному описанию задачи. Аналогичная работа может быть проведена при выполнении задания: составьте задачу по рисунку и решите ее:

Полезны задания по установлению соответствия текста (ов) задачи чертежу (ам). Анализируя чертежи и тексты задач, учащиеся исследуют данные, искомые задачи, связи между ними, что способствует обучению решению задач.

Таким образом, мы рассмотрели содержание работы учителя и учащихся по формированию умений решать задачи на первом этапе процесса решения задачи. А именно:

I Приемы, формирующие умение читать текст задачи:

- Использование образцов чтения.
- Предоставление времени для чтения.
- Проведение специальной работы над текстом задачи.

II Приемы работы над усвоением содержания задачи:

- Изменение числовых данных задачи.
- Изменение сюжета задачи.
- Изменение сюжета и числовых данных задачи.

III Приемы, формирующие умения выделять вопрос и условие задачи:

- Формулирование всевозможных вопросов задачи.
- Формулирование какого-либо одного из вопросов задачи.
- Нахождение необходимых данных для ответа на вопрос задачи.
- Формулирование всевозможных условий к данному вопросу.
- Составление задачи по ее вопросу.

IV Приемы оформления краткой записи задачи:

- Оформление краткой записи задачи в виде таблицы.
- Оформление краткой записи в виде схемы.
- Оформление краткой записи в строчку (столбик).
- Чтение краткой записи задачи.
- Установление соответствия между краткой записью и данными задачами.
- Составление задачи по ее краткой записи.

V Приемы оформления чертежей, рисунков по тексту задачи:

- Оформление чертежа (рисунка) по тексту задачи при ее решении.
- Оформление чертежа (рисунка) по тексту задачи.
- Чтение чертежа (рисунка), выполненного по тексту задачи.
- Установление соответствия между чертежом и текстами задач.
- Составление задачи по рисунку (чертежу).

4.1.2 *Приемы формирования умений находить способ решения задачи*

Этап поиска способа решения задачи является центральным, поскольку именно от него зависит успешность решения задачи. Найденная идея решения задачи применяется к конкретным условиям, и возникает план решения. После нахождения плана решения задачи в дальнейшем от учащихся требуются лишь технические умения выполнения действий и операций.

Самый трудный вопрос методики обучения решению задач – как организовать работу учащихся по проведению поиска способа решения задачи.

Известны приемы поиска способа решения задачи по методике Д.Пойа: система эвристик, направленная на нахождение путей решения задачи. Знание и применение этих эвристик в системе работы учителя совершенно необходимо. Но использование этих эвристик ввиду их общности практически невозможно. Появились аналогичные системы эвристик, предложенные Ю.М. Колягиным и Л.М. Фридманом. Как справедливо утверждают авторы этих эвристик, система вопросов помогает учащимся отыскивать тот или иной способ решения. Использование же в явном виде этих эвристик весьма затруднительно.

Раскроем содержание работы учителя и учащихся на этапе поиска способа решения задачи. Известно, что анализ текста задачи проводится до тех пор, пока не возникает какая-нибудь идея решения. Результатом этого этапа является план решения задачи. Детали этого плана проверяются действиями, корректируются или видоизменяются, постепенно возникает точный и полный перечень действий.

Проведение первичного анализа текста задачи позволяет подготовить учащихся к нахождению в тексте задачи искомых и данных, установлению связей между данными, искомыми, данными и искомыми. Начинается этап вторичного анализа текста задачи: происходит уточнение "искомого", выяснение того, в чем оно состоит, какими свойствами обладает, в какой связи находится с данными задачи.

При решении каждой задачи следует приучать учащихся отвечать на вопросы типа:

– О чем идет речь в задаче?

– Какие процессы рассматриваются в задаче?

– В чем состоит вопрос задачи? Что является искомым?

– Какова связь между искомыми, данными, данными и искомыми?

– От чего зависят искомые (данные) задачи? и т.п.

Каждое выделяемое данное должно рассматриваться обязательно относительно вопроса задачи. Приведем пример анализа текста задачи "Расстояние между двумя пунктами – 909 км. Навстречу друг другу одновременно вышли два поезда. Первый поезд прошел 5/9, а второй – 1/3 всего пути. На каком расстоянии находятся поезда друг от друга?" Наряду с другими данными условия задачи выделяем данное – "расстояние - 909 км". Его рассмотрение обязательно предполагает учет вопроса задачи, иначе пришлось бы вспоминать, что расстояние можно вычислить, зная время и скорость движения. В процессе проведения анализа текста задачи происходит соотнесение этого данного с требованием вопроса задачи.

Этап поиска способа решения задачи связан с длительными рассуждениями, в основе которых лежит так называемый аналитический или синтетический путь мышления (аналитико–синтетический путь). Именно через анализ и синтез содержания текста задачи учащиеся учатся находить связи между отдельными частями задачи. При проведении поиска способа решения задачи мысль учащегося должна идти от данных к искомому и от искомого к данным.

В процессе анализа задачи учащиеся стремятся найти идею будущего решения, распознать в ней знакомое, вспомнить родственную задачу. Одним из приемов обучения учащихся решению задач является прием организации поиска путем сведения задачи к ранее решенным задачам, распознавание ее вида (типа). Это может быть указание аналогичной задачи, решенной ранее; предложение решить вспомогательную задачу, наводящую на решение основной и т.п. При всей положительности результатов применения этого приема частое его использование не приводит к обучению учащихся решению задач. Наши исследования подтверждают это: не следует акцентировать внимание учащихся на применении этого приема, тогда и высказываний “мы таких задач не решали” будет меньше.

При решении задачи учащиеся сталкиваются с необходимостью перевода текста задачи на математический язык. Этап формализации наиболее успешно проходит при условии правильного выявления связей между данными, искомыми, данными и искомыми. Формирование навыков такого перевода у учащихся необходимо осуществлять при решении каждой задачи. Результатом такого перевода может являться составленное уравнение.

С целью обучения переводу текста задачи на язык математики необходимо предлагать учащимся и обратные упражнения – перевод математического текста на словесный текст задачи. Это могут быть задания описания ситуации или составления новой задачи. Например, учащимся предложено уравнение: $x + (x - 30) + 3\ (x - 30) = 830$ и задание – составить задачу по уравнению. Учащиеся анализируют представленный им математический текст и замечают, что в составляемой задаче речь может идти о трёх состояниях: x, $(x\text{-}30)$ и $3\ (x - 30)$. Выбирая сюжет задачи, переводя математические символы на словесный текст, учащиеся сформулировали такие задачи

“За три дня было продано 830 кг апельсинов. Во второй день продали на 30 кг меньше, чем в первый, а в третий – в 3 раза больше, чем во второй. Сколько килограммов апельсинов было продано в первый день?”

“Трое учащихся задумали числа, составляющие в сумме 830. Какое число задумал каждый из учеников, если число второго ученика на 30 меньше числа первого ученика, а число третьего – в 3 раза больше числа второго ученика”.

Анализ задач школьных учебников математики с точки зрения полноты постановки задачи показывает, что почти все задачи всегда имеют решение и содержат все необходимые для этого данные. Как правило, авторами учебников и учителями для школьных задач специально, для удобства их решения подбираются условия, числовые данные, количество искомых и т.д. В большинстве действующих школьных учебников (за исключением [10, 11]) практически нет задач с недостающими, лишними, противоречивыми данными, в которых требуется выбирать необходимые для решения данные и проводить сложную аналитическую работу. Сама постановка таких задач позволяет обратить внимание учащихся на важность тщательного анализа задачи – ее условия и вопроса. Кроме того, выполнение такого рода заданий способствует формированию общего умения решать задачу, развитию мышления, воспитанию готовности к практической деятельности.

Как показывает наш опыт, нет необходимости составлять специальные задания на решение задач с недостающими, лишними, противоречивыми данными, можно использовать задачи школьных учебников, несколько изменив их. В основном такая работа с измененными условиями задачи проводится на уроке в форме устных или полуписьменных упражнений. Учащимся предлагаются задания:

- Можно ли ответить на вопрос задачи: “За 3 метра ткани уплатили 90 р. В другой раз купили 6 метров ткани. Сколько рублей заплатили за ткань, купленную в другой раз?”;
- Достаточно ли данных для ответа на вопрос задачи: “Сколько денег получил рабочий, работая без брака, если премиальные составили 35% оклада”.

При выполнении, например, последнего задания учащиеся высказали также предположения: “Чтобы ответить на вопрос задачи, надо знать не только процент премиальных, но и сколько это будет рублей” (или “надо знать не только, сколько рабочий получил премиальных, но и каков его оклад”). Установив связи между данными, данными и искомыми, учащиеся дополнили текст и получили задачи:

– “Сколько денег получил рабочий, работая без брака, если премиальные составляли 35 % оклада. Месячный оклад рабочего – 1690 р.”.

– “Сколько денег получил рабочий, работая без брака, если премиальные составляют 35 % оклада. Рабочий получил 700 р. премии”.

Обращается внимание учащихся на то, что способ решения задачи с недостающими данными находится в зависимости от вводимого данного. При выполнении такого рода заданий учащиеся отвечают на вопросы:

– Достаточно ли данных для решения задачи?

– Нет ли лишних данных? Нет ли противоречивых данных?

– Какого данного не хватает, чтобы ответить на вопрос задачи?

Одним из составляющих компонентов умения решать задачи является умение актуализировать теоретические знания, необходимые для решения задачи. Под актуализацией знаний будем понимать деятельность ученика по выбору знаний, нужных для решения задачи. Результатом этой деятельности является переход имеющихся у школьников знаний в действенное состояние. Успех поиска способа решения задачи зависит от того, сумел ли ученик актуализировать нужные для этого знания.

С этой целью в арсенале приемов работы учителя должны быть, по крайней мере, следующие:

- использование практических работ;
- использование задач с недостающими (противоречивыми, лишними) данными;
- предъявление вспомогательной задачи;
- использование заданий типа: “Какие знания необходимы, чтобы ответить на вопрос задачи?”.

Например, учащимся предложена задача “Два велосипедиста выехали навстречу друг другу из двух поселков и встретились. Скорость первого велосипедиста 14 км/ч, а скорость второго – 17 км/ч. Каково расстояние между поселками?”. Проводимый анализ текста задачи позволяет им увидеть, что для нахождения расстояния, необходимо знать время движения каждого велосипедиста до встречи. Заметим, что дополнение текста задачи данным “встретились через три часа” проблемы не решает, потому что требуется уточнение: одновременно ли выехали велосипедисты?

Центральным звеном в процессе решения задачи является поиск способа ее решения, так как от выбора способа зависит решение всей задачи. Например, рассмотрим задачу: “Из города А в город В выехал велосипедист. Через 3 ч после его выезда из города В навстречу ему выехал мотоциклист со скоростью 42 км/ч. Через 2 ч после выезда мотоциклиста они встретились. Найдите скорость велосипедиста, если расстояние между городами А и В равно 144 км”. После проведения анализа текста задачи возникает идея решения, заключающаяся в том, что для ответа на вопрос задачи необходимо найти путь, пройденный велосипедистом, а для этого – путь, пройденный мотоциклистом, и время движения велосипедиста. Обсудив эту идею, учащиеся устно составляют план решения задачи. Необходимо найти:

1) путь, пройденный мотоциклистом.
2) путь, пройденный велосипедистом.
3) время движения велосипедиста.

4) скорость велосипедиста.

Иногда при составлении плана решения задачи полезно использовать систему вспомогательных задач. Суть этого приема состоит в том, что данную задачу, решение которой не известно, постоянно сводят к более простым задачам, пока не достигнут задач, решение которых известно. Последовательность решения этих вспомогательных задач и представляет в некотором роде план решения задачи.

Таким образом, на втором этапе процесса решения задачи учитель должен формировать у учащихся, по крайней мере, следующие умения:

- проводить вторичный (более детальный) анализ текста задачи;
- переводить словесный текст задачи на математический язык;
- устанавливать полноту постановки задачи;
- актуализировать теоретические знания, необходимые для решения задачи;
- осуществлять поиск и находить план решения задачи.

4.1.3 Приемы формирования умений оформлять найденный способ решения задачи

На третьем этапе процесса решения задачи осуществляется реализация найденного способа ее решения. Учащиеся должны, зачастую самостоятельно, оформить запись найденного способа решения и его результата. Прежде всего, учащиеся должны выбрать ту или иную форму записи найденного способа решения. Эта форма должна быть краткой и в то же время полной и образной, а также достаточной для возможного воспроизведения найденного способа решения задачи.

Учитель показывает учащимся образцы оформления найденных способов решения задачи. Особенность работы учителя при демонстрации образцов записи решения задачи заключается в том, чтобы обратить внимание учащихся на необходимость корректировки его правильности, с соотнесением условия задачи и ее вопроса. Следует рекомендовать учащимся при осуществлении плана решения задачи контролировать каждый свой шаг, доказывать его правильность ссылками на соответствующие математические факты. Это не означает, что всякий раз необходимо требовать такое обоснование решения задачи. Важно, чтобы учащиеся понимали значимость проведения такой работы. Рассмотрим различные формы записи найденного способа решения задачи.

1 Вопросно-ответная форма записи

Задача: “В одно и то же время из одного и того же пункта выехали в противоположных направлениях два лыжника, один – со скоростью 11 км/ч, другой – со скоростью 13 км/ч. Какое расстояние между лыжниками будет через два часа?”. После осуществления поиска способа решения задачи учащиеся записывают вопросы и соответствующие им действия:

– Какова скорость удаления лыжников?

11 + 13 = 24 (км/ч)

– Каков путь, пройденный лыжниками за два часа?

24 • 2 = 48 (км)

Ответ: 48 км.

Запись вопроса обеспечивает более сознательное решение по сравнению с записью одних только действий. Если уровень навыков у учащихся в письме достаточен, то следует практиковать решение задач с записью вопросов.

2 Запись решения задачи с последующими пояснениями

Задача: “Из Петербурга в Москву в 9 ч утра выехала грузовая машина со скоростью 48 км/ч. В 10 ч из Москвы в Петербург выехала легковая машина со скоростью 82 км/ч. Какое расстояние было между двумя машинами в 12 ч того же дня, если между Москвой и Петербургом 650 км?”.

Решение: 12 – 9 = 3 (ч) – время в пути грузовой машины,

48 · 3 = 144 (км) – путь грузовой машины,

12 – 10 = 2 (ч) – время в пути легковой машины,

82 · 2 = 164 (км) – путь легковой машины,

144 + 164 = 308 (км) – путь, пройденный легковой и грузовой машинами,

650 – 308 = 342 (км) – расстояние между легковой и грузовой машинами к 12 ч дня.

Ответ: 342 км.

3 Запись решения числовой формулой

Например, 650 – 48(12 – 9) + 82(12 – 10) = 342 (км), где 48км/ч, 82 км/ч – скорость машины, 650 км – расстояние между городами, 12 – 9 (ч), 12 – 10 (ч) – время движения машин. Такая форма записи обычно применяется при решении задач на вычисление площади (объема) геометрических фигур.

4 Запись решения задачи только действиями.

5 Оформление решения задачи в виде рисунка, чертежа.

6 Оформление решения задачи в виде таблицы, схемы.

*7 Оформление записи решения задачи составлением уравнения***.**

Задача: “Бригада намечала засеять поле в 120 га за определенный срок. Однако, перевыполняя запланированную ежедневную норму на 10 га в день, она сумела закончить сев на 2 дня раньше срока. Сколько гектаров засевала бригада ежедневно?”.

Пусть x га – дневная норма засева бригады, тогда

(x + 10) га – фактическая норма засева бригады,

$\dfrac{120}{x}$ дн. – время, за которое бригада должна была засеять поле,

$\dfrac{120}{x+10}$ дн. – фактическое время засева,

$\dfrac{120}{x}-\dfrac{120}{x+10}$ (дн.) – разница во времени засева по плану и фактически, что по условию задачи составляет 2 дня.

$$\frac{120}{\boldsymbol{x}}-\frac{120}{\boldsymbol{x}+10}=2, \qquad \boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{x}+10)\neq 0.$$

$$120\cdot(x+10)-120\cdot x=2\cdot x\cdot(x+10),$$

$$120\cdot x+1200-120\cdot x-2\cdot x^2-20\cdot x=0,$$

$$x^2+10x-600=0,$$

$$D=2500, \quad x_1=20, \quad x_2=-30.$$

$x\cdot(x+10)\neq 0;\quad 20\cdot(20+10)\neq 0$ – верно.

$-30\cdot(-30+10)\neq 0$ – верно

– 30 – не удовлетворяет смыслу задачи.

20 га – ежедневная норма засева по плану.

20 + 10 = 30 (га) – ежедневная фактическая норма засева.

После того, как найден ответ задачи, необходимо выполнить смысловую проверку по тексту задачи. Если дневная норма засева намечалась 20 га, то все поле будет засеяно за 120 : 20 = 6 (дн.). По условию задачи бригада за день выполняла норму в 30 га, значит, всю работу выполнит за 120 : 30 = 4 (дн.), что должно быть на 2 дня меньше, чем по плану. Действительно, 6 – 2 = 4 (дн.).

Ответ: 30 га засевала бригада ежедневно.

Заметим, что умение оформлять запись результата решения задачи следует формировать в процессе решения задачи, показывая образцы и обучая ясной, точной записи результата решения. При решении задачи составлением уравнения рекомендуется учащимся писать подробный ответ, чтобы они понимали реальное значение полученного корня уравнения, а не записывали формально корень уравнения в ответ задачи.

Рассмотрим еще один способ решения и оформления этой задачи.

Пусть за *x* дней бригада планировала засеять поле.

	Норма засева (га/дн)	Время (дн)	Площадь засева (га)
По плану	$\frac{120}{x}$	x	120
Фактически	$\frac{120}{x-2}$	x – 2	120

$\frac{120}{x-2} - \frac{120}{x}$ (га/дн) – разница в норме засева по плану и фактически, что по условию задачи равно 10 га в день.

$\frac{120}{x-2} - \frac{120}{x} = 10$, $x \cdot (x-2) \neq 0$,

$120 \cdot x - 120 \cdot (x-2) = 10 \cdot x \cdot (x-2)$,

$120 \cdot x - 120 \cdot x + 240 = 10 \cdot x^2 - 20 \cdot x$,

$10 \cdot x^2 - 20 \cdot x - 240 = 0$,

$x^2 - 2 \cdot x - 24 = 0$,

по теореме Виета:

D = 100 > 0, $x_1 + x_2 = 2$,

$x_1 \cdot x_2 = -24$;

$x_1 = 6$, $x_2 = -8$.

$6 \cdot (6-2) \neq 0$ – верно,

$-8 \cdot (-8-2) \neq 0$ – верно.

– 8 – не удовлетворяет смыслу задачи.

За 6 дней бригада планировала засеять поле, за 6 – 2 = 4 (дн) – бригада засеяла поле.

$\frac{120}{6} = 20$ (га/дн) – норма засева по плану, $\frac{120}{4} = 30$ (га/дн) – фактическая норма засева.

Ответ: 30 га засевала бригада ежедневно.

4.1.4 Приемы формирования умений завершать работу над задачей

Итак, задача решена и ответ получен. Возникает вопрос – как организовать деятельность учащихся в процессе решения задачи на заключительном этапе ее решения? Ответ на этот вопрос неоднозначен [20; 28; 45; 52]. Мы придерживаемся точки зрения тех авторов, которые высказываются за проведение работы на заключительном этапе процесса решения задачи.

Считаем необходимым на заключительном этапе процесса решения задачи формировать у учащихся умения:

– давать оценку способа решения и его результата;
– осуществлять контроль решения задачи;
– уяснять способ решения задачи;
– получать выводы по решению задачи;
– составлять новые задачи.

Мы рассматриваем четвертый этап процесса решения задачи – это этап, проверки хода ее решения и его результата. Здесь важно соотнести условие задачи, ее вопрос и полученный результат. Важность этой работы объясняется тем, что в ходе ее проведения человеку удается переосмыслить задачу. Главные усилия учащихся здесь направлены не на то, как решить задачу, а на оценку найденного способа решения и его результата.

Основное содержание деятельности учащихся на заключительном этапе процесса решения задачи заключается в осмысливании выполненного решения задачи, повторении узловых моментов решения, составлении задач, выявлении условий возможности применения приемов, которые были использованы в данном решении.

Действительно, всякая деятельность человека, в том числе – деятельность учащихся по решению задач, неизбежно требует умения планировать свой труд и контролировать его результаты. Нередко только в процессе осуществления контроля учащиеся вникают в содержание задачи и осознают связи данных, искомых, данных и искомых. Все это способствует воспитанию у них потребности выполнять работу ответственно, доводить ее до конца, самим проверять качество выполнения работы, то есть создаются условия для большей их самостоятельности при решении задач.

В системе эвристик, предлагаемых Д. Пойа и Ю.М. Колягиным, направленных на обучение учащихся решению задач, есть и такая эвристика: “Сделайте грубую прикидку правильности результата решения задачи, соотнеся его с условием (здравым смыслом)” [22, 23, 27]. Однако, этого не достаточно для формирования у учащихся умения осуществлять контроль при решении задач, поэтому учитель использует и другие приёмы:

- воспитание у учащихся потребности контролировать каждый шаг решения задачи;
- осуществление пошагового контроля при решении задачи;
- проверка учащимися результата решения задачи путем соотнесения условий и требований задачи (прикидка на здравый смысл);
- решение задач несколькими способами;
- сравнение найденных способов решения;
- составление и решение задачи, обратной данной.

Человеку, выполняющему какую-либо деятельность, свойственно ошибаться, поэтому возникает необходимость проанализировать решение, обосновать и проверить каждый его шаг. Такой контроль решения проводится попутно, по мере осуществления решения (чаще всего устно). Иногда выполнение его происходит неявно, как бы подсознательно. Контролируя каждый шаг решения, учащиеся осмысливают те теоретические положения, которые помогли нахождению способа решения задачи; делают вывод о том, как осуществляется поиск решения; стремятся увидеть полезность решенной задачи, возможность ее применения при решении других задач.

Решение одной задачи несколькими способами часто бывает более полезным, чем решение одним способом нескольких задач, так как при оценке способов ее решения используются такие умственные операции, как анализ, сравнение, сопоставление, обобщение. Как установлено в психологии обучения, все это оказывает свое влияние на развитие мышления учащихся. Значение использования этого приема проявляется в овладении общими методами и приемами решения задач. Обучение решению задач различными способами требует использования тех или иных теоретических положений, что способствует успешному изучению математики.

На закрепление правила сложения дробей с одинаковыми знаменателями решили задачу: “Для посадки леса высадили участок, площадь которого 300 га. Дуб высадили на 3/10 участка, а сосну – на 4/10 участка. Сколько гектаров занято дубом и сосной вместе?”. Учащиеся предложили такие решения:

а) 1. Сколько гектаров занято дубом?

$300:10\cdot 3=90$ (га)

2. Сколько гектаров занято сосной?

$300:10\cdot 4=120$ (га)

3. Сколько гектаров занято дубом и сосной вместе?

$90+120=210$ (га)

Ответ: 210 га.

б) 1. Какую часть участка занимают дуб и сосна вместе?

$$\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$$

2. Сколько гектаров занято дубом и сосной вместе?

$300 : 10 \cdot 7 = 210$ (га)

Ответ: 210 га.

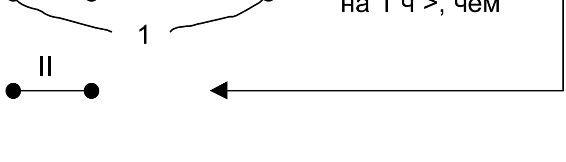
Учитель предлагает сравнить найденные способы решения задачи, выделить более рациональное решение. Предпочтение отдается обычно одному из них – тому, который требует меньшего числа или более легких операций, из которых складывается решение задачи. Результаты сравнения найденных способов решения и полученные выводы учащиеся используют в дальнейшем при решении аналогичных задач. Иногда учитель ставит вопрос: “Нельзя ли найти другое решение? Нельзя ли получить тот же результат иначе?”. Учащиеся убеждаются в том, что получение того же результата другим способом позволяет считать решение задачи правильным.

Например, предложили решить задачу: “Стояло несколько коробок. В каждой коробке было по 18 игрушек. Когда в эти коробки положили еще 10 игрушек, в них стало 82 игрушки. Сколько было коробок?”. Большинство учащихся решило задачу с помощью уравнения: “Пусть было *x* коробок, тогда 18*x* было игрушек. Когда положили 10 игрушек, их стало 18*x* + 10, то есть 82 игрушки. Уравнение: 18*x* + 10 = 82, 18*x* = 72, *x* = 72 : 18, *x* = 4”. Ответ: 4 коробки. Некоторые учащиеся решили задачу по вопросам: 1. Сколько игрушек было в коробках? 82 – 10 = 72 (игрушки). 2. Сколько было коробок? 72 : 18 = 4 (коробки).

Рассмотрим задачу: “Две машинистки при совместной работе затрачивают на перепечатку рукописи на 1 ч больше, чем затрачивает на половину рукописи первая машинистка и $\frac{1}{3}$ рукописи вторая машинистка. За сколько часов перепечатает рукопись каждая машинистка?”

При решении этой задачи целесообразно выполнить чертеж, соответствующий ситуациям задачи:

1) 

2) 

Краткая запись:

	Y	T	A
I и II		на 1 ч больше, чем	1
I			$\frac{1}{2}$
II			$\frac{1}{3}$

Анализ текста задачи позволяет ввести переменную и выбрать основу для составления уравнения. В соответствии с выбранной основой для составления уравнения будем рассматривать найденные способы решения задачи.

I способ. Известно, что совместная производительность машинисток складывается из производительности каждой машинистки:

Основа:

$$\boxed{\upsilon_{I}} + \boxed{\upsilon_{II}} = \boxed{\upsilon_{I\ и\ II}}$$

или

$$\boxed{\text{Производ. I машин.}} + \boxed{\text{Производ. II машин.}} = \boxed{\text{Совмест. производ. I и II}}$$

Пусть *x ч* – потребуется I-ой машинистке для перепечатки $\frac{1}{2}$ рукописи.

	V (ед. раб./ч)	T (ч)	A (ед. раб.)
I и II	$\frac{1}{x+1}$	$x+1$	1
I	$\frac{1}{2x}$	X	$\frac{1}{2}$
II	$\frac{1}{3x}$	X	$\frac{1}{3}$

Совместная производительность I-й и II-й машинистки $\frac{1}{x+1}$ (ед.

раб./ч) равна по условию задачи $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}$ (ед. раб.).

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x},\quad x+1\neq 0,\quad x\neq 0$$

$$\frac{1}{x+1}=\frac{5}{6x},$$

$$6x=5(x+1),$$

$$6x=5x+5,$$

$$6x-5x=5,$$

$$x=5.$$

5 ч потребуется I-ой машинистке для перепечатывания $\frac{1}{2}$ рукописи, значит для перепечатки всей рукописи ей потребуется 10 ч, а II-ой машинистке потребуется – 15 ч.

Ответ: 10 ч, 15 ч.

II способ. За основу для составления уравнения можно взять разницу во времени между работой I-й и II-й машинисток с работой I-й машинистки.

Основа:

$$\boxed{\mathbf{t_{I\ и\ II}}} + \boxed{\mathbf{t_{I}}} = \boxed{\mathbf{1}}$$

Пусть *x ч* – потребуется I-й машинистке на перепечатку $\frac{1}{2}$ рукописи.

	Y	T	A
I и II	$\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}$	$\frac{1}{\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}}$	1
I	$\frac{1}{2x}$	X	$\frac{1}{2}$
II	$\frac{1}{3x}$	X	$\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}}-x=1$$ (ч) – разница во времени между работой I-й и II-й машинисток и работой I-й машинистки по условию задачи 1 ч.

$$\frac{1}{\frac{1}{2\boldsymbol{x}}+\frac{1}{3\boldsymbol{x}}}-\boldsymbol{x}=1, \qquad \frac{1}{\frac{5}{6\boldsymbol{x}}}-\boldsymbol{x}=1, \qquad \frac{1}{5}\boldsymbol{x}=1, \qquad \boldsymbol{x}=5.$$

Ответ: 10 ч; 15 ч.

III способ. Можно за х ед. раб/ч взять совместную производительность I-й и II-й машинистки.

Основа: $\boxed{\upsilon_{\text{I и II}}}$ $\boxed{\upsilon_{\text{I}}}$ $\boxed{\upsilon_{\text{II}}}$.

Совместная производительность I-ой и II-ой машинисток *x* (*ед. раб./ч*) складывается из производительности I-ой – $\dfrac{1/2}{\frac{1}{\boldsymbol{x}}-1}$ (*ед. раб./ч*) и II-ой – $\dfrac{1/3}{\frac{1}{\boldsymbol{x}}-1}$ (*ед. раб./ч*).

$$x=\frac{1/2}{\frac{1}{x}-1}+\frac{1/3}{\frac{1}{x}-1},\ x\neq 0,\quad 1-x\neq 0.$$

$$\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{x}}{2(1-\boldsymbol{x})}+\frac{\boldsymbol{x}}{3(1-\boldsymbol{x})},$$

$$x=\frac{5x}{6(1-x)},$$

$$6x(1-x)=5x,$$

$$6x(1-x)-5x=0,$$

$$x(6(1-x)-5)=0,\quad x\neq 0,$$

$6-6x-5=0$,

$6x=1$,

$x=\frac{1}{6}$.

$\frac{1}{6}$ ед. раб./ч – общая производительность I-й и II-й машинисток,

$\frac{1}{x}-1=\frac{1}{1/6}-1=6-1=5$ (ч) потребуется I-й машинистке для выполнения $\frac{1}{2}$ работы, тогда вся работа будет выполнена за 10 ч, II-й машинистке 5 ч на выполнение $\frac{1}{3}$ работы, тогда вся работа будет выполнена за 15 ч.

Ответ: 10 ч; 15 ч.

IV *способ*

Основа для составления системы

$$\begin{cases} \boxed{\mathbf{t}_{\mathbf{I\ и\ II}}} - \boxed{\mathbf{t}_{\mathbf{I}}} = 1, \\ \boxed{\mathbf{t}_{\mathbf{I}}^{/}} = \boxed{\mathbf{t}_{\mathbf{II}}^{/}}. \end{cases}$$

За *x ч* – перепечатывает I-ая машинистка всю работу;

За *y ч* – перепечатывает II-ая машинистка всю работу.

Система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\frac{1}{\boldsymbol{x}}+\frac{1}{\boldsymbol{y}}}-\dfrac{\boldsymbol{x}}{2}=1, \\ \dfrac{1/2}{\frac{1}{\boldsymbol{x}}}=\dfrac{1/3}{\frac{1}{\boldsymbol{y}}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\frac{1}{\boldsymbol{x}}+\frac{1}{\boldsymbol{y}}}-\dfrac{\boldsymbol{x}}{2}=1, \\ \boldsymbol{x}=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{y}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{y}=15, \\ \boldsymbol{x}=10. \end{cases}$$

Ответ: 10ч; 15ч.

Обсуждение решения данной задачи разными способами способствует осуществлению контроля найденного решения, а также обобщению и выбору наиболее рационального способа решения задачи. Рассмотрение на заключительном этапе различных способов решения задачи способствует формированию у учащихся навыков самоконтроля осуществляемой деятельности, оценке найденных способов решения и т.п. Все это, несомненно, способствует формированию у учащихся общего умения решать задачи, обучению учащихся в процессе деятельности по решению задач.

В достаточно простых случаях учащиеся могут осуществить контроль правильности найденного способа решения и его результата путем составления и решения так называемой обратной задачи. Этот прием заключается в следующем. Часть данных исходной задачи принимают за искомые, а некоторые искомые становятся данными. Затем составляется задача, обратная данной, путем введения в ее условие полученного ответа и исключения одного из известных данных, становящегося искомым. Учащиеся находят решение составленной задачи. Его результат должен совпадать со значением исключенного данного.

Например, решена задача: “На уборке картофеля за день собрали 1650 кг. После обеда собрали в 2 раза меньше, чем до обеда. Сколько картофеля собрали до обеда?”, записан ответ: 1100 кг картофеля собрали до обеда. Затем учитель предлагает составить задачу, обратную данной, с вопросом: “Сколько картофеля собрали за день?”. Учащиеся могут предложить для составления обратной задачи исключить из текста данное “за день собрали 1650 кг картофеля” и ввести другое данное – “1100 кг картофеля собрали до обеда”. Если при решении обратной задачи получим в ответе 1650 кг, то данная задача решена правильно.

Иногда учащиеся испытывают затруднения, поэтому приходится ставить вопросы типа: “Что необходимо сделать, чтобы составить обратную задачу? Какое данное исключить из ее текста? Какое данное ввести? Какой вывод можно сделать после решения обратной задачи?”. Практическая реализация ответов на данные вопросы привела к обратной задаче: “На уборке картофеля до обеда собрали 1100 кг. После обеда собрали в 2 раза меньше, чем до обеда. Сколько картофеля собрали за день?”. Полученный ответ 1650 кг собрали картофеля за день, убеждают учащихся в правильности найденного решения исходной задачи.

Учитель после решения задачи может предложить составить одну из обратных задач и решить ее. Например, решена задача: “Расстояние между двумя поездами, идущими навстречу друг другу, равно 300 км. Через сколько часов поезда встретятся, если будут идти без остановок, один со скоростью 80 км/ч, другой – 70 км/ч”. Учащимся предложено составить и решить одну из обратных задач. В результате чего составлены и решены следующие задачи:

- “Из двух пунктов одновременно навстречу друг другу выехали два поезда и встретились через 2 ч, идя без остановок. Найдите расстояние между пунктами, если скорость одного – 80 км/ч, а другого – 70 км/ч”.

- “Расстояние между двумя поездами, идущими навстречу друг другу, равно 300 км. Через 2 ч поезда встретились, идя без остановок. Найдите скорость одного из них, если скорость другого – 80 км/ч (70 км/ч)?”.

Естественно, что использование этого приема возможно далеко не для всех задач, а иногда – просто громоздко. Учителю следует продумать систему заданий, где это возможно, на составление и решение обратных задач: составьте задачу, обратную данной, исключив данное …; составьте задачи, обратные данной.

Составление задач, обратных данной, помогает учащимся видеть структуру задачи, извлекать дополнительную информацию, заключающуюся в новых связях между данной и составленной задачей; одно и то же данное используется в различных рассуждениях и находится разными путями в данной и обратной задачах. Как показывает опыт, выполнение заданий на составление обратной задачи представляет собой качественно новое упражнение, способствующее формированию умений решать задачи. Сам процесс составления обратных задач способствует выработке у учащихся умения рассматривать всю задачу в целом, сознательно производить выбор действия на основе анализа. Психологическая особенность использования таких упражнений состоит в том, что к решению собственно составленных задач учащиеся относятся с большей ответственностью.

Итак, деятельность учащихся по решению задач требует от учащихся умения контролировать результаты своего труда. Нередко при решении задачи с помощью уравнения учащиеся формально выполняют контроль результата решения или в ответе задачи записывают корень уравнения, а не ответ на вопрос задачи.

Приведем пример формально выполненной проверки и оценки результата решения задачи. Учащимся предложено задание: вставьте пропущенные данные и решите задачу: “Велосипедист ехал … с некоторой скоростью. После того, как он проедет еще … км, его путь станет равным … км. С какой скоростью ехал велосипедист?”. Подбирая числовые данные, они допустили ошибку, которая привела к получению нереального ответа. Вот некоторые из таких ответов: “Скорость велосипедиста – 1 км/ч” или “Скорость велосипедиста – 120 км/ч”. Если бы учащиеся оценили результат решения задачи, то этого бы не произошло.

Среди приемов, направленных на воспитание потребности контролировать свою деятельность по решению задач, мы используем не только показ образцов выполнения пошагового контроля учителем, но и прием самостоятельного осуществления пошагового контроля учащимися, а также коллективный или индивидуальный поиск ошибок в решении задачи. Например, не только учащиеся, но и студенты – будущие учителя, как правило, “успешно” решают задачу: “В трех баках было вместе 50 литров бензина, причем в первом баке было на 10 литров больше, чем во втором. Когда из первого бака вылили в третий 26 литров, во втором и третьем стало поровну. Сколько бензина было в первом баке?”. Составляя уравнение: $x - 10 = (50 - x - (x - 10)) + 26$, получают ответ: в первом баке 32 л. У учащихся не возникает сомнения о нереальности полученного ответа, хотя на самом деле задача не имеет решения.

На наш взгляд, для осуществления не формального, а творческого подхода к задачам полезно при обучении математике использовать задачи с избыточными, лишними, недостающими, противоречивыми данными. Такая работа должна вестись систематически и целенаправленно. На первых порах можно спрашивать учащихся – нет ли в задаче лишних данных, в чем противоречие в условии задачи, какого данного не хватает для решения задачи? В дальнейшем же учащимся предлагать такие задачи, но заранее не предупреждать о том, что задачи поставлены неправильно. В случае затруднений при работе с такими заданиями учитель предлагает вопросы, помогающие справиться с заданием.

Как показывают наши исследования, нередко учащиеся неправильно интерпретируют результат решения задачи. Задача: “Из двух пунктов, расстояние между которыми 40 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Первый велосипедист проехал 3/8, а второй – 5/8 всего пути. На каком расстоянии они находились друг от друга?”. После ее решения учащиеся записали в ответе: расстояние между велосипедистами равно нулю.

Учитель должен приучать учащихся после нахождения способа решения и записи ответа снова обратиться к данной задаче, чтобы уяснить способ ее решения, получить выводы по задаче, по ее решению и т.д. С этой целью учитель ставит перед учащимися вопросы типа: “Как найдено решение? В чем состоит идея решения? Какие выводы можно сделать? Каков метод решения задачи?”. Отвечая на такие вопросы, учащиеся как бы подводят итог работы по осуществлению процесса ее решения, что способствует накоплению информации о процессах решения задачи, их структурах. Чтобы помочь учащимся лучше ориентироваться в задачной ситуации, учителю надо стремиться полностью использовать “входную информацию”, применяя прием, требующий ответа: “Что можно еще узнать?”. Например, задача: “Ширина прямоугольника – 132 см, а длина – на 47 см больше ширины. Найдите периметр прямоугольника”. После того, как задача решена, учащиеся предлагают вычислить площадь прямоугольника. Это способствует более полному использованию информации об условиях задачи.

Один из приемов дополнительной работы над задачей заключается в изменении текста задачи. Например, на этапе повторения учащиеся решили задачу: “Два поезда вышли одновременно навстречу друг другу из двух городов, расположенных на расстоянии 1260 км, и встретились через 7 ч после выхода. Скорость одного из них 80 км/ч. Найдите скорость другого поезда". Затем им предлагаются вопросы:

- Изменится ли решение, если: "встретились не через 7 ч, а через 2 ч, 5 ч, 9 ч?"; в тексте задачи слово "одновременно" отсутствует?; скорость первого поезда будет не 80 км/ч, а 60 км/ч, 100 км/ч?

- Возможно ли ответить на какие-нибудь другие вопросы, кроме сформулированного в задаче?

- Замените числовые данные задачи и решите ее. Изменится ли решение задачи?

- Изменится ли решение задачи, если изменить сюжет задачи, сохранив данные задачи?

- Изменится ли решение задачи, если изменить математическое содержание задачи, сохранив сюжет задачи и данные?

В результате ответов на вопросы были составлены и решены следующие задачи:

– "Два поезда вышли одновременно навстречу друг другу из двух городов, расположенных на расстоянии 390 км, встретились через три часа после выхода. Скорость одного из них – 70 км/ч. Найти скорость другого поезда".

– "Из двух сел одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода и встретились через 4 ч. Расстояние между селами – 36 км. Скорость одного пешехода – 4 км/ч. Найдите скорость второго пешехода".

– "Из двух городов одновременно навстречу друг другу вышли две машины и встретились через 7 ч после выхода. Расстояние между городами – 1260 км. Найдите скорость второй машины, если скорость первой машины – 80 км/ч".

– "С одной и той же станции в противоположных направлениях одновременно вышли два поезда. Через 7 ч после выхода расстояние между ними стало 1260 км. Скорость одного из них – 80 км/ч. Найдите скорость другого поезда".

– "Два поезда вышли навстречу друг другу из двух городов, расположенных на расстоянии 1260 км, и встретились через 7 ч. Скорость одного из них – 80 км/ч. Найдите скорость другого поезда".

Аналогично для задачи: "Маляр израсходовал 4/5 купленной краски. Сколько краски осталось, если купили ее 100 кг?" получим следующие задачи:

– "Маляр израсходовал 2/3 купленной краски. Сколько краски осталось, если купили ее 60 кг?".

– "Велотуристы прошли 4/5 намеченного пути. Сколько осталось пройти туристам, если намеченный путь составляет 100 км?".

– "В магазине продано 2/3 привезенных яблок. Сколько яблок осталось продать магазину, если привезли 600 кг яблок?”.

– “Маляр израсходовал 400 кг краски, что составляет 4/5 купленной краски. Сколько краски осталось?”.

Как изменится условие задачи: “На первой стоянке в 4 раза меньше автомашин, чем на второй. После того, как на первую стоянку приехало еще 35 машин, а со второй уехало 25 машин, автомобилей на стоянках стало поровну. Сколько машин было на каждой стоянке?”, если для решения задачи было составлено уравнение:

а) $x + 10 = 4x – 5$; г) $4x + x = 25$;

б) $2x = 3x – 10$; д) $x + 35 = 4x – 25$;

в) $4x – x = 18$; е) $x + 10 – (4x – 40) = 10$?

С целью обучения учащихся решению задач учитель в своей работе должен предусмотреть использование следующих приемов:

- изменение числовых данных задачи;
- изменение сюжетного содержания задачи;
- изменение вопроса задачи;
- изменение условия задачи (добавление или изъятие какого-либо данного);
- изменение математического содержания.

При обучении учащихся решению задач мы рассматриваем умение составлять новые задачи как составную часть умения решать задачи. Отмечая ведущую роль решения задач при обучении математике, считаем процессы решения и составления задач неразрывно связанными. Действительно, составление задач является важным средством глубокого овладения теорией, развития мышления учащихся и активизации их мыслительной деятельности, развития интереса к предмету и речи учащихся, а также – одним из действенных средств, формирующих умение решать задачи и раскрывающих само понятие “задача”, ее структуру, приемы решения задач.

Опыт работы школы и теоретические исследования позволяют заключить, что при обучении математике необходимо специально формировать у учащихся умение составлять задачи. При этом следует использовать в работе учителя такие приемы, которые не требуют дополнительного учебного времени и в то же время способствуют формированию у учащихся умений решать задачи. Опытные учителя с этой целью используют творческие работы учащихся, а также оформление сборников задач учащимися и т.д.

Нередко в процессе решения задачи можно усмотреть возможность составления новой задачи. Важно, что при составлении задачи учащиеся должны представить не столько сюжетное, сколько математическое содержание и структуру задачи.

В процессе решения задач учителю следует использовать различного рода задания на составление задач. Начинать обучение учащихся составлению задач необходимо с выполнения ими заданий частичного составления задачи. А именно:

- составление задачи по ее вопросу;
- составление задачи по ее условию;
- составление задачи по краткой записи; по рисунку; по чертежу;
- составление задачи по числовым данным и вопросу;
- составление задачи по словесному тексту с пропусками;
- составление задачи по уравнению;
- составление задачи по способу ее решения;
- составление задачи на данную тему;
- составление задачи, обратной данной;
- составление задачи, аналогичной данной.

Прежде, чем давать задания учащимся на составление аналогичных задач, необходимо постепенно формировать у учащихся умения составлять задачи: с тем же сюжетным содержанием; с теми же числовыми данными; решаемую теми же действиями; с тем же математическим содержанием. В результате выполнения таких заданий у учащихся постепенно формируется понятие о том, что аналогичные задачи различаются числовыми данными, сюжетным содержанием и имеют одинаковое математическое содержание. При составлении задачи, аналогичной данной, учащимся необходимо определить математическое содержание задачи, подобрать сюжет и данные задачи, сформулировать вопрос и условие задачи. Известно, что составление задачи, аналогичной данной, может успешно использоваться учителями при обучении математике для формирования у учащихся умений решать задачи. При этом учащиеся яснее и глубже понимают структуру задачи, значение каждого ее компонента, связь между данными, данными и искомыми, условием и вопросом. Следовательно, составление аналогичных задач служит одним из приемов обучения учащихся решению задач, побуждает их к более глубокому самостоятельному анализу и обобщению математического содержания задач данного типа.

На этапе повторения изученного материала учитель предложил решить задачу: “В палатку привезли 1260 кг картофеля. В первый день продано 2/3 всего картофеля, а во второй день – 5/7 остатка. Сколько килограммов картофеля осталось продать после двух дней продажи?”. При выполнении задания на составление аналогичной задачи учитель выясняет у учащихся, надо ли сохранить числовые данные, сюжет задачи, ее математическое содержание. Вот один из ответов учащихся: “В аналогичной задаче надо сохранять математическое содержание, чтобы аналогичная задача решалась так же, как и данная. Числовые данные и сюжет задачи можно изменить”. Учитель ставит вопросы, уточняющие, что значит сохранить математическое содержание данной задачи. Учащиеся установили, что в составляемой задаче надо узнать, сколько осталось от данного числа, какая часть использована и какая часть осталась. Фактически происходит осознание математического содержания данной задачи и способа ее решения. Затем учащиеся приступают к самостоятельному составлению задачи. В итоге получены тексты аналогичных задач:

–“В куске было 240 метров материи. На пошив детских халатов пошло 3/4 всей материи. Из 7/10 оставшейся материи сшили косынки для девочек. Сколько материи осталось в куске?”.

–“Туристы должны пройти 75 км по местам боевой славы. В первый день они прошли 2/15 этого расстояния, а во второй день – 4/15 остатка. Сколько километров туристам осталось пройти?”.

Составление аналогичных задач с различным сюжетным содержанием и различными числовыми значениями данных ценно тем, что способствует формированию у учащихся обобщенного представления о структуре задач данного вида и способе их решения. При составлении задач учащиеся видят процесс, обратный процессу решения задач, лучше вникают в прямой процесс решения задач, глубже осмысливают теорию. Если учащиеся научились устанавливать связь между данными, данными и искомыми, то им нетрудно будет открыть связь в готовой задаче. Действительно, составление задач является одним из средств обучения их решению.

В содержании заключительного этапа процесса решения задачи мы выделяем следующие приемы:

- контроль решения задачи;
- обсуждение задачи и способа ее решения;
- сравнение задачи с ранее решенными задачами;
- оценка результата и способа решения задачи;
- уяснение способа решения задачи;
- полное использование входной информации задачи;
- изменение текста задачи;
- формулировка выводов по решению задачи;
- составление обратных и аналогичных задач.

4.2 Методические рекомендации по обучению решению задач

4.2 .1 Организация работы над задачей

Рассмотрим содержание работы учителя и учащихся на каждом этапе процесса решения задачи.

Задача

“Моторная лодка, развивающая в стоячей воде скорость 10 км/ч, прошла 39 км по течению реки и 28 км против течения, затратив на весь путь 7 ч. Определите скорость течения реки".

Решение задачи начинается с внимательного чтения задачи либо учителем, либо учеником, либо учащимися. Важно предоставить время учащимся для ознакомления с текстом задачи. Можно предложить учащимся прочитать вопрос задачи, условие задачи по отдельности, а затем прочитать текст задачи в целом.

С целью понимания ("принятия") текста задачи целесообразно приучать учащихся отвечать на вопросы типа:

– Какие ситуации (процессы) рассматриваются в задаче? (о чем идет речь в задаче?)

– Сколько ситуаций в задаче?

– Чем (какими величинами) характеризуется каждая ситуация?

– Какие слова в тексте задачи нельзя "выбросить", чтобы не изменить способ решения задачи?

– Изменится ли способ решения задачи, если:

а) речь в задаче идет не о моторной лодке, а о катере, о плоте?

б) моторная лодка шла бы только по течению (или против течения) реки?

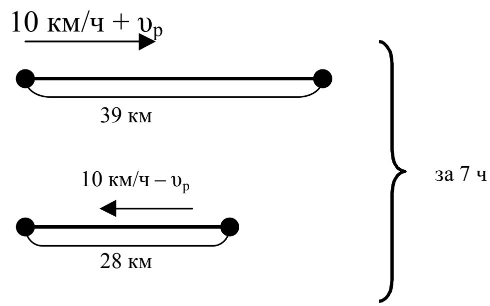
в) скорость лодки не 10 км/ч, а 15 км/ч, 5 км/ч, 50 км/ч, 3 км/ч?

Для наглядного представления текста задачи полезно оформлять краткую запись или чертеж задачи. Краткую запись задачи оформим в виде таблицы со столбцами: скорость, время, путь.

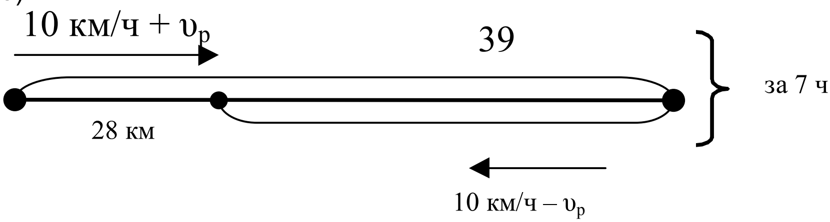
	υ(км/ч)	t (ч)	S(км)
Моторная лодка	10		
По течению реки	$10 + \upsilon_р$		39
Против течения реки	$10 - \upsilon_р$	7	28

Чертеж можно оформить следующим образом:

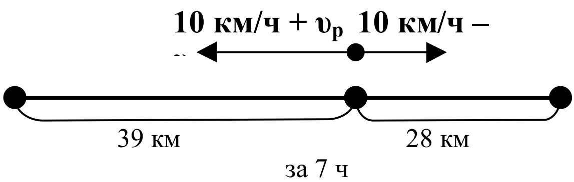
а)



б)



в)



Известно, что наглядное представление текста задачи с помощью чертежа или краткой записи служит хорошим средством, облегчающим поиск способа решения задачи. Поэтому полезны задания по установлению связи между текстами (текстом) задачи и краткими (краткой) записями (-ью). В ходе выяснения этих взаимосвязей учащиеся выясняют – чем отличается краткая запись от текста этой задачи, что должно быть изменено в тексте задачи, если бы эта краткая запись соответствовала рассматриваемой задаче.

При выполнении краткой записи и чертежа можно использовать тексты аналогичных задач с пропусками данных, а также задачи с лишними, противоречивыми, недостающими данными. Предложить задания типа: прочитать предложенные краткие записи задач и чертежи, соотнести текст задачи с краткими записями, составить новые задачи по их кратким записям.

Затем предложить учащимся ответить на вопросы:

- Назовите искомое задачи, данные задачи.
- Какова взаимосвязь между скоростью, временем и расстоянием; скоростью течения реки и скоростью лодки по течению реки (против течения); между скоростями лодки против течения и по течению реки?
- Каким действием находится скорость, если известно время и пройденный путь?
- Изменится ли способ решения задачи, если бы было известно не время, затраченное на весь путь, если:

а) время движения лодки по течению реки и время движения лодки против течения;

б) разница во времени движения лодки по течению и против течения;

в) время лодки по течению реки и против течения одинаковое?

Рассмотрим возможные способы оформления найденного решения задачи.

1. Пусть x км/ч – скорость течения реки, тогда

10+Х (км/ч) – скорость лодки по течению,

10-Х (км/ч) – скорость лодки против течения,

39:10+Х (ч) – время движения лодки по течению,

28:10-Х (ч) – время движения лодки против течения,

39:(10+Х) + 28:(10-Х) (ч) – время лодки по течению и против течения по условию задачи равно 7 ч.

$$\frac{39}{10+x}+\frac{28}{10-x}=7, \quad 10 + x \neq 0,\ 10 - x \neq 0,$$

$39 \cdot (10 - x) + 28 \cdot (10 + x) = 7 \cdot (100 - x^2)$,

$390 - 39x + 280 + 28x = 700 - 7x^2$,

$7x^2 - 11x - 30 = 0$, $D = 961$, $x_{1,2}=\frac{11\pm 31}{14}, x_1 = 3, x_2 = -\frac{10}{7}$,

$10 + 3 \neq 0$, $10 - 3 \neq 0$.

- 10/7 не удовлетворяет смыслу задачи.

3 км/ч – скорость течения реки. Ответ: 3 км/ч.

Смысловая проверка по тексту задачи предполагает, что найденное число - 3 км/ч удовлетворяет условиям задачи (имеет реальный физический смысл). Действительно, скорость по течению – 13 км/ч, значит время движения лодки по течению 3 ч. Скорость лодки против течения – 7 км/ч, время движения лодки против течения 4 ч. Весь путь лодка прошла за 3+4=7 (ч), что соответствует условию задачи. Значит, найденное решение верно.

2. Пусть x км/ч – скорость течения реки.

	скорость, км/ч	время, ч		путь, км
Лодка	10			
По течению реки	10+x	$\frac{39}{10+x}$	7	39
Против течения реки	10 - x	$\frac{28}{10-x}$		28

Всего по течению и против течения лодка шла $\frac{39}{10+x}+\frac{28}{10-x}$ (ч),

а это по условию задачи равно 7 ч.

$\frac{39}{10+x}+\frac{28}{10-x}=7$, 10 + x $\neq$ 0, 10 - x $\neq$ 0

39 • (10 - x) + 28 • (10 + x) = 7 • (100 – x^2),

390 – 39x + 280 + 28x = 700 – $7x^2$,

$7x^2$ – 11x – 30 = 0, D = 961, $x_{1,2}=\frac{11\pm 31}{14}, x_1=3, x_2=-\frac{10}{7}$

10 + 3 $\neq$ 0, 10 – 3 $\neq$ 0 – верно.

- 10/7 не удовлетворяет смыслу задачи.

3 км/ч – скорость течения реки. Ответ: 3 км/ч.

3. Можно предложить учащимся решить задачу с помощью системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} (10+x)\cdot y = 39, \\ (10-x)(7-y) = 28. \end{cases}$$

После решения задачи (а иногда и в процессе ее решения) можно выполнить задание: выбрать те уравнения, которые составлены по тексту данной задачи:

а) $\frac{39}{10+x}+\frac{28}{10-x}=7$, б) $\frac{39}{10-x}+\frac{28}{10+x}=7$, в) $\frac{39}{x+10}+\frac{28}{x-10}=7$,

г) $\frac{39}{10+x}-\frac{28}{10-x}=7$, д) $\frac{39}{10+x}=7-\frac{28}{10-x}$, е) $\frac{39}{x}+\frac{28}{10-x}=7$.

С целью контроля найденного решения задачи составим задачу, обратную данной и решим ее. Например, составим задачу, исключив данное “10 км/ч”. Результат выполнения этого задания – задача: “Моторная лодка прошла по течению реки 39 км, против течения реки 28 км, затратив на весь путь 7 ч. Определите скорость моторной лодки в стоячей воде, если скорость течения реки 3 км/ч”.

Можно предложить учащимся заполнить пропуски в тексте задачи и решить ее: “Моторная лодка, развивающая в стоячей воде скорость

…, прошла … по течению реки и против течения …, затратив на весь путь … ч. Определите скорость течения реки”.

С целью уяснения способа решения задачи отвечаем на вопросы:

- В чем состоит идея решения задачи?
- Как найдено решение задачи?
- Каков метод решения задачи?
- Что еще можно узнать, кроме скорости течения реки?
- Какие выводы можно сделать?
- Изменится ли способ решения задачи, если: лодка прошла по течению реки 28 км, а против течения 39 км;
- Слова “на весь путь”, “в стоячей воде” отсутствуют;
- Изменить числовые данные задачи;
- Изменить сюжет задачи, сохранив данные задачи;
- Изменить математическое содержание задачи, сохранив сюжет задачи и данные?

При обучении решению задач полезно предлагать учащимся задания на составление задач:

- по уравнению:

а) $\frac{36}{20-x}+\frac{22}{20+x}=3$, б) $\frac{36}{20-x}=\frac{22}{20+x}$,

в) $\frac{36}{20+x}+\frac{36}{20-x}=3$, г) $\frac{36}{20-x}-\frac{22}{20+x}=1$,

д) $\frac{36}{20-x}-3=\frac{22}{20+x}$, е) $\frac{36}{20-x}=3-\frac{22}{20+x}$;

- используя данные 20, 36, 28 и 4;
- с теми же числовыми данными;
- решаемые так же;
- с тем же математическим содержанием;
- аналогичные данной задаче.

Таким образом, мы на примере одной задачи рассмотрели возможные приемы работы учителя и учащихся по формированию умения решать задачи.

4.2.2 Обучение решению задач на “работу”, “движение” и др

В первой части мы рассмотрели общие вопросы методики обучения учащихся решению задач: психолого-дидактические основы формирования умений решать задачи; составляющие компоненты общего умения решать задачи (умение решить задачи, умение осуществлять поиск способа решения, умение оформлять найденное решение, умение работать над решенной задачей). Анализ психолого-педагогической литературы и опыта работы школы, а также собственные исследования по данной теме позволили нам выделить приемы деятельности учителя и учащихся, направленные на обучение решению задач. А именно:

– приемы анализа текста задач;
– приемы осуществления поиска способа решения задачи;
– приемы оформления найденного решения задачи;
– приемы завершения работы над задачей.

В этой главе мы покажем реализацию перечисленных приемов работы учителя и учащихся на различных этапах процесса решения некоторых задач.

Как отмечалось ранее, для формирования умения решать задачи необходимо использовать специальную систему заданий, удовлетворяющую определенным требованиям. Приведем здесь примеры, иллюстрирующие структуру и содержащие указанной системы заданий.

Наше исследование показало, что формировать умение решать задачи следует систематически и целенаправленно при решении в целом, всей системы задач и при решении каждой задачи системы. Мы будем раскрывать содержание методики работы над той или иной задачей, некоторые методические рекомендации по организации процесса решения каждой задачи.

Основной акцент при обучении решению задач мы будем делать на работу по анализу текста задачи, по способу решения задачи и заключительный этап процесса решения задачи. Большинство предлагаемых задач прошло неоднократную проверку в школьной, студенческой и учительской аудитории и вызвало интерес со стороны решающих и учителей, организующих обучение решению задач. Для определенности разобьем задачи по группам:

1) на “работу”;
2) на “движение”;
3) на “было, изменили, стало”;
4) разные задачи.

Задачи на “работу”

№ 1

“Две машинистки получили для перепечатки рукопись. После двух часов совместной работы одна из них получила другое задание, и вторая, оставшись одна, закончила работу через 1 ч 20 мин. За сколько часов могла бы отпечатать всю рукопись каждая машинистка, если второй для этого понадобилось бы на 1 ч 10 мин больше, чем первой?”

Вопросы по тексту задачи:

Какие ситуации описываются в задаче?

Сколько их и чем они характеризуются?

Что значат слова: “после двух часов совместной работы”, “закончила работу через 1ч 20 мин” и т.п.

Производительность какой машинистки больше?

Какая машинистка работает быстрее?

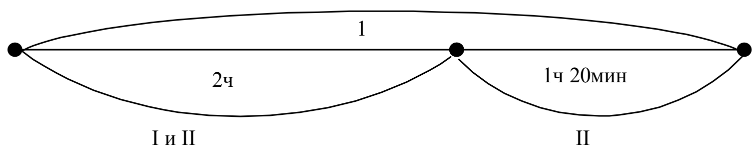
Какую часть работы выполнила первая (вторая) машинистка?

Какова взаимосвязь между объемом работы и временем работы первой (второй) машинистки?

Чему равно время работы первой (второй) машинистки при выполнении совместной работы?

Можно ли найти объем работы, выполненный первой (второй) машинисткой при совместной работе?

Наглядное представление задачи:



Краткая запись задачи в виде таблицы:

	N	t	A
I			1
II		на 1ч 10мин >,чем	1
I и II		2ч	} 1
II		1ч 20мин	

I способ Пусть за x ч перепечатывает всю рукопись первая машинистка,

$x+1\frac{1}{6}(ч)$ - перепечатывает всю рукопись вторая машинистка,

$\frac{1}{x}$ ед. раб./ч – производительность первой машинистки,

$\frac{1}{x+\frac{7}{6}}$ (ед. раб./ч) – производительность второй машинистки,

$(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{7}{6}})$ ед. раб./ч – совместная производительность обеих машинисток,

$2\cdot(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{7}{6}})$ ед. раб. – работа, выполненная за два часа совместной работы,

$1\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+\frac{7}{6}}$ (ед. раб.) – работа, выполненная второй машинисткой за 1ч 20мин,

$2\cdot(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{7}{6}})+1\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+\frac{7}{6}}$ (ед. раб.) – вся выполненная работа составляет 1 (ед. раб.)

$2\cdot(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{7}{6}})+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x+\frac{7}{6}}=1,$ $x\neq0$, $x\neq-\frac{7}{6}$, $x>0$,

6x2-25x-14=0, $x_1=\frac{14}{3}$, $x_2=-\frac{1}{2}$,

$-\frac{1}{2}$ – не удовлетворяет смыслу задачи.

$\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}=$ – время, необходимое первой машинистке на перепечатку всей рукописи.

4ч 40мин + 1ч 10мин = 5ч 50мин – время, необходимое второй машинистке — на перепечатку всей рукописи.

Выполним смысловую проверку по тексту задачи: 4 ч 40 мин = $\frac{14}{3}$ ч – время, за которое выполняет первая машинистка всю работу одна, следовательно, производительность первой машинистки $\frac{1}{\frac{14}{3}}=\frac{3}{14}$ (ед. раб./ч), производительность второй машинистки – $\frac{1}{5\frac{5}{6}}=\frac{6}{35}$ (ед. раб. /ч), совместная производительность:

$\frac{3^{\backslash 5}}{14}+\frac{6^{\backslash 2}}{35}=\frac{15+12}{70}=\frac{27}{70}$ (ед. раб./ч). За 2ч совместной работы выполнена $2\cdot\frac{27}{70}=\frac{27}{35}$ часть работы, следовательно, вторая машинистка выполнила оставшуюся часть работы $1-\frac{27}{35}=\frac{8}{35}$. С другой стороны, за 1ч 20 мин вторая машинистка — выполнила $1\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{35}=\frac{4\cdot 2}{1\cdot 35}=\frac{8}{35}$ всей работы, что соответствует реальной ситуации.

Ответ: За 4ч 40мин и за 5ч 50мин выполняют всю работу соответственно первая и вторая машинистки.

В качестве основы для составления уравнения мы взяли суммарную работу:

Эту же основу можно взять, но за x принять величину производительности.

II способ

Пусть x ед. раб./ч – производительность первой машинистки.

	V	t	A	
I	X	$\frac{1}{x}$	1	
II	$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{7}{6}}$	$\frac{1}{x}+1\frac{1}{6}$	1	
I и II	$x+\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{7}{6}}$	2	$2(x+\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{7}{6}})$	$\left.\right\}$ 1
II	$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{7}{6}}$	$1\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{7}{6}}$	

Уравнение:
$$2\left(x+\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{7}{6}}\right)+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{7}{6}}=1$$

III способ

x ед. раб./ч – производительность первой машинистки,

y ед. раб./ч – производительность второй машинистки,
(x+y) ед. раб./ч – совместная производительность,
2(x+y) – совместная работа,

$\frac{4}{3} \cdot y$ – работа, выполненная второй машинисткой,

$\frac{1}{x}ч$ – время, необходимое первой машинистке для перепечатки всей рукописи,

$\frac{1}{y}ч$ – время, необходимое второй машинистке для перепечатки рукописи.

Основа:

$$\begin{cases} A_{I\ и\ II} + A_{II} = 1, \\ t_{II} - t_{I} = \frac{7}{6}. \end{cases}$$

Система:

$$\begin{cases} 2(x+y) + \frac{4}{3}y = 1, \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{7}{6}. \end{cases}$$

Получили $\frac{3}{14}$ ед. раб. / ч – производительность первой машинистки, $\frac{14}{3}ч = 4ч40мин$ – потребуется первой машинистке на перепечатку всей рукописи. 5ч 50мин – потребуется второй машинистке.

№ 2

“Два слесаря получили заказ. Сначала 1 час работал первый слесарь, затем 4 часа слесари работали вместе. В результате было выполнено 40% работы. За сколько часов мог бы выполнить всю работу каждый слесарь, если первому для этого необходимо на 5 часов больше, чем второму?”

Краткая запись текста задачи:

Вопросы по тексту задачи:

- Что значит “выполнено 40 % работы”?
- Какие ситуации рассматриваются в задаче, и чем они характеризуются?

- Сколько всего часов работал первой (второй) слесарь?

- Какой слесарь работает быстрее?

- Что можно взять за основу для составления уравнения по тексту задачи?

В результате проведённого анализа текста задачи можно рассмотреть разные способы ее решения.

I способ

Основа: $\boxed{A_{I}} \quad + \quad \boxed{A_{I+II}} \quad = \quad \boxed{0,4}$.

Пусть x ч – время, которое потратит второй слесарь на выполнение всей работы.

	v, $\frac{ед.раб.}{ч}$	T, *ч*	A, *ед. раб.*
I	$\frac{1}{x+5}$	1	$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x+5}, \\ 4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}\right).\end{array}\right\}$ 0,4
I и II	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}$	4	
I	$\frac{1}{x+5}$	$x+5$	1
II	$\frac{1}{x}$	X	1

Уравнение: $4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}\right)+\frac{1}{x+5}=0,4;$ x=20 Ответ: 20 ч, 25 ч.

II способ

Основа: $\boxed{A_{I}} \quad + \quad \boxed{A_{I+II}} \quad = \quad \boxed{0,4}$.

Пусть x ед. раб. – производительность второго слесаря.

	v, $\frac{ед.раб.}{ч}$	t, *ч*	A, *ед. раб.*
I	$\frac{1}{\frac{1}{x}+5}$	1	$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{5+\frac{1}{x}} \\ 4\left(x+\frac{1}{\frac{1}{x}+5}\right)\end{array}\right\}$ 0,4
I и II		4	
I	$\frac{1}{\frac{1}{x}+5}$	$\frac{1}{x}+5$	1
II	X	$\frac{1}{x}$	1

Уравнение: $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+5}+4\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+5}+x\right)=0,4$;   x= $\dfrac{1}{20}$.

Ответ: 20 ч, 25 ч.

III способ

x ед. раб./ч – производительность первого слесаря.

y ед. раб./ч – производительность второго слесаря.

Основа: $\begin{cases} \boxed{t_1} - \boxed{t_2} = \boxed{5} \\ \boxed{A_I} + \boxed{A_{IиII}} = \boxed{0,4} \end{cases}$

Система: $\begin{cases} x+4(x+y)=0,4; \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5; \end{cases}$ $\begin{cases} y=\dfrac{1}{20}; \\ x=\dfrac{1}{25}. \end{cases}$

Ответ: 20ч, 25ч.

Рассматривая различные способы решения задачи, мы формируем у учащихся не только навыки и умения осуществлять контроль найденного решения задачи, но и общие подходы к решению одной и той же задачи.

№ 3

“Артель лесорубов должна по плану ежедневно заготавливать 100 м3 дров. Лесорубы, перевыполняя план, заготовляли ежедневно сверх нормы 10 кубометров, поэтому на 5 дней раньше окончили заготовку дров. Сколько кубометров дров заготовили лесорубы?”

Вопросы по тексту задачи:

Что значит “перевыполняя план”, “сверх нормы”?

Каков объем работы по плану и фактически?

Как отличаются сроки выполнения по плану и фактически?

Когда лесорубы работали быстрее и почему?

Анализ текста задачи позволяет выделить следующие основы для составления уравнений (системы):

1) $\boxed{A_{\text{по плану}}} = \boxed{A_{\text{фактически}}}$;

2) $\boxed{V_1} : \boxed{V_2} = \boxed{t_2} : \boxed{t_1}$

3) $\boxed{V_{факт}} - \boxed{V_{по\ плану}} = \boxed{10}$;

4) $\boxed{t_{по}} - \boxed{t_{фактич}} = \boxed{5}$.

Краткая запись задачи:

	V(м^3/дн.)	t (дн.)	A (ед./раб.)
По плану	100м^3		1
Фактически	на 10м^3>, чем	На 5 дней >, чем	1

I способ Пусть x дней – срок выполнения плана.

	V (м^3/дн.)	t (дн.)	A (ед./раб.)
По плану	100	x	1
Фактически	110	x-5	1

Уравнение:

$100 \cdot x = 110(x-5)$, x=55.

55 дней планировали заготавливать дрова. Объем заготовленных дров – 5500 м^3.

II способ

Пусть x дней – срок выполнения плана.

Уравнение:

$$\frac{100}{110} = \frac{x-5}{x}.$$

III способ Пусть x дней – срок выполнения плана.

	V (м^3/дн.)	t (дн.)	A (ед./раб.)
По плану	$\frac{1}{x}$	x	1
Фактически	$\frac{1}{x-5}$	x–5	1

Уравнение: $\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x} = 10$.

IV способ Пусть x м^3 ежедневно заготавливали по плану.

Уравнение: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} = 5$.

V способ Пусть x м^3 дров всего должны были заготовить по плану.

Уравнение: $\frac{x}{100}-\frac{x}{110}=5$.

VI способ Пусть x дней – срок по плану;

Система: $\begin{cases} x-y=5 \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=10 \end{cases}$.

y дней – фактический срок.

Анализ найденных способов решений поможет выбрать самый рациональный способ решения этой задачи. На наш взгляд это – V способ.

Проверка по смыслу задачи: планировали 55 дней заготавливать по 100 м^3 (55•100), всего должны были заготовить 5500 м^3 дров, а заготавливали 50 дней по 110 м^3 (50•110), т.е. заготовили 5500м^3 дров, что соответствует реальному смыслу задачи.

№ 4

“Один комбайнер может убрать урожай пшеницы с участка на 24 ч быстрее, чем другой. При совместной работе двух комбайнеров они закончили уборку за 35 ч. Сколько потребуется часов каждому, чтобы убрать урожай?”

Для актуализации знаний, необходимых при решении задачи, следует обратить внимание учащихся на взаимосвязь между производительностью каждого комбайнера и совместной их производительностью, между временем выполнения работы каждым комбайнером и совместным временем выполнения работы. Если учащиеся не знают ответы на поставленные вопросы, то они могут привести ошибочное решение задачи: 35-24=11 (ч), 11:2=5,5(ч) – I, 5,5+24=29,5 (ч) – II.

Вот почему при решении таких задач полезно приучить учащихся отвечать на вопросы типа:

- Какие ситуации рассматриваются в задаче? (ситуация выполнения работы первым комбайнером, выполнения работы вторым комбайнером, выполнения работы первым и вторым комбайнерами).
- Сколько их? Чем характеризуются эти ситуации?
- Какую часть работы выполняют они вместе за 1 час?
- Кто из них работает быстрее?
- Как найти их совместную производительность?
- Что может быть положено в основу для составления уравнения (системы)?

Ответы на вопросы такого рода помогут учащимся найти различные способы решения. Оформить краткую запись текста задачи в виде схемы или таблицы (как обычно для задач на работу: столбцы – V, t, A, и строчки – ситуации (процессы), описываемые задачей).

Краткая запись текста задачи в виде схемы:

I – на 24 ч быстрее, чем
II –
35ч ?

Краткая запись текста задачи в виде таблицы:

	V(ед./ч)	t(ч)	A (ед. раб.)
I		на 24 ч <, чем	1
II			1
I и II		35	1

Основы для составления уравнения: а) $V_I + V_{II} = V_{I\,и\,II}$; б) $t_{II} - t_I = 24$.

I способ Пусть за х ч выполняет всю работу второго комбайнера.

	V(ед./ч)	t(ч)	A (ед. раб.)
I	$\frac{1}{x-24}$	x-24	1
II	$\frac{1}{x}$	X	1
I и II	$\frac{1}{35}$	35	1

$\frac{1}{x-24}+\frac{1}{x}$ (ед. раб./ч) – совместная производительность I и II, а

по условию задачи это $\frac{1}{35}$ ед. раб/ч.

$$\frac{1}{x-24}+\frac{1}{x}=\frac{1}{35},$$

x^2 - 94 + 840 = 0, x_1=84, x_2=10.

x_2=10 – не удовлетворяет смыслу задачи, т.к. вместе они выполняют работу за 35 ч. За 84 ч выполнит всю работу второй комбайнер, тогда I за 84-24=60 (ч).

II способ

Пусть х ед. раб./ч – производительность второго комбайнера.

	V (ед. раб. /ч)	t(ч)	A
I	$\dfrac{1}{\frac{1}{x}-24}$	$\dfrac{1}{x}-24$	1
II	x	$\dfrac{1}{x}$	1
I и II	$\dfrac{1}{35}$	35	1

Уравнение: $\dfrac{1}{\frac{1}{x}-24}+x=\dfrac{1}{35}$, $\qquad x=\dfrac{1}{84}$.

84 ч – время выполнения всей работы вторым комбайнером,

84-24=60 (ч) – время выполнения всей работы первым комбайнером.

III способ

Пусть x ед. раб./ч – производительность второго комбайнера.

	V (ед. раб. /ч)	t(ч)	A
I	$\dfrac{1}{35}-x$	$\dfrac{1}{\frac{1}{35}-x}$	1
II	x	$\dfrac{1}{x}$	1
I и II	$\dfrac{1}{35}$	35	1

$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\frac{1}{35}-x}$ (ч) – разница во времени выполнения всей работы вторым и первым комбайнерами, а по условию задачи это 24 ч.

Уравнение: $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\frac{1}{35}-x}=24$.

IV способ Пусть x ед. раб./ч – производительность первого комбайнера, y ед. раб./ч – производительность второго комбайнера.

Система:

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{35}; \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=24. \end{cases}$$

№ 5

“Трое дружных медвежат очень любят обедать. Первый и второй могут съесть миску похлебки за 6 мин, первый и третий – за 8 мин, второй и третий – за 12 мин. За сколько минут медвежата втроем съедят всю похлебку? За сколько времени пообедает первый медвежонок, если будет есть один?”

Взаимосвязь между временем, скоростью выполнения работы и объемом работы в данной задаче описана с помощью “съедания похлебки медвежатами”. Учащиеся должны понимать, что, зная время, за которое можно съесть всю похлебку, можно найти – какую часть похлебки можно съесть за 1 минуту, т.е. скорость, с которой можно съесть похлебку. Вопросы по тексту задачи:

- Что значит “I - и III - медвежата съедят похлебку за 6 минут”?
- Какую часть похлебки они съедят за 1 минуту?
- Нельзя ли узнать, какую часть похлебки они съедят втроем за 1 минуту?
- Какой из медвежат ест быстрее?

Полезно составить таблицу, в которой представлены все ситуации (процессы) задачи и их характеристики:

	V (ед. раб. /ч)	t (мин)	A (ед. раб.)
I и II	$\frac{1}{6}$	6	1
I и III	$\frac{1}{8}$	8	1
II и III	$\frac{1}{12}$	12	1

Ответы на поставленные вопросы могут быть такими:

I-й и II-й, I-й и III-й, II-й и III-й медвежата за 1 минуту съедят $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{9}{24}$ части похлебки.

Тогда I-й, II-й и III-й медвежата съедят за 1 минуту $\frac{9}{48}=\frac{3}{16}$ часть похлебки. Всю похлебку съели за $\frac{1}{\frac{3}{16}}=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}=5ч20мин.$

Продолжаем анализ полученных данных и данных текста задачи.

I-й и II-й съедают похлебку со скоростью $\frac{1}{6}$ части в минуту,

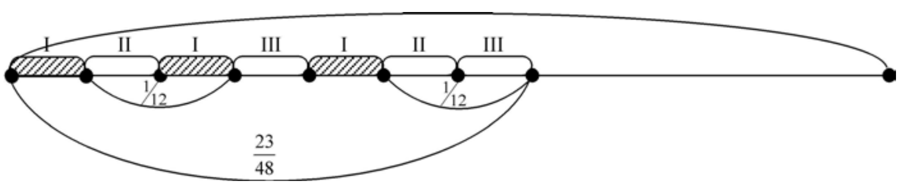
I-й и III-й – $\frac{1}{8}$ части в минуту,

I-й, II-й и III-й – $\frac{3}{16}$ части в минуту.

Таким образом I-й и II-й; I-й и III-й; I-й, II-й, III-й медвежата, вместе, съедают похлебку со скоростью: $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{3}{16}=\frac{23}{48}$ части в минуту.

Но II-й и II-й съедают $\frac{1}{12}$ часть похлебки в минуту, а II-й; II-й и III-й; III-й соответственно – $\frac{1}{6}$ часть в минуту. Следовательно, $\frac{23}{48}-\frac{1}{6}=\frac{23-8}{48}=\frac{15}{48}$ части похлебки съедят трое I-х, тогда один I-й съест за минуту $\frac{5}{48}$ части похлебки, а всю похлебку он съест за $\frac{48}{5}=9\frac{3}{5}$ (ч)=9ч 36 мин.

Можно эти рассуждения продемонстрировать наглядным изображением типа:



Прежде, чем записать ответ, полезно ответить на вопрос – кто из медвежат ест быстрее? Известно, I-й и II-й медвежонок съедают похлебку со скоростью $\frac{1}{8}$, а один I-й – $\frac{5}{48}$, то есть III-й съедает похлебку со скоростью $\frac{1}{8}-\frac{5}{48}=\frac{6-5}{48}=\frac{1}{48}$. Всю похлебку III-й съедает за 48 часов. II-й съедает похлебку за 12 часов: $\frac{1}{6}-\frac{5}{48}=\frac{8-5}{48}=\frac{3}{48}=\frac{1}{16}$, следовательно, быстрее всех ест I-й медвежонок. Смысловая проверка подтверждает полученные ответы. Например, если I-ый съедает всю похлебку за 9 ч 36 мин, II-ой – за 12 ч, а III-ий – за 48 ч, то попарно они съедят похлебку следующим образом: I-й и II-й медвежата съедают похлебку за 6ч, со скоростью $\frac{1}{6}$, а I-й за 9 ч 36 мин – со скоростью $\frac{5}{48}$, то II-й за 16 ч: $\frac{1}{6}-\frac{5}{48}=\frac{8-5}{48}=\frac{3}{48}=\frac{1}{16}$, и т. п.

Можно вернуться к этой задаче при изучении систем. Составим таблицу.

	V	t	A
I	$\frac{1}{x}$	x	1
II	$\frac{1}{y}$	y	1
III	$\frac{1}{Z}$	z	1

	V	t	A
I+II	$\frac{1}{6}$	6	1
II+III	$\frac{1}{8}$	8	1
II+III	$\frac{1}{12}$	2	1

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{Z}+\frac{1}{8}, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{Z}=\frac{1}{12}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{1}{6}-\frac{1}{y}, \\ \frac{1}{6}-\frac{1}{y}+\frac{1}{Z}=\frac{1}{8}, \\ \frac{1}{y}=\frac{1}{12}-\frac{1}{Z}; \end{cases} \qquad \begin{cases} Z=48, \\ y=16, \\ x=9\frac{3}{5}. \end{cases}$$

Все вместе съедят всю похлебку со скоростью:

$$\frac{1}{48}+\frac{1}{16}+\frac{1}{\frac{48}{5}}=\frac{1}{48}+\frac{1^{3}}{16}+\frac{5}{48}=\frac{6+3-9}{48-48}=\frac{3}{16}.$$

Ответ: I-й медвежонок съедает похлебку за 9 ч 36 мин; втроем – за 5 ч 20 мин.

Нахождение арифметического и алгебраического способов решения одной и той же задачи помогут учащимся оценить достоинства того и другого подхода к решению задач и в дальнейшем шире использовать выделенные основы решения задач данного типа.

№ 6

“Два печника, работая вместе, могут сложить печь за 12 ч. Если первый печник будет работать 2ч, а второй – 3ч, то они выполнят только 20% всей работы. За сколько часов может сложить печь каждый печник, работая отдельно?”.

	V	T(ч)	A
I		2	20% от
II		3	
I и II		12	1
I		?	1
II		?	1

Известно, что с целью обучения решению задач нередко лучше решить одну задачу несколькими способами, чем несколько однотипных задач. Изучение и анализ теоретических исследований, опыта работы школы и собственного опыта позволяют сделать вывод о необходимости систематического и целенаправленного обучения учащихся решению задач различными способами. В основу методики работы учителя и учащихся при обучении решению задач мы положили тщательный анализ текста задачи, выполнение краткой записи задачи, выбор основы для составления уравнения и т. п. Рассмотрим на примере решения задачи (из сборника экзаменов за 9 кл.) различные подходы к поиску решения задачи различными способами. Приведем пример решения такой задачи в зависимости от выбора неизвестной величины и основы для составления уравнения (смотри таблицу).

Основа	X(ч) – время за которое печник сделал печь, у(ч) – второй				x(1/ч) – производительность первого печника, у(1/ч) – второго				х – часть работы, которую первый печник сделает за 2 ч, у – второй за 3 ч			
		V	t	A		V	t	A		v	t	A
$A_1+A_2=A_{общ}$	I	$\frac{1}{x}$	2	$\left.\begin{array}{l}\frac{2}{x}\\ 3\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{x}\right)\end{array}\right\}\frac{1}{5}$	I	x	2	$\left.\begin{array}{l}2x\\ 3\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{x}\right)\end{array}\right\}\frac{1}{5}$	I	$\frac{5}{8}$	2	$\left.\begin{array}{l}x\\ 3\left(\frac{1}{12}-\frac{x}{2}\right)\end{array}\right\}\frac{1}{5}$
	II	$\frac{1}{12}-\frac{1}{x}$	3		II	$\frac{1}{12}-x$	3		II	$\frac{1}{12}-\frac{x}{2}$	3	
	I II	$\frac{1}{12}$	12	1	I II	$\frac{1}{12}$	12	1	I II	$\frac{1}{12}$	12	1
	I	$\frac{1}{x}$	x	1								
	$\frac{2}{x}+3\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{5}$				$2x+3\left(\frac{1}{12}-x\right)=\frac{1}{5}$				$\frac{x}{2}+3\left(\frac{1}{12}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{5}$			
		V	t	A		V	t	A		v	t	A
$V_1+V_2=V_{общ}$	I	$\frac{1}{x}$	2	$\left.\begin{array}{l}\frac{2}{x}\\ \frac{1}{5}-\frac{2}{x}\end{array}\right\}\frac{1}{5}$	I	x	2	2x	I	$\frac{x}{2}$	2	x
	II	$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{x}\right)$	3		II	$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-2x\right)$	3	$\frac{1}{5}-2x$	II	$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-x\right)$	3	$\frac{1}{5}-2x$
	I, II	$\frac{1}{12}$	12	1	I, II	$\frac{1}{12}$	12	1	I, II	$\frac{1}{12}$	12	1
	I		x	1								
	$\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{12}$				$x+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-2x\right)=\frac{1}{12}$				$\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-x\right)=\frac{1}{12}$			
		V	t	A		V	t	A		V	t	A
$\begin{cases}V_1+V_2=V\\ A_1+A_2=A\end{cases}$	I	$\frac{1}{x}$	2	$\left.\begin{array}{l}\frac{2}{x}\\ \frac{3}{y}\end{array}\right\}\frac{1}{5}$	I	x	2	$\left.\begin{array}{l}2x\\ 3y\end{array}\right\}\frac{1}{5}$	I	$\frac{x}{2}$	2	$\left.\begin{array}{l}x\\ y\end{array}\right\}\frac{1}{5}$
	II	$\frac{1}{y}$	3		II	y	3		II	$\frac{y}{3}$	3	
	I II	$\frac{1}{12}$	12	1	I II	$\frac{1}{12}$	12	1	I II	$\frac{1}{12}$	12	1
	I	$\frac{1}{x}$	x	1								
	II	$\frac{1}{y}$	y	1								
	$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{1}{5}\end{cases}$				$\begin{cases}x+y=\frac{1}{12}\\ 2x+3y=\frac{1}{5}\end{cases}$				$\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=\frac{1}{12}\\ x+y=\frac{1}{5}\end{cases}$			
$V_2(I)=V_2(II)$ $I,II-условия$	$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{12}-\frac{1}{x}$				$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-2x\right)=\frac{1}{12}-x$				$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-x\right)=\frac{1}{12}-\frac{x}{2}$			

Задачи на “движение”

№ 7

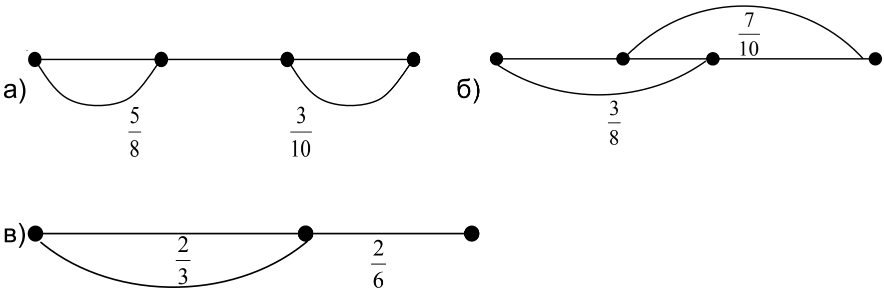
“Из двух пунктов навстречу друг другу вышли два поезда. Первый прошел $\frac{5}{8}$, а второй $\frac{3}{10}$ пути…”.

Необходимо сформулировать вопрос задачи. В результате обсуждения предложений учащихся можно решить задачу с вопросом типа:

- Встретились ли поезда?
- Какой поезд идет быстрее?
- Через какое время поезда встретятся?

- Какой поезд прошел меньшую часть пути?

После решения задачи с одним из данных вопросов полезно выполнить задания по составлению аналогичной задачи или изменению числовых данных, а также сравнению текстов задач, по которым выполнены чертежи:



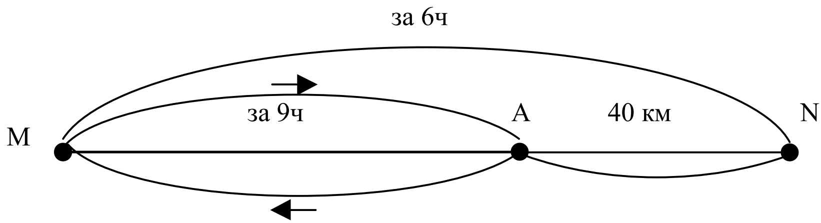
Если пропущенное слово “одновременно” не заметили при решении задачи, то следует снова вернуться к тексту задачи и ее решению.

№ 8

“Расстояние от пристани M до пристани N по течению реки катер проходит за 6 часов. Однажды, не дойдя 40 км до пристани N, катер повернул назад и возвратился к пристани M, затратив на весь путь 9 часов. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки 2 км/ч”.

При анализе текста этой задачи необходимо обратить внимание учащихся, что значат слова “за 6 ч”, “на весь путь – 9 ч”, “не дойдя 40 км” и т.п.

Выполним чертеж:



При анализе текста задачи выясняем, что в задаче рассматриваются следующие ситуации:

- движение катера по течению реки – MN за 6 ч;
- движение катера по течению реки MA;

- движение катера против течения реки AM;

Составим таблицу:

	V,км/ч	t,ч	S,км
По течению	V_C+2 км/ч	6	MN
По течению	V_C+2 км/ч	}	MA
Против течения	V_C –2 км/ч	9	AM

Поиск способа решения может быть начат с выбора основы для составления уравнения (системы):

1) $\boxed{t_{\text{по теч.реки}}} + \boxed{t_{\text{против теч. реки}}} = \boxed{9}$;

2) $\boxed{S_{\text{по теч. реки}}\ (MA)} = \boxed{S_{\text{против теч. реки}}\ (AM)}$;

3) $\boxed{V_{\text{по теч. реки}}} * \boxed{t} = \boxed{MN}$;

4) $\boxed{V_{\text{по теч реки}}} + \boxed{V_{\text{против теч. реки}}} = \boxed{2\ V_{\text{соб}}}$.

Рассмотрим различные способы решения задачи.

I способ Основа: $\boxed{t_{\text{по теч. реки}}} + \boxed{t_{\text{против теч. реки}}} = \boxed{9}$,

x км/ч – скорость катера в стоячей воде.

Уравнение: $\frac{6\cdot(x+2)-40}{x+2}+\frac{6\cdot(x+2)-40}{x-2}=9$, $3x^2-56x+36=0$,

$x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=18$.

Ответ: 18 км/ч – скорость катера в стоячей воде.

II способ Основа – суммарное время по течению реки и против течения реки равно 9 ч.

x км – расстояние MN.

Уравнение: $\frac{x-40}{\frac{x}{6}}+\frac{x-40}{\frac{x}{6}-4}=9$, $x^2-136x+1920=0$, x=16, x=120.

120 км – расстояние MN.

Ответ: $\frac{120}{6}-2=18$ (км/ч) – скорость катера в стоячей воде.

III способ

В качестве основы для составления уравнения снова возьмем суммарное время по течению реки и против течения реки, равное 9 ч, но переменную введем другую.

Пусть x км – расстояние MA.

Уравнение: $\frac{x}{\frac{x+40}{6}}+\frac{x}{\frac{x+40}{6}-4}=9$, x^2-56x-1920=0, x_1=80, x_2=-24.

80 км/ч – расстояние MA.

$\frac{80+40}{6}-2=18$ (км/ч) – скорость катера в стоячей воде.

После решения задачи полезно выполнить задание:

- Найдите ошибку в решении задачи: $\frac{40}{x+2}+\frac{40}{x-2}=9-6$.

- Изменится ли способ решения, если бы было известно не время “6 ч по течению реки”, а время “11 ч на путь туда и обратно”.

IV способ С помощью системы:

x км/ч – скорость катера в стоячей воде

y км/ч – расстояние MN

$$\begin{cases} (x+2)\cdot 6=y, \\ \frac{y-40}{x+2}+\frac{y-40}{x-2}=9, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=18, \\ y=120. \end{cases}$$

18 км/ч – скорость катера в стоячей воде, 120 км – расстояние MN.

№ 9

“Скорый поезд был задержан в пути на 10 минут. Чтобы наверстать потерянное время, перегон в 96 км поезд прошел со скоростью на 8 км/ч больше, чем полагалось по расписанию. Найдите скорость поезда по расписанию”.

При решении задачи следует обратить внимание на то, что весь путь скорого поезда нас не интересует, необходимо знать, как планировалось пройти перегон в 96 км и как пройден перегон фактически.

Краткая запись:

	V(км/ч)	t (ч)	S (км)
По расписанию		На $\frac{1}{6}$ ч >, чем	96
Фактически	на 8км/ч >, чем		96

В качестве основы для составления уравнения может быть выбрана одна из схем:

1) $\boxed{t_1} - \boxed{t_2} = \boxed{\frac{1}{6}}$; 2) $\boxed{V_2} - \boxed{V_1} = \boxed{8}$; 3) $\boxed{V} \cdot \boxed{t} = \boxed{S}$.

I способ Пусть x км/ч – скорость поезда по расписанию

	V(км/ч)	t (ч)	S (км)
По расписанию	x	$\frac{96}{x}$	96
Фактически	$x+8$	$\frac{96}{x+8}$	96

$\frac{96}{x} - \frac{96}{x+8}$ (ч) – разница во времени движения поезда по расписанию и фактически по условию задачи составляет $\frac{1}{6}$ ч.

$$\frac{96}{x} - \frac{96}{x+6} = \frac{1}{6}, \quad x_1 = 64, \quad x_2 = -14.$$

-14 – не удовлетворяет смыслу задачи,

64км/ч – скорость поезда по расписанию.

II способ Пусть x ч потребуется фактически поезду на перегон, чтобы наверстать потерянное время.

	V(км/ч)	t(ч)	S(км)
По расписанию	$\frac{96}{x+\frac{1}{6}}$	$x+\frac{1}{6}$	96
Фактически	$\frac{96}{x}$	x	96

$\frac{96}{x} - \frac{96}{x+\frac{1}{6}}$ (км/ч) – разница в скоростях поезда фактически и по расписанию по условию задачи равна 8км/ч.

$$\frac{96}{x}-\frac{96}{x+\frac{1}{6}}=8.$$

За $\frac{4}{3}$ ч – фактически прошел поезд перегон.

$$\frac{96}{\frac{4}{3}+\frac{1}{6}}=64$$ (км/ч) – скорость поезда по расписанию.

III способ Пусть х км/ч – скорость поезда по расписанию, у км/ч – скорость поезда фактически.

$$\begin{cases} y-x=8, \\ \frac{96}{x}-\frac{96}{y}=\frac{1}{6}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=64, \\ y=72. \end{cases}$$

IV способ Пусть х км/ч – скорость поезда по расписанию, у – время поезда по расписанию.

$$\begin{cases} x\cdot y=96, \\ (x+8)(y-\frac{1}{6})=96; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=64, \\ y=1{,}5. \end{cases}$$

После решения задачи можно предложить учащимся задания типа: Правильно ли составлены уравнения по тексту задачи.

а) $\frac{96}{x}=\frac{96}{x+6}+\frac{1}{6}$, б) $\frac{96}{x+\frac{1}{6}}-\frac{96}{x}=8$; в) $\frac{96}{x+6}-\frac{96}{x}=\frac{1}{6}$;

г) $\frac{96}{x}-\frac{96}{x+6}=10$; д) $\frac{96}{x+8}=\frac{96}{x}-\frac{1}{6}$; е) $\frac{96}{x-6}+\frac{96}{x}=\frac{1}{6}$;

ж) $\frac{96}{x-6}-\frac{96}{x}=\frac{1}{6}$; з) $\frac{96}{x-\frac{1}{6}}-\frac{96}{x}=8$.

- Изменится ли способ решения задач,

а) если поезд задержан не на 10 мин, а на 30 мин, на 1 ч?

б) если на перегоне поезд скорость не увеличил?

в) если перегон был не 96 км, а 30 км,100 км?

Решите задачи:

–“Чтобы ликвидировать опоздание на 1 ч, поезд на перегоне в 720 км, увеличил скорость, с которой должен бы идти по расписанию, на 10 км/ч. Какова скорость поезда по расписанию?”

–“Мотоциклист хотел проехать от пункта А до пункта В за определенное время. Проехав 54 км, он остановился на 5 мин. Поэтому на оставшихся 36 км пути он увеличил скорость на 6 км/ч и прибыл в пункт В вовремя. Найдите первоначальную скорость мотоциклиста”.

Объясните, как составлены уравнения для решения этих задач:

а) $\frac{36}{x}-\frac{36}{x+6}=\frac{1}{12}$;   б) $\frac{36}{x}-\frac{36}{x+\frac{1}{12}}=6$;

в) $\frac{54}{x}+\frac{1}{12}+\frac{36}{x+6}=\frac{54+36}{x}$;

г) $\frac{720}{x}-\frac{720}{x+10}=1$; д) $\frac{720}{x-10}=1+\frac{720}{x}$; е) $\frac{720}{x}-\frac{720}{x+1}=10$.

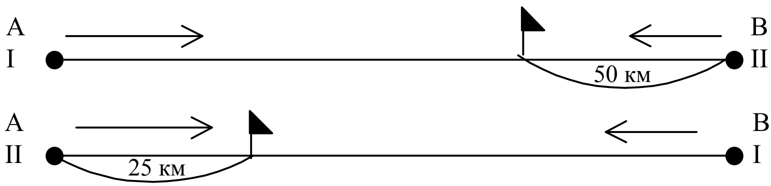
№ 10

“Два мотоциклиста выехали одновременно из пунктов А и В навстречу друг другу и встретились в 50 км от В. Прибыв в пункт А и В, мотоциклисты сразу повернули назад и встретились в 25 км от А. Сколько километров между А и В?”.

Вопросы по тексту задачи:

- О каких процессах идет речь в задаче?
- Какой путь проехали оба мотоциклиста до первой встречи?
- Как продолжили движение мотоциклисты после первой встречи?
- Какое расстояние до второй встречи проехали оба мотоциклиста?
- Какое время были в пути оба мотоциклиста до первой (второй) встречи?
- Какова скорость первого мотоциклиста до первой (второй) встречи?
- Сравните пути, пройденные первым и вторым мотоциклистами до первой (второй) встречи?
- Какой из мотоциклистов идет с большей скоростью?

Полезно выполнить чертеж:



Можно оформить найденный способ решения задачи следующим образом.

Пусть x км – расстояние между городами A и B.

	Путь до I встречи (км)	Путь до II встречи (км)
I мотоциклист	$x-50$	$50+x-25$
II мотоциклист	50	$x-50+25$

Отношение расстояний, пройденных первым и вторым мотоциклистами до первой встречи.

$\dfrac{x-50}{50}$ равно отношению соответствующих расстояний $\dfrac{50+x-25}{x-50+25}$. $\dfrac{x-50}{50}=\dfrac{50+x-25}{x-50+25}$, x = 0 , x = 125.

x = 0 – не удовлетворяет смыслу задачи.

125 км – расстояние между городами A и B.

Путем соответствующих рассуждений можно получить этот ответ и без введения неизвестной величины. Заметим, что до первой встречи оба мотоциклиста прошли все расстояние AB. До второй встречи оба мотоциклиста проехали расстояние в 3 раза больше по сравнению с AB (до первой встречи они проехали одно расстояние AB, от первой до второй еще два таких расстояния). Второй мотоциклист до первой встречи проехал 50 км, до второй встречи $50\cdot3=150$ км/ч. Значит, 150-25=125 (км) – расстояние между A и B. При решении такого рода задач учащиеся убеждаются в необходимости тщательного анализа текста задачи, установления взаимосвязи между данными и искомыми.

№11

“Из двух пунктов A и C выехали одновременно два связных в пункт B. Первый прибыл в B через 3 ч, а второй, чтобы прибыть в B одновременно с первым, должен был проезжать каждый километр на ? минуты скорее первого, так как расстояние от C до B на 12 км больше расстояния от A до B. Найти расстояние от A до B”.

Необычность текста этой задачи состоит в том, что взаимосвязь $S=V\cdot t$ дана не в явном виде. Необходима специальная работа над текстом задачи. Учащиеся должны вникнуть в содержание задачи, установить многосторонние связи между данными и искомыми задачи. С этой целью можно предложить учащимся дать ответы на вопросы:

– О чем идет речь в задаче?

– Какие процессы (ситуации) рассматриваются и чем они характеризуются?

– Сколько времени был в пути каждый связной?

– Какой путь каждого связного?

– Что означают слова “каждый километр на ? минуты скорее?

– Выразите $\frac{3}{4}$ мин в часах.

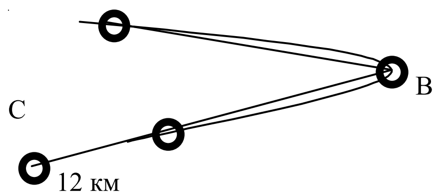
– Какой связной двигался быстрее?

– Какова взаимосвязь между скоростями и временем прохождения каждого километра I-ым и II-ым связными?

– Какое предложение текста задачи может служить основой для составления уравнения?

Краткая запись текста задачи и чертеж:

	V	*T*	S	Каждый км
I		3		
II		3	на 12 км больше, чем	на $\frac{3}{4}$ мин скорее, чем



Выбрав различную основу для составления уравнения, можно решить задачу несколькими способами.

I способ

Основа: $\boxed{\text{BC}} = \boxed{\text{AB}} + \boxed{\text{12 км}}$.

Пусть x км расстояние AB.

	V (км /ч)	t (ч)	S (км)
I	$x/3$	3	x
II	$\dfrac{1}{\frac{3}{x}-\frac{1}{80}}$	3	x+12

$$\frac{1}{\frac{3}{x}-\frac{1}{80}}\cdot 3$$ (км) – расстояние ВС, но, с другой стороны, (x+12) км – тоже расстояние ВС.

Уравнение: $3\cdot\dfrac{1}{\frac{3}{x}-\frac{1}{80}}=x+12$, $x^2+12x-2880=0$, $x_1=48$, $x_2=-60$.

– 60 – не удовлетворяет смыслу задачи.

48 км – расстояние АВ.

Выполним смысловую проверку по тексту задачи. Если $V_I=48:3=16$ (км/ч), тогда каждый километр I-ый проходит за $\frac{1}{16}$ ч, $V_{II}=(48+12):3=20$ (км), тогда каждый километр II-ой проходил за $\frac{1}{20}$ ч. Действительно,

$\frac{1}{16}-\frac{1}{20}=\frac{5-4}{80}=\frac{1}{80}(ч)=\frac{3}{4}(мин)$ – разница в прохождении каждого километра I-ым и II-ым, что соответствует условию задачи. Ответ: 48км.

II способ Основа: $t_I-t_{II}=\frac{3}{4}мин.$ Пусть х км расстояние АВ.

	T	S	Каждый километр
I	3	X	$\frac{3}{x}$
II	3	X+12	$\frac{3}{x+12}$

$\frac{3}{x} - \frac{3}{x+12}$ (ч) – разница во времени прохождения каждого километра I-й и II-й связными по условию задачи составляет $\frac{1}{80}(ч)$.

Уравнение: $\frac{3}{x} - \frac{3}{x+12} = \frac{1}{80}$.

III способ Основа: $\boxed{\text{ВС}}$ - $\boxed{\text{АВ}}$ = $\boxed{\text{12 км}}$.

Пусть за х мин проходит каждый километр I-й связной.

	Каждый километр	Время	Расстояние
I	X	180	$\frac{180}{x}$
II	$x-\frac{3}{4}$	180	$\frac{180}{x-\frac{3}{4}}$

$\frac{180}{x-\frac{3}{4}} - \frac{180}{x}$ (км) – разница в расстояниях АВ и АС составляет 12 км.

Уравнение:

$$\frac{180}{x-\frac{3}{4}} - \frac{180}{x} = 12;$$

$$12x^2 - 9x - 135 = 0;$$

$$x_1 = \frac{15}{4}; x_2 = -3.$$

$\frac{15}{4}$ мин – время прохождения I-ым связным каждого километра.

АВ = 48 (км).

IV способ Пусть x км/ч – скорость I-го связного, y км/ч - скорость II-го связного.

	V	T	S	Каждый километр
I	X	3	3x	$\frac{1}{x}$
II	Y	3	3y	$\frac{1}{y}$

3x-3y (км) – разность составляет 12 км,

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ (ч) – разность в прохождении каждого километра составляет $\frac{1}{80}$ ч.

$$\begin{cases} 3y-3x=12, \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{80}; \end{cases} \qquad \begin{cases} y=4+x, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{4+x}=\frac{1}{80}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=16; \\ y=20. \end{cases}$$

AB = 3·x=3·16=48 (км).

После получения ответа можно обратиться к учащимся с вопросами:

- В чем идея решения задачи?
- Сравните найденные способы решения.
- Изменится ли способ решения, если бы

а) расстояние AB и AC были одинаковыми?

б) время I-го и II-го связных в пути было разное?

Задачи на “было, изменили, стало”

№ 12

“Зарплата лаборанта составляла 100р. в месяц. После двух последовательных повышений на одно и то же число процентов она стала составлять 121р. На сколько процентов каждый раз повышалась зарплата лаборанта?”

Вопросы по тексту задачи:

- От чего берется процент повышения?
- Что значит “два последовательных повышения на одно и то же число процентов?
- На какое количество рублей происходило повышение каждый раз?

- Что собой представляет величина – зарплата лаборанта 121 р.?
- Какая надбавка к зарплате первого или второго лаборанта будет больше и почему?
- Сравните повышение зарплаты в рублях и в процентах при каждом повышении.
- Какое условие задачи может быть взято за основу при составлении уравнения?

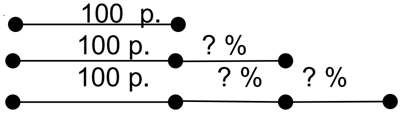
Краткая запись:

а) зарплата

– до повышения

– после I повышения

– после II повышения



б) было – 100 р.

I – на ? % от

II – на ? % от

стало – 121 р.

в)

г) $\boxed{\text{100 р.}}$ + $\boxed{\text{I повышение}}$ + $\boxed{\text{II повышение}}$ = $\boxed{\text{121 р.}}$

Запишем одно из решений задачи.

Пусть на x % повысилась зарплата лаборанта,

$\frac{100 \cdot x}{100} = x$ р. - первое повышение зарплаты,

$(100 + x)$ р. - стала зарплата после первого повышения зарплаты,

$\frac{100 + x}{100} \cdot x$ р. - второе повышение зарплаты,

$100 + x + \frac{100 + x}{100} \cdot x$ р. - стала зарплата после двух повышений, а по условию задачи это 121 р.

$$100 + x + \frac{100 + x}{100} \cdot x = 121, \qquad x^2+200x-2100=0,$$

$x_1=10$, $x_2= -210$.

– 210 – не удовлетворяет смыслу задачи.

На 10% - повышалась зарплата каждый раз.

Действительно, зарплата лаборанта была 100 р., после I-го повышения стала 110 р., после II-го повышения на 10% стала 110+11=121 р. Смысловая проверка по тексту задачи подтвердила правильность полученного ответа. Ответ: зарплата лаборанта каждый раз повышалась на 10%.

Заметим, иногда учащиеся (студенты) решение этой задачи записывают так: 121-100=21 р.,

21:2=10,5(%) – повышение зарплаты. Это свидетельствует о том, что анализ текста задачи проведен формально и задача решена неправильно. Из текста задачи выхвачена фраза “на одно и то же число процентов”, не учтено, что повышение зарплаты было последовательно, и при втором повышении надо учитывать зарплату, получаемую после первого повышения. Вот почему мы обращаем особое внимание на проведение специальной работы над текстом задачи. Предлагаем ответить на вопросы типа:

-Какова идея решения задачи, если использовали уравнения:

а) $\frac{100}{100} \cdot x + \frac{100 + x}{100} \cdot x = 21;$ б) $100 + x + \frac{100 + x}{100} \cdot x = 121;$

в) $\begin{cases} 100 + x = y, \\ y + \frac{y}{100} \cdot x = 121. \end{cases}$

- Изменится ли решение задачи, если зарплата после второго повышения стала 130 р.; если зарплата была не 100 р., а 105 р.; если зарплата повышалась на одинаковое количество процентов от первоначальной зарплаты?

- Чем отличается от текста данной задачи текст задачи, при решении которой составили уравнение:

а) $100 + x + \frac{100 + x}{100}(x + 10) = 150;$

б) $120 + \frac{120}{100} \cdot x + \frac{120 + \frac{120}{100} \cdot x}{100} \cdot x = 150;$

в) $100+x+(100+x)+x=121$.

- Составьте задачи, обратные (или аналогичные) решенной задаче.

№ 13

“В одном баке 840 л воды, а в другом $\frac{4}{7}$ того, что в первом. Из первого бака выливают в минуту в 3 раза больше, чем из второго. Через 5 минут в первом баке остается на 40 л меньше воды, чем во втором. Сколько литров воды выливают в минуту из второго бака?”

При решении задач такого рода следует шире использовать наглядное представление текста задачи в виде таблицы со столбцами: было, изменили, стало.

Было	Изменили		Стало
	1 минута	время	
I 840	в 3 раза >, чем	5 мин	на 40 л, < чем
II $\frac{4}{7}$ от		5 мин	

Выбор основы для составления уравнения может быть осуществлен следующим образом:

1) $\boxed{\text{VII}} - \boxed{\text{VI}} = \boxed{40}$.

2) $\boxed{\text{VI}} = \boxed{3} \cdot \boxed{\text{VII}}$.

I способ Пусть x л выливается за 1 мин из II-го бака

Было	Изменили		Стало
	1 мин	время	
I 840	3x	15x	840-15x
II $\frac{4}{7}*840$	X	5x	480-5x

(480-5x)-(840-15x) (л) – разница количества воды во II-м и I-м баках по условию задачи составляет 40 л.

480-5x-840+15x=40, x=40 .

Смысловая проверка по тексту задачи найденного корня подтверждает, что из II-го бака выливается за 1 минуту 40 л воды. Ответ: 40 л.

II способ Пусть x л осталось в I-м баке, тогда (x+40) л – во II-м,

840-x (л) – вылилось за 5 минут из I-го бака,

480-x-40 (л) – вылилось за 5 минут из II-го бака,

$\frac{840-x}{5}$ л – выливается за 1 минуту из I-го бака, что по условию задачи в 3 раза больше, чем выливается за 1 минуту из II-го бака – $\frac{480-x-40}{5}$ л.

$$\frac{840-x}{5} = 3\cdot\frac{440-x}{5},$$

$$840-x = 3\cdot 440-3x,$$
$$2x = 480,$$
$$x = 240.$$

240 л осталось в I-м баке, тогда во II-м осталось 280 л. За 5 мин из II-го бака вылилось 200 л, значит, за 1 мин выливается 40 л.

Выполним смысловую проверку по тексту задачи, удовлетворяет ли число 240 условиям текста задачи. Действительно, за 5 минут из I-го бака вылилось 840 – 240 = 600 (л), а из II-го – 480 – 280 = 200 (л). Тогда за одну минуту из I-го бака выливается 120 л, что действительно, в 3 раза меньше 40 л, выливающихся за 1 мин из II-го бака.

Сравнивая найденные способы решения задачи, учащиеся убеждаются в правильности полученного ответа задачи, делают выводы, какой способ и для каких задач наиболее приемлем.

№ 14

“На базе в первый день продали 17 % всех дров, во второй – 18 %. А в третий лишь 5 % всех дров. После этого осталось 6000 м3 дров. Сколько кубических метров дров продали в первый день?”

Анализ текста задачи требует уточнения, так как не указано “18% дров во второй день” от какой величины, поэтому прежде необходимо уточнить, что 18% берем от: а) всех дров;

б) от того, что продали в первый день.

Краткая запись:

1) Всего –

I – 17 % от

II – 18 % ?

III – 5 %

Осталось – 6000 м^3.

2) Всего –
I – 17 % от
II – 18 % от
III – 5 %

?

Осталось – 6000 м^3.

Решение: а) $0{,}17x + 0{,}18x + 0{,}05x + 6000 = x$;

б) $0{,}17x + 0{,}17x \cdot 0{,}18x + 0{,}05x + 6000 = x$.

После решения задачи можно задать вопросы:

- Изменится ли решение задачи, если “6000 м^3” – было дров, а сколько осталось найти?
- Использованы не числа “17;18;5”, соответственно, а (10;25;40) или (17;18;15)?
- Можно ли решить задачу с помощью пропорции? (Арифметическим способом)?
- Составьте задачу, аналогичную данной; обратную данной.
- Сформулируйте всевозможные другие вопросы к условию данной задачи.

№ 15

“В трех баках было вместе бензина 50 л, причем в первом было на 10 л больше, чем во втором. Когда из первого бака вылили в третий бак 26 л, во втором и третьем баках стало бензина поровну. Сколько бензина было первоначально во втором баке?”

В ответе при решении этой задачи, как правило, записывают:

32л бензина было первоначально во втором баке. Сомнений ответ не вызывает, т.к. число положительно и даже целое. На самом деле задача решений не имеет, т.к. эта задача с противоречивыми данными. На примере этой задачи воспитывается у учащихся потребность осуществлять контроль найденного решения, в частности, пошаговый контроль.

Краткая запись текста задачи:

	Было	Изменилось	Стало
I	на 10л>, чем	-26	
II			поровну
III		+26	

Рассмотрим предложенные способы решения этой задачи.

Например, пусть х л – было бензина во II-м баке.

	Было	Изменилось	Стало
I	x+10	-26	x+10-26
II	x		x
III	50-(2x+10)	26	50-(2x+10)+26 *поровну*

Во II-м – x л и III-м – 50-(2x+10)+26 л баках по условию задачи стало поровну.

Уравнение: x=50-(2x+10)+26, x=66, x=22.

Аналогично, если x л – было в I-м баке, тогда

уравнение: x-10=50-2x+26+10, 3x=96, x=32.

32л – в III-м баке, 32-10 = 22 л – II-м баке. Ответ: 22 л.

Смысловая проверка (прикидка на “здравый смысл”) показывает, что этого быть не может, во II-м баке – 22л, в I-м – 32л, это уже 55л, а всего должно быть 50л, значит, в III-м баке – минус 5л. Следовательно, задача решений не имеет. Можно предложить учащимся изменить данные задачи таким образом, чтобы задача имела решение, или составить аналогичную задачу, не имеющую решений.

№ 16

“Написали два числа. Если первое число увеличить на 30%, а второе уменьшить на 10%, то их сумма увеличится на 6. Если же первое число уменьшить на 10%, а второе на 20%, то их сумма уменьшится на 16. Какие числа были написаны?”.

При решении этой задачи у учащихся формируются умения оформлять краткую запись текста задачи, устанавливать связи между данными. Учащиеся убеждаются в том, что краткая запись задачи облегчает поиск способа решения.

Краткая запись:

	Было	Измен.	Стало
I		*+30%*	
II		*-10%*	
I и II		*+6*	

	Было	Измен.	Стало
I		*-10%*	
II		*-20%*	
I и II		*-16*	

Таблица поиска способа решения.

	Было	Измен.	Стало
I	*x*	*+30%*	*x+0,3x*
II	*y*	*-10%*	*y-0,1y*
I и II	*x+y*	*+6*	*x+y+6*

	Было	Измен.	Стало
I	*x*	*-10%*	*x-0,1x*
II	*y*	*-20%*	*y-0,2y*
I и II	*x+y*	*-16*	*x+y-16*

x+0,3x+y-0,1y=x+y+6 x-0,1x+y-0,2y=x+y-16

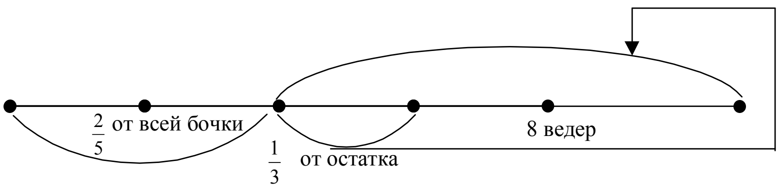
$$\begin{cases} 0{,}3x-0{,}1y=6, \\ 0{,}1x+0{,}2y=16; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=40; \\ y=60. \end{cases}$$

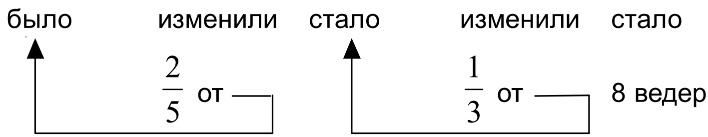
Смысловая проверка полученных результатов решения подтверждает, что речь в задаче идет о числах 40 и 60.

№17

“Из бочки отлили сперва $\frac{2}{5}$, потом $\frac{1}{3}$ оставшейся в ней воды, после чего в бочке осталось 8 ведер. Сколько было воды в бочке первоначально?”

Краткая запись текста задачи:

а) 

б) 

При работе с текстом задачи полезно выяснить:

- какие ситуации описаны в задаче;
- какую часть воды из бочки отлили в первый раз;
- какую часть воды из бочки отлили во второй раз;
- сколько ведер воды осталось в бочке;
- что значит “третью часть оставшейся в ней воды”;
- какую часть воды из бочки составляют 8 ведер?

Тщательный анализ текста задачи и наглядное представление в виде чертежа позволяет сделать вывод, что 8 ведер составляют $\frac{2}{5}$ всего объема воды в бочке.

I способ Решение:

1) 8:2=4 (ведра) – приходится на одну часть всей бочки,
2) 4·5=20 (ведер) – было в бочке первоначально.

II способ Пусть x ведер было первоначально в бочке, этап решения может быть рассмотрен с учащимися при изучении уравнений.

$\frac{2}{5}x$ – ведер отлили в первый раз,

$\frac{1}{3}(x-\frac{2}{5}x)$ – ведер отлили во второй раз,

$x-\frac{2}{5}x-\frac{1}{3}(x-\frac{2}{5}x)$ – ведер осталось в бочке, что по условию задачи равно 8 ведрам.

$$x-\frac{2}{5}x-\frac{1}{3}(x-\frac{2}{5}x)=8; \quad \frac{3}{5}x-\frac{1}{3}x+\frac{2}{15}x=8; \quad (\frac{9-5+2}{15})x=8;$$

$$\frac{6}{15}x=8; \qquad x=20.$$

20 ведер было в бочке первоначально.

Смысловая проверка по условию задачи подтверждает правильность найденного решения:

$\frac{2}{5}$ от 20 ведер – 8 ведер отлили первый раз, осталось 20-8=12 (ведер), $\frac{1}{3}$ от 12 ведер – 4 ведра, 12-4=8 (ведер) осталось в бочке после двух переливаний. Нередко при решении этой задачи студенты (и даже учителя) дают ответ 40 ведер, в этом случае смысловая проверка по условию задачи и должна показать, что задача решена неверно.

№ 18

“В одном овощехранилище 55 т овощей, а в другом – 49 т. Ежедневно в первое овощехранилище стали привозить по 22,6 т овощей, а во второе по 14,2 т овощей. Через сколько дней в первом овощехранилище картофеля станет на 40% больше, чем во втором”.

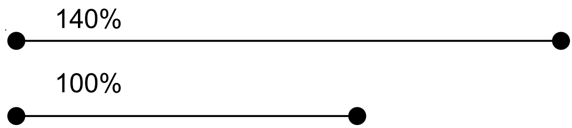
Заметим, что при такой формулировке задача не имеет решения, так как нет данных о наличии картофеля в овощехранилище и не известно сколько картофеля стали привозить ежедневно. Поэтому полезно предложить переформулированную задачу: “В одном овощехранилище 55т картофеля, а в другом – 49т. Ежедневно в первое овощехранилище стали привозить по 22,6 т картофеля, а во второе по 14,2 т. Через сколько дней картофеля в первом овощехранилище станет на 40% больше, чем во втором?”.

При проведении специальной работы над текстом задачи важно выяснить, сколько картофеля было в каждом овощехранилище, что означают слова “на 40% в первом овощехранилище больше, чем во втором?”. Среди ответов могут быть и такие: “в одном 100%, а в другом 60%”; “40% нужно находить от количества картофеля, находящегося во втором овощехранилище”, и т.п.

В итоге обсуждений получаем краткие записи задачи:

1) 22,6т на 40% > , чем
14,2т
49т

2)



3)

	Было (т)	Измен. ежедн. (т)	Стало
I	55 т	по 22,6 т	на 40% >, чем
II	49 т	по 14,2 т	

4)

$$\boxed{\text{I}} = \frac{7}{5}\boxed{\text{II}}.$$

$$\boxed{\text{I}} - \boxed{\text{II}} = 0{,}4 * \boxed{\text{II}}.$$

I способ Пусть через x дней в I-м овощехранилище станет на 40% больше, чем во II-м, тогда 55+22,6x (кг) – станет в I-м овощехранилище, что составляет $\frac{7}{5}$ от того, что находилось во II-м – (49+14,2x) т.

$$55+22{,}6x=\frac{7}{5}(49+14{,}2x), \quad x=5.$$

II способ За основу составляемого уравнения по тексту задачи можно было взять разность в 40% между I-м и II-м овощехранилищами.

55+22,6x-(49+14,2x) (т) – разность между I-м и II-м овощехранилищами составляет $0{,}4\cdot(49+14{,}2x)$ т.

22,6x+55-(14,2+49)=0,4(14,2x+49), 2,72x=13,6, x=5.

Через 5 дней в I-м овощехранилище станет картофеля на 40% больше, чем во II-м.

Можно предложить еще один способ решения:

III способ Пусть x т – стало картофеля во II-м овощехранилище, тогда

1,4x (т) – стало в I-м, (x-49) т – было привезено картофеля во II-е овощехранилище, (1,4x-55)т – стало в I-м,

$\frac{x-49}{14{,}2}$ дн. – привозили картофель во II-е овощехранилище, что

по условию задачи равно $\frac{14x-55}{22{,}6}$ дней – в I-м овощехранилище.

$$\frac{x-49}{14{,}2}=\frac{14x-55}{22{,}6}.$$

Заметим, что фактически при этом способе решения данное "на 40% больше" не используется. С целью контроля за правильностью выполненного решения необходимо проверить, действительно ли через 5 дней в I-м овощехранилище картофеля на 40% больше, чем во II-м. Найдем, сколько стало картофеля в каждом овощехранилище:

в I-м – за 5 дней подвезли $5\cdot 22{,}6=113(m)$, всего стало: $55+113=168(m)$,

во II-м – за 5 дней $14{,}2\cdot 5=71(m)$, всего стало:

$49+71=120(m)$.

Разница: $168-120=48(m)$ и должна составлять 40% от того, что во II-м овощехранилище. Проверим: 48т – ?%,

120т – 100%, т.е. $40\%=\frac{48\cdot 100\%}{120}$.

Проверка по тексту задачи позволяет записать ответ: через 5 дней в I-м овощехранилище станет картофеля на 40% больше, чем во II-м.

Другие задачи

№ 19

"Три звена собрали для школьной библиотеке 65 книг. Первое звено собрало на 10 книг меньше, чем второе, третье – 70% от того числа книг, которое собрали первое и второе звенья вместе. Сколько книг собрало каждое звено?"

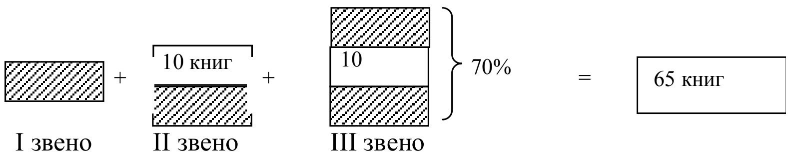
Вопросы по тексту задачи:

- Какое звено собрало книг больше?
- Сколько книг собрало II-е звено?
- Можно ли сказать, что I-е и II-е звенья собрали 30% всех книг (30% от – книг собранных III-им звеном)?
- Что значит “70%” в тексте задачи?

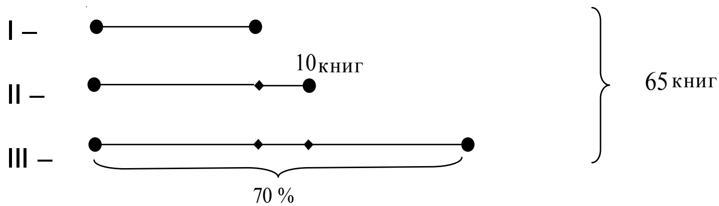
Краткая запись:

а) I – 10 книг меньше, чем
II –
III – 70% от
65 книг

б)



в)



При решении задачи составляем уравнение

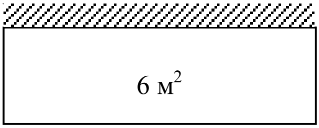
$x+(x-10)+0{,}7(2x-10)=65$, решаем и получаем

$x=\dfrac{82}{3{,}4}$. Учащиеся сразу начинают проверять – почему такой “некрасивый” корень уравнения. Чаще всего говорят “задача не решается”. На самом деле – задача с противоречивыми данными и поэтому задача решений просто не имеет. Спрашиваем учащихся: “Как изменить текст задачи, чтобы задача имела решение?”. Предлагают, например, вместо числа 65 взять 85 и крайне редко можно услышать, что вместо “книг” рассматривать любой сыпучий продукт и тогда задача будет иметь решение при указанных числовых данных. Можно дать учащимся творческое задание – придумать свои задачи, не имеющие решения (содержащие противоречивые данные).

№ 20

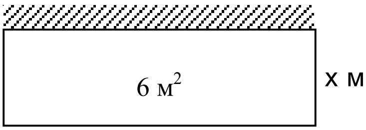
“Учащиеся предложили огородить прямоугольную клумбу, площадью в 6 м^2. Одна сторона клумбы прилегает к уже имеющейся ограде. Каких размеров прямоугольную клумбу можно огородить, если у них есть 8 м ограды?”

Сразу по тексту задачи можно выполнить рисунок:



Методом подбора найдем числа, удовлетворяющие условию задачи. Ответы могут быть: а) 3;2;3, б) 1;6;1. Затем предложить еще один вариант: 2,5; 3; 2,5– тоже в сумме 8. И если учащиеся объяснят – почему третий вариант невозможен, значит, текст задачи ими усвоен и два решения задачи найдены подбором. Возникает вопрос – нет ли других решений? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим некоторые способы решения этой задачи.

I способ

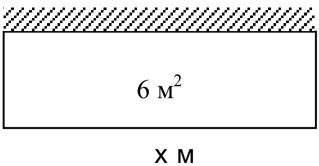


$x(8-2x)=6$, $x^2-4x+3=0$, $x_1=3$, $x_2=1$.

Оба корня удовлетворяют смыслу текста задачи.

Запишем ответ: 3,2,3; 1,6,1.

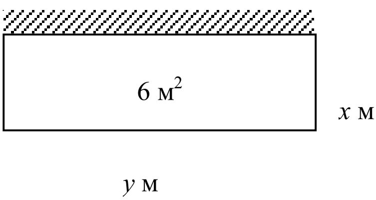
II способ



$x\cdot\dfrac{8-x}{2}=6$, $x^2-8x+12=0$, $x_1=2$, $x_2=6$.

Ответ: 3, 2, 3; 1, 6, 1.

III способ



$$\begin{cases} x \cdot y=6, \\ 2x+y=8; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=3, \\ y_1=2; \text{ или} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=6. \end{cases}$$

IV способ Пусть x м – каждая из двух одинаковых сторон, тогда $\frac{6}{x}м$ - другая сторона. $(2x+\frac{6}{x})м$ - периметр ограды, а по условию задачи это 8 м.

$2x+\frac{6}{x}=8$, $2x2-8x+6=0$, $x^2-4x+3=0$, $x_1=1$, $x_2=3$.

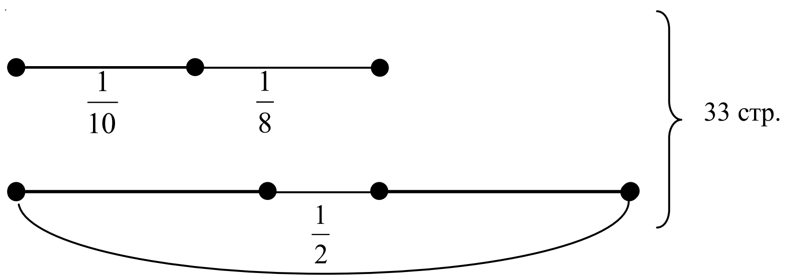
Ответ: 3, 2, 3; 1,6,1.

При решении этой задачи возможны два варианта построения прямоугольной клумбы, о чем и свидетельствуют полученные ответы. Интересные задачи могут предложить учащиеся при выполнении задания: составьте аналогичную задачу, не имеющую решения, имеющую одно решение или множество решений.

№ 21

“Когда Оля прочитала $\frac{1}{10}$, а затем еще $\frac{1}{8}$ часть книги, то это было на 33 страницы меньше половины книги. Сколько было страниц в книге?”

По тексту задачи можно выполнить чертеж:



После проведения анализа текста задачи предложены такие решения:

I способ Пусть x страниц в книге. $\frac{x}{10}+\frac{x}{8}+33=\frac{x}{2}$, $x=120$.

120 страниц в книге.

II способ Пусть x страниц – это половина книги. $\frac{2x}{10}+\frac{2x}{8}=x-33$, $x=60$.

60•2=120 с. в книге.

III способ Пусть x страниц прочитала Оля, (x+33) с. составляет половину книги, $2\cdot\frac{(x+33)}{10}+\frac{2(x+33)}{8}=x$, $x=27$.

x+33=27+33=60 с. – половина книги, 120 с.– вся книга.

IV способ Вся книга – 100%, $\frac{1}{10}$ книги – 10%, $\frac{1}{8}$ книги – 12,5%, на 33 страницы приходится 50 % – 22,5 % =27,5 %. Составим пропорцию:

27,5% - 33 с.

100% - ? Вся книга – $\frac{33\cdot 100}{27{,}5}=120$ с.

V способ На 33 страницы приходится $\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}=\frac{20-5-4}{40}=\frac{11}{40}$ часть всей книги, значит, вся книга $\frac{33\cdot 40}{11}=120$ с.

Различные способы решения задачи способствуют формированию общего подхода к решению задач, выбору наиболее рационального способа решения, развитию творческих способностей учащихся. Можно предложить вопросы типа: изменится ли решение задачи, если “$\frac{1}{8}$ оставшейся части книги” или “$\frac{1}{20}$ часть книги” и т.п.

№ 22

“В соревнованиях по стрельбе участвовало 12 человек. Сколько патронов получил каждый участник, если потребовалось 8 коробок патронов (в коробке 30 патронов)?”

Обычно сразу получаем ответ: задача решений не имеет. На самом деле, это не так. Ответ задачи получается, если 8 коробок поделим на

12 человек. Каждый участник соревнований получит по $\frac{2}{3}$ коробки патронов. Иногда следует уточнить текст задачи, что в каждой коробке по 30 патронов (или число коробок взять кратным числу человек). В последнем случае задача не имела бы никакого особого интереса. Использование обычной задачи с интересными данными может помочь учителю обучать учащихся решению задач.

№ 23

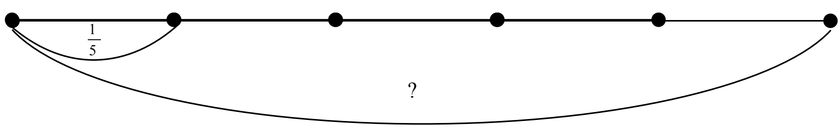
"С одного участка школьники собрали 980 кг картофеля, а с другого в 3 раза больше. Пятую часть картофеля разложили в 16 одинаковых мешков. Сколько мешков понадобится, чтобы разложить весь картофель?".

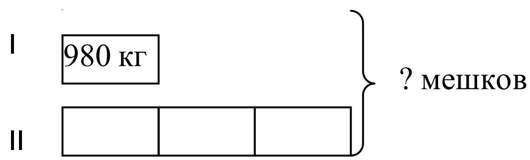
При решении этой задачи особое внимание обращается на роль вопроса. Действительно, если вопрос понятен, то ответ на вопрос задачи следует немедленно – $16 \cdot 5 = 80$ (мешков). Нередко, проведя формально анализ текста задачи, ее решают по действиям:

1) $980 + 3 \cdot 980 = 3920$ (кг); 2) $3920 \div 5 = 784$ (кг);
3) $784 \div 16 = 49$ (мешков);
4) $3920 \div 49 = 80$ (мешков).

Использование такого рода задач приучает учащихся к проведению тщательного анализа текста задачи, к устранению формализма при решении задач. Можно использовать наглядное представление задачи:

16 мешков





№ 24

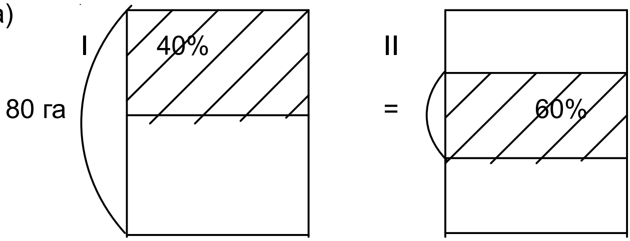
"Площадь участка поля 80 га. Первый тракторист вспахал 40% этого участка, а второй 60% оставшейся части. Кто из них вспахал больше и на сколько га?"

При работе с текстом задачи обращается внимание на данные задачи и их взаимосвязь:

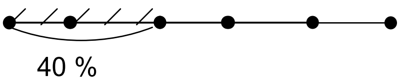
- Все ли поле вспахано?
- Что означает 40%, 60% - по тексту задачи?
- Можно ли сразу сказать – какой из них вспахал больше: в процентах, в частях?
- Какую часть поля вспахал I-й тракторист?
- Какую часть поля вспахал II-й тракторист?

Краткая запись задачи:

а)

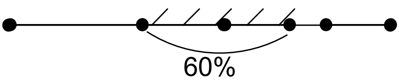


б) I



40% – $\frac{2}{5}$ части всего поля.

II



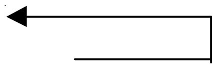
60% – $\frac{3}{5}$ от $\frac{3}{5}$ части поля.

в)

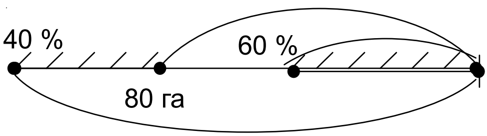
Все поле

? I – 40% от

? II – 60% от оставшейся части



г)



Решение:

а) I: 40% от 80га: $\frac{80 \cdot 40}{100}$ =32(га)

II: 60% от (80-32)га: $\frac{48}{100} \cdot 60$ =28,8(га)

32-28,8=3,2(га) – на столько I вспахал больше, чем II-й.

б) $\frac{2}{5}-\frac{9}{25}=\frac{10-9}{25}=\frac{1}{25}$ – на столько частей от всего поля I-й вспахал больше, чем II-й.

$80\cdot\frac{1}{25}=3{,}2$ (га) – на столько гектаров I-й вспахал больше, чем II-й.

После решения задачи полезно предложить другие задачи:

- “Площадь участка 80га. Первый тракторист вспахал 40% от половины участка, а второй 25% от оставшейся части. Кто из них вспахал больше и на сколько?”.
- “Площадь участка 80га. Два тракториста собирались вспахать этот участок пополам. Но оказалось, что I-й вспахал только 40%, а II-й – 50% планируемого. Кто из них вспахал больше и на сколько?”.

Если при решении предложенных задач учащиеся не растеряются и сразу смогут ответить на вопрос задачи, значит, суть решения задач такого рода ими усвоена.

№ 25

“Вступив некогда в России в законный брак, мой сосед достиг теперь возраста, который представляет собой точный квадрат. Произведение цифр числа, выражающего возраст соседа, равно возрасту его жены. Возраст их дочери равен сумме цифр в возрасте отца. А возраст сына равен сумме цифр в возрасте матери. Сколько лет каждому члену семьи?”.

Эта задача поможет учителю продемонстрировать взаимосвязь данных задачи, их влияние друг на друга, а также математическую интерпретацию текста задачи. Вопросы по тексту задачи:

- Что такое “точный квадрат”?
- Кто старше отец или мать, сын или дочь?
- Изменится ли решение задачи, если был бы известен возраст одного из членов семьи?
- Что можно сказать о возрасте отца?
- Как можно найти возраст сына, зная возраст отца, возраст дочери, зная возраст жены.

При анализе полученных ответов на данные вопросы возникает идея составить таблицу, раскрывающую взаимосвязь данных задачи, (возможный возраст каждого члена семьи).

отец (квадраты)	мать (произведение)	дочь (сумма 1)	сын (сумма 2)
25	10	7	1

36	18	9	9
49	36	13	9
64	24	10	6
81	8	9	8

В первом столбце таблицы записаны точные квадраты чисел от 18 до100 (реальный возраст отца, законный брак - с 18 лет). Второй, третий и четвертый столбцы получены в соответствии с условием задачи. Выбор наиболее оптимального и реального варианта выпал на третью строчку: 49, 36, 13, 9.

Ответ: отцу – 49 лет, матери – 36 лет, дочери – 13 лет, сыну – 9 лет.

№ 26

“Длина прямоугольного параллелепипеда 24 м, что больше ширины в 3 раза, а ширина на 5см меньше высоты. Найдите объем”.

В тексте этой задачи использованы слова “больше ширины в 3 раза”. Обычно формально выполняются действия умножения, т.к. действует стереотип – и больше в 3 раза, значит надо умножать”. Анализ данных задачи и их связей позволяет заключить, что для нахождения ширины необходимо известную величину длины уменьшить в 3 раза.

Краткая запись:

Длина – 24м, в 3 раза >, чем

V – ?

Ширина – на 5 см. <, чем

Высота –

Нередко можно наблюдать и такие решения: V=24·24·3·(24+5),

$V=\frac{24}{3}\cdot(8+3)\cdot 24=2112$ (см^3). Учащиеся не заметили, что здесь длина в метрах.

С целью идеи решения задач такого рода можно предложить решить еще одну задачу: “Найти объем прямоугольного параллелепипеда, если его длина 24 см, ширина в 3 раза меньше, чем длина, а высота на 5 см больше, чем ширина”. Если учащиеся сразу заметили, что эта задача уже решена, то предложить им составить задачи, обратные данным.

№ 27

“Четверо купили лодку. Первый внес половину всей суммы, второй – треть суммы вносимой остальными, третий – четверть суммы, вносимой остальными, четвертый – 130 р. Сколько стоит лодка, какую сумму внес каждый?”.

Эта задача с точки зрения решения систем линейных уравнений не представляет никакого труда.

I способ Пусть x р. – вся сумма – стоимость лодки, y р. – внес второй, тогда третий внес $\frac{1}{4}(\frac{x}{2}+y+130)$.

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}(\frac{x}{2}+y+130)+130; \\ \frac{x}{2}+y+\frac{1}{4}(\frac{x}{2}+y+130)+130=x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2600; \\ y=650. \end{cases}$$

Ответ: I-й – 1300 р., II-й – 650 р., III-й – 520 р., IV-й – 130 р., стоимость лодки – 2600 р.

II способ Краткая запись:

I - $\frac{1}{2}$ от всей суммы

II - $\frac{1}{3}$ (I, III, IV)

III - $\frac{1}{4}$ (I, II, IV)

IV - 130

Пусть x р. – вся сумма,
x_2 р. – внес II-й,
x_3 р. – внес III-й,

$\frac{x}{2}$ р. – внес I-й, поэтому по условию

$x_2+x_3+130=\frac{x}{2}$, (1)

$x_2=\frac{1}{3}(\frac{x}{2}+x_3+130)$, (2), подставим в (2) вместо $\frac{x}{2}$ (1),

$x_2=\frac{1}{3}(x_2+x_3+130+x_3+130)$,

$3x_2=x_2+2x_3+260$,

$x_2=x_3+130$ (3), но

$x_3=\frac{1}{4}(\frac{x}{2}+x_2+130)$, (4)

$x_3=\frac{x}{8}+\frac{x_2}{4}+65$,

$x_3=\frac{x}{6}+\frac{260}{3}$, подст. В (3)

$x_2=x_3+130=\frac{x}{6}+\frac{260}{3}+130$.

Найдем всю сумму

$x=\frac{x}{2}+\frac{x}{6}+\frac{260}{3}+130+\frac{x}{6}+\frac{260}{3}+130$;

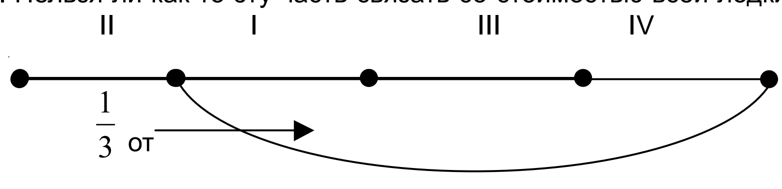
$6x=5x+1040+1560$, $x=2600$.

2600 р. – стоит лодка.

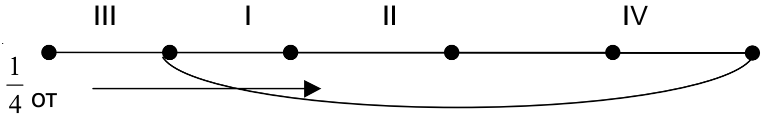
III способ Чтобы решить эту задачу, не используя неизвестное, надо тщательно проанализировать не только данные задачи, но и их взаимосвязь. Постоянно отвечая на вопрос “А что это значит?”. Решим эту задачу, пользуя понятие “часть числа”.

Действительно, каждый внес определенную сумму денег, их характеристика в задаче дана через “части”, возникает вопрос – нельзя ли определить, какую часть всей суммы внес IV-й, зная, что он внес 130 р.

Возьмем данные: I-й внес половину всей суммы, значит, $\frac{1}{2}$ составляет часть от всей суммы, второй внес $\frac{1}{3}$ от всей суммы, внесенной I-м, III-м, IV-м. Нельзя ли как-то эту часть связать со стоимостью всей лодки.



Аналогично, рассуждаем: III-й внес $\frac{1}{4}$ от суммы, внесенной I-м, II-м, IV-м.



III-й внес $\frac{1}{5}$ часть от всей суммы.

IV-й внес 130 р., а это составляет $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ часть всей суммы.

Значит, вся сумма 20·130=2600 р.

Этот же способ может быть оформлен и использованием х.

Пусть х р. – вся сумма,

I - $\frac{1}{2}x$ р., II - $\frac{1}{4}x$, III - $\frac{1}{5}x$,

х=$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+130$,

20х=19х+2600,

х=2600.

При решении этой задачи можно продемонстрировать универсальность алгебраического способа решения и оригинальность арифметического способа. Красоту арифметического способа мы стали забывать, а ведь история математики свидетельствует о том, что задачи решали и красивые решения давали, не используя переменную х.

№ 28

“У любителей головоломок спросили, сколько ему лет? Он дал ответ: “Возьмите трижды мои годы через 3 года, да отнимите трижды мои годы з года назад, у вас получатся мои годы”. Сколько ему лет?”.

Необычность этой задачи заключается в переводе текста задачи на математический язык и наоборот. Здесь будут вопросы типа:

-Что значит мои годы через 3 года?

-Что значит мои годы 3 года назад?

-Что значит трижды мои годы через 3 года?? Что значит трижды мои годы 3 года назад?

I способ Пусть x лет – возраст любителя головоломок,

(x+3) лет – будет через 3 года,

3(x+3) лет – трижды его годы через 3 года,

(x-3) лет – было ему 3 года назад,

3(x-3) лет – трижды его годы 3 года назад.

3(x+3)-3(x-3) лет – эта разность по условию задачи и будет составлять x лет.

Уравнение: $x=3(x+3)-3(x-3)$, $x=18$. 18 лет любителю головоломок.

II способ Пусть x лет – будет через 3 года,

y лет – было 3 года назад,

3x-3y лет – возраст сейчас, что по условию задачи (x-3) лет.

$3x-3y=x-3$, $x-3=y+3$; $x=21$, $y=15$;

21 год ему будет через 3 года, 21-3=18 лет ему сейчас.

С целью закрепления навыков перевода текста задачи на математический язык, можно предложить задачу типа: “У любителя головоломок спросили, сколько ему лет. Он дал ответ: “Возьмите трижды мои годы два года назад и отнимите дважды мои годы назад, у вас получатся мои годы”.

№ 29

“Некий фермер решил купить 100 голов скота за 100 $. Если каждый теленок стоит 10 $, а каждый ягненок – 3 $, а каждый поросенок – 0,5 $; то сколько телят, ягнят, поросят купит фермер?”.

Как правило, эту задачу начинают решать системой, отвечая на вопрос: “Сколько каждого вида животных – телят, ягнят, поросят купит фермер?”. На самом же деле, это задача с лишними данными и неформально проведенный анализ текста задачи позволяет сразу ответить на вопрос задачи – 100 голов ягнят, телят, поросят купит фермер. Поэтому решать можно эту задачу с помощью системы после уточнения вопроса.

x – голов телят, y – поросят, Z – ягнят.

$$\begin{cases} x+y+Z=100, \\ 10x+0,5y+3Z=100; \end{cases} \quad \begin{cases} Z=100-x-y, \\ y=\dfrac{200+7x}{2,5}; \end{cases} \quad \begin{cases} Z=100-x-y, \\ y=\dfrac{200+7\cdot 5}{2,5}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=5, \\ y=94, \\ Z=1. \end{cases}$$

Смысловая проверка по тексту задачи подтверждает полученный ответ:

5 – телят, 94 – поросенка, 1 – ягненок.

№ 30

65 экскурсантов надо разместить в четырех палатках, так, чтобы во второй было в 1,5 раза больше экскурсантов, чем в первой, а в третьей на 4 человека меньше, чем во второй. А в четвертой в два раза больше, чем в третьей. Сколько экскурсантов надо поместить в первой палатке?

Краткая запись текста задачи:

I – ?
II – в 1,5 раза >, чем
III – на 4 <, чем
IV – в 2 раза >, чем

65

Решение: Пусть х человек разместили в I-й палатке, тогда 1,5х человек во II-й,

(1,5х-4) чел. – в III-й, 2(1,5х-4) чел. – в IV-й.

Всего в четырех палатках разместили х+1,5х+(1,5х-4)+2(1,5х-4) человек, что по условию задачи составляет 65 человек.

х+1,5х+1,5х-4+2(1,5х-4)=65, х=11.

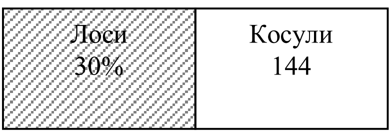
11 человек разместили в I-й палатке. Ответ: 11 человек.

Если бы спрашивалось, сколько человек разместили во II-й палатке и решающие получили ответ 16,5 человек, то сразу бы сделали правильный вывод. Но ответ “11 человек – в I-й палатке” сомнений не вызывает, если учащиеся не приучены делать смысловую проверку. При работе с текстом этой задачи полезно предложить задание – изменить числовые данные так, чтобы задача имела решение. Тут варианты разные, один из них – “65” заменить на “72”, и тогда в I палатке будет 12 человек. С целью развития у учащихся творческих подходов к решению задач можно рассмотреть составленные учащимися задачи с противоречивыми данными.

№ 31

“Лоси составляют 30 % от общего числа косуль и лосей, живущих в заповеднике. Сколько косуль живет в заповеднике, если число лосей на 144 меньше числа косуль?”.

Для осмысления текста задачи и нахождения связей между данными и искомым выполним краткую запись текста задачи:

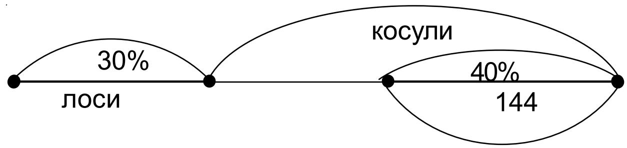


Ответим на вопросы:

- Что значит “лоси составляют 30% от общего числа?
- Сколько процентов составляют косули от общего числа животных?

- Каких животных в заповеднике больше?
- На сколько процентов косуль больше, чем лосей?
- Сколько процентов составляют 144 косули от общего числа животных?

Изобразим схематически результаты анализа текста задачи в виде чертежа.



I способ

1) $144:\dfrac{40}{100}$=360 (животных) – в заповеднике

2) $360\cdot\dfrac{70}{100}$=252 (косули) – в заповеднике

II способ

1) 144:40=3,6 животных приходится – на 1%,
2) 3,6·100=360 (животных),
3) 360-144=216 (животных),
4) 216:2=108 (лосей),
5) 108+144=252 (косули).

III способ

Пусть x косуль в заповеднике, тогда (x–144) лосей в заповеднике,
Составим пропорцию:
(x–144) – 30%, x – 70%, x=252.
Ответ: 252 косули в заповеднике.

Смысловая проверка по тексту задачи подтверждает правильность полученного решения задачи. Полезно рассмотреть и обратные задачи, связанные с данной задачей, обсудить их взаимосвязь, способы их решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В современных условиях совершенствование математической подготовки учащихся тесно связано с проблемой развития их творческих способностей. Известно, что основным средством развития учащихся при обучении математике являются задачи. Вот почему проблема обучения решению математических задач сегодня наиболее актуальна.

Как показали наши исследования по обучению учащихся решению задач, качество усвоения математики зависит от сформированности умения решать задачи. В данном учебном пособии раскрыты основные компоненты умения решать задачи. Научные поиски и опыт работы школы показывают, что с целью обучения учащихся решению задач необходимо систематически и целенаправленно формировать умение решать задачи, знакомить со структурой деятельности по решению задач.

С этой целью мы разработали специальные приемы работы учителя и учащихся на каждом этапе процесса решения задачи. Использование этих приемов при обучении математике возможно лишь при разработанной системе заданий, ориентированных на формирование у учащихся умений решать задачи и удовлетворяющих определенным требованиям. В структурном плане система содержит задания на решение готовых задач, а также задач с недостающими, лишними, противоречивыми данными; на преобразование задач; на составление задач. В настоящее время разработанная методика обучения учащихся решению задач нашла свое отражение в реализации проекта “Математика. Психология. Интеллект”.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абульханова-Славская К.А. Деятельность и психология личности. – М.: Наука, 1980. – 335 с.

2. Арнольд И.В. Принципы отбора и составления арифметических задач. – Известия АПН РСФСР, 1946. № 6. С. 7 – 28.

3. Бабанский Ю.К. Оптимизация процесса обучения: Методические основы. – М.: Педагогика, 1981. – 256 с.

4. Балк М.Б., Балк Г.Д. Поиск решения: Научно-популярная литература. – М.: Дет. лит., 1983. – 143 с.

5. Балл Г.А.Определение понятия задачи. Процесс решения задачи. – В кн.: Человек и вычислительная техника. – Киев, 1971. С. 65-79.

6. Богоявленский Д.Н., Менчинская Н.А. Психология усвоения знаний в школе. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959. – 348 с.

7. Брушлинский А.В. Мышление: процесс, деятельность, общение. – М.: Мысль, 1981. – 230 с.

8. Гальперин П.Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий. – М.: Педагогика, 1969. – 156 с.

9. Ганеев Х.Ж. Теоретические основы развивающего обучения математике/ Екатеринбург Урал. гос. пед. ун-т., 1997.- 160 с.

10. Гельфман Э.Г. и др. Квадратные уравнения: Учебное пособие по математике для 8 класса. – Томск: Изд-во Том. ун-та. – 276 с.

11. Гельфман Э.Г. и др. Положительные и отрицательные числа: Учебное пособие по математике для 6 класса. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 2000. – 344 с.

12. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. – М.: Просвещение, 1990.- 176 с.

13. Давыдов В.В. Виды обобщений в обучении: Логико-психологические проблемы построения учебных предметов. – М.: Педагогика, 1972. – 424 с.

14. Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения. – М.: Интор, 1997. – 544 с.

15. Дидактика средней школы: Некоторые проблемы современной дидактики / Под ред. М.Н. Скаткина. – М.: Просвещение, 1982. – 320 с.

16. Драган З.П. К методике решения задач в 4 классе //Математика в школе, №1. С. 24-27.

17. Епишева О.Б., Крупич В.И. Учить школьников учиться математике. – М.: Просвещение, 1990. – 128 с.

18. Канин Е.С., Нагибин Ф.Ф. Заключительный этап решения учебных задач. – В кн.: Преподавание алгебры и геометрии в школе. – М., 1982. С. 131 – 138.

19. Канин Е.С., Нагибин Ф.Ф. Учебные математические задачи: Учебное пособие. – Киров, 1980. – 94 с.

20. Кожухов С.К. Составление задач школьниками // Математика в школе, 1995, № 2,. С. 4 – 6.
21. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. – М.: Просвещение, 1977 Ч. I, II. – 110 с., Ч. I; - 144 с., Ч. П
22. Колягин Ю.М., Оганесян В.А. Учись решать задачи: Пособие для учащихся VII – VIII классов. – М.: Просвещение, 1980. – 96 с.
23. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников. – М.: Просвещение, 1968. – 431 с.
24.Кулюткин Ю.Н. Эвристические методы в структуре решений. – М.: Педагогика, 1970. – 231 с.
25. Левитас Г.Г. Об алгебраическом решении текстовых задач // Математика в школе, 2000. № 8. С.13-15.
26. Леонтьев А.Н. Деятельность. Сознание. Личность. – М.: Политиздат, 1977. – 304 с.
27. Лященко Е.И., Мазаник А.А. Методика обучения математике в 4 – 5 классах. – Минск, 1976. – 222 с.
28. Матушкина З.П. Задания, формирующие умение решать задачи // Математика (Приложение к газете “ 1 сентября”), 1999. № 42. С. 8-10.
29. Матюшкин А.М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. – М.: Педагогика, 1972. – 208 с.
30. Менчинская Н.А. Проблемы учения и умственного развития школьника. –М.: Педагогика , 1989. – 185 с.
31. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика. Учебное пособие / Сост. В.И. Мишин – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
32. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Учебное пособие / Сост. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.
33. Общая психология: Учебное пособие для пед. ин-тов / Под ред. В.В. Богословского и др. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1981.
34. Орехов Ф.А. Решение задач методом уравнений. – М.: Просвещение, 1971. – 158 с.
35. Педагогика школы: Учебное пособие для пед. ин-тов / Под ред. И.Т. Огородникова. –М.: Просвещение, 1978. –319 с.
36. Пойа Д. Как решать задачу: Пособие для учителей. – М.: Учпедгиз, 1961. – 207 с.
37. Приемы работы учителя и учащихся на первом этапе процесса решения задач / Сост. З.П. Драган. – Курган, 1983. – 20 с.
38. Приемы работы учителя и учащихся на заключительном этапе процесса решения задачи/ Сост. З.П. Матушкина. – Курган, 1986. – 30 с.
39. Рубинштейн С.М. О мышлении и путях его исследования. – М.: Учпедгиз, 1958. – 147 с.

40. Сафонова Л.А. О действиях, составляющих умение решать текстовые задачи // Математика в школе, 2000. № 8. – С.45 – 47.

41. Скаткин М.Н. Проблемы современной дидактики. – М.: Педагогика, 1980. – 96 с.

42. Сохор А.М. Логическая структура учебного материала: Вопросы дидактического анализа / Под ред. проф. М.А. Данилова. – М.: Педагогика, 1974. – 192 с.

43. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний. – М.: Изд-во МГУ, 1969. – 343 с.

44. Тулькибаева Н.Н., Усова А.В. Методика обучения учащихся умению решать задачи: Учеб. пособие к спецкурсу. – Челябинск, 1981. – 88 с.

45. Уемов А.И. Системы и системные исследования. М., 1970. С. 64 – 86.

46. Холодная М.А. Психология интеллекта: парадоксы исследования. – М.: Барс, 1997. – 392 с.

47. Фридман Л.М. и др. Как научиться решать задачи. – М.: Просвещение, 1984. - 175 с.

48. Цукарь А.Я. О полезности интерпретации решения задачи // Математика в школе. 2000. № 7. – С. 34 – 36.

49. Чванов В.Г. Анализ математической задачи // Математика в школе, 1993. № 4. С. 61 – 63 с.

50. Шевкин А.В. Обучение решению текстовых задач в 5 – 6 классах: Методическое пособие для учителя. – М.: Русское слово, 2001. – 208 с.

51. Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. Обучение математике в школе / Укрупнение дидактических единиц: Книга для учителя. – М.: Столетие, 1996. – 320 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Матушкина Зоя Павловна

ПРИЕМЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Редактор Н.М. Кокина

Подписано в печать	Бумага типа № 1	Формат 60*84 1/16
	Усл. п. л. 8,75	Уч. изд. л. 8,75
Заказ	Тираж 100	Цена свободная

Издательство Курганского государственного университета.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25
Курганский государственный университет, ризограф