МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра «Менеджмент и маркетинг»

МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Методические указания
к практическим занятиям
для студентов направлений
38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент»,
38.03.04 «Государственное и муниципальное управление»

Курган 2017

Кафедра: «Менеджмент и маркетинг»
Дисциплина: «Методы принятия управленческих решений» (направления 38.03.01, 38.03.02, 38.03.04)

Составила: ст. преподаватель Штинова Н.С.

Составлены на основе рабочих программ учебной дисциплины «Методы принятия управленческих решений» для направлений бакалавриата 38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент», 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление» с использованием научной, учебной и методической литературы.

Утверждены на заседании кафедры «Менеджмент и маркетинг»
«30»августа 2017 г., протокол №1

Рекомендованы методическим советом университета
«12»декабря 2016г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Методы принятия управленческих решений» относится:

- к базовой части дисциплин учебного плана подготовки студентов по направлению «Менеджмент»;
- к обязательным дисциплинам вариативной части учебного плана подготовки студентов по направлению «Государственное и муниципальное управление»;
- к дисциплинам по выбору вариативной части учебного плана подготовки студентов по направлению «Экономика».

Целью изучения дисциплины является формирование у обучающихся понимания природы процесса принятия решений, а также выработка умений использовать современные приемы и методы разработки, принятия и оптимизации управленческих решений в условиях конкурентной среды, риска и неопределенности.

Задачи изучения дисциплины:

- изучение теоретико-методических основ разработки и принятия управленческих решений;
- изучение прогрессивных теорий в области разработки и принятия управленческих решений;
- понимание механизмов разработки и принятия управленческих решений, соответствующих реальной социально – экономической действительности;
- приобретение практических навыков сбора, обработки и анализа информации о факторах внешней и внутренней среды для разработки и принятия управленческих решений на уровне бизнес – организации, органов государственного и муниципального управления.
- приобретение навыков творческого осмысления постоянно изменяющейся социально - экономической действительности и поиска самостоятельного решения нестандартных управленческих задач.

В целях реализации обозначенной цели и указанных задач в методических указаниях сформирован комплекс заданий с краткими методическими рекомендациями по их выполнению для работы студентов на практических занятиях.

Практические задания сформированы в разрезе тем рабочей программы учебной дисциплины «Методы принятия управленческих решений», их выполнение будет способствовать успешному освоению дисциплины студентами.

Задачи темы «Линейное программирование» подробно разобраны в книге Зайцев М.Г., Варюхин С.Е. [5] часть 1, задачи тем «Оптимизация работы систем массового обслуживания» и «Методы принятия решений в условиях неопределенности и риска» подробно разобраны там же в части 2 главе 7. Задачи «Теории игр» подробно разобраны в книге «Исследование операций в экономике» [6] глава 9.

ТЕМА. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Область исследования операций, которая занимается *оптимизацией,* т.е. нахождением максимума (или минимума) целевой функции при заданных ограничениях, называется *математическим программированием.*

В зависимости от вида целевой функции различают *линейное* и *нелинейное программирование.*

Линейное программирование имеет дело с оптимизацией моделей, в которых целевая функция линейно зависит от переменных решения и ограничения представляют собой линейные уравнения или неравенства относительно переменных решения.

Множество важных для практики проблем, относящихся к самым разным сферам деятельности, могут быть проанализированы с помощью моделей линейного программирования.

Существуют эффективные и универсальные алгоритмы решения задач линейного программирования, реализованные в общедоступном программном обеспечении.

Методы анализа моделей линейного программирования не просто позволяют получить оптимальное решение, но и дают информацию о том, как может изменяться это решение при изменении параметров модели. Именно эта информация, позволяющая получить ответы на вопросы типа «что, если...», представляет особую ценность для лица, принимающего решение.

ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача 1. Оптимальный план выпуска продукции мебельного цеха (Product Mix)

Цех может выпускать два вида продукции: шкафы и тумбы для телевизора. На каждый шкаф расходуется 3,5 м стандартных ДСП, 1 м лицевого стекла и 1 человеко-день трудозатрат. На тумбу расходуется 1м ДСП, 2 м стекла и 1 человеко-день трудозатрат. Прибыль от продажи 1 шкафа составляет 200 ден.ед., а 1 тумбы - 100 ден.ед. Материальные и трудовые ресурсы ограничены: в цехе работают 150 рабочих, в день нельзя израсходовать больше 350 м ДСП и более 240 м стекла. Какое количество шкафов и тумб должен выпускать цех, чтобы сделать прибыль максимальной?

Решение:

1 Формализация примера и основные соотношения

Таблица 1 – Параметры ЗЛП

Ресурсы	Запасы	Продукты	
		Шкаф	Тумба
ДСП	350	3,5	1
Стекло	240	1	2
Труд	150	1	1
Прибыль	-	200	100

В колонке **«Запасы»** запишем предельный расход ресурсов (ДСП, стекла и количества человеко-дней), которые ежедневно может позволить себе начальник цеха.

В колонках **«Шкаф»** и **«Тумба»** (продукты, которые может выпускать цех) запишем расход имеющихся ресурсов на единицу продукции (т.е. сколько требуется ДСП, стекла и труда на один шкаф и на одну тумбу).

На пересечении колонок **«Шкаф»** и **«Тумба»** и строки **«Прибыль»** запишем величины прибыли от продажи одного шкафа и одной тумбы. Сформируем таблицу 2. Элементы математической модели данной ситуации:

- переменные решения;
- целевую функцию;
- ограничения.

Очевидно, что переменные решения (иначе - неизвестные), которые может задавать начальник цеха и от которых зависит целевая функция (прибыль) цеха, - это количество шкафов и тумб, выпускаемых цехом ежедневно. Обозначим эти переменные соответственно X1 и X2.

Таблица 2 - Элементы математической модели

Переменные решения	**Целевая функция**
X1 – количество шкафов; X2 – количество тумб, производимых ежедневно	Ежедневная прибыль цеха: 200*X1 + 100*X2
Ограничения	
3,5*X1 + 1*X2 <= 350; 1*X1 + 2*X2 <= 240; 1*X1 + 1*X2 <= 150; X1,X2 >= 0.	

Выражение для целевой функции записывается следующим образом: прибыль от продажи одного шкафа равна 200 ден.ед., значит, прибыль от продажи X1 шкафов будет 200*X1. Аналогично прибыль от продажи X2 тумб равна 100*X2, суммарная прибыль отражена в соответствующей графе таблицы 2. Полученное выражение для целевой функции типично для моделей линейного программирования. Чем больше будут значения переменных X1 и X2, тем больше будет и прибыль P. Если бы было возможно беспредельно увеличивать ежедневный выпуск шкафов и тумб, то процесс получения прибыли превратился бы в процесс бес предела роста. Однако, это невозможно, поскольку доступные ежедневно ресурсы цеха ограниченны. Это приводит к ограничениям на значения переменных X1 и X2.

1 Ограничение на трудовые ресурсы. Каждый рабочий за 1 день может сделать либо 1 шкаф, либо 1 тумбу, отсюда следует, что общее количество выпущенных изделий (шкафов и тумб) не должно превышать числа рабочих в цехе. Иначе можно сказать, что поскольку расход трудового ресурса равен 1 человеко-дню на 1 шкаф и 1 человеко-дню на 1 тумбу, то общий расход труда на X1 шкафов и X2 тумб будет, очевидно, $1 * x_1 + 1 * x_2$, что не должно превышать ежедневного «запаса труда» в цехе, т.е. 150 человеко-дней. Это отражено последним неравенством таблицы 2.

2 Ограничение на запасы ДСП. Поскольку на 1 шкаф расходуется 3,5 м ДСП, а на 1 тумбу - 1 м, то суммарный расход ДСП на X1 шкафов и X2 тумб будет, очевидно, 3,5*X1 + 1* X2, что не должно превышать ежедневного запаса ДСП в цехе, т.е. 350 м ДСП. Это отражено первым неравенством таблицы 2.

3 Ограничение на ежедневные запасы стекла. Поскольку на 1 шкаф расходуется 1 м стекла, а на 1 тумбу - 2 м, то суммарный расход стекла на X1 шкафов и X2 тумб будет, очевидно, 1*X1 + 2*X2, что не должно превышать ежедневного запаса стекла в цехе, т.е. 240 м стекла. Это отражено вторым неравенством таблицы 2.

Определение переменных решения, целевой функции и ограничений - это почти все, что должен сделать менеджер, чтобы воспользоваться результатами оптимизации и анализа линейной модели. Далее необходимо правильно организовать данные для компьютера и воспользоваться компьютерным алгоритмом оптимизации.

2 Решение задачи об оптимальном плане выпуска продукции с помщью Excel

1 Организуйте данные на листе MS-Excel:

a) Организуйте таблицу параметров ЗЛП.

b) Введите целевую функцию P = 200* X1 + 100 * X2 с помощью встроенной функции СУММПРОИЗВ.

c) Задайте ячейки переменных X1 и X2.

d) Задайте ограничения, представляющие собой формулы расхода ресурсов, согласно таблице 2.

2 Выберите пункт меню «Сервис» «Поиск решения» (Tools Solver). Появится окно, озаглавленное «Поиск решения» (Solver):

a) В поле окна **«Установить целевую ячейку» (Set target Cell)** отметьте ячейку, содержащую формулу целевой функции;

b) Установите переключатель на отметке **«Равной максимальному значению» (Equal to Max);**

c) В поле окна **«Изменяя ячейки» (By changing Cells)** отметьте массив ячеек, содержащий переменные

d) **Добавьте ограничения, щелкая по кнопке «Добавить» (Add).** В появившемся окне, озаглавленном **«Добавление ограничения»,** щелкните по полю «Ссылка на ячейку», а затем отметьте массив ячеек, содержащий формулы расхода ресурсов, выберите знак ограничения (в нашем случае меньше либо равно), щелкните по правому полю «Ограничение» (Constraints) и введите в него массив ячеек, содержащий значения запасов ресурсов.

3 Щелкните по кнопке «Параметры» (Options). Появится окно **«Параметры поиска решения»**, в котором можно (но не нужно) менять многочисленные параметры оптимизации. Вас интересует только, установлен ли флажок «Линейная модель» (Assume linear model). Если нет, установите его, щелкните по кнопке Ok и вернитесь к окну «Поиск решения».

4 Щелкните по кнопке «Выполнить» (Solve). Оптимизационная программа MS-Excel выполнит поиск решения, после чего появится окно **«Результаты поиска решения»**. Прочтите сообщение программы в этом окне. Если вы все сделали правильно, программа сообщит: «Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены».

5. Убедитесь, что переключатель в окне «Результаты поиска решения» находится в положении «Сохранить найденное решение», щелкните по кнопке Ok и прочтите ответ. В ячейках «Переменные» содержатся значения оптимального плана. В ячейках «Расхода ресурсов» содержатся значения ресурсов, которые необходимы для полученного оптимального плана. В ячейке формулы целевой функции – максимальная прибыль.

В случае, если вы неверно задали знак ограничений, ввели неверные формулы для целевой функции или для ограничений и оптимизационная программа не может найти решения, в окне появятся сообщения: «Значения целевой ячейки не сходятся» или: «Поиск не может найти решения», или: «Условия линейной модели не выполняются». В этом случае следует переставить переключатель в окне «Результаты поиска решения» в положение «Восстановить исходные данные», щелкнуть по кнопке Ok и проверить организацию данных на листе Excel и в установках окна «Поиск решения».

Задача 2. Фирма «Фасад»

Фирма Фасад производит три типа дверей: стандартные, полированные и резные. Одна стандартная дверь приносит фирме 45 ден. ед прибыли, одна полированная – 120 ден. ед. и одна резная – 120 ден. ед. Время на производство (мин) 30, 30, 60 и на обработку (мин) 15, 30, 30 соответственно. На фирме работает 10 рабочих в одну смену, пять дней в неделю, что дает 400 часов в неделю. Рабочее время поделено между двумя существенно различными технологическими процессами. 250 часов в неделю отведены под производство и 150 часов под конечную обработку.

Сколько дверей различных типов нужно производить, чтобы максимизировать прибыль?

Для ответа на вопрос необходимо:

1 Сформировать Таблицу – Параметры ЗЛП.

2 Сформировать Таблицу - Элементы математической модели.

3 Решить задачу об оптимальном плане выпуска продукции с помощью Excel.

Задача 3. «Кондитерская фабрика»

Маленькая кондитерская фабрика должна закрыться на реконструкцию. Необходимо реализовать оставшиеся запасы сырья для производства продуктов из ассортимента фабрики, получив максимальную прибыль. Запасы и расход каждого вида сырья для производства единицы продукции каждого вида, а также получаемая при этом прибыль представлены в таблице 3.

Таблица 3 - Параметры задачи

Сырье	Запасы	Продукты				
		Ореховый звон	Райский вкус	Батончик	Белка	Ромашка
Темный шоколад	14110	0,8	0,5	1	2	1,1
Светлый шоколад	149	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2
Сахар	815,5	0,3	0,4	0,6	1,3	0,05
Карамель	466	0,2	0,3	0,3	0,7	0,5
Орехи	1080	0,7	0,1	0,9	1,5	0
Прибыль/пакет, ден.ед.		1	0,7	1,1	2	0,6

Для решения задачи необходимо:

1 Сформировать Таблицу – Параметры ЗЛП.

2 Сформировать Таблицу - Элементы математической модели.

3 Решить задачу об оптимальном плане выпуска продукции с помощью Excel.

Задача 4. Оптимальная загрузка оборудования ткацкого цеха

Ткацкий цех выпускает два вида тканей Т1 и Т2 на двух видах станков С1 и С2. Количество станков первого типа – 103, второго – 210. Станок С1 выпускает 54 м ткани Т1 или 72 м ткани Т2, а станок С2 – 34 м ткани Т1 или 65 м ткани Т2 за смену. Производство тканей ограничено ресурсами и складскими помещениями. За смену можно выпустить не более 6000 м ткани Т1 и не более 11000 м ткани Т2. Доход от продажи ткани Т1 – 7,3 ден.ед. за 1 м, продажи ткани Т2, - 4,2 ден.ед. за 1 м.

Как распределить производство тканей Т1 и Т2 между станками С1 и С2, чтобы максимизировать прибыль?

Для решения задачи необходимо:

1 Сформировать Таблицу – Параметры ЗЛП

2 Сформировать Таблицу - Элементы математической модели

3 Решить задачу об оптимальном плане выпуска продукции с помощью Excel

Примечания:

Подумайте над наиболее важным вопросом о переменных решения. Что значит ―как распределить производство тканей между станками?

Запишите выражения для ограничений на производство тканей.

Используйте фрагмент этих выражений для записи целевой функции.

Обратите внимание, что для производства максимально дозволенного количества тканей каждого типа необязательно нужны все имеющиеся станки.

АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Отчет об устойчивости

В процессе поиска оптимального решения MS-Excel формирует так называемый отчет об устойчивости, в котором, в частности, выдает интервал изменений коэффициентов целевой функции, внутри которого их изменение не приводит к изменению оптимального решения.

Для получения этого отчета, после того как «Поиск решения» нашел оптимальное решение, нужно в окне «Результаты поиска решения», перед тем как нажать на кнопку Ok, щелкнуть мышкой по строке «Устойчивость» в списке «Тип отчета». Тогда после нажатия на кнопку Ok MS-Excel создаст дополнительный лист «Отчет об устойчивости». Такой отчет об устойчивости состоит из двух таблиц (Пример отчета об устойчивости к задаче 1 приведен в таблицах 4 и 5).

Таблица 4 - Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончат. значение	Приве-денн. стои-мость	Цел. функция коэффициент	Допуст. увеличе-ние	Допуст. уменьше-ние
C8	Переменные Шкаф	80	0	200	150	100
D8	Переменные Тумба	70	0	100	100	42,86

Таблица 5 - Ограничения

Ячейка	Имя	Окончат. значение	Тенев. цена	Ограничение Прав. сторона	Допуст. увеличе-ние	Допуст. уменьше-ние
E4	ДСП Расход ресурсов	350	40	350	175	50
E5	Стекло Расход ресурсов	220	0	240	1E+30	20
E6	Труд Расход ресурсов	150	60	150	8,33	50

В таблице 4 в столбце «Целевой коэффициент» даны исходные значения целевых коэффициентов: прибыль от продажи одного шкафа (200 ден.ед.) и одной тумбы (100 ден.ед.). Столбцы «Допустимое увеличение» и «Допустимое уменьшение» содержат информацию об интервале устойчивости найденного оптимального решения. При увеличении прибыли от продажи шкафа до 350 ден.ед. (на 150 ден.ед. больше исходного значения) и при ее уменьшении до 100 ден.ед. оптимальное решение не изменяется.

Аналогично второй целевой коэффициент может изменяться в пределах от 57,14 ден.ед. (уменьшение на 42,86 ден.ед. относительно исходного значения) до 200 ден.ед.

Смысл столбца «Приведённая (нормированная) стоимость» - если продукт входит в оптимальный план, в колонке «Нормированная стоимость» отчета об устойчивости для этого продукта стоит 0. Если продукт не входит в оптимальный план, в этом столбце стоит отрицательное число, показывающее, на сколько (по абсолютной величине) нужно увеличить прибыль от производства единицы этого продукта, чтобы он вошел в оптимальный план.

Во второй таблице отчета об устойчивости (таблице 5) аналогичные интервалы устойчивости установлены для запасов ресурсов «ДСП», «стекло», «труд» (столбцы «Ограничения, правая часть», «Допустимое увеличение» и «Допустимое уменьшение»).

Однако смысл этих интервалов несколько иной. При изменении запасов ресурсов оптимальное решение будет изменяться непрерывно. При движении границ ресурсов координаты угловой точки, очевидно, будут непрерывно меняться, но до тех пор, пока решение будет оставаться в той же угловой точке области допустимых планов, будет оставаться неизменной так называемая теневая цена ресурса - важнейшая характеристика оптимального решения.

Для того чтобы понять, что это такое, необходимо рассмотреть так называемую двойственную задачу к задаче об оптимальном плане выпуска продукции мебельного цеха.

Задача 5. Использование отчета об устойчивости. Влияние изменений в целевых коэффициентах

1 Решите задачу 1 об оптимальном плане выпуска продукции мебельного цеха с помощью надстройки Поиск решения и получите отчет об устойчивости.

2 Измените коэффициенты целевой функции и с помощью надстройки «Поиск решения» найдите, как изменится решение (X1, X2) и значение целевой функции.

3 Заполните таблицу 6:

Таблица 6 – Влияние изменений в целевых коэффициентах

Условия	Продукция	Прибыль на единицу	Оптимальный план выпуска	Максимальная прибыль
Первоначальные	Шкаф	200		
	Тумба	100		
Увеличить норму прибыли при производстве шкафа на 100	Шкаф			
	Тумба			
Увеличить норму прибыли при производстве шкафа на 160	Шкаф			
	Тумба			
Уменьшить норму прибыли при производстве тумбы на 40	Шкаф			
	Тумба			
Уменьшить норму прибыли при производстве тумбы на 50	Шкаф			
	Тумба			

Как объяснить с помощью данных таблицы «Изменяемые ячейки» отчета Excel об устойчивости, что в некоторых случаях оптимальное решение (X1, X2) не меняется, в других - изменяется?

4 Для последнего условия сделайте новый отчет об устойчивости. Обратите внимание, что в столбце «Приведенная (нормированная) стоимость» таблицы «Изменяемые ячейки» для тумбы появилось отрицательное число. Объясните,

что оно означает. Для этого увеличьте прибыль от продажи тумбы на величину, слегка превышающую по модулю это отрицательное число, и решите задачу еще раз. Что произошло? Каков смысл данных в колонке «Приведенная стоимость» таблицы «Изменяемые ячейки» отчета Excel об устойчивости?

ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ТЕНЕВЫЕ ЦЕНЫ

Задача 6. Оптимальный план выпуска продукции мебельного цеха – Двойственная задача

1 Для задачи 1 составьте и решите двойственную задачу. Сформируйте отчет об устойчивости.

2 Объясните с помощью теорем двойственности нулевую цену второго ресурса - «стекло».

3 Переключитесь на лист отчета об устойчивости. Найдите в таблице «Ограничения» столбец «Теневые цены», рассчитайте изменение целевой функции при изменении ресурса bi по формуле $\Delta P = \Delta bi * Yi$ и заполните третий столбец таблицы 7 для перечисленных случаев изменения запаса ресурсов:

Таблица 7 – Анализ изменения значения целевой функции

Изменение запаса ресурсов	$\Delta P = \Delta bi * Yi$	ΔP (вычисление Поиском решения)
Увеличить запас ДСП на 150 м.		
Увеличить запас ДСП на 250 м.		
Уменьшить запас стекла на 40 м.		
Уменьшить ресурс труда на 40 человеко-дней		
Увеличить ресурс труда на 20 человеко-дней		

4 Вновь переключитесь на лист, содержащий прямую задачу о продукции мебельного цеха. Изменяя лимиты ресурсов в соответствии с п. 3, каждый раз вызывая «Поиск решения» и заново решая оптимизационную задачу, прямым расчетом найдите изменение целевой функции и переменные решения в случаях 1-5 п. 3 и запишите эти изменения в четвертый столбец таблицы 7.

В одних случаях результаты предварительного расчета (третий столбец) совпадают с решением с помощью надстройки «Поиск решения» (четвертый столбец), а в других нет. Почему?

Методические указания для решения двойственной задачи

1 Значение целевой функции

Значение минимальной выручки при продаже ресурсов Cmin в точности совпадает со значением максимальной прибыли при производстве Pmax.

Этот результат следует из содержательной постановки двойственной задачи. Действительно, если бы получилось, что эта выручка меньше, чем прибыль от производства, то это значило бы, что продавать ресурсы менее выгодно, чем производить из них продукцию. А если бы выручка от продажи ресурсов оказалась больше, чем прибыль от производства, то это значило бы, что теневые цены на ресурсы не минимальны. И то и другое противоречит условию задачи.

В теории линейного программирования доказывается, что независимо от экономической интерпретации исходной и двойственной задач, а также от характера ограничений (< или >), если решение ЛП-задачи на максимум или на минимум существует, то оптимальное (максимальное или минимальное) значение целевой функции в исходной задаче должно быть в точности равно оптимальному (минимальному или максимальному) значению целевой функции двойственной задачи.

Согласно таблице 5, теневые цены на используемые ресурсы «ДСП», «стекло» и «труд» равны соответственно: Y1=40; Y2=0; Y3=60.

Нулевая цена второго ресурса - «стекло» означает следующее. Разумеется, рыночная цена на товар не может равняться нулю. Однако, при решении двойственной задачи мы получаем не рыночные, а особые, теневые цены, которые характеризуют ценность данного ресурса для данного производителя в конкретной производственной ситуации. С этой точки зрения нулевое значение теневой цены стекла обусловлено тем обстоятельством, что при минимальном плане выпуска продукции мебельного цеха ежедневные запасы стекла избыточны. Каждый день из 240 м стекла производитель использует только 220 м. Если предположить себе, что производитель ежедневно складирует эти излишки, то получается, что стекло ему просто некуда девать.

Для практического использования теневых цен в решении задач оптимального управления необходимо связать ценность ресурсов (теневые цены) и прибыль от производства следующим образом.

Допустим, что величины запасов одного из ресурсов b1 = 350, b2= 240 и b3= 150 (например, ДСП) увеличились на малую величину Δb1=1. Коэффициенты b1, b2 и b3 – это целевые коэффициенты в двойственной задаче. При изменении целевых коэффициентов существует некоторый интервал устойчивости. Если значение изменяемого целевого коэффициента остается внутри этого интервала устойчивости, то оптимальное решение не изменяется. Допустим, что интервал устойчивости в двойственной задаче достаточно большой, так что увеличение запасов всех ресурсов на единицу не приводит к изменению теневых цен Y1, Y2, Y3 (которые для двойственной задачи как раз и представляют собой оптимальное решение). Тогда очевидно, что минимальное значение выручки от продажи всех ресурсов увеличится (поскольку теперь продается не 350 м ДСП, а 351 м) и составит C'min= Cmin+ Δb1*Y1, где C'min - новое значение выручки, а Cmin - старое значение. Поскольку, согласно общему соотношению между прямой и двойственной ЛП-задачами, минимальное значение целевой функции в двойственной задаче (Cmin) всегда равно максимальному значению целевой функции в исходной задаче (прибыли от производства Pmax*)*, то это означает, что увеличение запаса ДСП на величину Δb1 приведет к увеличению прибыли от производства Pmax. Таким образом, если увеличить какой-либо i-й ресурс, используемый для производства продукции, на величину Δbi (не выходя за пределы интервала устойчивости), то это приведет к увеличению прибыли ΔPmax= Δbi Yi.

Полученная формула, связывающая изменение максимальной прибыли (в исходной задаче) с изменением одного из ресурсов и теневой ценой ресурса (из двойственной задачи), является важнейшим соотношением двойственности и демонстрирует основную ценность теневых цен для менеджера.

2 Теневые цены

Теневая цена ресурса показывает, насколько увеличится прибыль от производства при увеличении данного ресурса на единицу. Если запасы ресурса избыточны (т.е. не полностью используются при оптимальном плане производства), то теневая цена такого ресурса должна быть равна нулю, поскольку увеличение запасов такого ресурса не приведет к увеличению прибыли, а только увеличит неиспользованный остаток.

Теневые цены ресурсов будут изменяться, если изменение любого параметра ЛП-задачи выйдет за пределы интервала устойчивости. Если уменьшить ежедневный запас стекла b2 до величины, меньшей, чем 220 м., то дальнейшее его уменьшение скажется на прибыли, т.е. теневая цена стекла Y2 перестанет быть равной нулю. При решении симплекс-методом исходной задачи сразу же решается и двойственная. Если «Поиск решения» MS-Excel получил решение задачи об оптимальном плане продукции, то он нашел и теневые цены ресурсов. Никаких дополнительных операций по решению двойственной задачи делать не нужно. Полученные значения двойственных цен ресурсов мебельного цеха Y1=40; Y2=0; Y3=60 можно найти в столбце «Теневые цены» таблицы «Ограничения» отчета об устойчивости для прямой задачи об оптимальном плане выпуска продукции. Приведенная в этой таблице информация - теневые цены и интервал устойчивости изменения запасов каждого из ресурсов, в котором значения теневых цен сохраняются, - помогает менеджеру, не решая задачи заново, оценить, запасы какого ресурса нужно увеличивать, чтобы максимально увеличить прибыль, и какое будет увеличение прибыли при заданном изменении данного запаса.

3 Влияние изменения запаса ресурсов (правых частей ограничений- bi)

1 Отчет Excel об устойчивости включает таблицу «Ограничения» и в ней колонку «Теневая цена» (Shadow Price).

Теневые цены - это оценки двойственной задачи. Они показывают, как меняется целевая функция при малом изменении bi: $\Delta P = \Delta bi\ Yi$.

2 Эти оценки верны только в пределах устойчивости решения, т.е. пока изменение bi не изменяет угловую точку области допустимых решений, в которой достигается максимум целевой функции (при этом численные значения переменных решения, конечно, изменяются). При выходе bi за пределы устойчивости все теневые цены изменятся.

3 Пределы изменения bi, в которых оптимальное решение соответствует той же самой угловой точке, также даны в таблице «Ограничения» («Допустимое увеличение» и «Допустимое уменьшение»):

а) если ресурс используется полностью (дефицитный), существует как верхний, так и нижний предел;

b) если же ресурс используется не полностью, верхний предел устойчивости равен бесконечности (Excel пишет 1E+30).

4 Пределы устойчивости для изменения bi даются при условии, что все остальные значения правых частей bк (при $k \neq i$) остаются неизменными. Одновременное изменение двух и более коэффициентов (bi и bк) каждого внутри своего интервала устойчивости, может привести к изменению теневых цен.

5. Для оценки влияния одновременного изменения нескольких значений bi следует вычислить относительные изменения $\Delta bi/\max\Delta bi$, где $\max\Delta bi$ - это предел либо увеличения, либо уменьшения bi (в зависимости от знака Δbi), и вычислить сумму этих относительных изменений. При этом, если эта сумма больше 1, теневые цены изменятся, если меньше - нет.

4 Влияние изменений в коэффициентах целевой функции

1 Изменение коэффициентов целевой функции cj не изменяет вида области допустимых решений. Оно изменяет наклон семейства прямых, изображающих целевую функцию.

2 До тех пор, пока изменение наклона не превышает некоторых пределов, оптимальное решение {Xj} вообще не меняется (максимальное значение целевой функции при этом, конечно, меняется).

3 При выходе значений коэффициента cj за эти пределы решение скачком перемещается в другую угловую точку области допустимых решений (при этом решение {Xj} может измениться очень сильно).

4 «Допустимое увеличение» и «Допустимое уменьшение» для каждого коэффициента целевой функции cj, при которых оптимальное решение не изменяется, приведены в таблице «Ячейки переменных» отчета Excel об устойчивости:

a) причем если $Xj > 0$ (продукт входит в оптимальный план), то имеется как верхний, так и нижний предел для изменения соответствующего j-го коэффициента целевой функции;

b) если же $Xj=0$, то «Допустимое уменьшение» может быть как угодно велико - продукт все равно не войдет в оптимальный план. Верхний предел «Допустимое увеличение» показывает, насколько нужно увеличить соответствующий целевой коэффициент, чтобы j-й продукт вошел в оптимальный план;

c) величина, противоположная этому увеличению, называется *Нормированная стоимость (Reduced Cost)* и показывает, на сколько нынешняя цена продукта ниже минимальной цены (или издержки выше максимальных), при которой j-й продукт может войти в оптимальный план.

5 Следует понимать, что пределы устойчивости для изменения cj даются при условии, что значения всех остальных целевых коэффициентов c_k (при $k \neq i$) остаются неизменными. Одновременное изменение двух и более коэффициентов (c_j и c_k), каждого внутри своего интервала устойчивости, может привести к изменению оптимального решения.

6. Для оценки влияния одновременного изменения нескольких значений cj следует вычислить относительные изменения $\Delta cj/\max\Delta cj$, где $\max\Delta cj$ - это предел либо увеличения, либо уменьшения cj (в зависимости от знака Δcj), и вы-

числить сумму этих относительных изменений. При этом, если эта сумма больше 1, оптимальное решение {Xj} изменится, если меньше - нет.

5 Основные соотношения двойственности

1 Если решения исходной задачи на максимум существует, то решение двойственной задачи на минимум точно ему равно:

$$Pmax=Cmin$$

Теневые цены для двойственной задачи – это оптимальное решение Xj для прямой ЛП-задачи

2 Для оптимальных планов исходной и двойственной задачи:

2.1 Если

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

т.е. i-й ресурс использован полностью при производстве продукции по оптимальному плану, то его теневая цена больше нуля Yi>0

2.2 Если же

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i$$

т.е. i-й ресурс не использован полностью при производстве продукции по оптимальному плану, то его теневая цена равна нулю Yi=0.

2.3 Если Xj>0, т.е. если j-й продукт вошел в оптимальный план, то в соответствующем ограничении двойственной задачи реализует знак «равенство», т.е. выручка от продажи ресурсов, идущих на производство единицы этого продукта, равна прибыли от его производства:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}Y_j = c_i$$

2.4 Если же Xj=0, т.е. если j-й продукт не входит в оптимальный план, то в соответствующем ограничении двойственной задачи реализует знак «больше», т.е. выручка от продажи ресурсов, идущих на производство единицы этого продукта, больше равна прибыли от его производства:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}Y_j > c_i$$

3 Теневые цены Yi показывают, на сколько увеличится значение Pmax, если запасы ресурса увеличить на единицу: ΔPmax= Δbi Yi

Задача 7. «Кондитерская фабрика» (продолжение)

1 Решить задачу 3 с помощью надстройки Поиск решения. Сформировать отчет об устойчивости.

2 Как надо изменить норму прибыли для продукта «Батончик», чтобы он вошел в оптимальный план? (Ответьте, не решая задачу, анализируя лишь отчет об устойчивости).

3 Введите это изменение в данные и решите задачу заново. Как изменился оптимальный план?

4 Какой ресурс является наиболее дефицитным (т.е. максимально влияет на прибыль)?

5 Можете ли вы сказать (не решая задачу снова), как изменится прибыль от производства, если количество этого ресурса оценено:

а) с избытком в 10 весовых единиц;

б) с недостатком в 5 единиц;

в) с недостатком в 8 единиц.

6 Есть ли другой способ добиться производства «Батончика» (кроме изменения нормы прибыли)?

Методические указания для решения задачи «Кондитерская фабрика»

Вопросы 2-3

Согласно отчету об устойчивости, нормированная стоимость конфеты «Батончик», не вошедшей в оптимальный план, составляет 0,00874 ден.ед.

Абсолютная величина этого числа показывает, на сколько нужно увеличить прибыль от производства одного пакетика этих конфет, чтобы «Батончик» вошел в оптимальный план.

Добавим к цене «Батончика» 0,01 ден.ед.

Решите задачу с этим новым значением параметра. В этом случае прибыль на единицу этого продукта станет равной 1,11 ден.ед.

Посмотрите, как сильно отличаются решения в этих двух случаях, хотя значения прибыли практически одинаковы. В таких случаях обычно говорят, что решение задачи неустойчиво.

Решение называется неустойчивым, если малые изменения параметров приводят к огромным изменениям решения. Чаще всего о неустойчивости говорят в негативном смысле, подразумевая даже, что неустойчивость ограничивает возможности аналитика использовать количественные методы для принятия управленческих решений. Действительно, поскольку в реальной ситуации параметры модели всегда известны с определенной неточностью (ошибкой), а малые изменения параметров приводят к катастрофическим изменениям решения, то найденное оптимальное решение бесполезно. Оно рассчитано для строго определенных значений параметров, при других значениях параметров оно будет совершенно другим, а каковы реальные значения параметров, точно не известно. Если мы попытаемся выбрать между несколькими альтернативами, каждая из которых может стать оптимальной при незначительном изменении параметров, то не сможем сделать правильный выбор. В этом случае действительно уместно говорить о «деструктивной» роли неустойчивости и пытаться найти методы борьбы с ней.

Попробуем вернуть прежнее значение прибыли для «Батончика» (1,1 ден.ед.) - прибыль уменьшится до 1498,5 ден.ед. Это менее чем на 1% ниже оптимальной. Попробуем ввести целочисленные ограничения на количество пакетиков каждого из продуктов или просто потребовать, чтобы количество произведенных пакетиков «Батончика» было не менее 100, 300, 500. Во всех случаях получим другие оптимальные решения, а прибыль будет отличаться от оптимальной (для исходного варианта постановки задачи) не более чем на 1%.

Таким образом получаем множество *альтернативных* решений, сильно различающихся по значениям переменных, но очень близких по прибыли. Это не плохо. Это очень хорошо! Наличие многих, пусть не вполне оптимальных, но «хороших» альтернативных решений позволяет менеджеру выбрать такое, которое в наилучшей степени отвечает тем или иным неформализуемым требованиям и условиям, которые всегда присутствуют при принятии решений. В данном случае таким неформализуемым условием является, например, любовь лица, принимающего решение, к «Батончику», который, к несчастью, не вошел в оптимальный план при исходной постановке задачи. За эту любовь приходится платить либо повышением цены на данный продукт, либо снижением валовой прибыли. Что предпочесть? - Смириться с отсутствием «Батончика» в оптимальном плане? - Повысить цену? - Ввести ограничение на минимальное количество пакетиков «Батончика»? На эти вопросы модель ответа не даст. **Модели не принимают решений!** Это задача менеджера. Наличие множества альтернативных решений поможет ему выбрать решение, «приятное во всех отношениях». При этом оно необязательно должно быть оптимальным в строго математическом смысле слова.

Вопросы 4-5

Согласно отчету об устойчивости, наибольшей теневой ценой обладает ресурс № 2 - «светлый шоколад».

Однако интервал устойчивости, соответствующий этой цене, очень узок. Если запас светлого шоколада оценен с избытком в 10 единиц (т.е. на самом деле его запас не 149, а 139), то реальная прибыль будет ниже: $\Delta Pmax= \Delta b2\ Y2 =-10*2{,}5=-25$ ден.ед. Формулу для оценки уменьшения прибыли можно использовать, поскольку $\Delta b2=-10$ попадает в интервал устойчивости, выданный в отчете об устойчивости.

Вместе с тем, если запас этого ресурса оценен с недостатком в 5 единиц (т. е. на самом деле его запас не 149, а 154), предсказать увеличение прибыли нельзя, так как $\Delta b2=+5$ выходит за границы интервала устойчивости.

Вопрос 6

Разумеется, другие способы добиться производства «Батончика» (кроме изменения нормы прибыли) существуют.

Первый, очевидный и прямолинейный способ – это введение дополнительного ограничения на минимальное количество произведенных пакетиков «Батончика».

Однако, причиной невхождения продукта в оптимальный план является то, что какой-либо из ресурсов для его производства является дефицитным и востребован другим продуктом, приносящим большую прибыль.

Обратим внимание, что у не входящего в оптимальный план продукта «Батончик» прибыль на единицу продукта отнюдь не самая низкая. «Ореховый звон», «Райский вкус» и «Ромашка» менее прибыльны. Однако внимательное рассмотрение таблицы расходов ресурсов на единицу каждого продукта показывает, что «Батончик» конкурирует с «Белкой» за сахар и орехи. Расход этих ресурсов на два названных продукта наибольший. Такая же конкуренция идет и за темный шоколад, но, поскольку теневая цена этого ресурса мала, можно предположить, что не он является причиной невхождения «Батончика» в оптимальный план. Скорее всего, небольшое увеличение запасов темного шоколада вообще сделает этот ресурс избыточным. А вот увеличение запасов сахара (или орехов) может привести к вхождению «Батончика» в оптимальный план.

Попробуйте увеличить по очереди запасы одного из ресурсов: сахара, орехов и темного шоколада на 40-50 единиц и заново решить задачу на максимум. Перед каждой новой попыткой возвращайте запас измененного ресурса к исходному значению. Опишите изменения оптимального плана.

Задача 8. Оптимизация инвестиционного портфеля

Частный инвестор предполагает вложить 500 тыс. ден.ед. в различные ценные бумаги. После консультаций со специалистами фондового рынка он отобрал 3 типа акций, 2 типа государственных облигаций. Часть денег предполагается положить на срочный вклад в банк.

Таблица 8 – Альтернативные варианты инвестиций

Тип вложения	Риск	Предполагаемый ежегодный доход, %
Акции A	Высокий	15
Акции B	Средний	12
Акции C	Низкий	9
Облигации долгосрочные		11
Облигации краткосрочные		8
Срочный вклад		6

Имея в виду качественные соображения диверсификации портфеля и неформализуемые личные предпочтения, инвестор выдвигает следующие требования к портфелю ценных бумаг:

- все 500 тыс. ден.ед. должны быть инвестированы;
- по крайней мере 100 тыс. ден.ед. должны быть на срочном вкладе в любимом банке;
- по крайней мере 25% средств, инвестированных в акции, должны быть инвестированы в акции с низким риском;
- в облигации нужно инвестировать по крайней мере столько же, сколько в акции;
- не более чем 125 тыс. ден.ед. должно быть вложено в бумаги с доходом менее чем 10%.

Вопросы:

а) определить портфель бумаг инвестора, удовлетворяющий всем требованиям и максимизирующий годовой доход. Какова величина этого дохода?

b) если инвестор вносит дополнительные средства в портфель бумаг, сохраняя сформулированные выше ограничения, как изменится ожидаемый годовой доход? Зависит ли изменение ожидаемого годового дохода от величины дополнительно инвестированных средств? Почему?

c) ожидаемый годовой доход по той или иной бумаге (особенно по акциям) - это не более чем оценка. Насколько оптимальный портфель и ожидаемая величина дохода от портфеля выбранных бумаг чувствительны к этим оценкам? Какая именно бумага портфеля наиболее сильно влияет на оценку суммарного ожидаемого дохода?

d) дайте интерпретацию значений теневых цен для правых частей каждого из ограничений.

Указания:

- переменные решения - это суммы, вложенные в каждый вид ценных бумаг;
- целевая функция - суммарный доход. При организации данных на листе MS-Excel обязательно используйте функцию СУММПРОИЗВ для этой функции. Подумайте, что в данном случае является аргументами этой функции;
- запишите все ограничения. Требование инвестировать всю сумму должно быть записано в виде равенства;
- для ответа на вопросы b), c) и d) обязательно используйте данные отчета об устойчивости. Заметьте, что общая интерпретация теневых цен всегда связана с формулой $\Delta Pmax = \Delta bi * Yi$.

Задача 9. Максимизация прибыли универмага

Большой универсальный магазин собирается заказать новую коллекцию костюмов для весеннего сезона. Решено заказать 4 типа костюмов. Три типа - это костюмы широкого потребления:

(1) костюмы из полиэстровых смесей;

(2) шерстяные костюмы ;

(3) костюмы из хлопка.

Четвертый тип - это дорогие импортные модельные костюмы из различных тканей.

Имеющийся у менеджеров магазина опыт и специальные исследования позволяют оценить средние затраты рабочего времени продавцов на продажу одного костюма каждого типа, количество средств на рекламу и площадей в расчете на один костюм каждого типа. Все эти данные, а также прибыль от продажи одного костюма каждого типа представлены в таблице 9.

Таблица 9 – Параметры задачи

Тип костюма	Прибыль на один костюм (ден.ед.)	Рабочее время продавцов	Затраты на рекламу на один костюм (ден.ед.)	Площадь на один костюм (кв. м.)
Полиэстр	2800	0,4	160	1,00
Шерсть	3760	0,5	320	1,5
Хлопок	2400	0,3	240	1,25
Импорт	7200	1,0	720	3,00

Предполагается, что весенний сезон будет длиться 90 дней.

Магазин открыт 10 часов в день, 7 дней в неделю.

Два продавца постоянно будут в отделе костюмов.

Выделенная отделу костюмов площадь составляет прямоугольник 100*60 метров.

Бюджет, выделенный на рекламу всех костюмов на весенний сезон, составляет 1,2 млн. ден.ед.

Вопросы:

a) Сколько костюмов каждого типа нужно закупить, чтобы максимизировать прибыль?

b) Допустим, что менеджмент магазина считает необходимым закупить не менее 200 костюмов каждого типа. Как это требование повлияет на прибыль магазина?

c) Изменится ли оптимальное решение, если прибыль от продажи одного полиэстрового костюма переоценена (недооценена) на 1 ден.ед.? на 2 ден.ед.? на 100 ден.ед.? на 1000 ден.ед.?

d) Обоснуйте, будет ли каждое из предлагаемых решений полезно для магазина:

- отдать в распоряжение отдела костюмов 400 кв. м. от отдела женской спортивной одежды. Предполагается, что на этой площади магазин может получить прибыль всего лишь 60 тыс. ден.ед. за последующие 90 дней;
- истратить дополнительно 32 тыс. ден.ед. на рекламу;
- нанять дополнительно продавца на 26 полных дней (все субботы и воскресенья в течение весеннего сезона). Это будет стоить магазину 30 тыс. ден.ед. (зарплата, комиссионные) и добавит 260 ч труда продавцов отдела костюмов в течение 90 дней предстоящего сезона.

e) Допустим, добавлено дополнительное условие, ограничивающее общее число закупленных костюмов 5 тыс. шт. Как это повлияет на оптимальное решение?

Указания:

- при ответе на вопросы c), d) и e) сохраните ограничение «не менее 200 костюмов каждого типа»;
- для ответа на вопросы c) и d) обязательно используйте данные отчета об устойчивости;
- при рассмотрении каждого следующего варианта изменения условий возвращайте ранее измененные параметры к исходным значениям.

ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача 10. Задача производства неделимой продукции (Оптимизация производственной программы мебельного предприятия)

Мебельное предприятие выпускает наборы мебели трех видов, книжные полки и телевизионные тумбы (таблица 10).

Таблица 10 – Характеристики продукции мебельного предприятия

Показатели	Виды продукции				
	Мебель 1	Мебель 2	Мебель 3	Книжные полки	Телевизионные тумбы
Оптовая цена, тыс. ден.ед.	72	143	269	2,43	15
Прибыль от реализации, тыс. ден.ед.	24	45	89	0,6	4,5

При условии получения максимальной прибыли объем товарной продукции в денежном выражении должен составить не менее 4593,1 тыс. ден.ед.

Ситуация со сбытом продукции предприятия следующая:

- спрос на наборы мебели1 и 3 неограничен, их требуется не менее 10000 штук;
- наборы мебели вида 2 могут быть реализованы в объемах от 7000 до 10000 штук;
- книжными полками рынок насыщен, поэтому торговые организации уменьшили объем договоров до 10000 штук;
- телевизионные тумбы могут быть реализованы в объемах от 4000 до 7000 штук.

Предприятие имеет в наличии технологическое оборудование. Его количество и нормы затрат времени на изготовление единицы продукции каждого вида приведены в таблице 11.

Таблица 11 – Характеристика оборудования

Наименование оборудования	Количество, шт.	Виды продукции				
		Мебель 1	Мебель 2	Мебель 3	Книжные полки	Телевизионные тумбы
Линия раскроя ДСП	2	0,068	0,096	0,207	0,018	0,042
Гильотинные ножницы	1	0,045	0,08	0,158	0,011	0,035
Линия облицовки	2	0,132	0,184	0,428	0,02	0,06
Линия обрезки кромок	2	0,057	0,082	0,23	0,01	0,028
Лаконаливная машина	2	0,063	0,09	0,217	0,01	0,032
Полировальные станки	4	0,17	0,28	0,62	0,02	0,096

Предприятие работает в две смены, эффективное время работы каждой единицы оборудования составляет 3945 часов.

Найти оптимальный план производства продукции, используя условие целочисленности. Вывести отчет о результатах.

Задача 11. Кондитерская фабрика (дополнительное условие)

Введём в условие задачи 3 дополнительное условие – по технологии до (или после) производства конфеты «Белка» надо остановить производственную линию и тщательно ее вычистить во избежание брака. Стоимость очистки 400 ден.ед.

Решение:

1 Теоретическое обоснование

Введем в рассмотрение величину постоянных издержек FC = 400 ден.ед., связанную с производством конфет «Белка».

Это продукт №4. Соответственно количество пакетиков этих конфет обозначено X4.

Будем считать, что постоянная издержка FC появляется, когда произведен хотя бы один пакет этих конфет. Она не зависит от того, как много пакетиков X4 произведено. Однако если «Белка» не производится вообще (X4=0), то этой издержки нет. В этих условиях целевую функцию - прибыль можно записать следующим образом:

$$P = \sum_{j=1}^{5} c_j X_j - \begin{cases} 0, & \text{если } X_4 = 0 \\ FC, & \text{если } X_4 > 0. \end{cases}$$

Однако такой вид функции (резкий скачок прибыли при X4 = 0) совершенно не соответствует принципам линейной модели.

Можно сохранить «линейный» вид целевой функции, если ввести новую целочисленную переменную Y, которая будет принимать только два значения - 0 и 1, и связать значение переменной Y со значением X4 аналогичным условием.

При этом на переменную Y надо наложить дополнительные условия: Y≥0, Y≤1 и Y-целое.

Теперь, чтобы превратить задачу об оптимальном плане с учетом постоянных издержек в задачу целочисленного линейного программирования, необходимо заменить «логическую» связь значений Y и X4 еще одним линейным условием:

а) если оптимизационный алгоритм «согласен» положить Y = 1 и уменьшить прибыль P на величину FC=400 ден.ед., то ограничений на производство «Белки» нет (X4 > 0);

б) если же алгоритм «желает» положить Y = 0, то ему придется отказаться от производства «Белки» (X4 = 0).

Такое своеобразное «мигающее» ограничение на X4, которого нет, если Y=1, и которое появляется, если Y=0, можно записать в виде линейного неравенства следующим образом:

X4-M*Y≤0, где M должно быть очень большим числом.

«Очень большое» значит больше любого мыслимого количества пакетиков X4, которое можно произвести из имеющихся ресурсов.

Из решения исходной задачи ясно, что количество X4 вряд ли может превысить 10000. Поэтому зададим M = 10000 (конкретное значение M не важно, можно задать и миллион).

Тогда если Y=0, то записанное неравенство сведется к $X4 \le 0$. Однако поскольку, как и все другие переменные, X4 должно быть больше 0, остается единственная возможность X4 = 0, что и требовалось по смыслу. Если же Y=1, то неравенство приведется к виду $X4 \le M$ (или 10000).

Поскольку X4 все равно не может быть таким большим, то это неравенство фактически никаких ограничений на X4 не налагает. Оно называется несвязывающим. Его как бы и вовсе нет.

2 Организация решения в MS-Excel

Необходимо сохранить первоначально-решенную задачу, задачу с условиями целочисленности решать на новом листе MS-Excel.

1 Организуйте данные на листе MS-Excel. Для этого:

а) добавьте в таблицу 3 строку **Постоянные издержки** и введите число 400 - постоянные издержки - в столбец **Белка**;

b) добавьте новую переменную Y в строку переменных решения;

c) в формулу для прибыли добавьте произведение (400*Y) со знаком «минус»;

d) добавьте новое ограничение в колонку ограничений (название ограничения «Да/Нет», формула ограничения (X4 - 10000*Y).

2 Вызовите «Поиск решения» и сделайте необходимые изменения в установках:

а) изменяемые ячейки: X1,X2,X3,X4,X5,Y;

b) ограничения:

X1,X2,X3,X4,X5,Y $\ge$ 0 (все переменные положительны),

$Y \le 1$, Y – целое (Y- целая величина, равная 0 или 1), ИЛИ вместо двух условий $Y \le 1$; Y - целое можно задать лишь одно Y - двоичное (т.е. может равняться либо 0, либо 1),

(Да Нет) $\le$ 0 (не производить «Белку», если Y = 0, производить, если Y=1).

3 Выполните поиск решения.

4 Сопоставьте решение с первоначальным решением линейной задачи:

а) Как изменился оптимальный план?

b) На сколько уменьшилась максимальная прибыль?

c) Рекомендует ли полученное альтернативное решение переналадку оборудования для производства продукта «Белка»?

d) Если нет, попробуйте найти, на сколько нужно увеличить норму прибыли конфет «Белка», чтобы их стало выгодно производить.

Задача 12. Выбор мест для стоянок такси

Менеджер такси «Максим» пытается определить оптимальное расположение для стоянок своих такси. В таблице 12 собрана необходимая информация относительно предполагаемых точек стоянки.

Таблица 12 – Параметры задачи

Точка стоянки	Обслуживаемые районы	Стоимость аренды, ден.ед. в день
1	A, E	4000
2	A, C, D	5000
3	B, C, E	4500
4	B, D	4400
5	D, E	4200

Важной характеристикой положения стоянки является способность ее персонала своевременно обслуживать заказы из тех районов города, которые находятся в зоне ответственности данной стоянки. Машина должна прибывать по заказу в любую точку подопечного района за время, не превышающее некоторое максимальное.

Потенциальные места для стоянок позволяют обслужить по 2 или 3 выделенных района города. Менеджер должен выбрать некоторые из них так, чтобы каждый район города мог быть обслужен хотя бы одной из выбранных стоянок, и чтобы стоимость аренды была минимальной.

Решение:

1 Теоретическое обоснование

Формализуем информацию о том, в состоянии ли персонал i-й стоянки обслужить j-й район (занумеруем районы в очевидном порядке: А-1, В-2,... Е-5).

Введем булевы (логические) параметры: aij=1, если с 1-й стоянки можно обслужить j-й район, и aij=0, если нельзя.

Значения aij приведены в таблице параметров. Введем также переменные решения Xi также принимающие только значения 1 или 0 в зависимости от того, выбрана данная точка стоянки управляющим или нет.

Таблица 13 – Параметры задачи

Точки стоянки	Обслуживаемые районы					Стоимость аренды, ден.ед. в день	Переменные решения
	A (1)	B (2)	C (3)	D (4)	E (5)		
1	1	0	0	0	1	4000	X1 (1)
2	1	0	1	1	0	5000	X2 (1)
3	0	1	1	0	1	4500	X3 (0)
4	0	1	0	1	0	4400	X4 (0)
5	0	0	0	1	1	4200	X5 (1)

Сумма произведений столбца переменных решения на столбец стоимостей аренды ci даст суммарные ежедневные затраты С на выбранные точки аренды.

Допустим, что менеджер выбрал первые две стоянки и пятую, а третью и четвертую отверг. В столбце переменных решения отмечены (в скобках) значения переменных, соответствующие этому выбору.

Тогда сумма произведений будет равна:

$$1*4000+1*5000+0*4500+0*4400+1*4200 = 4000 + 5000 + 4200,$$

т.е. сумме затрат на аренду именно тех стоянок, которые выбрал менеджер.

Рассмотрим теперь сумму произведений столбца переменных решения на столбец коэффициентов aij, соответствующий j-му району. Например, для первого района (A) N1=1*1+1*1+0*0+0*0+0*1=2, а для второго района (B) N2=0*1+0*1+1*0+1*0+0*1=0.

Числа N1 и N2 показывают, сколько выбранных стоянок могут обслужить данный район.

При выбранном наборе стоянок первый район (A) обслуживается с двух стоянок: 1-й и 2-й, а второй район (B) не обслуживается ни одной из выбранных стоянок.

Для выполнения основного требования менеджера о том, что каждый район должен обслуживаться хотя бы с одной из выбранных стоянок, необходимо ввести в качестве ограничений условие, что каждое из чисел Ni должно быть больше или равно единице.

2 Организация решения в MS-Excel

1 Организуйте данные на листе MS-Excel в соответствии с таблицей 13.

2 Введите целевую функцию как сумму произведений столбца переменных решения на столбец стоимостей аренды.

3 Введите ограничения на число стоянок Ni, с которых может обслуживаться первый район (A) как сумму произведений столбца переменных решения на столбец коэффициентов a1j и распространите эту формулу на все районы.

5 В установках «Поиска решения» введите требования для булевых переменных решений:

X1:X5 $\geq$ 0, X1:X5 $\leq$ 1, X1:X5 -целые, ИЛИ вместо этих трех условий X1:X5 - двоичные,

а также ограничения на числа Ni $\geq$ 1.

6 Выполните «Поиск решения».

Задача 13 Минимизация отходов лесопилки

Пилорама заготавливает, оцилиндровывает и сушит 20-футовые бревна, которые в дальнейшем используются для строительства бревенчатых домов, бань и т.п.

Поступил новый заказ, для которого требуется 275 шт. 8-футовых, 100 шт. 10-футовых и 250 шт. 12-футовых бревен.

На складе 315 шт. 20-футовых бревен.

Распилить бревна так, чтобы выполнить заказ и минимизировать длину нестандартных обрезков.

Примечание:

Главный вопрос здесь - выбор переменных решения. Запишите все возможные способы распила 20-футовых бревен на стандартные куски и соответствующие этим способам величины обрезков. Считайте, что число стандартных кусков не менее заказа (но может быть и больше, т.е. часть кусков заготовлена впрок).

Введите целочисленные ограничения.

Вопросы:

a) Насколько сильно отличается оптимальное решение с целочисленным ограничением на переменные от полученных ранее? Стоит ли вводить целочисленное ограничение в этой задаче?

b) Измените ограничения исходной задачи так, чтобы число стандартных кусков было точно равно заказу (а не больше него). Введите целочисленные ограничения. Существует ли решение? Почему? Что нужно изменить в условиях задачи, чтобы решение существовало? Существенно ли целочисленное ограничение в этом случае?

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Задача 14. Песчаный карьер (Организация оптимального снабжения)

В районе имеется 2 песчаных карьера, с которых песок вывозится на 5-тонных грузовиках. Предприятия-поставщики S1 и S2 разрабатывающие карьеры, могут поставлять соответственно 100 и 200 грузовиков с песком в день.

В этом районе имеется 3 завода железобетонных конструкций - потребители песка D1, D2 и D3, которым требуется соответственно 80, 90 и 130 грузовиков с песком в день. Стоимости перевозки песка одним грузовиком от карьера-поставщика Si к заводу-потребителю Di (в условных единицах) приведены в таблице параметров.

Таблица 14 – Параметры задачи

Карьер Si / Завод Dj	D1	D2	D3	Запасы
S1	4	6	3	100
S2	8	4	5	200
Заказы	80	90	130	

Составить план перевозок, минимизирующий затраты.

Решение:

1 Формализация задачи и основные соотношения

Таблица 15 – Элементы математической модели

<table>
<tr><td rowspan="2">Si / Dj</td><td colspan="3">Переменные решения</td><td rowspan="2">Запасы</td></tr>
<tr><td>D1</td><td>D2</td><td>D3</td></tr>
<tr><td>S1</td><td>X11</td><td>X12</td><td>X13</td><td>100</td></tr>
<tr><td>S2</td><td>X21</td><td>X22</td><td>X23</td><td>200</td></tr>
<tr><td>Заказы</td><td>80</td><td>90</td><td>130</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Целевая функция</td></tr>
<tr><td colspan="5">Min C(x) = c11*X11+c12*X12+c13*X13*c21*X21+c22*X22+c23*X23</td></tr>
<tr><td colspan="5">Ограничения (функциональные)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Поставщики</td><td colspan="3">Потребители</td></tr>
<tr><td colspan="2">X11+X12+X13=100</td><td colspan="3">X11+X21=80</td></tr>
<tr><td colspan="2">X21+X22+X23=200</td><td colspan="3">X12+X22=90</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">X13+X23=130</td></tr>
<tr><td colspan="5">Ограничения (прямые)</td></tr>
<tr><td colspan="5">X11,X12,X13,X21,X22,X23 ≥ 0</td></tr>
</table>

2 Организация решения в MS-Excel

1 Введите исходные данные (Таблица 14)

2 Укажите переменные: выделите цветом массив ячеек, содержащий 3 столбца (число заказчиков) и 2 строки (число поставщиков).

3 Введите формулы для ограничений:

- создайте столбец «Ограничения по поставщикам», в каждую из двух ячеек этого столбца введите функцию СУММ, как сумму Xij по каждой строке в отдельности;
- создайте строку «Ограничения по потребителям», в каждую из трех ячеек этой строки введите функцию СУММ, как сумму Xij по каждому столбцу в отдельности.

4 Введите целевую функцию: воспользуйтесь функцией СУММПРОИЗВ:

- массивом один будет массив выделенных цветом ячеек, содержащих переменные Xij,
- массивом два – ячейки таблицы 1, содержащие стоимости перевозки песка одним грузовиком от карьера-поставщика Si к заводу-потребителю Di.

5 Запустите Поиск решения:

- укажите ячейку, содержащую формулу целевой функции, не забудьте назначить целевую функцию на минимум;
- в поле Изменяя ячейки, укажите массив выделенных цветом ячеек, содержащий 3 столбца (число заказчиков) и 2 строки (число поставщиков);
- добавьте ограничения по поставщикам, правыми частями ограничений будет столбец «Запасы» из таблицы 1, не забудьте поставить знак «равенство» между левыми и правыми частями ограничений;
- добавьте ограничения по потребителям, правыми частями ограничений будет строка «Заказы» из таблицы 1, не забудьте поставить знак «равенство» между левыми и правыми частями ограничений;
- введите параметры для решения ЗЛП: установите флажок Неотрицательные значения и флажок Линейная модель;
- выполните Поиск решения.

Задача 15. Песчаный карьер: несбалансированность - излишек запасов

Изменим условие Задачи 14 следующим образом: производительность первого карьера не 100, а 150 грузовиков в день.

Тогда задача становится несбалансированной: потребность заводов — 300 грузовиков с песком в день, а карьеры могут добывать 350. В этом случае нужно снизить добычу песка на каждом из карьеров. Но сколько грузовиков нужно ежедневно не загружать на первом карьере и сколько - на втором?

Добавьте в таблицу 14 один лишний столбец. Это можно трактовать так, как если бы появился еще один, фиктивный, потребитель с нулевыми ценами перевозок и с заказом, равным 50: разница между запасами (150 + 200) и заказами от реальных заводов (80 + 90 + 130), получилась таблица 15.

Таблица 15 – Параметры задачи - Фиктивный завод

Карьер Si / Завод Dj	D1	D2	D3	Dfict	Запасы
S1	4	6	3	0	150
S2	8	4	5	0	200
Заказы	80	90	130	50	

Решите задачу с помощью Поиска решения.

Переменные X14 и X24 покажут, сколько грузовиков песка нужно оставить (т.е. не отправлять на заводы, не добывать, хотя это и позволяют производственные мощности карьеров) соответственно на первом и на втором карьерах.

Задача 16. Песчаный карьер: несбалансированность - дефицит запасов

Изменим условие Задачи 14 следующим образом: производительность второго карьера не 200, а 150 грузовиков в день.

Тогда задача становится несбалансированной. Заводы будут испытывать дефицит: потребность заводов - 300 грузовиков с песком в день, а карьеры могут добывать 250.

Как распределить этот дефицит между заводами? Сколько грузовиков с песком не получит каждый завод, если поставщик (владелец обоих карьеров) интересуется только минимизацией транспортных издержек?

В случае дефицита запасов добавим в таблицу 14 одну лишнюю строку. Это будет фиктивный поставщик с нулевыми ценами перевозок и с запасом, равным 50: разница между заказами от заводов (80 + 90 + 130) и запасами реальных карьеров (100 + 150), получилась таблица 16.

Таблица 16 - Параметры задачи – Фиктивный карьер

Карьер Si / Завод Dj	D1	D2	D3	Запасы
S1	4	6	3	100
S2	8	4	5	150
Sfict	0	0	0	50
Заказы	80	90	130	

Решите задачу с помощью Поиска решения.

Переменные X31,X32 и X33 покажут, сколько грузовиков песка не получат соответственно 1, 2 и 3-й заводы.

Задача 17. Песчаный карьер: несбалансированность - запрещенный маршрут

Изменим условие Задачи 14 следующим образом: маршрут перевозки от первого поставщика к первому потребителю невозможен, так как производится ремонт дороги.

Чтобы сохранить форму транспортной задачи и учесть этот запрет, достаточно в таблице 1 заменить cij (сейчас равное 4) на очень большое число (в случае задачи 1 подойдет 100). Это фактически будет означать, что оптимизационный алгоритм наверняка положит соответствующее значение перевозки Xij равным нулю, поскольку перевозка по этому маршруту просто крайне невыгодна.

Решите задачу с помощью Поиска решения.

ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Задача 18. Расстановка рабочих по операциям

Мастер должен расставить 4 рабочих для выполнения 4 типовых операций. Из данных хронометрирования известно, сколько минут в среднем тратит каждый из рабочих на выполнение каждой операции. Эти данные представлены в таблице 17.

Таблица 17 – Параметры задачи

Работы	Работники			
	A	B	C	D
1	15	20	18	24
2	12	17	16	15
3	14	15	19	15
4	11	14	12	3

Как распределить рабочих по операциям, чтобы суммарные затраты рабочего времени были бы минимальны?

Решение:

Составим таблицу переменных решения, которых в этой задаче будет 16.

Каждая переменная решения может принять только два значения 1 или 0, что будет означать соответственно, что данный рабочий назначен или не назначен на данную операцию.

Понятно при этом, что в каждой строчке и в каждом столбце может быть только одна переменная решения, равная единице, а остальные должны быть равны нулю.

Очевидно, что целевая функция представляет собой, как и в случае транспортной задачи, двойную сумму произведений переменных решения Xij на время выполнения каждой операции cij.

Ограничения обусловлены основным требованием задачи о том, что каждый рабочий должен быть назначен на одну, и только одну, операцию и каждая операция должна быть назначена одному, и только одному, рабочему.

Иными словами, мы требуем, чтобы сумма всех переменных в любой строке составляла единицу, и сумма всех переменных в любом столбце также была бы равна единице.

Таблица 18 – Параметры задачи - Назначения

Работы	Работники				Запас
	A	B	C	D	
1	X11	X12	X13	X14	1
2	X21	X22	X23	X24	1
3	X31	X32	X33	X34	1
4	X41	X42	X43	X44	1
Заказ	1	1	1	1	

Организация данных для решения задачи с помощью MS-Excel полностью аналогична транспортной задаче.

Задача 19. Построение команд

Фирма, занимающаяся продажей оборудования для компьютерных сетей, имеет 10 специалистов по маркетингу и 10 техников-программистов, которых необходимо объединить в пары (техник - менеджер по маркетингу) - команды по продаже оборудования, соответствующего нуждам конкретного клиента.

Менеджер по работе с персоналом провел среди них тест Майера-Бриггса и определил индекс взаимной несовместимости между i-м техником и j-м маркетологом. Индекс варьирует от 20 (выраженная враждебность) до 1 (дружеские отношения). Результаты представлены в таблице индексов несовместимости.

Таблица 19 – Индексы несовместимости

Менеджер по маркетингу	Техники									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	11	8	4	3	9	17	14	6	12	2
Б	7	4	7	11	19	2	10	5	18	9
В	13	20	1	12	14	11	16	9	15	14
Г	5	8	12	6	1	3	4	7	10	12
Д	16	7	18	9	13	1	2	17	12	3
Ж	12	3	9	17	5	6	18	2	1	4
З	9	1	13	4	7	20	19	1	19	16
И	8	6	17	8	11	4	3	4	13	16
К	17	2	19	13	14	19	11	3	17	1
Л	12	1	7	1	2	5	6	4	1	13

Составить команды так, чтобы суммарный индекс был минимальным.

Организация решения в MS-Excel

1 Скопируйте таблицу 19 в MS-Excel.

2 Сформируйте в MS-Excel еще одну таблицу, содержащую Переменные решения (таблица 20). Отличие ее от транспортной задачи только в том, что все «Запасы» и «Заказы» равны единице.

Таблица 20 – Параметры задачи

Менеджер по маркетингу	Техники										Запасы	Ограничения по запасам	Целевая функция
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
А											1	СУММ выделенных ячеек по каждой строке в отдельности	СУММПРОИЗВ строки с индексами несовместимости из таблицы 19 и строки переменных решения из таблицы 20
Б											1		аналогично
В											1		аналогично
Г											1		аналогично
Д											1		аналогично
Ж											1		аналогично
З											1		аналогично
И											1		аналогично
К											1		аналогично
Л											1		аналогично
Заказы	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
Ограничения по заказам	СУММ выделенных ячеек по каждому столбцу в отдельности												СУММ по столбцу Целевая функция

Цветом выделен массив переменных решения.

3 Целевая функция вычисляется как сумма сумм произведений строки с индексами несовместимости и строки переменных решения. При этом нетрудно понять, что каждая такая сумма произведений есть фактически индекс образованной команды.

Задайте целевую функцию в два раздельных шага.

Первый шаг: задайте СУММПРОИЗВ строки с индексами несовместимости из таблицы 2.1 и строки переменных решения из таблицы 2.2. Повторите по каждой строке.

Шаг два: задайте СУММ по столбцу Целевая функция

4 Выполните Поиск решения

В строке переменных все числа оказались равны нулю, кроме одного, которое стоит на пересечении строки с именем маркетолога и столбца с именем техника. Это число равно 1, и оно указывает на то, что команда сформирована именно из этих двух участников.

Задача 20. Построение команд (дополнительное условие - явное ограничение индекса команды)

Введем дополнительное условие в задачу 19: потребуем, чтобы все индексы образованных команд были не больше 7.

Введите дополнительное ограничение.

Решите модифицированную задачу.

Анализ решения

При анализе решения видно, что в нем что-то «катастрофически не так».

Переменные решения оказались не целыми.

Почему так получилось? Дело в том, что введенное дополнительное ограничение превратило нашу задачу о назначениях (по существу транспортную задачу) в обычную задачу линейного программирования. Для такой задачи специализированные «транспортные» методы решения неприменимы. А как указывалось раньше, только они обеспечивают целочисленные решения без введения явных требований целочисленности.

Получившуюся общую ЛП-задачу MS-Excel решают с помощью обычного симплекс-метода, а он отнюдь не гарантирует целочисленности переменных решения.

Задача 21. Несбалансированная задача о назначениях

Мастер должен назначить на 10 типовых операций (D1,D2,... D10) 12 рабочих (S1, S2, ... S12). Время, которое каждый рабочий тратит на выполнение каждой операции, приведено в таблице 21.

Таблица 21 – Параметры задачи

Рабочие	Типовые операции									
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10
S1	29	31	16	16	17	34	20	28	16	13
S2	29	25	22	30	24	31	37	23	16	27
S3	27	32		14	34	30	27	16	19	17
S4	21	35		32	31	28	30	29	31	16
S5	21	36		14	24	30	21	28	29	27
S6	28	35	25	30	22	16		18	25	18
S7	27	34	33	26	14	19	18	37	19	16
S8	27	34	27	30	37	37	26	22	35	33
S9	16	26	18	26	16	20	31	34	28	29
S10	16	22	33	22	21	19	19	37	36	24
S11	26	35	13	14	17	36	17	17	25	21
S12	34	25	19	14	36	36	17	36	26	33

Определите оптимальную расстановку рабочих по операциям, при которой суммарное время на выполнение работ будет минимально, принимая во внимание, что рабочие S3, S4, S5 не могут выполнять операцию D3, а рабочий S6 не может выполнять операцию D7.

Указание:

Введите для данной задачи о назначениях фиктивную операцию «Курить», которая может поглотить всех «лишних» рабочих.

Подумайте, какое значение времени выполнения этой операции следует ввести для каждого рабочего. Есть ли однозначный ответ на этот вопрос? Проверьте. Какое значение наиболее удобно?

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ «ТЕОРИИ ИГР»

Задача 22. Оптимальный план выпуска продукции

Предприятие может выпускать три вида продукции (А1, А2 и А3), получая при этом прибыль, зависящую от спроса, который может быть в одном из трёх состояний (В1, В2, В3). Дана матрица (таблица 22), ее элементы a_{ij} характеризуют прибыль (убыток), которую получит предприятие при выпуске i-й продукции с j-м состоянием спроса. Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, гарантирующие среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса, считая его неопределенным.

Таблица 22 – Прибыль (убыток) от продажи продукции при возможных вариантах спроса

Продукция	Спрос		
	В1	В2	В3
А1	-1	1	6
А2	5	2	-3
А3	-2	4	5

Решение:

1 Теоретическое обоснование

Выберем метод решения задачи, записав её как задачу линейного программирования. В этом случае задача сводится к игровой модели, в которой игра предприятия А против спроса В задана платежной матрицей (таблица 22).

Рассмотрим игрока А. Будем искать оптимальную смешанную стратегию игрока А: X*(p1, p2, p3), где p_i – частота (вероятность) использования игроком А своей *i*-стратегии (i=1,2,3) или с учётом экономического смысла задачи – структура производства продукции А.

Обозначим цену игры (средний выигрыш) – V.

Чтобы свести матричную игру для игрока А к задаче линейного программирования преобразуем платежную матрицу так, чтобы все ее элементы были больше нуля – прибавим ко всем элементам матрицы число 4. Получаем преобразованную платежную матрицу:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 9 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Средний выигрыш А должен быть не меньше цены игры V при любом поведении игрока В. Так, если игрок В использует свою первую стратегию, то средний выигрыш игрока А составит: 3p1+9p2+2p3, получаем неравенство 3p1+9p2+2p3 >=V.

Аналогично, записав неравенства для стратегий B_2 и B_3, получаем систему линейных ограничений:

$$\begin{cases} 3p_1 + 9p_2 + 2p_3 \ge v \\ 5p_1 + 6p_2 + 8p_3 \ge v \\ 10p_1 + p_2 + 9p_3 \ge v \end{cases}$$

Из условия p1+p2+p3=1, разделив обе части уравнения на V>0 (цена игры больше нуля, т.к. все элементы преобразованной матрицы больше нуля), получаем целевую функцию:

$$Z = \frac{p1}{V} + \frac{p2}{V} + \frac{p3}{V} = \frac{1}{V}$$

Цель игрока А – получить максимальный средний выигрыш, т.е. $V \to max$, а значит $\frac{1}{V} \to min$. Если обозначить $\frac{p_i}{V} = X_i$ (i=1,2,3), то целевая функция $Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$.

Перейдем в системе ограничений к переменным Xi, разделив каждое неравенство на V>0:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 \ge 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 \ge 1 \\ 10x_1 + x_2 + 9x_3 \ge 1 \end{cases}$$

Таким образом, для нахождения оптимальной стратегии игрока А необходимо решить задачу линейного программирования: *Найти значения переменных X1, X2, X3, удовлетворяющих системе ограничений:*

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 \ge 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 \ge 1 \\ 10x_1 + x_2 + 9x_3 \ge 1 \end{cases}$$

и условию X1>=0, X2>=0, X3>=0, при котором функция Z=X1+X2+X3 принимает минимальное значение.

2 Решение задачи с помощью Excel

1 Организуйте данные на листе MS-Excel:

a) организуйте таблицу параметров ЗЛП - Платёжную матрицу;

b) введите целевую функцию Z = X1+X2+X3;

c) задайте ячейки переменных X1, X2 и X2;

d) задайте ограничения, представляющие собой сумму произведений столбцов платёжной матрицы на столбец переменных (таблица 23).

2 Выберите пункт меню "Сервис" "Поиск решения" (Tools Solver):

a) установите ячейку целевой функции;

b) установите переключатель на отметке **"Равной минимальному значению" (Equal to Min);**

c) отметьте столбец с ячейками переменных;

d) добавляя ограничения, выберите знак ограничения (в нашем случае больше либо равно).

Таблица 23 – Организация решения на листе MS-Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Платёжная матрица							
2		B1	B2	B3	Переменные:			
3	A1	3	5	10	X1=			
4	A2	9	6	1	X2=			
5	A3	2	8	9	X3=			
6					Целевая функция:			
7					Z=	=F3+F4+F5		
8	Система ограничений:							
9	Левая часть			Правая часть				
10	=СУММПРОИЗВ(F3:F5;B3:B5)			1				
11	=СУММПРОИЗВ(F3:F5;C3:C5)			1				
12	=СУММПРОИЗВ(F3:F5;D3:D5)			1				
13								
14								

3 Результат решения:

Используя «Поиск решения», получили результат: $Z(0{,}0787;\ 0{,}0816;\ 0{,}0146) = 0{,}1749$.

Поскольку $V = \frac{1}{Z}$ и $p_i = X_i * V$, то V=5,7167; p1=0,45; p2=0,47; p3=0,08 – это решение для игры, заданной матрицей B (преобразованной матрицы).

Для матрицы А: компоненты смешанной стратегии не меняются, а цена игры меньше на число, которое прибавляли ко всем элементам матрицы А, т.е. на 4.

4 Ответ:

$X*(0{,}45;\ 0{,}47;\ 0{,}08)$, $Y*(0{,}43;\ 0{,}25;\ 0{,}32)$, $\nu = 1{,}72$.

Оптимально производить 45% продукции А1, 47% продукции А2 и 8% продукции А3 при этом средняя величина прибыли равна 1,72 ден.ед.

Задача 23

Предприятие выпускает скоропортящуюся продукцию, которую может сразу отправить потребителю (стратегия А1), отправить на склад для хранения (стратегия А2) или подвергнуть дополнительной обработке (стратегия А3) для длительного хранения.

Потребитель может приобрести продукцию: немедленно (стратегия В1), в течение небольшого времени (В2), после длительного периода времени (В3). В случае стратегий А2 и А3 предприятие несет дополнительные затраты на хранение и обработку продукции, которые не требуются для А1, однако при А2 следует учесть возможные убытки из-за порчи продукции, если потребитель выберет стратегии В2 или В3. Определить оптимальные пропорции продукции для применения стратегий А1, А2, А3, руководствуясь "минимаксным критерием" (гарантированный средний уровень убытка) при матрице затрат, представленной в таблице 24.

Таблица 24 – Матрица затрат

	B1	B2	B3
A1	2	5	8
A2	7	6	10
A3	12	10	8

Задача 24

Предприятие может выпускать три вида продукции (А1, А2 и А3), получая при этом прибыль, зависящую от спроса, который может быть в одном из четырех состояний (В1, В2, В3, В4). Дана матрица (таблица 25), ее элементы a_{ij} характеризуют прибыль, которую получит предприятие при выпуске i-й продукции с j-м состоянием спроса. Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, гарантирующие среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса, считая его неопределенным.

Таблица 25 – Матрица прибыли

	B1	B2	B3	B4
A1	3	3	6	8
A2	9	10	4	2
A3	7	7	5	4

Задача 25

Игрок А записывает одно из двух чисел: 1 или 2, игрок В - одно из трех чисел: 1, 2 или 3. Если оба числа одинаковой четности, то А выигрывает и выигрыш равен сумме этих чисел, если четности выбранных игроками чисел не совпадают, то В выигрывает, выигрыш равен сумме этих чисел. Построить платежную матрицу игры, определить нижнюю и верхнюю цены игры и проверить наличие седловой точки.

ТЕМА. ОПТИМИЗАЦИЯ РАБОТЫ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Системой массового обслуживания (СМО) называется любая система, предназначенная для обслуживания какого-либо потока заявок.

Системы массового обслуживания классифицируются по трем основным признакам.

1 Популяция потенциальных клиентов (или «резервуар» из которого приходят заявки) и характеристики входного потока.

1.1 Бесконечность или конечность популяции:

- бесконечной популяцию можно считать, если ее размер намного больше любого мыслимого размера очереди, который может возникнуть в данной СМО. При этом, интенсивность входного потока заявок не будет зависеть от того, сколько их уже поступило в систему;

- конечной называется такая популяция, размер которой сравним с длиной очереди, образующейся в системе. Если, например, наладчик обслуживает 10 станков в цехе, и каждый станок останавливается и требует обслуживания в среднем 1 раз в час, то суммарный ожидаемый поток заявок будет 10 заявок в час.

Если, однако, один станок (два или три станка) остановились, и наладчик занимается его обслуживанием, то ожидаемый суммарный поток новых заявок будет лишь 9 заявок в час (8 или 7), до тех пор пока остановившиеся станки опять на заработают. Именно поэтому для конечной популяции в качестве основной характеристики входного потока рассматривается не интенсивность потока заявок от всей популяции (как в случае бесконечной популяции), а интенсивность потока заявок от каждого члена популяции (которая остается постоянной независимо от размера очереди).

1.2 Входной поток может быть подразделен на два вида:

- пуассоновский;
- не пуассоновский, который не может быть описан в рамках теории СМО.

2 Свойства самой очереди.

2.1 Размер очереди:

- неограниченный;
- ограниченный. Ограничения на размер очереди могут быть обусловлены технологическими причинами. Например, автоматическая телефонная станция не может удержать в очереди больше 10 звонков. Если в то время, когда 10 клиентов ждут ответа оператора, позвонил 11-ый клиент, он услышит короткие гудки - «занято». Система отказала ему в обслуживании. Иногда можно использовать модель ограниченной очереди для описания психологических особенностей клиентов. Если исследования поведения ваших клиентов показывают, что они редко становятся в очередь, если в ней уже стоит, скажем, 5 человек, то приблизительно можно описать эту СМО как систему с отказами, в которой не может находиться более 5 клиентов.

2.2 Дисциплина очереди:

- первый пришел – первым обслужен (в российской терминологии – «живая очередь);
- наличие заявок с приоритетом (примеры из российской практики: зрители с биноклями образуют отдельную очередь в театральном гардеробе, ветераны и беременные женщины – без очереди и пр.);
- очередь с нетерпеливыми заявками (после некоторого критического времени ожидания определенная доля заявок уходит, не дождавшись обслуживания).

Модели теории очередей разработаны только для простейшей дисциплины очереди «Первый пришел - первым обслужен».

3 Свойства каналов обслуживания.

3.1 Число каналов:

- один канал;
- несколько каналов.

3.2 Пропускная способность каналов:

- одинаковая;
- различная.

3.3 Частотное распределение времени обслуживание:

- экспоненциальное распределение;
- произвольное распределение.

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ РАБОТЫ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Расчеты характеристик СМО с помощью теории очередей. Стандартные обозначения:

S – число серверов (каналов обслуживания);

λ – средняя скорость прибытия (интенсивность входного потока заявок);

μ – средняя скорость обслуживания для каждого сервера;

К – максимальное количество клиентов, которые могут находится в системе (или число членов конечной популяции);

σ – стандартное отклонение времени обслуживания;

Lq – средняя длина очереди (число ждущих, но не обслуживаемых клиентов);

Ls – среднее число клиентов в системе;

Wq – среднее время ожидания в очереди;

Ws – среднее время пребывания клиента в системе (ожидание плюс обслуживание);

ρ – коэффициент утилизации (процент загрузки) любого из серверов системы;

P_0 – вероятность отсутствия клиентов в системе;

Pn – вероятность того, что в системе ровно n клиентов.

Формулы для основных характеристик СМО можно взять в книгах [5] и [6].

Задача 26. Одноканальная система массового обслуживания. Банкоматы

1 Банк планирует открыть банкомат для получения денег, не выходя из машины. Оценки показывают, что поток клиентов в рабочие дни - 15 машин/ в час. Банкомат тратит на обслуживание клиента в среднем 3 минуты. Предполагая пуассоновский поток заявок и экспоненциальное распределение для времени обслуживания найти:

a долю времени, когда банкомат загружен;

b долю времени, когда он бездействует;

c среднее число машин у банкомата;

d среднее число машин в очереди у банкомата;

e среднее время, затрачиваемое клиентом для получения денег;

f среднее время, которое клиент проводит в очереди;

g с какой вероятностью возле банкомата будут стоять более 3 машин.

2 предположите, что время обслуживания клиента распределено нормально со средним значением 3 мин и стандартным отклонением:

h 3 мин,

i 1 мин,

j 0 мин, (постоянное время обслуживания).

Определите, как изменятся характеристики системы.

3 Поскольку банкомат будет расположен на оживленной улице, не более трех машин могут стоять возле него. Если три машины стоят у банкомата, остальным негде остановиться, и они проезжают мимо.

k. Какое количество клиентов будет терять банк в таком случае?

l Каковы характеристики СМО в этом случае?

4 Пусть банк решил поставить два банкомата рядом так, что машина может подъехать к любому свободному. При этом:

m Жесткое ограничение на длину очереди снято, но крайне желательно, чтобы у банкоматов было не больше 3 машин. Какова вероятность, что в очереди действительно будет не более 3 машин. Как изменятся характеристики СМО?

n Жесткое ограничение на количество машин у банкомата сохранено. Какое количество клиентов будет терять банк в таком случае? Каковы характеристики СМО в этом случае?

Задача 27. Система массового обслуживания с очередью. Кафе в парке отдыха

Небольшое кафе в парке отдыха, одно из многих, имеет 9 столиков. Посетители, увидевшие свободный столик, садятся и их обслуживают. Время пребывания клиентов за столиком распределено экспоненциально и в среднем составляет 24 мин. Если свободных мест нет, люди проходят мимо в расположенные неподалеку практически такие же кафе. Поток потенциальных клиентов можно считать пуассоновким, его интенсивность – 1 человек (пара или группа) за 2 минуты. Хозяин подумывает немного расширить кафе и довести количество столиков до дюжины. Принесет ли ему выгоду этот шаг, если занятый столик приносит 750 руб в час, из которых остается оплатить содержание одного столика - 300 руб/час? Какое количество столиков принесет ему наибольшую прибыль?

Задача 28. Служба заказа такси

Автоматическая телефонная система фирмы «Такси «Максим» может поставить в очередь максимум 3-х клиентов. Каждый из операторов, работающих в системе, тратит в среднем на принятие заказа такси 2 мин. Звонки же поступают в среднем 1 раз в минуту. Распределение времени обслуживания и интервала времени между звонками – экспоненциальное.

Один клиент в среднем приносит прибыль 20 руб. Если клиент не дозванивается, он вызывает такси другой компании. Если в данный момент нет свободных такси, клиент также будет потерян. Данная компания имеет парк из 22 такси, среднее время обслуживания пассажира 20 мин (распределено экспоненциально). Водитель получает 300 руб в час, а оператор 30 руб. В настоящий момент фирма имеет четырех операторов.

a Какова упущенная выгода фирмы от потери не дозвонившихся или неудовлетворенных клиентов?

b Каково оптимальное количество операторов?

ТЕМА. МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА

ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ВЫБОР АЛЬТЕРНАТИВ

Задача 29. Дерево альтернатив

Компания X занимает грузоперевозками.

Первое решение, которое должна принять фирма, какой грузовик купить:

- MAN за 7 млн. р.;

- КАМАЗ за 3 млн. руб.

Прогноз финансовых потоков составлен экспертами при двух сценариях будущего: высоком спросе на услугу (оптимистический сценарий) и низком спросе (пессимистический сценарий) и представлен в таблице 26.

Вероятности реализации сценариев спроса определены экспертным путем и также представлены в таблице 26.

Таблица 26 – Прогнозы денежных потоков при разных вариантах реализации сценариев спроса

Прогноз финансовых потоков	Оптимистический сценарий	Пессимистический сценарий
Грузовик MAN	2000000	400000
Грузовик КАМАЗ	1200000	600000
Вероятности реализации сценариев	0,6	0,4

Данные условия описывают первый год реализации проекта. Прогнозируется, что во второй год реализации проекта вероятность продолжающегося высокого спроса будет равна 0,8, тогда как в случае первоначального низкого спроса шансы высокого спроса во второй год реализации проекта упадут до 0,4.

Прогноз финансовых потоков на второй год реализации проекта представлен в таблице 27.

Таблица 27 – Прогнозы денежных потоков во второй год реализации проекта

<table>
<tr><th colspan="2">Прогноз финансовых потоков</th><th>Оптимистический сценарий</th><th>Пессимистический сценарий</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Грузовик MAN</td><td>Первоначально высокий спрос</td><td>12000000</td><td>2800000</td></tr>
<tr><td>Первоначально низкий спрос</td><td>11000000</td><td>1700000</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Грузовик КАМАЗ</td><td>Первоначально высокий спрос</td><td>5000000</td><td>2200000</td></tr>
<tr><td>Первоначально низкий спрос</td><td>4500000</td><td>1700000</td></tr>
</table>

Кроме того, в случае реализации оптимистического сценария в первый год реализации проекта планируется закупить ещё один грузовик КАМАЗ, что увеличит прогноз денежных потоков до 10 млн. р. в случае продолжения оптимистического сценария, в случае же падения спроса из-за недозагрузки двух грузовиков КАМАЗ возможный денежный поток упадет до 1,2 млн.руб.

Задание:

1 Изобразить дерево альтернатив.

2 Выбрать одну из предложенных альтернатив: грузовик Man либо грузовик Kamaz.

3 Определить устойчивость выбора оптимальной альтернативы.

4 Пересчитать денежные потоки, при условии, что компания Х отказывается от дальнейшей работы в случае низкого спроса и продает имеющиеся транспортные средства по цене 2/3 от стоимости покупки.

Решение:

1 Все денежные потоки необходимо дисконтировать.

Коэффициент дисконтирования (DiscountFactor – DF) для года t определяется по формуле:

$$DFt = \frac{1}{(1+\frac{RD}{100})t},$$

где RD – ставка дисконтирования (RateofDiscount – RD), %.

И дисконтированный денежный поток равен DiskCashFlow = CF*DFt

2 Выбор альтернативы производится по показателю EMV, начиная с последнего года реализации.

EMV (Expected Monetary Value) - критерий «Ожидаемой монетарной ценности».

Для каждой i-ой альтернативы следует рассчитать величину суммы произведений выигрышей при различных сценариях будущего Oij на величины вероятностей этих сценариев pj:

$$\mathrm{EMV_i} = \sum_{j} \mathrm{O_{ij}} * \mathrm{p_j}$$

после чего выбрать ту альтернативу, для которой EMV максимальна.

3 Рассчитывается NPV, путем вычитания первоначальных инвестиций.

Задача 30. Анализ устойчивости оптимальной альтернативы. Стоимость совершенной информации

Фирма Х занимается скупкой участков под строительство и возведением и продажей коммерческой недвижимости.

Экспертным путем получена следующая информация об имеющихся альтернативах:

Таблица 28 – Условия задачи

Альтернативы	Сценарии будущего		
	Пессимистический	Консервативный	Оптимистический
Строить, ден. ед.	-700	+500	+2000
Продать , ден. ед.	+150	+150	+150
Вероятности	0,5	0,3	0,2

Задание:

1 Выбрать оптимальную альтернативу на основании EMV (Expected Monetary Value) - критерия «Ожидаемой монетарной ценности».

Для каждой i-ой альтернативы следует рассчитать величину суммы произведений выигрышей при различных сценариях будущего Oij на величины вероятностей этих сценариев pj:

$$\mathrm{EMV_i} = \sum_{j} \mathrm{O_{ij}} * \mathrm{p_j}$$

после чего выбрать ту альтернативу, для которой EMV максимальна.

2 Рассчитать стоимость совершенной информации EVPI – Expected Value of Perfect Information.

Владение совершенной информацией позволяет получить максимум того, что можно извлечь из данного сценария будущего. Поэтому EVPI рассчитывается как разница между ожидаемой монетарной ценность критерия максимума и максимальной ожидаемой ценностью из имеющихся альтернатив:

$$\mathrm{EVPI}=\mathrm{EMV}_{\mathrm{maximum}} - \max(\mathrm{EMV_i})$$

3 Провести анализ устойчивости выбранной альтернативы, изменяя вероятность крайних (пессимистичного и оптимистичного) сценариев с шагом в 5%, заполнить таблицу 29. Сделать вывод.

Таблица 29 – Анализ устойчивости альтернатив

Вер-сть пессим. сценария	Вер-сть оптим. сценария	EMVстроить	EMVпродать	EVPI
0,00				
0,05				
0,1				
0,15				
0,20				
0,25				
0,3				
0,35				
0,4				
0,45				
0,5				
0,55				
0,6				
0,65				
0,7				

Задача 31. Производство снегоходов

Фирме необходимо сделать заказ на двигатели на 1 месяц работы у внешнего поставщика. Время выполнения этого заказа поставщиком – 2 месяца.

Фирма производит снегоходы на заказ и количество произведенной продукции определяется числом заказов на снегоходы в данном месяце.

Какое число заказов компания будет иметь через 2 месяца (когда подойдет заказ от поставщика, который надо сделать сегодня) неизвестно, но предыдущий опыт позволяет оценить вероятность различных уровней спроса (таблица 30).

Таблица 30 – Вероятность различных уровней спроса

Количество двигателей	200	300	400	500	600	700
Вероятность продаж	0,15	0,25	0,25	0,2	0,1	0,05

Если купленный двигатель используется в тот месяц, для которого он куплен, он дает прибыль 30000 ден.ед., если он залеживается до следующего месяца, это влечет убытки 10000 ден.ед.

Задание:

1 Постройте таблицу выигрышей и потерь.

2 Используя принцип максимума ожидаемой монетарной ценности определите:

- каков оптимальный размер заказа?
- какова цена совершенной информации?

3 Как изменится оптимальное решение, если потери от неиспользованного вовремя двигателя составляют $300? Как при этом изменится стоимость совершенной информации?

4 Решите задачу, используя критерии максимина и минимаксных сожалений. Сравните выводы, к которым приводят критерии максимина и минимаксных сожалений, с решением на основе максимума ожидаемой монетарной ценности альтернативы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Афопичкин А. И. Управленческие решения в экономических системах [Текст] / Афоничкин А. И., Михаленко Д. Г. - Санкт-Петербург. : Питер, 2014.

2 Баттрик Р. Техника принятия эффективных управленческих решений [Текст]. - 2-е изд. - Санкт-Петербург. : Питер, 2012.

3 Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология [Текст] : учебное пособие. - 5-е изд., стер. / Вентцель Е. С. – Москва. : КНОРУС, 2010. – 192 с.

4 Голубков Е. П. Технология принятия управленческих решений [Текст] / Голубков Е. П. – Москва. : Издательство «Дело и Сервис, 2013.

5 Зайцев М. Г. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы [Текст] : учебное пособие. – 2-е изд., испр. / Зайцев М. Г., Варюхин С. Е.– Москва. : Издательство «Дело» АНХ, 2012.

6 Исследование операций в экономике [Текст] : учеб. пособие для вузов / Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н.; Под ред. Проф. Кремера Н. Ш. - Москва. : ЮНИТИ, 2012.

7 Мицель А. А. Имитационное моделирование экономических процессов в Excel [Текст] : учебное пособие / Мицель А. А., Грибанова Е.Б. – Томск. : Изд-во ТУСУР, 2016. – 115 с.

8 Логинов В. Н. Управленческие решения: модели и методы [Текст] / Логинов В. Н. - Москва. : Альфа-Пресс, 2014.

8 Орлов, И. В., Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование [Текст] : Учебное пособие. - 3-е изд., перер. и доп. / Орлова И. В., Половников В. А. - Москва. : Вузовский учебник, 2012. – 365 с.

9 Управленческие решения: технология, методы и инструменты [Текст] / Петухова С. В., Шеметов П. В., Радионов В. В. - Москва. : Омега-Л, 2013.

10 Хуснутдинов Р. Ш. Экономико-математические методы и модели [Текст] : Учеб. пособие. – Москва. : ИНФРА-М, 2014. – 224с. – (Высшее образование). – DOI 10.12737/1446 (www.doi.org).

Штинова Наталья Сергеевна

МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Методические указания
к практическим занятиям
для студентов направлений
38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент»,
38.03.04 «Государственное и муниципальное управление»

Авторская редакция

Подписано в печать 29.01.18 Формат 60x84 1/16 Бумага 65г/м^2
Печать цифровая Усл. печ. л. 3,0 Уч.-изд. л. 3,0
Заказ №21 Тираж 25 Не для продажи

БИЦ Курганского государственного университета.
640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.