МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курганский государственный университет»
Кафедра программного обеспечения автоматизированных систем

Основы теории управления

Методические указания
к выполнению практических работ
(направление подготовки 09.03.04 «Программная инженерия»)

Курган 2017

Кафедра: «Программное обеспечение автоматизированных систем».

Дисциплина: «Теория управления».

Составил: канд. физ.-мат. наук, профессор В.А. Симахин.

Утверждены на заседании кафедры « 23 » марта 2017 г.

Рекомендованы методическим советом университета « 12 » декабря 2016 г.

Оглавление

1 Математическое моделирование задач

При изучении сложных процессов, явлений очень часто применяется моделирование. Суть его состоит в том, что изучаемое явление воспроизводится в экспериментальных условиях с помощью модели в другом масштабе. Модель – это специально создаваемый объект, на котором воспроизводятся вполне определённые характеристики исследуемого объекта с целью его изучения, а моделирование – вполне определённое конкретное отображение рассматриваемых характеристик изучаемого объекта в целях его исследования.

Математическое моделирование является наиболее совершенным и вместе с тем эффективным методом моделирования. Именно в этом случае применяются мощные средства математического анализа, так как по своей природе математические методы не могут прилагаться непосредственно к действительности, а только к математическим моделям. Результаты исследования такой модели будут иметь практический интерес, если сама модель достаточно адекватна рассматриваемому явлению, то есть достаточно хорошо отображает реальную ситуацию.

1.1 Этапы принятия решений

Для принятия оптимальных управленческих решений необходимо выполнить следующие этапы:

- изучить исследуемый объект;
- сформулировать постановку задачи;
- построить математическую модель задачи;
- выбрать методы решения данной задачи;
- выбрать или разработать программное обеспечение для решения данной задачи;
- решить поставленную задачу;
- провести анализ полученных результатов.

Если полученные результаты удовлетворяют всем требованиям, то они используются в процессе принятия решений. В противном случае выполняется необходимая корректировка постановки задачи, и процесс принятия решений продолжается с третьего этапа.

1.2 Построение математических моделей задач

Из содержания постановки задачи определяются неизвестные переменные, значения которых необходимо определить в процессе решения задачи.

Неизвестные переменные обозначаются латинскими буквами и могут иметь несколько индексов: x_i, x_{ij}, y_k. Например, x_{ij} – объём перевезенной продукции от i-го поставщика к j-му потребителю.

***Математическая модель задачи состоит из следующих элементов*:**

1 **Целевая функция** (критерий оптимальности). Данную функцию будем обозначать через z. Она должна количественно отражать значение цели в зависимости от значений неизвестных переменных. Целевая функция может быть на нахождение максимального значения (прибыль предприятия) или минимального значения (себестоимость, затраты).

2 **Ограничения задачи**. В реальной экономической системе существуют ограничения, например, на объём используемых ресурсов, которые должны быть учтены при построении математической модели. Ограничения должны быть записаны в виде математических соотношений (уравнений или неравенств).

3 **Условия неотрицательности переменных.** Неизвестные переменные задачи отражают некоторые реальные параметры экономической системы, которые, как правило, не могут принимать отрицательных значений, поэтому соответствующие неизвестные переменные должны быть положительными или нулевыми.

Если целевая функция и ограничения задачи линейные, то задача называется задачей линейного программирования (ЗЛП).

1.3 Основные виды моделей распространённых задач

Качество разрабатываемых моделей в значительной мере определяется опытом, интуицией, а также творческими способностями каждого исследователя. Невозможно дать готовые рецепты, как строить математическую модель в той или иной конкретной ситуации. Тем не менее, анализ накопленного опыта позволяет выявить рациональные приёмы, которые облегчают и рационализируют процесс построения моделей.

Рассмотрим их на примерах построения математических моделей наиболее распространенных типов оптимизационных задач.

Модель 1. Задача нахождения оптимального плана выпуска продукции

Постановка задачи

Предприятие производит n видов продукции с использованием m видов ресурсов. Для производства единицы продукции используется строго определённое количество ресурсов того или иного вида. Ресурсы каждого вида на предприятии ограничены. Предприятие получает определённую прибыль от реализации единицы продукции. Необходимо найти такой план производства продукции, при котором предприятие получит максимальную общую прибыль.

Математическая постановка

Введём обозначения заданных параметров:

j – индекс вида продукции, $j = \overline{1, n}$;

i – индекс вида ресурсов, $i = \overline{1, m}$;

a_{ij} – затраты ресурсов i-го вида на производство единицы продукции j-го вида;

A_i – заданное ограничение на имеющийся объём ресурсов i-го вида;

P_j – прибыль, получаемая от реализации единицы продукции j-го вида.

Введём неизвестные переменные:

x_j – объём продукции j–го вида, который планируется произвести.

В терминах введённых обозначений данная задача запишется следующим образом:

$$z = P_1x_1 + P_2x_2 + \cdots + P_nx_n \to max; \qquad (1)$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq A_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq A_2, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq A_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n}. \qquad (3)$$

Модель 2. Задача составления рациона

Постановка задачи

В некотором фермерском хозяйстве производится откорм животных. Для откорма используется n видов кормов, содержащих m видов питательных веществ. Известно содержание питательных веществ (кальций, фосфор и др.) в единице корма каждого вида. Для полноценного питания животных необходимо потребление питательных веществ не меньше заданных количеств. Известна стоимость единицы каждого корма. Необходимо определить рацион кормления животных, при котором общие затраты на откорм будут минимальными.

Математическая постановка

Введём обозначения заданных параметров:

j – индекс вида кормов, j = $\overline{1,n}$;

i – индекс вида питательных веществ, i = $\overline{1,m}$;

a_{ij} – содержание i–го питательного вещества в единице корма j-го вида;

A_i – необходимое суточное потребление питательного вещества i–го вида;

c_j – стоимость единицы кормов j-го вида.

Введём неизвестные переменные:

x_j – планируемый суточный объём кормления животных j-м видом корма.

В терминах введённых обозначений данная задача запишется следующим образом:

$$z = c_1x_1 + \ c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to min; \qquad (1)$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq A_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq A_m, \end{gathered} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n}. \qquad (3)$$

Модель 3.Транспортная задача

Постановка задачи

Имеется m поставщиков и n потребителей однородной продукции. Известны удельные затраты на доставку единицы продукции от каждого поставщика каждому потребителю. Запасы продукции у поставщиков ограничены. Известны также потребности в продукции каждого потребителя. Необходимо определить такой план перевозки продукции от поставщиков к потребителям, при котором общие затраты на перевозку будут минимальными.

Математическая постановка

Введём обозначения заданных параметров:

j – индекс потребителей, $j = \overline{1,n}$;

i – индекс поставщиков, $i = \overline{1,m};$

A_i – объём имеющейся продукции i-го поставщика;

B_j – объём потребности в продукции j-го потребителя;

c_{ij} – удельные затраты на перевозку единицы продукции от i-го поставщика j-му потребителю.

Введём неизвестные переменные:

x_{ij} – планируемый объём перевозки продукции от i-го поставщика j-му потребителю.

В терминах введённых обозначений данная задача запишется следующим образом.

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \cdots + c_{m(n-1)}x_{m(n-1)} + c_{mn}x_{mn} \to min; \quad (1)$$

Ограничения задачи

I От каждого поставщика можно вывести объём продукции не более имеющегося количества:

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} \geq A_1, \\ &x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} \geq A_2, \quad (2) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_{m1} + x_{m1} + \cdots + x_{mn} \leq A_m. \end{aligned}$$

II Потребность каждого потребителя в продукции должна быть удовлетворена:

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} \geq B_1, \\ &x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} \geq B_2, \quad (3) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} \geq B_n, \end{aligned}$$

III Условие не отрицательности:

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}. \quad (4)$$

Модель 4. Задача о назначениях

Постановка задачи

Имеются n видов работ и n исполнителей. Каждый из исполнителей может выполнить любую, но только одну работу. Задана эффективность выполнения каждой работы, каждым исполнителем. Необходимо закрепить исполнителей за работами таким образом, чтобы общая эффективность выполнения работ была максимальной.

Математическая постановка

Введём обозначения заданных параметров.

i – индекс работ, $i = \overline{1,n};$,

j – индекс исполнителей, $j = \overline{1,n}$;

c_{ij} - эффективность выполнения i-й работы j-м исполнителем.

Введём неизвестные переменные. В данной задаче они могут принимать только два значения: 0 или 1. Такие переменные называются булевыми.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 - \text{если за } i - \text{й работой закреплен } j - \text{й исполнитель;} \\ \qquad\qquad 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В терминах введённых обозначений данная задача запишется следующим образом:

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} \dots + c_{(n-1)(n-1)}x_{(n-1)(n-1)} + c_{nn}x_{nn} \to max;$$

Ограничения задачи

I За каждой работой должен быть закреплён только один исполнитель:

$$\begin{gathered} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = 1, \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn} = 1. \end{gathered}$$

II Каждый исполнитель может выполнить только одну работу:

$$\begin{gathered} x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{n1} = 1, \\ x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{n2} = 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{nn} = 1, \\ x_{ij} = \{0,1\} \;\; i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}. \end{gathered}$$

Модель 5. Задача оптимального раскроя промышленных материалов

Постановка задачи

На раскрой поступает исходный материал одинакового размера. Его требуется раскроить на заготовки определённого размера в заданном количестве таким образом, чтобы общие количество используемого исходного материала было минимальным.

Математическая постановка.

Введём обозначения:

i – индекс заготовок, $i = \overline{1,m};$

j – индекс вариантов раскроя, $j = \overline{1,n};$

A_i – необходимое количество заготовок i-го типа;

a_{ij} – количество заготовок i-го вида при раскрое единицы исходного материала по варианту j.

Введём обозначения неизвестных переменных.

x_j- количество исходного материала, которое необходимо раскроить по варианту j.

В терминах введённых обозначений данная задача запишется следующим образом:

$$z = x_1 + x_2 + \cdots x_n \to min; \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq A_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq A_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq A_m, \end{aligned} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}. \qquad (3)$$

Применение математических моделей при раскрое промышленных материалов позволяет экономить до 20% их объёма. Математическая модель раскроя строится в два этапа. На первом этапе производится построение вариантов раскроя, в результате которого определяются количество вариантов n и количество заготовок каждого вида a_{ij}, получаемых при различных вариантах раскроя. Построение вариантов раскроя единицы исходного показано ниже:

№ варианта	Заготовка i_1	Заготовка i_2	…	Заготовка i_m

Заготовки располагаются в порядке убывания их размеров. Построение вариантов осуществляется методом полного перебора.

На втором этапе производится непосредственное построение модели.

1.4 Пример решения типовой задачи

Постановка задачи

На заводе ежемесячно скапливается около 14 т отходов металла, из которого можно штамповать большие и малые шайбы. Месячная потребность завода в больших шайбах 600 тыс. шт., в малых – 1100 тыс. шт. (недостающее количество шайб закупается на специализированном предприятии). Оптовая цена больших шайб 11,9 руб. (за тысячу штук) и малых – 5,2 руб. Расход металла на тысячу больших шайб – 22 кг, на тысячу малых – 8 кг.

Для изготовления шайб используется два пресса холодной штамповки. Производительность каждого за смену – 9 тыс. шт. больших шайб либо 11,5 тыс. шт. малых. Завод работает в две смены. Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу определения плана производства шайб (из отходов), обеспечивающего максимальную долю в валовой продукции предприятия. За плановый период принять год. На рисунке 1 изображена формальная модель задачи.

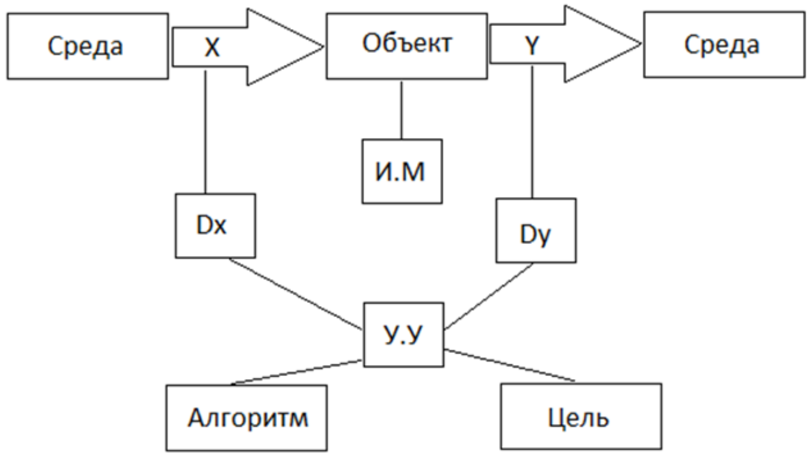

Рисунок 1 – Формальная модель задачи

X – входные данные – потребности предприятия, производственные ограничения и цена продукции;

Y – выходные данные – количество произведенной продукции;

U – управление – план производства;

E – случайная помеха – например, изменение имеющегося количества отходов для производства шайб и изменение цены на шайбы.

Рассмотрим параметры задачи. *Входные данные X:*

X1 – количество отходов металла – 14 т в месяц;

X2 – месячная потребность завода в больших шайбах – 600 тыс. шт.;

X3 – месячная потребность завода в малых шайбах – 1100 тыс. шт.;

X4 – цена больших шайб – 11.9 руб./тыс. шт.;

X5 – цена малых шайб – 5.2 руб./тыс. шт.;

X6 – расход металла для больших шайб – 22 кг/тыс. шт.;

X7 – расход металла для малых шайб – 8 кг/тыс. шт.;

X8 – количество прессов – 2 шт.;

X9 – производительность одного пресса для больших шайб – 9 тыс. шт. за смену;

X10 – производительность одного пресса для малых шайб – 11.5 тыс. шт. за смену;

X11 – плановый период – 1 год.

Управление U:

U1 – количество больших шайб, которые нужно произвести из отходов по плану – 2784 тыс. шт.;

U2 – количество малых шайб, которые нужно произвести из отходов по плану – 13315 тыс. шт.;

U3 – количество больших шайб, которые нужно закупить по плану;

U4 – количество малых шайб, которые нужно закупить по плану;

U5 – план производства больших и малых шайб.

Алгоритм управления – симплекс-метод

Цель $Z = X4 * U1 + X5 * U2 \to \max$ или, если подставить значения цен на большие и малые шайбы, то $Z = 11.9U1 + 5.2U2 \to \max$.

Выходные данные Y:

Y1 – реальное количество произведенных больших шайб из отходов;

Y2 – реальное количество произведенных малых шайб из отходов;

Y3 – реальное количество закупленных больших шайб;

Y4 – реальное количество закупленных малых шайб.

Случайная помеха Е:

E1 – изменение количества отходов, которое будет меняться по нормальному закону со средним значением 14 тонн, дисперсию возьмем равной 0.95;

E2 – изменение цены на большие шайбы, которая будет меняться по экспоненциальному закону;

E3 – изменение цены на малые шайбы, которая будет меняться по экспоненциальному закону.

Решение

Вначале решим задачу без учета влияния случайной помехи. Задача решается симплекс-методом.

Целевая функция *Z* выглядит так:

$Z = 11.9U1 + 5.2U2 \to \max$.

При этом вводятся некоторые ограничения.

Количество произведенных больших и малых шайб должно быть неотрицательным:

$U1 \geq 0$;

$U2 \geq 0$.

Потребность завода в больших и малых шайбах будет ограничена (расчет за год):

$U1 \leq 7200$;

$U2 \leq 13200$.

Ресурсы – количество металла – ограничены (расчет за год):

$0.022U1 + 0.008U2 \leq 168$.

Производственные ресурсы – ресурсы двух прессов – также ограничены (расчет за год):

$$\frac{1}{9}U1 + \frac{1}{11.5}U2 \leq 1460.$$

Система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} U1 \geq 0 \\ U2 \geq 0 \\ U1 \leq 7200 \\ U2 \leq 13200 \\ 0.022U1 + 0.008U2 \leq 168 \\ \end{cases}$$

$$\frac{1}{9}U1+\frac{1}{11.5}U2\leq 1460$$

$$Z=11.9U1+5.2U2\rightarrow \max .$$

Решив систему, получим:

$U1=2860$ тыс. шт.;

$U2=13136$ тыс. шт.;

$Z=102341$ руб.

Для решения задачи, учитывая влияние случайной помехи, написана программа.

При учете случайной помехи (изменение имеющегося количества отходов для производства шайб и изменение цены на большие и малые шайбы) будет меняться доля валовой продукции завода и количество произведенных шайб.

Решение задачи изображено на рисунке 2.

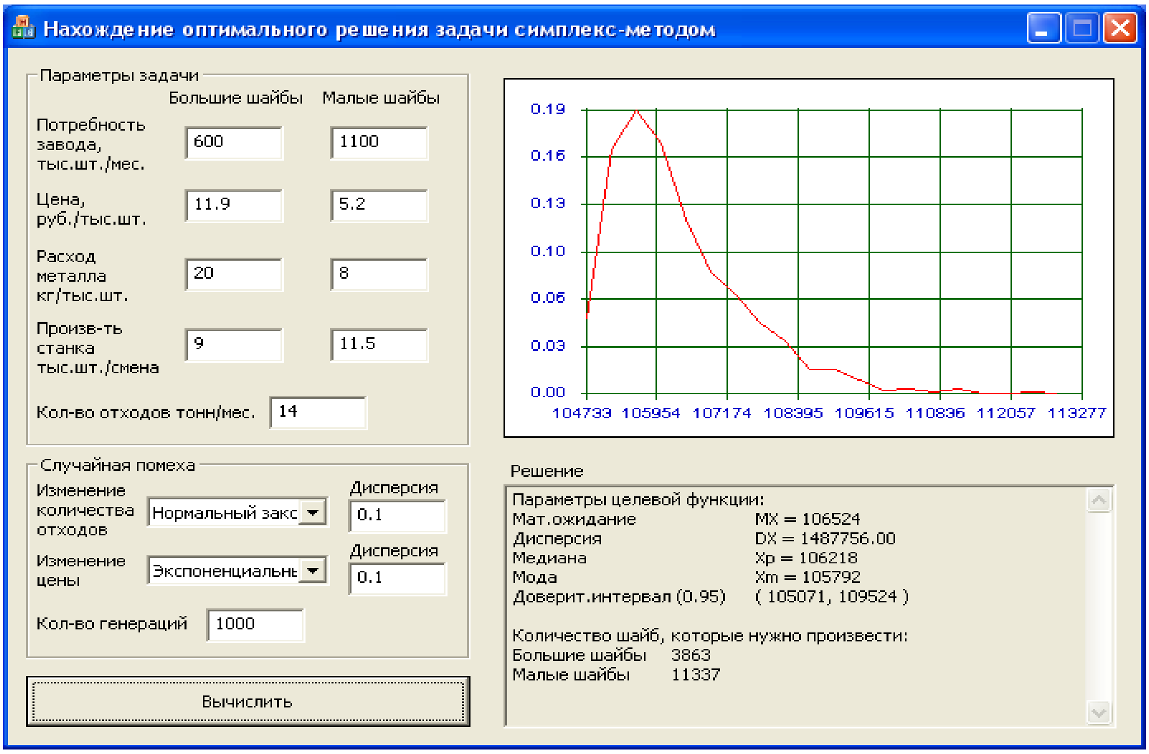

Рисунок 2 – Решение задачи

В этом случае получается следующее решение:

– среднее значение целевой функции $Z=106449$ руб.;

– $U1=3873$ тыс. шт.;

– $U2=11325$ тыс. шт.

2 Варианты задания для выполнения практической работы

Вариант 1

1) найти оптимальное распределение трех видов механизмов, имеющихся в количествах a1=45, a2=20 и a3=35 между четырьмя участками работ, потребности которых соответственно равно b1=10, b2=20, b3=30, b4=40 при

следующей матрице производительности каждого из механизмов на соответствующем участке работы:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Нулевые элементы означают, что данный механизм на данном участке работы не может быть использован;

2) производственные объединения «Альфа», «Сигма» и «Омега» выпускают взаимозаменяемое нестандартное оборудование для четырех строящихся объектов. Перевозки оборудования от складов готовой продукции до строительных площадок выполняются на специальных машинах (по одному комплекту на каждой) со средней скоростью 50 км/ч и только ночью. На время транспортировки оборудования перекрывается движение городского транспорта по всему маршруту следования груза. На всех возможных маршрутах интенсивность движении примерно одинакова. Однако движение городского транспорта может быть остановлено не более чем на три часа. За каждые десять минут задержки агентство платит штраф в размере 200 руб.

Протяженность (в км) возможных маршрутов от складов готовой продукции до строительных площадок (объединения «Альфа», «Сигма» и «Омега» соответственно) в таблицах 1-3.

Наличие оборудования на первом, втором и третьем складе – 5, 4, 6 ед., количество его, необходимое для установки на первом, втором, третьем и четвертом объектах, составляет соответственно 4, 2, 3, 4 единиц.

Построить модель и на основе ее сформулировать экстремальную задачу нахождения плана перевозок оборудования, исключающего (если это возможно) выплату штрафов, при минимальном суммарном пробеге машин с грузом.

Таблица 1 – Протяженность маршрутов до объединения «Альфа»

Номер строительной площадки	Номер маршрута			
	1	2	3	4
1	115	190	135	-
2	185	181	190	179
3	115	90	98	-
4	189	190	-	-

Таблица 2 – Протяженность маршрутов до объединения «Сигма»

Номер строительной площадки	Номер маршрута			
	1	2	3	4
1	90	80	75	100

2	70	60	-	-
3	118	120	100	90
4	15	20	16	-

Таблица 3 – Протяженность маршрутов до объединения «Омега»

Номер строительной площадки	Номер маршрута			
	1	2	3	4
1	30	45	-	-
2	16	20	17	25
3	100	118	120	-
4	190	185	187	-

Вариант 2

1) составить оптимальное распределение специалистов четырех профилей, имеющихся в количествах 60, 30, 45, 25 между пятью видами работ; потребности в специалистах для каждого вида работы соответственно равны 20, 40, 25, 45, и 30; матрица

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

характеризует эффективность использования специалиста на данной работе;

2) цех мебельного комбината выпускает трельяжи, трюмо и тумбочки под телевизоры. Норма расхода материала в расчете на одно изделие, плановая себестоимость, оптовая цена предприятия, плановый месячный ассортимент и трудоемкость единицы продукции приведены в таблице 4. Запас древесностружечных плит, досок еловых и березовых 90, 30, 14 м^2, соответственно. Плановый фонд рабочего времени 16800 человеко-часов.

Таблица 4 – Параметры производства продукции

Показатели	Трельяжи	Трюмо	Тумбочки
Нормы расхода материала, куб.м.:			
древесностружечные плиты;	0.032	0.031	0.038
доски еловые;	0.020	0.020	0.008
доски березовые;	0.005	0.005	0.006
трудоемкость, человеко-часов,	10.2	7.5	5.8
плановая себестоимость,	88.81	63.98	29.60
оптовая цена предприятия, р.	93	67	30
плановый ассортимент, шт.	350	290	1200

Исходя из необходимости выполнения плана по ассортименту и возможности его перевыполнения по отдельным (или даже всем) показателям, построить модели, на основе которых можно сформулировать следующие экстремальные задачи:

а) задачу максимизации объема реализации (за плановый период);

б) задачу максимизации прибыли (за тот же период).

Вариант 3

1) распределить 4 сорта топлива в количестве 70, 40, 50 и 40 т между четырьмя агрегатами, потребности которых соответственно равны 30, 50, 30, 80т; известна матрица

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix},$$

элементы C_{ik} которой характеризуют теплотворную способность i-го сорта топлива при использовании его в *k*-м агрегате;

2) на заводе ежемесячно скапливается около 14 т отходов металла, из которого можно штамповать большие и малые шайбы. Месячная потребность завода в больших шайбах 600 тыс. шт., в малых – 1100 тыс. шт. (недостающее количество шайб закупается на специализированном предприятии). Оптовая цена больших шайб 11,9 р. (за тысячу штук) и малых 5,2 р. Расход металла на тысячу больших шайб – 22 кг, на тысячу малых – 8 кг.

Для изготовления шайб используется два пресса холодной штамповки. Производительность каждого за смену 9 тыс. шт. больших шайб либо 11,5 тыс. шт. малых. Завод работает в две смены.

Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу определения плана производства шайб (из отходов), обеспечивающего максимальную долю в валовой продукции предприятия. За плановый период принять год.

Вариант 4

1) четыре различных предприятия могут выпускать любой из четырех видов продукции. Производственные мощности предприятий позволяют обеспечить выпуск продукции каждого вида в количествах 50, 70, 100 и 30 тыс. шт., а плановое задание составляет соответственно 30, 80, 20, и 100 тыс. шт. Матрица

$$C = \left|C_{ik}\right| = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \\ 6 & 4 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

характеризует себестоимость единицы k-го вида продукции при производстве его на i-м предприятии. Найти оптимальное распределение планового задания между предприятиями;

2) предприятие изготавливает приборы типа А, В и С, которые реализует соответственно по 60, 70 и 115 р. за изделие. Трудоемкость их производства задана отношением 1:2:3. Ранее предприятие изготовляло только приборы типа *А* в количестве 900 штук за сутки. Однако изменение объема поставок экранированного провода (при сборке прибора каждого типа расходуется одинаковое количество этого материала) в планируемом году позволит выпускать за сутки 1000 приборов.

Для укомплектования каждого прибора необходим датчик того же типа, что и тип прибора. Их предполагается получать по кооперативным поставкам в количестве, обеспечивающем в сутки сборку не более 400, 500 и 200 приборов типа *A, B* и *C* соответственно.

Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу определения напряженных месячных планов по объему реализации и ассортименту выпускаемой продукции.

Вариант 5

1) четыре ремонтные мастерские могут за год отремонтировать соответственно 700, 500, 450 и 550 машин при себестоимости ремонта одной машины в 50, 70, 65 и 60 р. Планируется годовая потребность в ремонте пяти автобаз: 350, 350, 300, 300 и 200 машин.

Избыточные мощности 1-й и 2-й мастерских могут быть использованы для обслуживания других видов работ, а 3-й и 4-й мастерских - только на указанный вид работ. Матрица

$$C = \left|C_{ik}\right| = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 70 & 50 \\ 20 & 80 & 30 & 10 \\ 60 & 30 & 30 & 40 \\ 10 & 40 & 50 & 50 \\ 20 & 30 & 10 & 40 \end{pmatrix}$$

характеризует транспортные расходы на доставку машины с i-й автобазы в k-ю ремонтную мастерскую. Определить минимальную годовую потребность в кредитах на выполнение указанного объема ремонтных работ по всем автобазам;

2) фабрика выпускает кожаные брюки, куртки и пальто специального назначения в ассортименте, заданном отношением 2:1:3. В процессе изготовления изделия проходят три производственных участка: дубильный, раскройный и пошивочный. Фабрика имеет практически неограниченную сырьевую базу, однако сложная технологии предъявляет высокие требования к квалификации рабочих. Численность их в рамках планируемого периода ограничена.

Время обработки изделий на каждом участке, их плановая себестоимость, оптовая цена предприятия приведена в таблице 5.

Ограничения на фонд времени для дубильного, раскройного и пошивочного участков составляют соответственно 3360, 2688 и 5040 ч.

Учитывая заданный ассортимент, построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу определения напряженного месячного плана по прибыли от реализационной продукции.

Таблица 5 – Время обработки изделий

Показатели	Брюки	Куртки	Пальто
Норма времени на участках, человеко-часов:			
дубильном,	0.3	0.4	0.6
раскройном,	0.4	0.4	0.7
пошивочном,	0.5	0.4	0.8
полная себестоимость, р.	15	40.5	97.8
оптовая цена предприятия, р.	17.5	42	100

Вариант 6

1) на трех участках посевных площадей размером в 300, 500 и 400 га могут быть посажены 4 вида сельскохозяйственных культур, которые необходимо вырастить в количестве, соответственно 600, 1500, 225 и 1250 т. Матрица

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 30 \\ 50 & 40 & 15 \\ 24 & 10 & 20 \\ 10 & 20 & 15 \end{pmatrix}$$

характеризует себестоимость 1 т при выращивании i-й культуры на k-м участке. Составить оптимальный план посева, если урожайность по различным культурам не зависит от участка посева и составляет 20, 30, 15 и 50 ц/га;

2) на приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 300 тыс. р. Его предполагается разместить на площади 45 кв. м. Участок может быть оснащен оборудованием трех видов машинами стоимостью 6 тыс. р. (здесь и далее все показатели приводятся на единицу оборудования), размещающимися на площади 9 кв. м., производительностью

8 тыс. единиц продукции за смену, машинами стоимостью 3 тыс. р., занимающими площадь 4 кв. м., производительностью 4 тыс. единиц продукции за смену, машинами стоимостью 2 тыс. р. Занимаемая ими площадь 3 кв. м., производительность 3 тыс. единиц продукции.

Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу определения плана приобретения оборудования, обеспечивающего наибольшую производительность всего участка.

Вариант 7

1) ресурсы угля трех сортов составляют 300, 800 и 400 т, а их теплотворная способность соответственно 1800, 2500, 3000 кал/кг. Уголь сжигается в четырех печах, потребности которых составляют 750, 920, 1100 и 800 млн. кал. Суммарные затраты на производство и доставку каждого сорта угля до каждой печи (в р./т) задаются следующей матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 27 & 36 & 18 & 18 \\ 30 & 25 & 15 & 20 \\ 36 & 30 & 24 & 21 \end{pmatrix}$$

Составить оптимальный план распределения ресурсов угля по печам;

2) на заготовительный участок поступили стальные прутья длиной 111 см. Необходимо разрезать их на заготовки по 19, 23, 30 см. Последних требуется соответственно 311, 215 и 190 штук. Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу выбора варианта выполнения этой работы, при котором число разрезаемых прутьев минимально.

Вариант 8

1) найти оптимальное распределение трех взаимозаменяемых механизмов но четырем видам земляных работ при заданных ресурсах времени каждого механизма 240, 160 и 150 ч, производительности механизмов 30, 55, 18 $м^3$/ч, объеме подлежащих выполнению работ 5, 2, 3 и 8 тыс. $м^3$ и матрице С себестоимости работ в р./$м^3$:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0{,}5 & 1{,}2 \\ 0{,}8 & 1{,}2 & 0{,}9 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 1{,}0 & 0{,}6 & 0{,}9 \end{pmatrix};$$

2) на заготовительный участок поступило 69 металлических прутьев длиной 107 см. Необходимо разрезать их на заготовки по 13, 15, 31 см. В комплектности задаваемым отношением 1:4:2.

Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу максимизации комплекта заготовок.

Вариант 9

1) на четырех ткацких станках с объемом рабочего времени 200, 300, 250 и 400 станко-часов может изготовляться ткань трех артикулов в количествах 260, 200, 340 и 500 м за 1 ч. Составить программу загрузки станков, если прибыль (в р.) от реализации 1 м ткани i-го артикула при ее изготовлении на k-м станке характеризуется элементами матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 2,5 & 2,2 & 2,0 & 2,8 \\ 1,6 & 1,0 & 1,9 & 1,2 \\ 0,8 & 1,0 & 0,6 & 0,9 \end{pmatrix},$$

а суммарная потребность в ткани каждого из артикулов равна 200, 100 и 150 тыс. м;

2) на заготовительный участок мебельной фабрики поступили листья фанеры размером 152х152 см. Необходимо разрезать их на заготовки по 105*31, 47*90, 30*51 см. Потребность в них соответственно 315, 215 и 416 штук.

Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу выбора вариантов раскроя, при котором количество разрезаемых листов минимально.

Вариант 10

1) имеется три сорта бумаги в количествах 10, 8 и 5 т, которую можно использовать на издание четырех книг тиражом в 8000, 6000,15000 и 10000 экз. Расход бумаги на одну книгу составляет 0,6; 0,8; 0,4 и 0,5 кг, а себестоимость печатания книги при использовании i-го сорта бумаги задается матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 25 & 16 & 32 & 25 \\ 18 & 24 & 24 & 20 \\ 30 & 24 & 16 & 20 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальное распределение бумажных ресурсов;

2) в плановом году строительные организации города переходят к сооружению домов типов Д-1, Д-2, Д-3 и Д-4. Данные о количестве квартир разного типа в каждом из указанных типов домов, их плановая себестоимость приведены в таблице 6. Годовой план ввода жилой площади соответственно составляет 800, 1000, 900, 2000, 7000 квартир указанных типов.

Таблица 6 – Данные о квартирах

Показатели/Типы квартир	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4
1-комнатные	10	18	20	15
2-комнатные/смежные	40	-	20	-
2-комнатные/несмежные	-	20	-	60

Продолжение таблицы 6

3-комнатные	60	90	10	-
4-комнатные	20	10	-	5
Плановая себестоимость в тыс. р.	830	835	360	450

На жилищное строительство утвержден объем капиталовложений в размере 40 млн. р. (часть этих средств, которая не будет использована в плановом году по прямому назначению, предназначена для расширения сети коммунальных предприятий города). Построить модель и сформулировать на её основании экстремальную задачу нахождении плана строительства на финансовый год, при котором себестоимость всех вводимых домов будет минимальной.

Вариант 11

1) фирма объединяет три предприятия, каждое из которых производит три вида изделий. Производительность каждого предприятия при изготовлении одного изделия (в денежных единицах) характеризуется таблицей 7.

Таблица 7 – производительность предприятий

Предприятие	Изделия
1	15 6 12
2	6 9 13
3	8 11 2

Учитывая необходимость специализации каждого предприятия только по одному изделию, распределить производство изделий по предприятиям так, чтобы суммарная производительность фирмы при этом распределении была максимальной;

2) производственный участок изготовляет изделия И-1, И-2, И-3 для сборочного конвейера предприятия заказчика. Потребность в них 300, 500, 400 штук соответственно. Запасы металла на изделие И-1 ограничены, поэтому их можно производить не более 350 штук. Все изделия последовательно обрабатываются на ставках С-1, С-2, С-3. Технология изготовления каждого изделия предусматривает три способа обработки. Норма времени на обработку, плановая себестоимость и оптовая цена предприятия на все изделия приведены в таблице 8. Плановый фонд времени работы станков составляет: для станков С1 и С3 по 6048 часов, для С2 – 3932 часа.

Таблица 8 – Норма времени

Показатели	Изделия и способы обработки								
	И1			И2			И3		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3

Продолжение таблицы 8

Норма времени на обработку в часах:									
На С1	3	7	0	8	4	5	4	3	2
На С2	2	3	6	3	2	0	2	3	1
На С3	7	5	6	9	3	6	5	6	3
Плановая себестоимость, в рублях	13	15	11	26	20	25	19	20	18
Оптовая цена предприятия, в рублях	16			25			20		

Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу нахождении плана загрузки станков, обеспечивающего максимальную прибыль от реализации готовой продукции.

Вариант 12

1) решить предыдущую задачу (вариант 11а), если фирма включает еще два предприятия с производительностями 7, 13, 6 и соответственно 4, 9 и 12;

2) четыре строительных участка потребляют щебень, вырабатываемый тремя дробильными установками. Суточная потребность в щебне строительных участков и стоимость перевозки 1 т его от дробильных установок до строительных площадок приведены в таблице 9. Суточная производительность дробильных установок составляет 65, 75 и 60 т соответственно.

Таблица 9 – Суточная потребность в щебне

Показатели	Номер участка			
Цена перевозки одной тонны щебня в рублях:	1	2	3	4
От установки N 1	4	3	8	5
От установки N 2	9	7	5	4
От установки N 3	3	6	2	8
Потребность в щебне строительного участка, в тоннах	50	50	70	70

Недостающее количество щебня можно обеспечить за счет:
а) увеличения производительности дробильной установки N 1, что вызывает дополнительные затраты на выработку 1 т щебня в размере 3 р.;
б) увеличения производительности дробильной установки N 2, (затраты на изготовление 1 т щебня возрастают на 2 р.);
в) введения в эксплуатацию дробильной установки 1V (и карьера) при дополнительных затратах на изготовление 1 т щебня 5 р. и стоимости перевозки

1 т щебня 3, 2, 4 и 1 р. к 1-й, 2-й, 3-й и 4-й строительным площадкам соответственно.

Построить модель и на ее остове сформулировать экстремальную задачу, анализ которой позволит определить и обосновать оптимальный план закрепления строительных площадок за дробильными установками с учетом перечисленных возможностей увеличения производства щебня.

Вариант 13

1) имеется 5 работ и 5 человек, каждый из которых может выполнить любую из этих работ. При этом каждый работник выполняет лишь одну работу.

Производительности работника A_i при выполнении работы B_k представлены в таблице 10.

Таблица 10 – Производительность работников

A_i B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	3	4	2	2	1
A_2	4	5	3	1	3
A_3	4	3	1	1	1
A_4	3	1	2	2	2
A_5	1	3	1	2	1

Распределить людей на работу так, чтобы суммарный эффект их труда (производительность) был максимальным;

2) предприятие выпускает обычный, специальный и декоративный сплавы латуни и реализует их соответственно по 3, 4, 5 и 6 р. за единицу веса. Его производственная мощность позволит производить (за плановый период) не более 500 ед. веса обычного сплава, 700 ед. специального и 250 ед. декоративного. Обязательным составляющим сплавов являются медь, цинк, свинец и никель. Их цена соответственно 0,9, 0,7, 0,5 и 1,1 р. за единицу веса.

По технологии декоративный сплав должен содержать не менее 7% никеля, 49% меди и не более 29% свинца, специальный - не менее 3% никеля, 71% меди, 9% цинка и не более 21% свинца. В обычный сплав составляющие входят без ограничений.

Считая, что себестоимость сплавов складывается только из стоимости его ингредиентов, построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу нахождения плана выпуска сплавов, обеспечивающего максимальную прибыль.

Вариант 14

1) имеется 5 видов сырья и 5 различных предприятий, перерабатывающих это сырье. Задана матрица

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 4 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

где C_{ik} характеризует прибыль, получаемую k-м предприятием при переработке i-го вида сырья.

Определить оптимальное распределение сырья между предприятиями, максимизирующее суммарную прибыль, если каждое предприятие по условиям технологического процесса может работать только на одном виде сырья, и каждый из видов сырья, вследствие ограниченности его запасов, можно использовать только на одном предприятии;

2) сухогруз может принять на борт не более 1000 т груза, общий объем которого не должен превосходить 500 м^3. На причале находится груз 16 наименований (различные механизмы и нестандартное оборудование). Вес, объем и цена груза каждого наименования приведены в таблице 11.

Таблица 11 – Показатели грузов

Показатели	Номер груза							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Вес, т	50	100	70	91	60	75	89	67
Объем, куб.м	45	31	25	44	37	40	29	35
Цена	1.5	2.1	1.3	1.8	1.4	1.9	2.0	1.1
	9	10	11	12	13	14	15	16
Вес, т	73	81	78	88	80	76	72	63
Объем, куб.м	46	33	39	36	41	43	34	38
Цена	1.6	2	1.5	1.6	1.8	1.9	1.2	0.9

На сухогруз нельзя погрузить более одной единицы груза каждого наименования. Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу выбора варианта загрузки судна с максимальной стоимостью всего груза.

Вариант 15

1) на некотором заводе имеется 4 станка (I, II, III и IV), которые могут выполнять 3 вида работ (1, 2 и 3). Каждую работу может единовременно выполнять только один станок, и каждый станок можно загрузить только одной работой.

Матрица затрат времени при выполнении i-м станком k-й работы (i = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2, 3) имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 9 \\ 8 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Определить наиболее рациональное распределение работы между станками, минимизирующее суммарные затраты времени;

2) на поточной линии, оборудованной прессами для холодной штамповки ПР-1, ПР-2, ПР-3, ПР-4, ПР-5, ПР-6, обрабатываются платы П-1, П-2, П-3, П-4, и П-5. Они последовательно проходят все прессы, начиная с ПР-1. Перед обработкой каждой платы необходимо снять с прессов предыдущие штампы (если, конечно, это требуется) и установить новые. Данные о штампах, необходимых для обработки плат, приведены в таблице 12.

Таблица 12 – Данные о штампах

Платы	Прессы					
	ПР-1	ПР-2	ПР-3	ПР-4	ПР-5	ПР-6
П-1	Ш-2	Ш-4	Ш-7	Ш-8	Ш-10	Ш-1
П-2	Ш-3	Ш-4	Ш-6	Ш-6	Ш-9	Ш-11
П-3	Ш-7	Ш-8	Ш-10	Ш-6	Ш-1	Ш-11
П-4	Ш-2	Ш-5	Ш-3	Ш-7	Ш-10	Ш-9
П-5	Ш-4	Ш-8	Ш-6	Ш-5	Ш-9	Ш-3

Нормы времени на снятие и установку (будем считать, что они совпадают) каждого штампа приведены в таблице 13

Таблица 13 – Штампы:

Ш-1	Ш-2	Ш-3	Ш-4	Ш-5	Ш-6	Ш-7	Ш-8	Ш-9	Ш-10	Ш-11
Нормы времени на снятие и установку (штампов в мин.)										
10	15	20	17	30	22	14	19	12	18	16

Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу последовательности запуска плат на линию с минимальным временем переналадок всего оборудования.

Вариант 16

1) предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силой и оборудованием, необходимыми для производства любого из четырех видов производимых товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы данного вида товара,

прибыль, получаемая предприятием, а также запасы ресурсов указаны в следующей таблице 14.

Таблица 14 – Параметры производства

Вид ресурса / вид товара	1	2	3	4	Объем ресурсов
Сырье, кг	3	5	2	4	60
Рабочая сила, ч	22	14	18	30	400
Оборудование, станко-ч	10	14	8	16	128
Прибыль на единицу товара, р.	30	25	56	48	

По этим исходным данным решить следующие задачи.

а) Какой ассортимент товара надо выпускать, чтобы прибыль была максимальной?

б) Определить оптимальный ассортимент при дополнительном условии: 1 -го товара выпустить не более 5 ед., 2-го — не менее 8 ед., а 3-го и 4-го — в отношении 1 : 2;

2) четыре растворных узла потребляют в сутки 170, 175, 220, 190 тонн песка, который производят три фабрики. Суточная производительность их соответственно 380, 340 и 300 тонн.

Фабрики взимают плату за погрузку песка каждые сутки и не с количества отгруженного материала, а с «факта его отгрузки за это время данному потребителю», что делается с целью закрепления его за фабрикой. В таблице 15 приведена стоимость перевозки от каждой фабрики каждому узлу, цена одной тонны песка и суточная стоимость погрузки.

Таблица 15 – Стоимость перевозки

Показатели	Ф-1	Ф-2	Ф-3
Стоимость перевозки 1 тонны песка от фабрики в р.:			
к первому узлу,	0.9	1.5	0.6
ко второму узлу,	1	0.8	0.9
к третьему узлу,	0.7	0.4	1.2
к четвертому узлу.	0.5	1	1.3
Цена одной тонны песка в р.	3	2.9	2.2
Суточная стоимость погрузки в р.	19	25	15

По приведенным данным построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу выбора оптимального варианта закрепления растворных узлов за фабриками.

Вариант 17

1) мебельная фабрика выпускает столы, стулья, бюро и книжные шкафы. При изготовлении этих товаров используются два различных типа досок, причем фабрика имеет в наличии 1500 м досок I типа и 1000 м досок II типа. Кроме того, заданы трудовые ресурсы в количестве 800 чел.-ч.

В таблице 16 приведены нормативы затрат каждого из видов ресурсов на изготовление 1 ед. изделия и прибыль на 1 ед. изделия.

Таблица 16 – Нормативы затрат

Ресурсы \ изделия	Затраты на 1 ед. изделия			
	Столы	Стулья	Бюро	Книжные шкафы
Доски I типа, м	5	1	9	12
Доски II типа, м	2	3	4	1
Трудовые ресурсы, чел.-ч.	3	2	5	10
Прибыль, р./шт.	12	5	15	10

По этим исходным данным решить следующие задачи:

а) определить оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль;

б) решить ту же задачу при дополнительных условиях, налагаемых на ассортимент: столов — не менее 40, стульев — не менее 130, бюро — не менее 30 и книжных шкафов — не более 10;

2) строительной организации необходимо выполнить четыре вида земляных работ, объем которых соответственно 7000, 6500, 7600, 8100 куб. м. Для их осуществления предполагается использовать три механизма. Производительность механизмов и себестоимость одного часа работы приведены в таблице 17. Плановый фонд времени первого второго и третьего механизмов составляет соответственно 350, 600, 290 машино-часов.

Таблица 17 – Показатели механизмов

Показатели	Механизмы и виды работ											
	Ф-1				Ф-2				Ф-3			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Производительность механизмов по виду работ, куб м /час	20	15	16	30	14	18	35	32	15	29	40	15
Себестоимость одного часа работы механизма по виду работ, р.	2	5	3	6	2	4	5	7	8	3	6	3

Построить модель на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу выбора нахождения плана организации работ с минимальными затратами на его осуществление.

Вариант 18

1) ткань трех артикулов, производится на ткацких станках двух типов с различной производительностью. Для изготовления ткани используется пряжа и красители. В таблице 18 указаны мощности станков (в тыс. станко-ч), ресурсы пряжи и красителей (в тыс. кг), производительность станков по каждому виду пряжи (в м/ч), нормы расхода пряжи и краски (в кг на 1000 м) и цена (в р.) 1 м ткани.

Таблица 18 – Параметры станков

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Производительность нормы расхода		
		1	2	3
Станки I типа	30	20	10	25
Станки II типа	45	8	20	10
Пряжа	30	120	180	210
Красители	1	10	5	8
Цена		15	15	20

По этим исходным данным решить следующие задачи:

а) определить оптимальный ассортимент, максимизирующий товарную продукцию фабрики.

б) приняв условие, что количество тканей трех артикулов должно находиться в отношении 2:1:3, определить, какое максимальное количество комплектов ткани может выпустить фабрика;

2) нефтеперерабатывающий завод получает за плановый период четыре полуфабриката - 600 тыс. литров алкилата, 316 тыс. литров крекинг-бензина, 460 тыс. литров бензина прямой перегонки и 200 тыс. литров изопентана. В результате смешивания этих ингредиентов в пропорциях 2:3:1:5, 2:4:3:4, 5:1:6:2 и 7:1:3:2 получают бензин четырех сортов Б1, Б2, БЗ и Б4 цена его реализации соответственно 135, 140, 160 и 125 рублей за тыс. литров.

Предположив, что реализация любого сорта специального бензина не вызовет затруднений, построить модель и сформулировать на её основе экстремальную задачу, анализ которой позволит обосновать напряженность плана реализации и планировать ассортимент выпускаемой продукции.

Вариант 19

1) нефтеперерабатывающий завод получает 4 полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентона.

В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуются три сорта авиационного бензина: бензин А — 2:3:5:2, бензин В — 3:1:2:1 и бензин С— 2:2:1:3.

Стоимость 1 тыс. л указанных сортов бензина характеризуется числами: 120 р., 100 р. и 150 р.

Определить план смешения компонентов, при котором будет достигнута максимальная стоимость всей продукции;

2) опишем следующую условную ситуацию. Совхоз имеет стадо в сто голов крупного рогатого скота, которое может содержаться (с учетом естественного прироста) в течение шести лет. В конце каждого года часть скота или все стадо можно продавать по цене 110 рублей за голову, численность же оставшейся части стада удваивается к концу следующего года.

Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу выбора плана ежегодно продаваемого скота за планируемый период, обеспечивающий максимальный доход.

Вариант 20

В состав рациона кормления входят три продукта: сено, силос и концентраты, содержащие питательные вещества: белок, кальций и витамины. Содержание питательных веществ (в г на 1 кг) соответствующего продукта питания и минимально необходимые нормы их потребления заданы таблицей 19.

Таблица 19 – Содержание питательных веществ

Продукты \ питательные вещества	Белок	Кальций	Витамины
Сено	50	6	2
Силос	20	4	1
Концентраты	180	3	1
Нормы потребления	2000	120	40

Используя эти исходные данные, решить следующие задачи.

а) определить оптимальный рацион кормления из условия минимальной стоимости, если цена 1 кг продукта питания соответственно составляет: сена – 3 руб., силоса – 2 руб. и – 5 руб.;

б) производственный комплекс состоит из сталелитейного и автомобилестроительных заводов. Он функционирует в течение пяти лет. Начальный запас стали составляет 1000 тонн. Исходные производственные мощности заводов соответственно – 1200 тонн стали и 200 автомобилей в год.

Сталь расходуется на производство автомобилей – 4 тонны на каждый, а также на расширение производственных мощностей комплекса. При этом каждая тонна стали, направленная на ее производство, обеспечивает выпуск 4 тонн. Тонна стали, идущая на расширение производственной мощности сталелитейного завода, увеличивает последнюю на 0,15 тонны. Для увеличения производственной мощности автомобилестроительного завода на 1 автомобиль необходимо затратить 10 тони стали.

Реализация решения о распределении стали на следующий год осуществляется в конце очередного года планируемого периода: автомобилестроительный завод не может получать более половины имеющегося запаса стали.

Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу максимизации количества автомобилей, выпускаемых за плановый период.

3 Идентификация параметров модели. Адаптивные алгоритмы.

3.1 Основные понятия

Под идентификацией модели понимают процесс определения её параметров

$$C = \left(c_1, ..., c_n\right) \tag{3.1}$$

в режиме нормальной эксплуатации объекта. Структура модели при этом известна (Она определена на стадии структурного синтеза):

$$Y = F\left(X, U, C\right), \tag{3.2}$$

т. е. оператор F предполагается заданным. Это означает, что задан алгоритм (правило, инструкция), с помощью которого можно определить состояние Y модели, если заданы состояния X и U её входов, а также параметры. Именно эти параметры определяются на этапе идентификации.

Очевидно, что для идентификации необходимо иметь информацию об изменении входов и выходов объекта. Но объект пока не управлялся (мы только создаем систему управления), поэтому влияние входа U на выход Y не может быть исследовано на этапе идентификации. Это несколько упрощает задачу, так как вместо модели следует брать модель вида:

$$Y = F'\left(X, C\right), \tag{3.3}$$

в которой не фигурирует управляемый вход U (его влияние на выход будет наследовано на этапе планирования эксперимента).

В процессе идентификации используется исходные данные, который удобно подразделить на два класса:

- **априорные**, которые содержатся в структуре St модели. Это означает, что должно быть задан (или определен на этапе структурного синтеза) вид оператора F'. Например, вид управления, граф взаимосвязи элементов модели и т. д.;
- **апостериорные**, которые представляют собой наблюдения состояния входа X и выхода Y объекта в процессе его нормальной эксплуатации, т. е. информацию:

$$I = \langle X_i, Y_i \rangle, \quad i = 1, ..., N, \tag{3.4}$$

где i - номер моментов времени t_i, когда фиксировались значения X и Y, т. е.

$$X_i = X(t_i),$$
$$Y_i = Y(t_i),$$

где $X(t)$ и $Y(t)$ — функции, описывающие поведения входа и выхода объекта в процессе его нормального функционирования в среде. Моменты времени t_i обычно равномерно покрывают промежуток времени наблюдения $[0, T]$, т. е. $t_i = \tau(i-1)$, где τ — интервал между наблюдениями, т. е. $\tau = T/(N-1)$.

Таким образом, исходные данные, необходимые для идентификации, образуются двойкой

$$\langle St, I \rangle, \tag{3.5}$$

т. е. структурой модели и наблюдениями.

Процесс идентификации сводится к определению параметров по исходным данным, т.е.

$$C = \phi(St, I), \tag{3.6}$$

где ϕ - алгоритм идентификации определяющий каким образом можно найти параметры C, зная St и I.

В этой разделе будут рассмотрены различные алгоритмы ϕ. Эти алгоритмы подразделяются на два больших класса:

1) адаптивные;
2) неадаптивные.

Под адаптивным алгоритмом идентификации понимают алгоритм, позволяющий уточнять значения идентифицируемых параметров модели по мере получения дополнительной информации о работе объекта. Пусть на i-м шаге адаптивной идентификации были какие-то определенные значения идентифицируемых параметров. Отметим их индексом i:

$$C_i = \left(c_1^i, ..., c_k^i\right).$$

Пусть, далее, получена дополнительная информация, т. е. пара наблюдений входа и выхода объекта в $(i+1)$-й момент времени:

$$I_{i+1} = (X_{i+1}, Y_{i+1}). \tag{3.7}$$

Очевидно, что эта информация должна каким-то образом изменить (откорректировать) имеющиеся значения C и дать возможность получить C_{i+1}

$$\left(C_i, I_{i+1}\right) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_a} C_{i+1}$$

более точное значение параметров. Связь между C и C_{i+1} определяется адаптивным алгоритмом идентификации или в обычной рекуррентной форме

$$C_{i+1} = \varphi_a\left(C_i, I_{i+1}\right). \quad (3.8)$$

Здесь φ_a – алгоритм адаптивной идентификации, который позволяет определить последующее значение параметров, исходя из новой информации I_{i+1} и старых представлений о значениях параметров C_i. Адаптация, таким образом, представляет собой способ получения «нового значения» путем коррекции «старого значения» на основе новой информации.

Алгоритм удобнее записать в виде

$$C_{i+1} = C_i + \varphi_a\left(F\left(X_{i+1}, C_i\right), I_{i+1}\right), \quad (3.9)$$

где φ_a — оператор адаптивной идентификации.

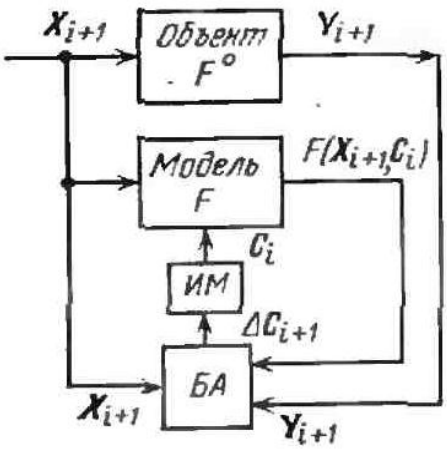

Рисунок 3 – Самонастраивающаяся модель

Если адаптивный метод идентификации реализуется в реальном масштабе времени, то его называют методом самонастраивающейся модели. Схема этого метода показана на рисунке 3.

Здесь на вход модели подается вход X объекта. Информация о состоянии объекта Y, модели $F\left(X, C\right)$ и среды X сообщается блоку адаптации (БА), который вырабатывает сигнал коррекции $\Delta C = \varphi_a\left(F\left(X, C\right), I\right)$, изменяющий параметры модели в соответствии с (3.9) с помощью исполнительного механизма (ИМ).

Очевидно, что для реализации адаптивных алгоритмов идентификации вовсе не обязательно использовать реальный масштаб времени. В этом случае роль объекта играет информация I, которая поступает в алгоритм адаптивной идентификации из памяти порциями $\left\langle X_i, Y_i \right\rangle$ $\left(i=1, \dots, N\right)$.

В противоположность адаптивному алгоритму идентификации неадаптивный позволяет получить искомые параметры C сразу, используя всю информацию I, а не путем их постепенного уточнения (ниже будут рассмотрены различные варианты такого алгоритма). Если информация I (3.4) задана, то задачу идентификации можно решать, как адаптивным, так и не адаптивным способом. На первый взгляд может показаться, что неадаптивный алгоритм всегда лучше адаптивного, но не следует торопиться. Каждый из них имеет свое преимущества и недостатки.

Неадаптивный алгоритм позволяет сразу определить идентифицируемые параметры C, но он сложнее и для его реализации требуются значительные вычислительные мощности — как правило, для этого применяют универсальные ЭВМ.

Адаптивный алгоритм проще: его легко программировать и отлаживать. Кроме того, он может быть эффективно реализован в специализированных вычислительных устройствах. Применяют его обычно для идентификации объектов с изменяющимися свойствами с дрейфующими параметрами в режиме самонастраивающейся модели. Однако его можно применять и для идентификации объекта по всей информации I. В этом случае для эффективной идентификации параметров C, как правило, требуется многократная «прогонка» информации I через адаптивный алгоритм.

3.2 Идентификация статических объектов

Рассмотрим модель статического объекта (3.3), где вид функции F' уже определен на стадии структурного синтеза. Эта функция может быть задана как аналитически, так и алгоритмически, т. е. в виде инструкций, показывающих, как ее вычислять при всех встречающихся значениях аргументов X и C.

Выход объекта будем считать одномерным ($m=1$), т. е. $Y=y$. Это дает возможность записать модель (3.3) в виде:

$$y=f\left(X, C\right), \tag{3.10}$$

где f - заданная на этапе структурного синтеза скалярная функция.

Правомерность такого подхода следует из очевидной декомпозиции задачи (3.3), где

$$Y=\left(y_1, \dots, y_m\right), \quad F'=\left(f_1, \dots, f_m\right), \tag{3.11}$$

на m задач вида (3.10), т. е. декомпозировать модель так, как это показано на рисунке 4.

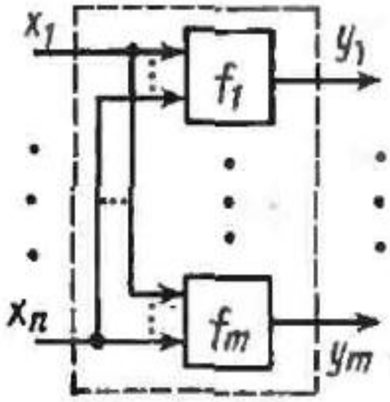

Рисунок 4 – Декомпозиция модели

Это означает, что умение идентифицировать параметры модели (3.1) с одним выходом позволяет идентифицировать и много-выходовые модели путем m-кратного повторения идентификации модели (3.10).

Исходные данные (3.4) в этом случае принимают вид:

$$I = \langle X_i, y_i \rangle, i = 1, \dots, N, \tag{3.12}$$

где y_i -- реакция объекта в i-й момент времени на вход:

$$X_i = \left(x_1^i, \dots, x_n^i\right), \quad y_i = y(t_i), \; x_j^i = x_j(t_i).$$

Рассмотрим адаптивную идентификацию статистического объекта. Пусть C_i – значения идентифицируемых параметров на i-м шаге адаптивной идентификации.

Пусть получена новая информация $I_{i+1} = \langle X_{i+1}, y_{i+1} \rangle$. Эта информация должна изменить C_i на C_{i+1}, т. е. быть источником коррекции параметров: $C_{i+1} = C_i + \Delta C_{i+1}$.

Задача, таким образом, состоит в определении ΔC_{i+1} через I_{i+1}. Для этого образуем локальную невязку выходов модели и объекта в момент $i+1$:

$$q_{i+1}(C_i) = f\left(X_{i+1}, C_i\right) - Y_{i+1}. \tag{3.13}$$

Очевидно, что величина ΔC_{i+1} должна быть такой, чтобы уменьшить квадрат этой невязки. Этого можно легко добиться, если шаг ΔC_{i+1} сделать «антиградиентным», т. е.

$$\Delta C_{i+1} = -a_{i+1} \nabla q_{i+1}^2 \left(C_i\right). \tag{3.14}$$

Здесь $-a_{i+1}$ — некоторый положительный коэффициент (о нем будет сказано позже), а ∇ – «набла», знак оператора градиента функции (см. приложение), которая стоит за этим знаком. Определим градиент функции $q^2\left(C\right)$:

$$\nabla q^2\left(C\right) = \left(\frac{\partial q^2\left(C\right)}{\partial c_1}, \ldots, \frac{\partial q^2\left(C\right)}{\partial c_k}\right) = 2q^2\left(C\right)\left(\frac{\partial q\left(C\right)}{\partial c_1}, \ldots, \frac{\partial q\left(C\right)}{\partial c_k}\right) = 2q\left(C\right) \nabla q\left(C\right) .$$

Подставляя сюда 3.13, получим:

$$\nabla q^2\left(C\right) = 2q\left(C\right) \nabla_c f\left(X, C\right).$$

Индекс c означает градиент по параметру C. Таким образом, получаем для коррекции параметров на $i+1$ шаге:

$$\nabla C_{i+1} = -2a_{i+1} q_{i+1}\left(C_i\right) \nabla_c\ f\left(X_{i+1}, C_i\right), \tag{3.15}$$

где $\nabla_c f\left(X_{i+1}, C\right) = \left(\frac{\partial f\,(X_{i+1}, C)}{\partial C_1}, \ldots, \frac{\partial f\,(X_{i+1}, C)}{\partial C_k}\right).$

Это выражение легко вычисляется, если известно аналитическое выражение для функции f. Для сложных систем, однако, функция f определена лишь алгоритмически и вычисление частных производных уже не так просто. Для этого воспользуемся конечно-разностными оценками производных:

$$\frac{\partial \hat{f}(X,C)}{\partial C_1} = \frac{1}{2g}\left[f\left(X, C + ge_l\right) - f\left(X, C - ge_l\right)\right], \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial \hat{f}(X,C)}{\partial C_1} = \frac{1}{g}\left[f\left(X, C + ge_l\right) - f\left(X, C\right)\right], \tag{3.17}$$

где $g > 0$ есть база оценки, e_l - единичный вектор, направленный вдоль l оси.

3.3 Выбор параметра *a*

При малом значении параметра а коррекция будет невелика, в то же время, его нельзя делать слишком большим, так как при этом невязка увеличится. Поведение невязки q^2 в зависимости от а показано на рисунке 5.

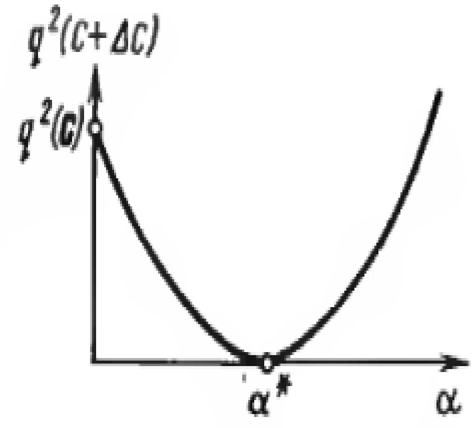

Рисунок 5 – Зависимость q^2 от a

При $a = a^*$ невязка минимальна и равна нулю.

Этим обстоятельством можно воспользоваться для определения оптимального значения а. Для этого нужно решить задачу минимизации:

$$q^2\left(C - 2aq(C)\nabla_c f\left(X, C\right)\right) \to \min_{a>0}, \tag{3.18}$$

т. е. минимизировать квадрат невязки по параметру a.

Учитывая, что минимальное значение невязки при отсутствии помех равно нулю, решим задачу, приравняв саму невязку к нулю:

$$q^2\left(C - 2aq(C)\nabla_c f\left(X, C\right)\right) = 0. \tag{3.19}$$

Решение этого уравнения дает оптимальное значение a. Для линейного случая получаем:

$$a^* = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{j=1}^{n} x \sum \left(x_j^{i+1}\right)^2\right]^{-1},$$

где x_j – j-тая координата вектора входа X.

3.4 Идентификация динамических моделей

Динамический объект отличается от статического тем, что его состояние Y_i определяется не только состоянием его входов X_i, но и собственным состоянием в предыдущий момент времени Y_{i+1} (так называемая «память»). Если состояние Y динамического объекта определяется его выходом в данный и в p предыдущих моментов $t_i, \ldots, t_{i-p}$, то такой объект называется динамическим объектом p-го порядка. Очевидно, что состояние этого объекта определяется значениями его выхода Y':

$$Y' = \left(y_i, y_{i-1}, \ldots, y_{i-p}\right). \tag{3.20}$$

Вектор возмущений объекта связывает поведение объекта с предыдущими l состояниями среды:

$$X' = \left(x_i,\, x_{i-1},\, ...,\, x_{i-l}\right). \tag{3.21}$$

Модель динамического объекта р-го порядка представляется в виде:

$$y_i = f\left(Y'_{i-1},\, X'_i,\, C\right). \tag{3.22}$$

Адаптивный метод идентификации состоит в минимизации на каждом шаге квадрата локальной невязки выходов модели и объекта:

$$q^2\left(C_{i-1}\right) = \left[\, f\left(Y'_{i-1},\, X'_i,\, C\right) - y_i\,\right]^2. \tag{3.23}$$

Выберем коррекцию ΔC_i параметров C в виде:

$$\Delta C_i = -a_i \nabla C q^2\left(C_{i-1}\right) \tag{3.24}$$

Параметр a выбирается оптимальным из соображений минимизации локальной невязки:

$$q^2\left(C_{i-1} - a_i \nabla C q^2\left(C_{i-1}\right)\right) \rightarrow \min_{a_l > 0} \Rightarrow a_i^*. \tag{3.25}$$

В линейном случае и при отсутствии помех получаем:

$$\nabla C q^2\left(C_{i-1}\right) = 2q\left(C_{i-1}\right)\left(y_{i-1},...,y_{i-p-1},x_i,...,x_{i-l}\right) \tag{3.26}$$

$$a_i^* = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{l} x_{i-j}^2 + \sum_{s=1}^{p+1} y_{i-s}^2\right)^{-1}. \tag{3.27}$$

Процесс идентификации параметров $c_1, ..., c_k$ всегда связан с процедурой минимизации невязки модели и объекта, которая вычисляются как разность реакции (выходов) модели и объекта на одинаковый вход. Полученные в результате решения данной задачи параметры $C^* = c_1^*, ..., c_k^*$ наиболее соответствуют информации 3.4. Однако это совсем не означает, что модель адекватна объекту. Это лишь наилучшее приближение при выбранной структуре модели. Вопрос об адекватности решается на стадии выбора структуры модели и зависит от количества априорной информации.

3.5 Пример решения задачи

Рассмотрим программу, реализующую адаптивный алгоритм. Результат ее работы представлен на рисунках 6 и 7.

В качестве искомой функции задаем $F\left(X\right) = \chi^2$, на интервале [-5, 5] количество экспериментов равное 2000, разброс равный 0,5 и коэффициенты при 1, x, x^2, $\sin\left(x\right)$, x^3 соответственно y_1=0,1; y_2=2; y_3=1; y_4=1; y_5=3.

После запуска адаптивного алгоритма видно, как постепенно подстраивается функция.

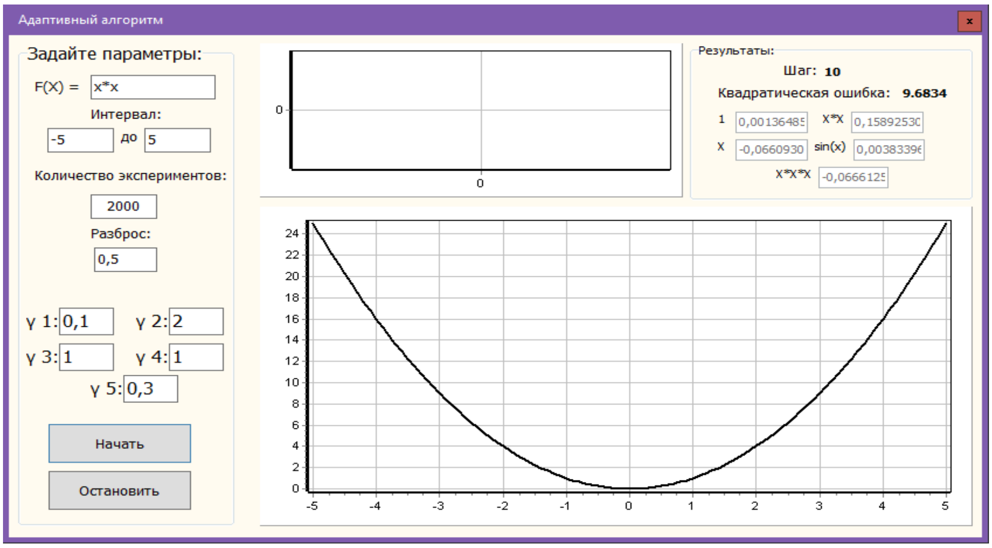

Рисунок 6 – Начало работы программы с адаптивным алгоритмом

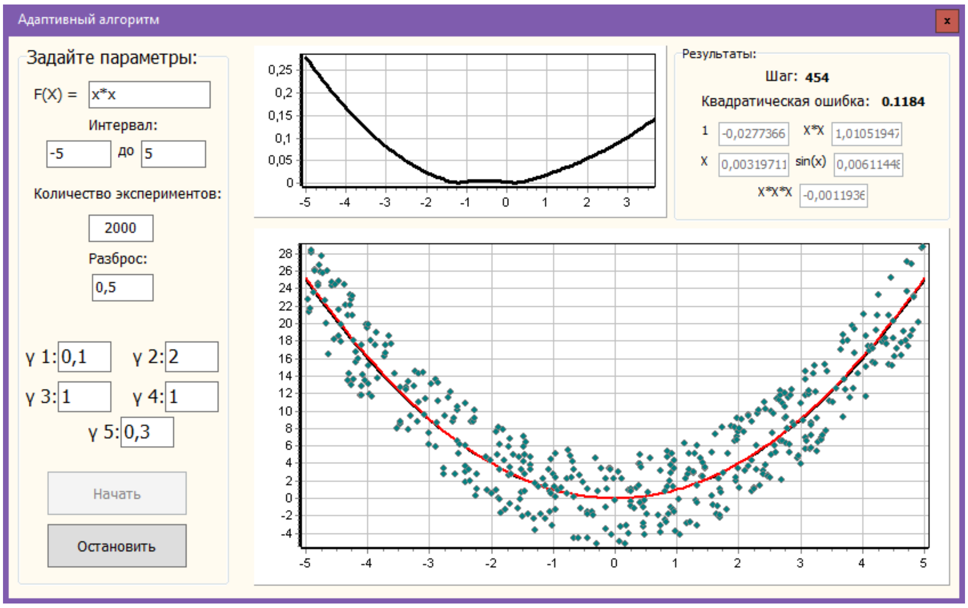

Рисунок 7 – Конец работы программы с адаптивным алгоритмом

В конце работы программы видно (рисунок 7), что к 454 шагу наш алгоритм полностью принял вид заданной функции $F(X)$.

4 Варианты заданий для выполнения практической работы

Реализовать программу с адаптивным алгоритмом для функций, представленных в таблице 30, согласно варианту.

Таблица 30 – Варианты заданий

Вариант	Функция $F(X)$	Распределение
1	x^2	Равномерное
2	$x^2+\sin(x)$	Нормальное
3	$x^2*\cos(x)$	Коши

4	$\sin(x)*\cos(x)$	Равномерное
5	$x^2+\sin(x)$	Экспоненциальное
6	$x^2+\cos(x)$	Нормальное
7	$x^2-\sin(x)$	Лапласа
8	$x^2-\cos(x)$	Равномерное
9	x^{3*x}	Лапласа
10	x^3	Экспоненциальное
11	$\sin\left(2*x^2\right)$	Равномерное
12	$\cos\left(3*x^2\right)$	Нормальное
13	$x^3*\sin(x)$	Лапласа
14	$x^3*\cos(x)$	Экспоненциальное

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Основы кибернетики / под ред. К. А. Пупкова. – Москва : Высшая школа, 1976.

2 Киричков В. Н. Идентификация объектов системы управления технологическими процессами. – Киев : Выща школа,1990.

3 Основы управления технологическими процессами под ред. Н. С. Райбмана. – Москва : Наука,1978.

4 Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователей. – Москва : Наука, 1991.

5 Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. – Москва : Наука, 1968.

6 Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации. – Москва : Наука,1984.

7 Медведев А. В. Непараметрические системы адаптации. - Новосибирск : Наука,1983.

Симахин Валерий Ананьевич

Основы теории управления

Методические указания
к выполнению практических работ
(направление подготовки 09.03.04
«Программная инженерия»)

Редактор Г.В. Меньщикова

Подписано в печать16.10.17	Формат 60х84 1/16	Бумага 65 г/м^2
Печать цифровая	Усл. печ. л. 2,5	Уч.-изд. л. 2,5
Заказ №171	Тираж 25	Не для продажи

БИЦ Курганского государственного университета.
640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.