МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра механики машин и основ конструирования

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Контрольные задания и методические указания
для студентов заочной формы обучения
направлений 13.03.01, 13.03.02, 15.03.01, 15.03.04, 15.03.05,
20.03.01, 23.03.01, 23.03.02, 23.03.03, 27.03.01, 27.03.04, 44.03.01

Часть 1

Курган 2017

Кафедра: «Механика машин и основы конструирования».

Дисциплина: «Теоретическая механика»
(направления 13.03.01, 13.03.02, 15.03.01, 15.03.04, 15.03.05, 20.03.01, 23.03.01, 23.03.02, 23.03.03, 27.03.01, 27.03.04, 44.03.01).

Составил: канд. техн. наук, доц. С. Г. Тютрин.

Составлены на основе:
Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников энергетических, горных, металлургических, электроприборостроения и автоматизации, технологических специальностей, а также геологических, электротехнических, электронной техники и автоматики, химико-технологических и инженерно-экономических специальностей вузов / под ред. С. М. Тарга. 4-е изд. Москва : Высшая школа, 1988. 64 с.

Утверждены на заседании кафедры «24» ноября 2016 г.

Рекомендованы методическим советом университета

«17» декабря 2015 г.

Введение

Данная часть контрольных заданий предназначена для студентов заочной формы обучения, изучающих курс «Теоретическая механика» в объёме 108 академических часов (3 зачётные единицы трудоёмкости) в течение одного семестра и выполняющих одну контрольную работу по всему курсу.

Контрольная работа состоит из 4 задач:

– задача № 1 – по разделу «Статика»;

– задачи № 2 и № 3 – по разделу «Кинематика»;

– задача № 4 – по разделу «Динамика».

К каждой задаче даётся рисунок с 10 расчётными схемами и таблица с исходными данными. Студент во всех задачах выбирает номер схемы по последней цифре шифра, а номер условия в таблице – по предпоследней. Например, если номер студенческого билета или зачётной книжки студента оканчивается числом 30, то для первой задачи данный студент выбирает из рисунка 1 схему 1.0, а из таблицы 1 – условие № 3.

Контрольная работа может быть написана от руки в ученической тетради или на листах формата А4, или оформлена с помощью компьютера и принтера. На обложке указываются: наименование вуза, название кафедры, «контрольная работа по теоретической механике», фамилия и инициалы студента, его учебный шифр и номер группы, фамилия и инициалы преподавателя.

Оформление каждой задачи начинают с формулировки задачи с указанием исходных данных к ней. Далее в масштабе аккуратно изображают расчётную схему, выбранные координатные оси и искомые векторы. Решение сопровождают пояснениями (они помогут при защите работы и облегчают её проверку). Приводят используемые расчётные формулы, указывают размерность получаемых результатов. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента. Примеры решения задач приведены ниже.

За недочёты при оформлении, решении и защите задачи снижаются баллы.

В случае несоответствия представленного варианта учебному шифру студента работа не проверяется и возвращается для переделки.

Задачи к контрольному заданию

Задача № 1

Жёсткая рама (рисунок 1) закреплена в точке A с помощью шарнирно-неподвижной опоры, а в точке B – с помощью шарнирно-подвижной опоры. На раму действуют равномерно распределённая нагрузка интенсивностью q, сосредоточенная сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M (таблица 1).

Определить реакции опор.

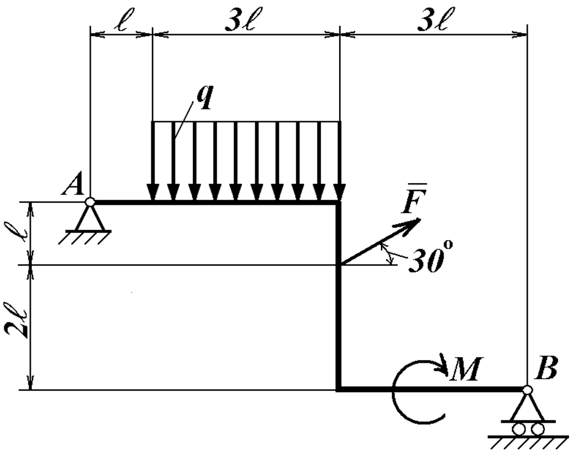


Схема 1.0

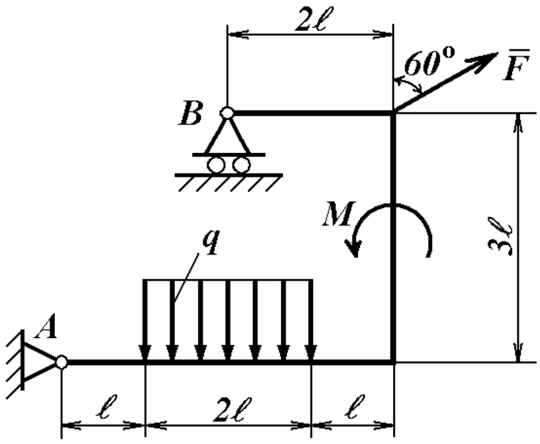


Схема 1.1

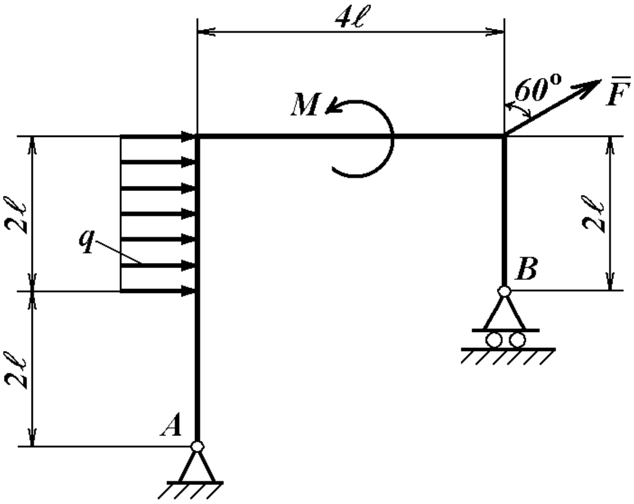


Схема 1.2

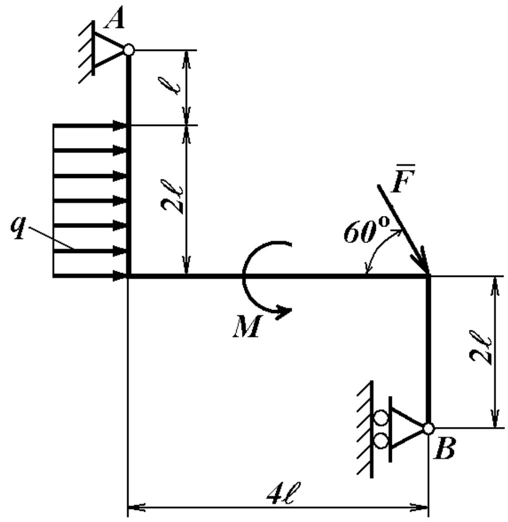


Схема 1.3

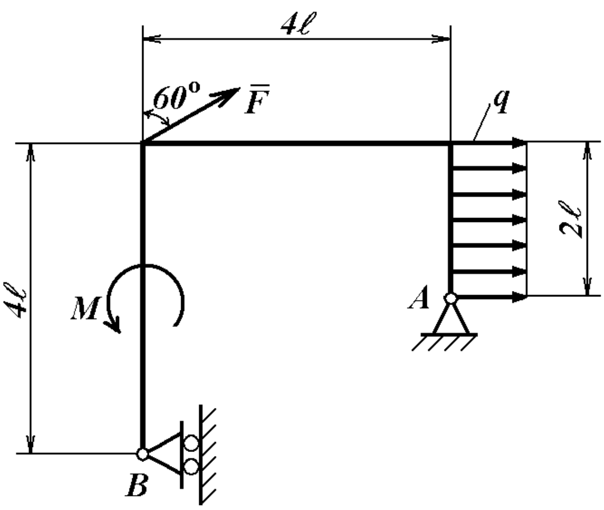


Схема 1.4

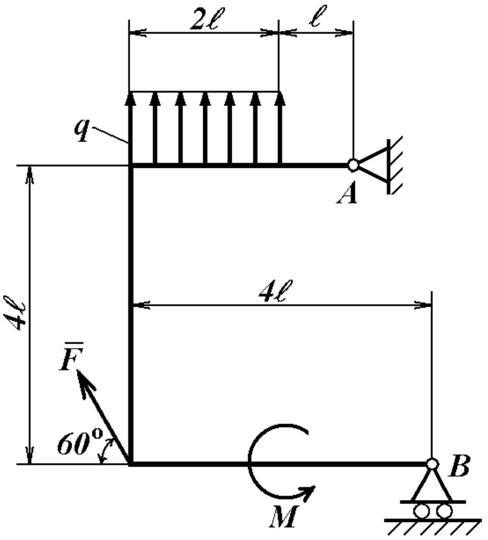


Схема 1.5

Рисунок 1 (начало) – Варианты расчётных схем к задаче № 1

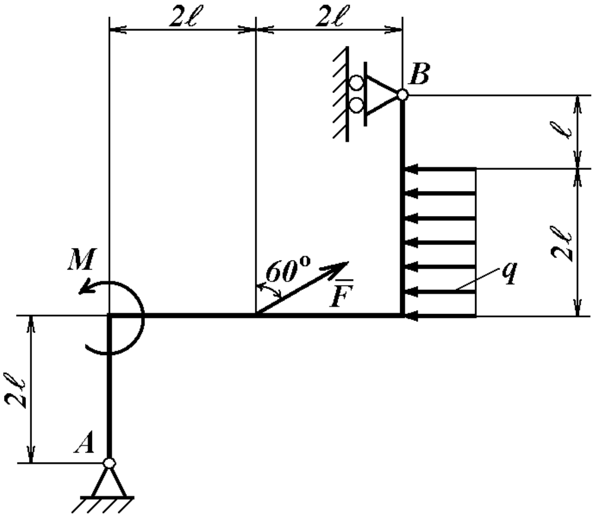


Схема 1.6

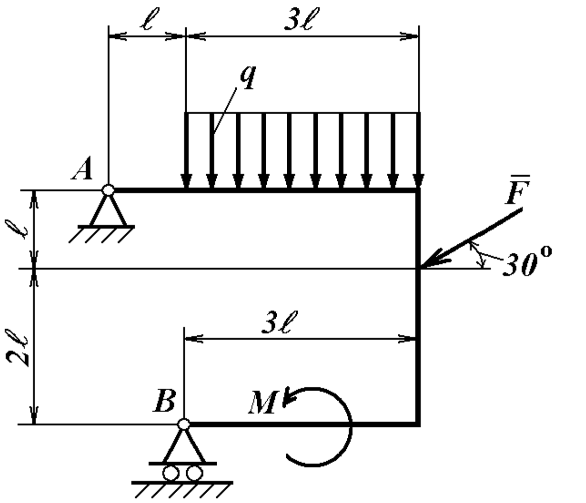


Схема 1.7

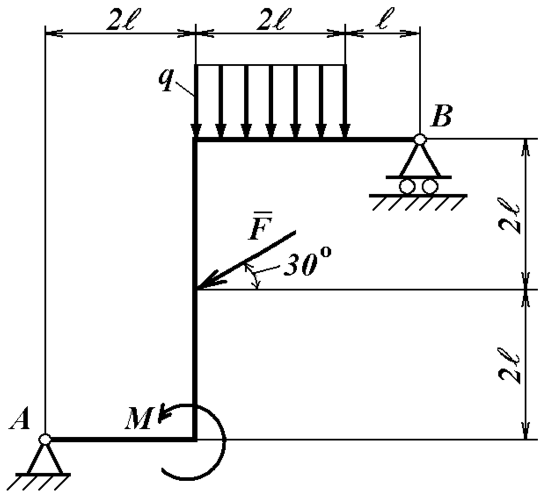


Схема 1.8

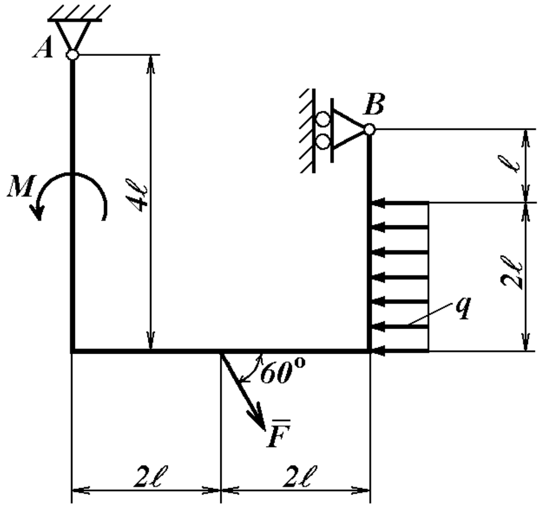


Схема 1.9

Рисунок 1 (окончание) – Варианты расчётных схем к задаче № 1

Таблица 1 – Исходные данные к задаче № 1

Номер условия	q, Н/м	F, Н	M, Н·м	ℓ, м
0	5	40	80	1
1	10	50	90	0,9
2	20	60	5	0,8
3	30	70	10	0,7
4	40	80	20	0,6
5	50	90	30	0,5
6	60	5	40	0,4
7	70	10	50	0,3
8	80	20	60	0,2
9	90	30	70	0,1

Задача № 2

Точка A движется в плоскости xy. Закон движения точки задан уравнениями: x=$f_1(t)$ (схемы на рисунке 2) и y=$f_2(t)$ (таблица 2). При этом координаты x и y выражены в сантиметрах, а время t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки, изобразить траекторию на рисунке; для момента времени t =1 с определить и указать на рисунке скорость и ускорение точки, а также её касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.

Таблица 2 – Уравнения y=$f_2(t)$ к задаче № 2

Номер условия	y, см
0	$4-9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
1	$2-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
2	$6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)-4$
3	$2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+4$
4	$6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-8$
5	$-16\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
6	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)-2$
7	$8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)+6$
8	$12-10\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
9	$10\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

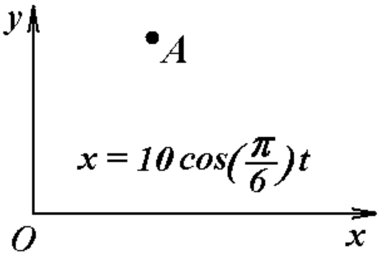


Схема 2.0

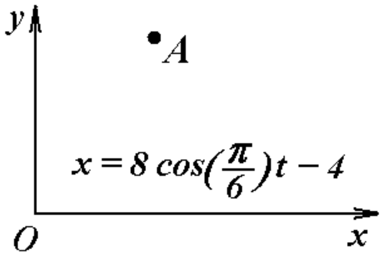


Схема 2.1

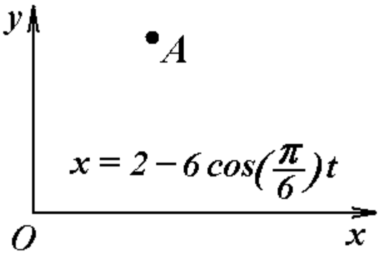


Схема 2.2

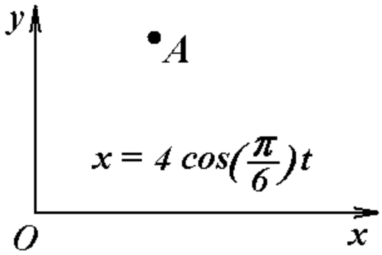


Схема 2.3

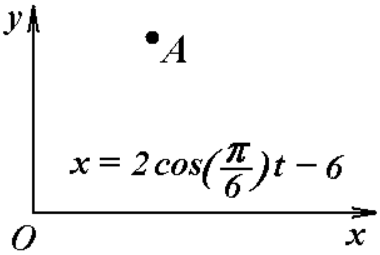


Схема 2.4

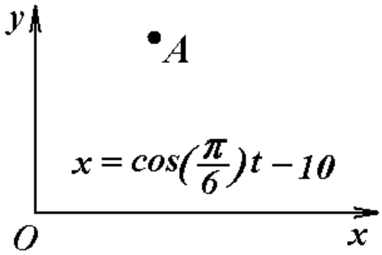


Схема 2.5

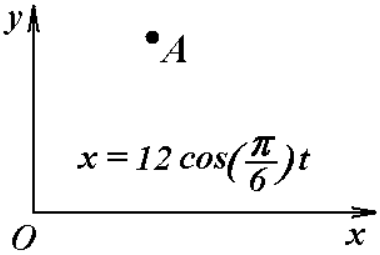


Схема 2.6

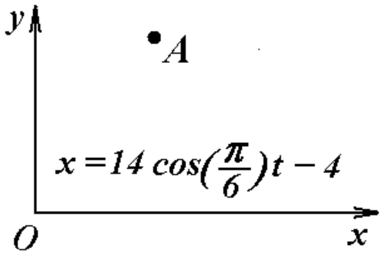


Схема 2.7

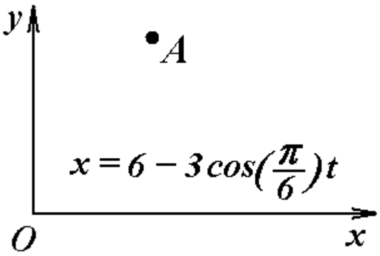


Схема 2.8

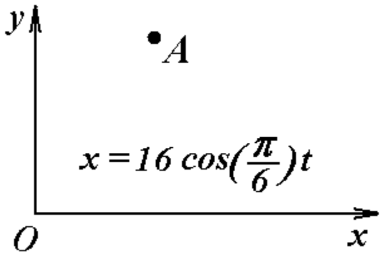


Схема 2.9

Рисунок 2 – Варианты расчётных схем и уравнений $x=f_1(t)$ к задаче № 2

Задача № 3

Плоский шестизвенный механизм состоит из стержней *1–4* и ползуна *B* (рисунок 3). Соединения всех звеньев – шарнирные. Точки *D* и *K* располагаются посередине своих стержней. Заданная (таблица 3) угловая скорость звена направлена против хода часовой стрелки, а заданная скорость ползуна направлена от *B* к *b*. Определить скорости, указанные в таблице 3 в столбце «Найти».

Длина первого стержня ℓ_1=1 м, длины остальных стержней одинаковы и составляют $\ell_2 = \ell_3 = \ell_4 = 2$ м.

Примечание. Положения наклонных стержней заданы углами, отмеренными от горизонтальных или от вертикальных вспомогательных линий. Остальные стержни расположены или строго вертикально, или строго горизонтально.

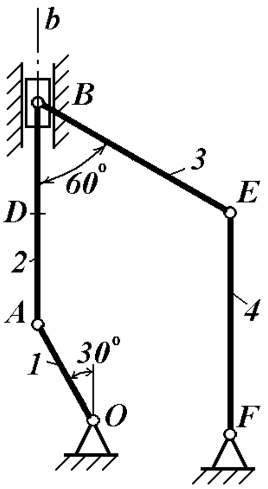


Схема 3.0

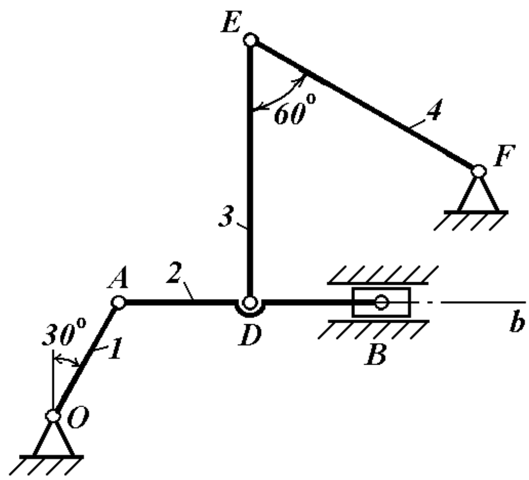


Схема 3.1

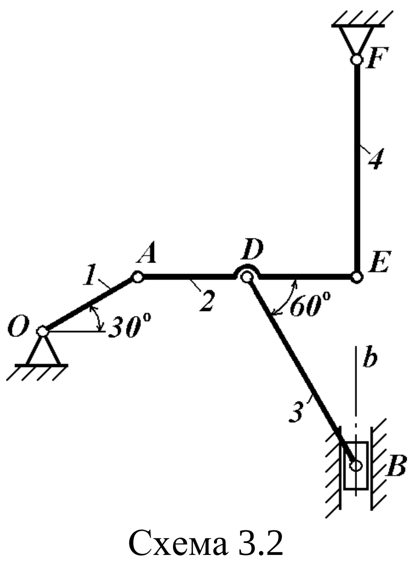


Схема 3.2

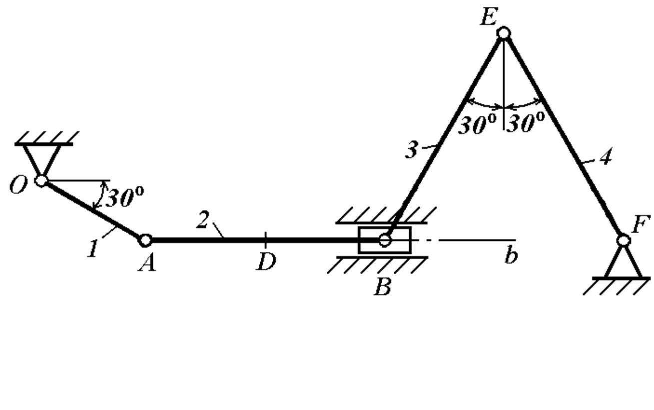


Схема 3.3

Рисунок 3 (начало) – Варианты расчётных схем к задаче № 3

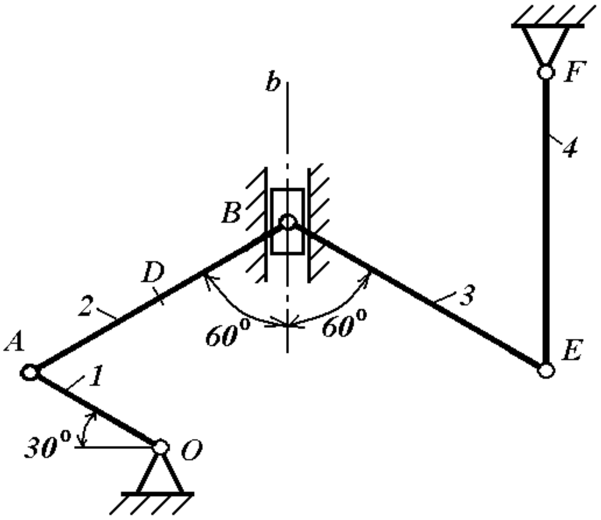


Схема 3.4

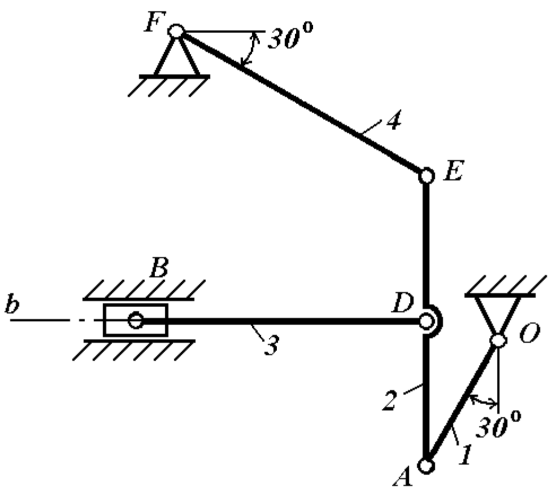


Схема 3.5

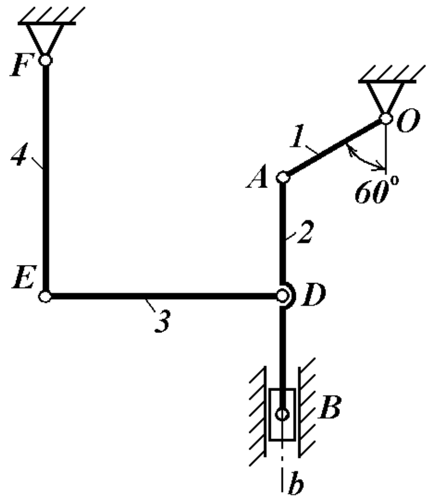


Схема 3.6

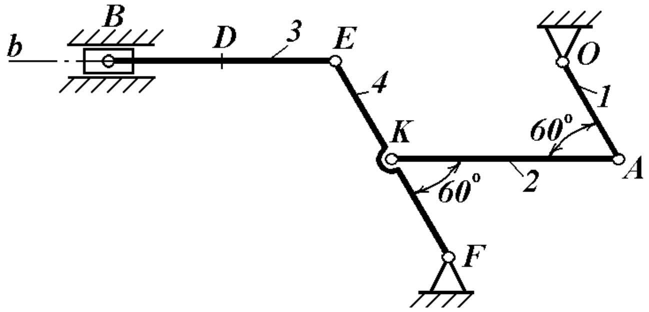


Схема 3.7

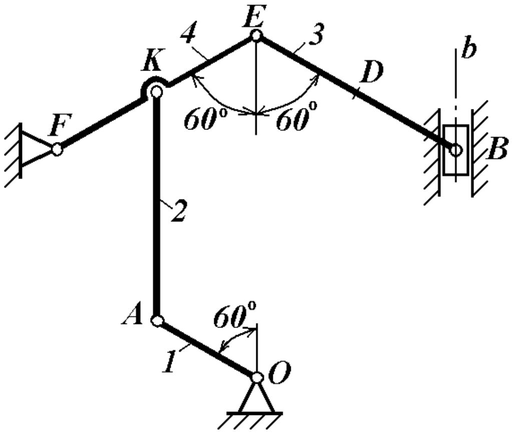


Схема 3.8

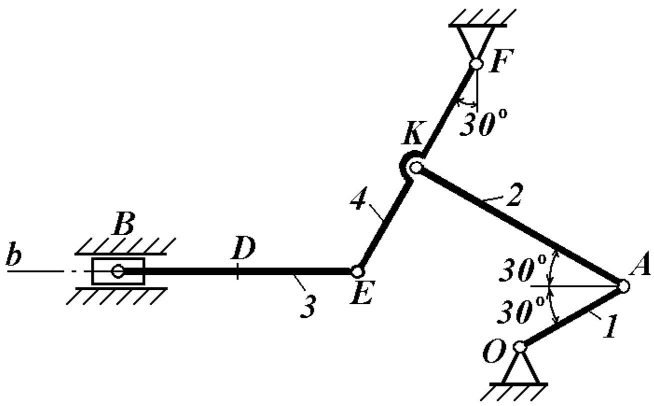


Схема 3.9

Рисунок 3 (окончание) – Варианты расчётных схем к задаче № 3

Таблица 3 – Заданные и определяемые скорости в задаче № 3

Номер условия	Дано	Найти	Примечание
0	ω_1=2 с$^{-1}$	υ_B, υ_E, ω_2	ω_1 – угловая скорость стержня *1*;
1	ω_4=3 с$^{-1}$	υ_A, υ_D, ω_3	ω_2 – угловая скорость стержня *2*;
2	υ_B=4 м/с	υ_A, υ_E, ω_2	ω_3 – угловая скорость стержня *3*;
3	ω_1=5 с$^{-1}$	υ_B, υ_E, ω_3	ω_4 – угловая скорость стержня *4*;
4	ω_4=6 с$^{-1}$	υ_A, υ_D, ω_2	υ_A –скорость точки *A*;
5	υ_B=7 м/с	υ_A, υ_E, ω_3	υ_B –скорость ползуна *B*;
6	ω_1=8 с$^{-1}$	υ_B, υ_E, ω_2	υ_D –скорость точки *D*;
7	ω_4=9 с$^{-1}$	υ_A, υ_D, ω_3	υ_E –скорость точки *E*
8	υ_B=10 м/с	υ_A, υ_E, ω_2	
9	ω_1=1 с$^{-1}$	υ_B, υ_E, ω_3	

Задача № 4

Плоская невесомая рама состоит из вертикального стержня *OK*, двух горизонтальных стержней и закреплена с помощью подпятника *O* (рисунок 4) и цилиндрического подшипника в точке … (таблица 4). На краях невесомых горизонтальных стержней (длиной ℓ каждый) расположены точечный груз массой m_1 и вертикальный однородный стержень длиной ℓ, имеющий массу m_2. Рама вращается с постоянной угловой скоростью ω.

Определить реакции подпятника и подшипника, если m_1=… кг, m_2=… кг, b = … м, ℓ = … м, ω =… с$^{-1}$ (таблица 4).

Таблица 4 – Исходные данные к задаче № 4

Номер усло-вия	Точка установки цилиндрического подшипника	m_1, кг	m_2, кг	b, м	ℓ, м	ω, с$^{-1}$
0	*A*	1	10	0,4	0,8	7
1	*B*	2	9	0,4	0,9	6
2	*D*	3	8	0,4	1	10
3	*E*	4	7	0,5	1,1	9
4	*K*	5	6	0,5	1,2	7
5	*K*	6	5	0,5	0,8	6
6	*E*	7	4	0,6	0,9	10
7	*D*	8	3	0,6	1	9
8	*B*	9	2	0,6	1,1	7
9	*A*	10	1	0,6	1,2	6

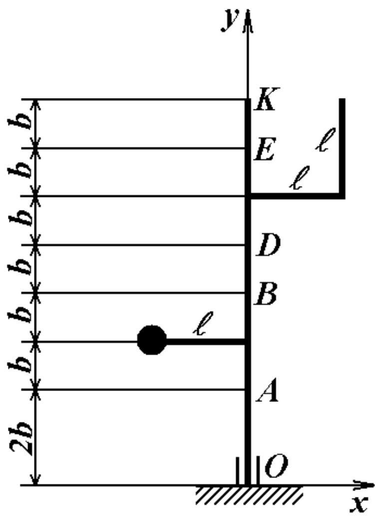


Схема 4.0

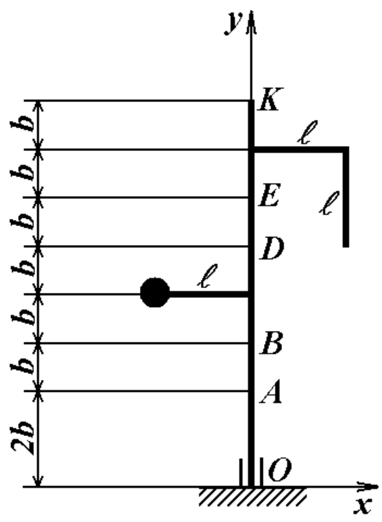


Схема 4.1

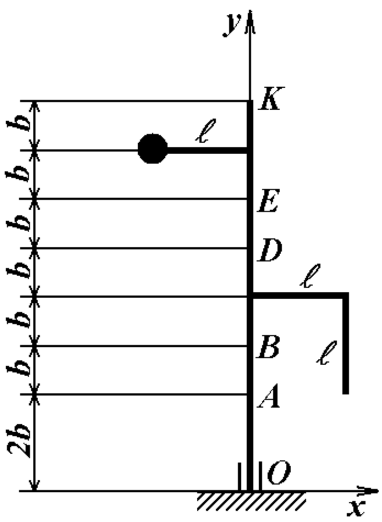


Схема 4.2

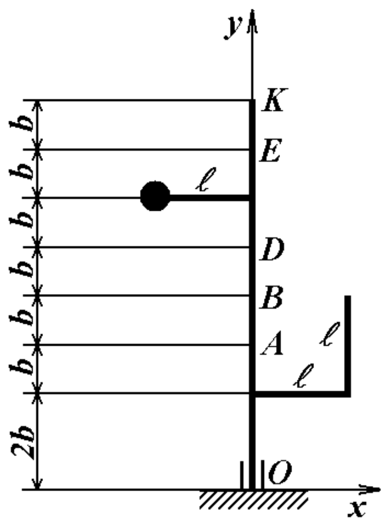


Схема 4.3

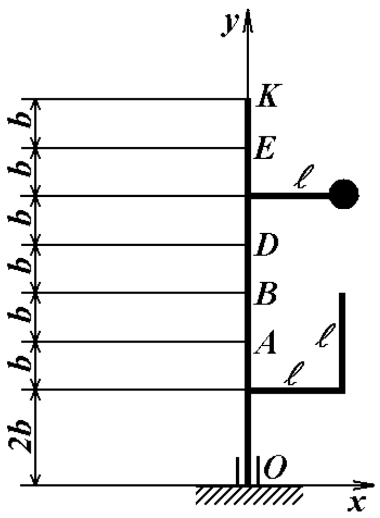


Схема 4.4

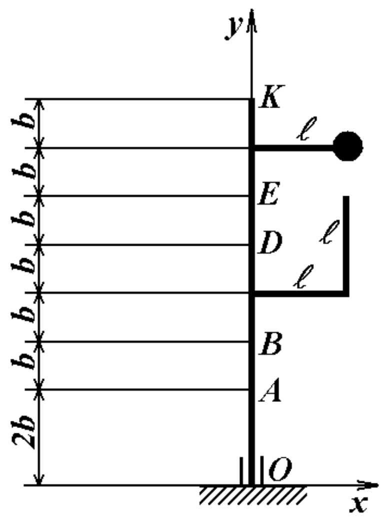


Схема 4.5

Рисунок 4 (начало) – Варианты расчётных схем к задаче № 4

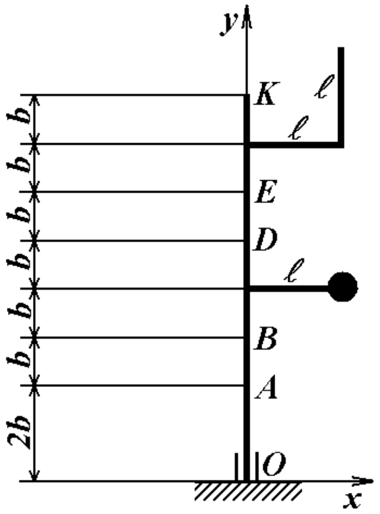


Схема 4.6

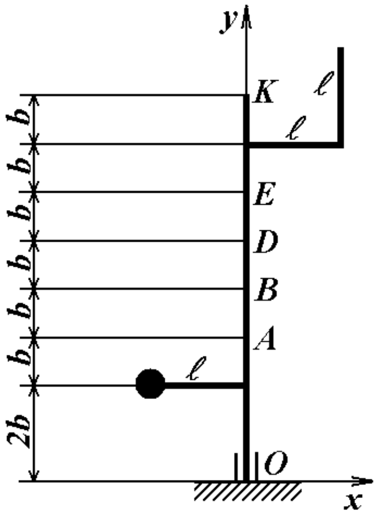


Схема 4.7

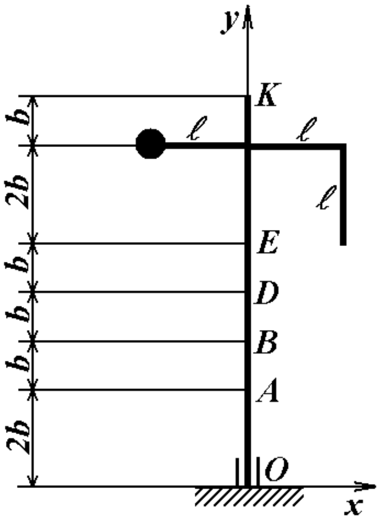


Схема 4.8

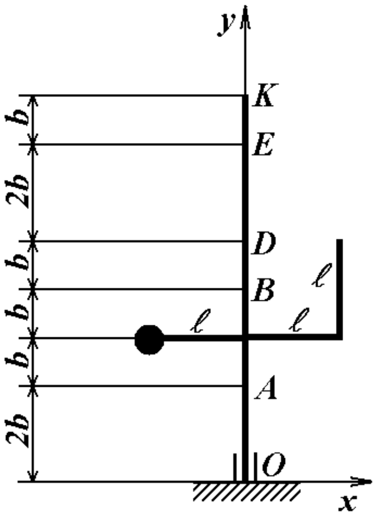


Схема 4.9

Рисунок 4 (окончание) – Варианты расчётных схем к задаче № 4

Примеры решения задач контрольного задания

Пример решения задачи № 1

Жёсткая рама (рисунок 5) закреплена в точке A с помощью шарнирно-неподвижной опоры, а в точке B – с помощью шарнирно-подвижной опоры. На раму действуют равномерно распределённая нагрузка интенсивностью q, сосредоточенная сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M. Определить реакции опор.

Дано: q= 5 кН/м,

F=10 кН,

M=20 кН·м,

ℓ = 0,7 м.

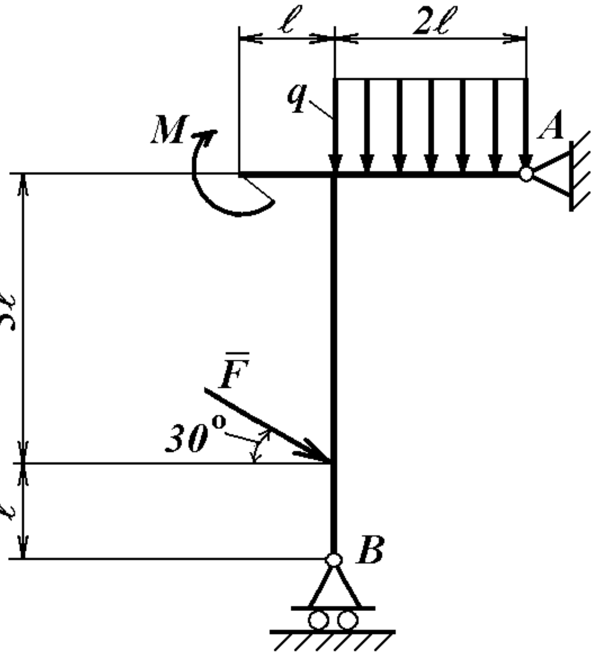


Рисунок 5 – Заданная схема нагружения рамы

Решение.

Выполним вспомогательные действия (рисунок 6):

– выберем направления осей x и y;

– для вектора силы $\vec{F}$ покажем его углы наклона не только от горизонтальной линии, но и от вертикали (90–30=60);

– равномерно распределённую нагрузку интенсивностью q заменим равнодействующей $\vec{Q}$ (равнодействующая равномерно распределённой нагрузки приложена посередине её участка и равна произведению её интенсивности на длину участка; в данном случае Q= q·2 ℓ, или $Q = 5\frac{кН}{м} \cdot 2 \cdot 0{,}7 м = 7 кН$);

– шарнирно-неподвижную опору A заменим двумя составляющими реакции ($\overrightarrow{X_A}$ и $\overrightarrow{Y_A}$), которые параллельны осям x и y и направлены, например, в те же стороны, что и оси;

– шарнирно-подвижную опору B заменим реакцией $\overrightarrow{R_B}$: она перпендикулярна плоскости, по которой катается опора, и направлена, например, к раме.

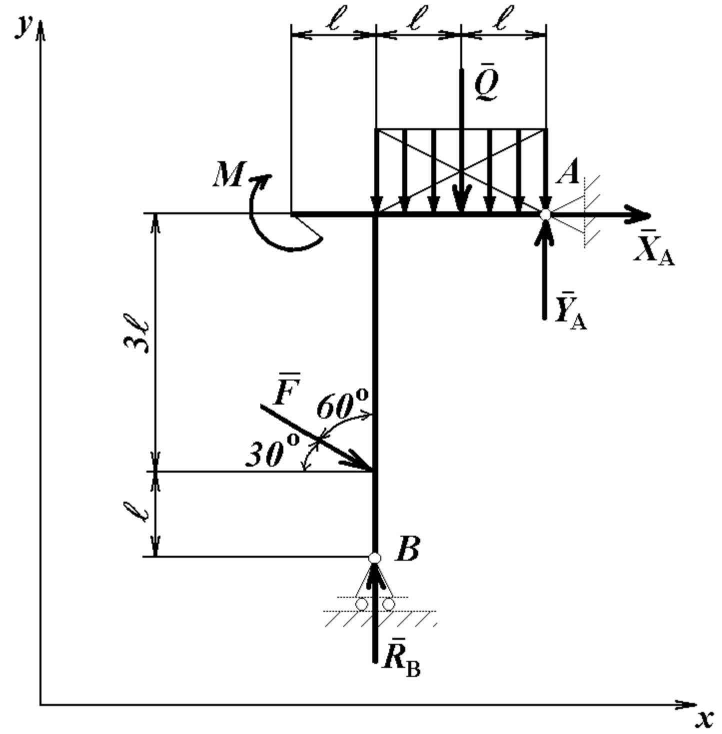


Рисунок 6 – Схема нагружения рамы, эквивалентная заданной

Для полученной плоской системы сил (рисунок 6) составляем уравнения равновесия. Правила их составления приведены в таблицах 5 и 6.

Сумма проекций на ось x всех действующих сил равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0;$$

т. е. $$+X_A + F\cos 30° = 0; \qquad (1)$$

откуда $$X_A = -F\cos 30°.$$

В результате $X_A = -10 \cdot 0{,}866 =$ <u>– 8,66 (кН)</u>.

Сумма проекций на ось y всех действующих сил равна нулю:

$$\sum F_{ky} = 0;$$

т. е. $$+Y_A - Q - F\cos 60° + R_B = 0. \qquad (2)$$

Поскольку в уравнении (2) имеются две неизвестные величины (Y_A и R_B), оставляем его пока нерешённым.

Сумма моментов относительно точки A от всей действующей нагрузки равна нулю:

$$\sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0;$$

применяя правила вычисления моментов, а для нахождения момента силы $\vec{F}$ – теорему Вариньона (таблица 6, рисунок 7), получаем

$$+Q\cdot\ell - M + F\cos 60°\cdot 2\ell + F\cos 30°\cdot 3\ell - R_B\cdot 2\ell = 0; \qquad (3)$$

откуда $$R_B = \frac{Q\ell - M + F\cos 60^\circ \cdot 2\ell + F\cos 30^\circ \cdot 3\ell}{2\ell}.$$

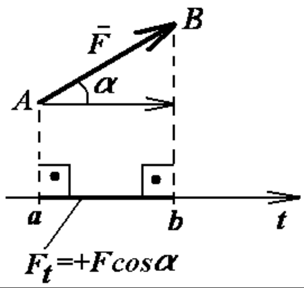
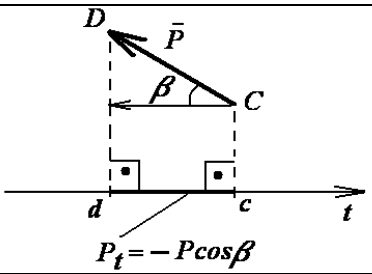
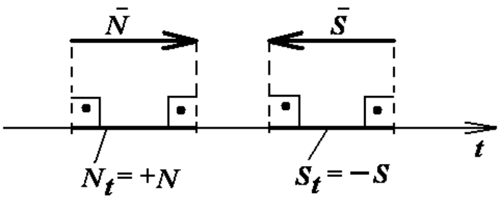
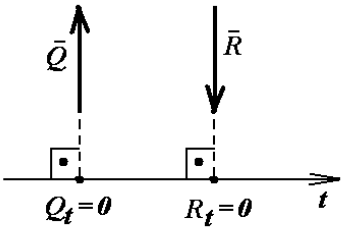
В результате $R_B = \dfrac{7\cdot 0{,}7 - 20 + 10\cdot 0{,}5\cdot 2\cdot 0{,}7 + 10\cdot 0{,}866\cdot 3\cdot 0{,}7}{2\cdot 0{,}7} = \underline{7{,}204(кН)}.$

Теперь в уравнении (2) осталась только одна неизвестная, находим её:

$$Y_A = Q + F\cos 60° - R_B,$$

откуда $Y_A = 7 + 10\cdot 0{,}5 - 7{,}204 =$ <u>4,796 (кН)</u>.

Таблица 5 – Правила нахождения проекции силы на ось

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td rowspan="2">Проекция силы на ось равна произведению величины силы на косинус угла между этой силой и этой осью.
Правило знака: проекция силы на ось считается положительной, если направление составляющей силы (параллельной оси) совпадает с направлением этой оси;
проекция силы на ось будет отрицательной, если направление составляющей силы (параллельной оси) противоположно направлению этой оси</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Сила, параллельная оси, проецируется на эту ось в натуральную величину</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Если сила перпендикулярна оси, то проекция силы на эту ось равна нулю (сила проецируется в точку)</td>
</tr>
</table>

Ответ: $X_A = -8{,}66$ кН; $Y_A = 4{,}796$ кН; $R_B = 7{,}204$ кН. Знак «минус» указывает на то, что действительное направление силы $\overrightarrow{X_A}$ противоположно указанному на рисунках 6 и 7.

Задача решена. При желании можно выполнить проверку правильности нахождения опорных реакций. Для этого можно проверить равенство нулю суммы моментов всей нагрузки относительно точки B:

$$\sum m_B\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0 .$$

Применяя правила вычисления моментов (таблица 6), определяя плечи как длины перпендикуляров, опущенных из точки B на линии действия сил (рисунок 7), получаем:

$$-F\cos 30°\cdot\ell - M - Q\cdot\ell - X_A\cdot 4\ell + Y_A\cdot 2\ell = 0;$$

откуда $$-10\cdot 0{,}866\cdot 0{,}7 - 20 - 7\cdot 0{,}7 + 8{,}66\cdot 4\cdot 0{,}7 + 4{,}796\cdot 2\cdot 0{,}7 = 0 .$$

В результате 0,0004=0 (верно, с учётом погрешности округления).

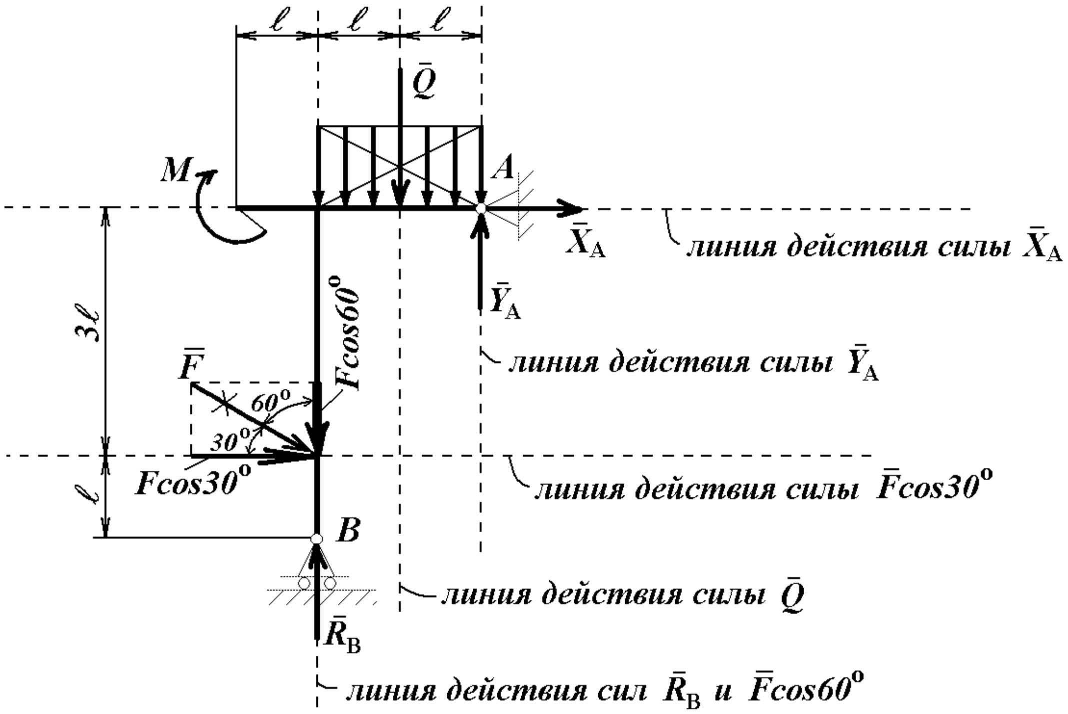
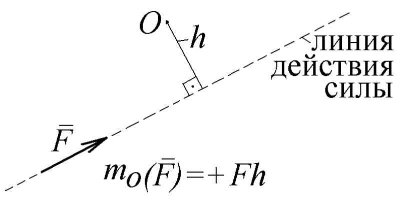
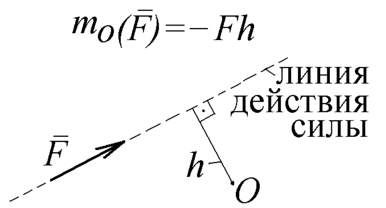
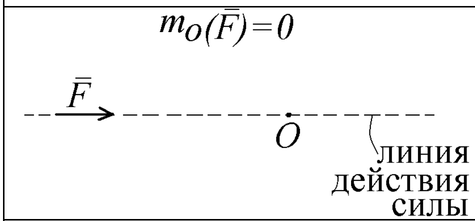
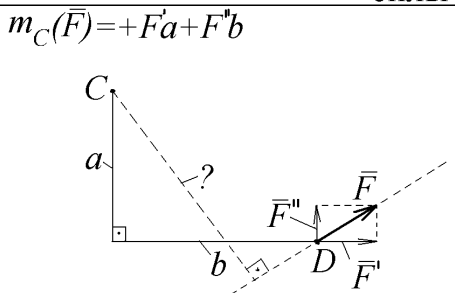


Рисунок 7 – Линии действия сил (и составляющих сил)

Таблица 6 – Правила нахождения момента силы относительно точки

	Момент силы $\vec{F}$ относительно какой-либо точки O вычисляется по формуле: $M_O\left(\vec{F}\right)=\pm Fh$, где h – плечо силы $\vec{F}$ относительно точки O. Плечо силы $\vec{F}$ относительно точки O – это кратчайшее расстояние (т. е. длина перпендикуляра) от точки O до линии действия силы; знак «плюс» берут, если сила $\vec{F}$ стремится вращать тело вокруг заданной точки O против хода часовой стрелки; знак «минус» берут, если сила $\vec{F}$ стремится вращать тело вокруг заданной точки O по ходу часовой стрелки
	
	Момент силы относительно точки равен нулю в единственном случае, когда плечо силы равно нулю, т. е. когда линия действия силы проходит через эту точку
	Теорема Вариньона: момент равнодействующей равен сумме моментов её составляющих. Таким образом, любую «неудобную» силу можно заменить её составляющими по «удобным» направлениям и вычислить моменты от каждой составляющей

Примеры решения задачи № 2

Пример 1

Точка A движется в плоскости xy. Закон движения точки задан уравнениями: $x=f_1(t)$ и $y=f_2(t)$. При этом координаты x и y выражены в сантиметрах, а время t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки, изобразить траекторию на рисунке; для момента времени $t=1$ с определить и указать на рисунке скорость и ускорение точки, а также её касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.

Дано: $x = 3 - 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$,

$y = -4\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.

Решение.

Для определения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Используем известную формулу (таблица 7):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \tag{4}$$

в данном случае $\alpha = \frac{\pi}{6}t$.

Таблица 7 – Некоторые формулы тригонометрии

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

Из заданных уравнений движения находим

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{3-x}{2} \text{ и } \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = -\frac{y}{4},$$

откуда, с учётом (4), получаем

$$\left(-\frac{y}{4}\right)^2 + \left(\frac{3-x}{2}\right)^2 = 1.$$

В окончательном виде запишем уравнение траектории точки:

$$\frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1. \tag{5}$$

Уравнение (5) – это уравнение эллипса с полуосями 2 см (она параллельна оси x) и 4 см (она параллельна оси y), причём центр этого эллипса смещён от начала осей координат на +3 см по оси x. Изобразим найденную траекторию (рисунок 8).

Для более точного изображения найденной траектории по заданным уравнениям движения определим положения точки в различные моменты времени (таблица 8).

Таблица 8 – Координаты точки в различные моменты времени

t, с	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x, см	1	1,268	2	3	4	4,732	5	4,732	4	3	2
y, см	0	-2	-3,464	-4	-3,464	-2	0	2	3,464	4	3,464

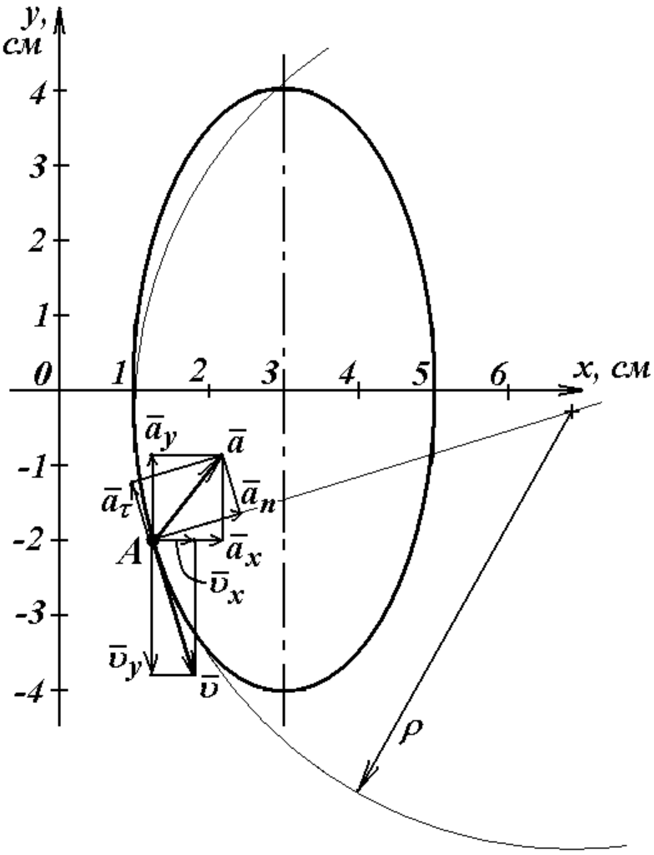


Рисунок 8 – Траектория движения и кинематические параметры точки

При желании, можно выполнить проверку правильности построения траектории с помощью программного пакета *Mathcad* (рисунок 9).

Скорость точки найдём через её проекции на координатные оси:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}\ ,$$

где υ_x – проекция вектора скорости на ось x;

υ_y – проекция вектора скорости на ось y.

Проекция вектора скорости на ось x равна первой производной по времени от уравнения движения для координаты x:

$$\upsilon_x = \dot{x}\ ,$$

где точка над координатой x обозначает первую производную по времени (от уравнения движения для координаты x).

В данном случае имеем:

$$\upsilon_x = -2\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right)\cdot\frac{\pi}{6} \text{ или } \upsilon_x = \frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

$i := 0..200$

$t_i := \frac{i}{10}$

$x_i := 3 - 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t_i\right)$

$y_i := -4\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t_i\right)$

$t1 := 1$

$x1 := 3 - 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t1\right)$

$y1 := -4\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t1\right)$

$x1 = 1.268$

$y1 = -2$

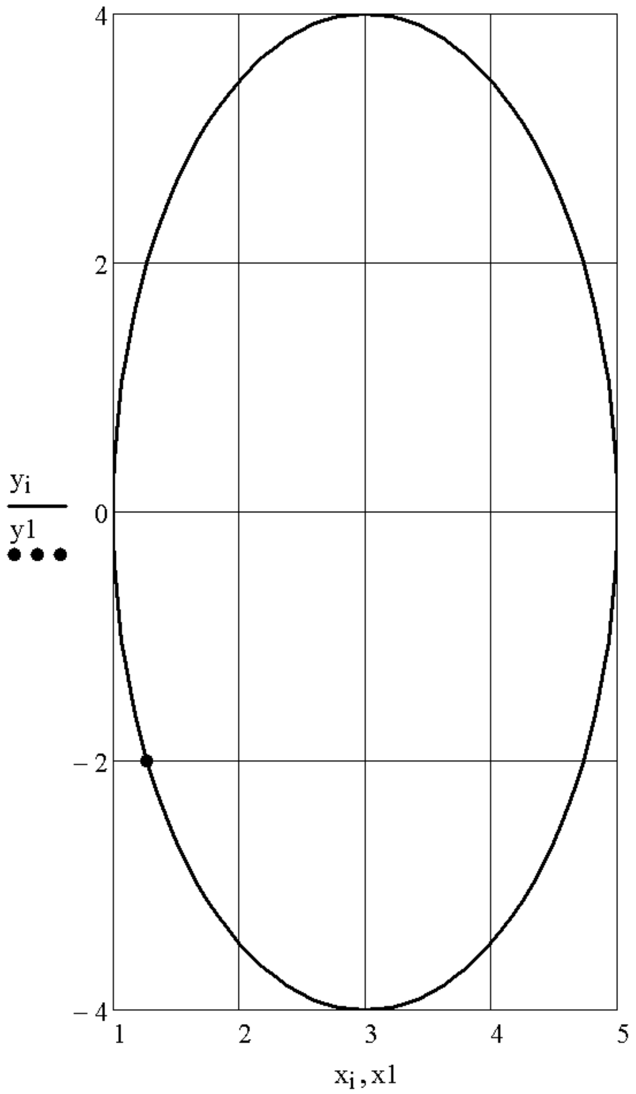


Рисунок 9 – Построение траектории точки в пакете *Mathcad*

Проекция вектора скорости на ось y равна первой производной по времени от уравнения движения для координаты y:

$$\upsilon_y = \dot{y}.$$

В данном случае имеем:

$$\upsilon_y = -4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\cdot\frac{\pi}{6} \text{ или } \upsilon_y = -\frac{2\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

При $t = 1$ с получаем:

$$\upsilon_x = \frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right) \text{ и } \upsilon_y = -\frac{2\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right).$$

В результате:

$\upsilon_x = 0{,}5236$ см/с; $\upsilon_y = -\,1{,}\,8137$ см/с; $\upsilon = \sqrt{(0{,}5236)^2 + (-1{,}8137)^2} = 1{,}8878$ см/с.

По полученным данным, выбрав удобный масштаб, изобразим составляющие вектора скорости и вектор полной скорости точки *A* (рисунок 8). Убеждаемся в том, что вектор скорости $\vec{\upsilon}$ направлен по касательной к траектории в рассматриваемой точке *A*.

Ускорение точки найдём через её проекции на координатные оси:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} ,$$

где a_x – проекция вектора ускорения на ось x;

a_y – проекция вектора ускорения на ось y.

Проекция вектора ускорения на ось x равна первой производной по времени от проекции вектора скорости на ось x:

$$a_x = \dot{\upsilon}_x .$$

В данном случае имеем:

$$a_x = \frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\cdot\frac{\pi}{6} \text{ или } a_x = \frac{\pi^2}{18}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

Проекция вектора ускорения на ось y равна первой производной по времени от проекции вектора скорости на ось y:

$$a_y = \dot{\upsilon}_y .$$

В данном случае имеем:

$$a_y = -\frac{2\pi}{3}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right)\cdot\frac{\pi}{6} \text{ или } a_y = \frac{\pi^2}{9}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

При $t = 1$ с получаем:

$$a_x = \frac{\pi^2}{18}\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right) \text{ и } a_y = \frac{\pi^2}{9}\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right).$$

В результате:

$a_x = 0{,}4748$ см/с^2; $a_y = 0{,}5483$ см/с^2; $a = \sqrt{(0{,}4748)^2 + (0{,}5483)^2} = 0{,}7253$ см/с^2.

Касательное ускорение определяем по формуле:

$$a_\tau = \frac{\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y}{\upsilon} .$$

В результате для момента времени $t = 1$ с получаем:

$$a_\tau = \frac{0{,}5236\cdot 0{,}4748 + (-1{,}8137)\cdot 0{,}5483}{1{,}8878} = -0{,}3951 \text{ см/с}^2.$$

Нормальное ускорение определяем по формуле:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} .$$

В результате для момента времени $t = 1$ с получаем:

$$a_n = \sqrt{(0{,}7253)^2 - (-0{,}3951)^2} = 0{,}6082 \text{ см/с}^2.$$

По полученным данным, выбрав удобный масштаб, изобразим составляющие вектора ускорения и вектор полного ускорения точки *A* (рисунок 8). Вектор нормального ускорения $\vec{a_n}$ всегда направлен перпендикулярно траектории в сторону её вогнутости. Вектор касательного ускорения $\vec{a_\tau}$ всегда располагается по касательной к траектории в ту сторону, чтобы выполнялось уравнение

$$\vec{a} = \vec{a_\tau} + \vec{a_n}.$$

В рассматриваем случае вектор $\vec{a_\tau}$ противоположен вектору $\vec{\upsilon}$, следовательно, точка движется замедленно.

Радиус кривизны траектории определяем по формуле:

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a_n}.$$

В результате для момента времени $t = 1$ с получаем:

$$\rho = \frac{(1{,}8878)^2}{0{,}6082} = 5{,}86 \text{ см}.$$

Изображаем радиус кривизны траектории как радиус окружности, которая проходит через точку *A*, а центр этой окружности находится на нормали к траектории (рисунок 8).

Ответ: υ = 1,8878 см/с; a = 0,7253 см/с^2; a_τ= – 0,3051 см/с^2; a_n= 0,6082 см/с^2; ρ = 5,86 см.

Пример 2

Точка *A* движется в плоскости *xy*. Закон движения точки задан уравнениями: $x=f_1(t)$ и $y=f_2(t)$. При этом координаты *x* и *y* выражены в сантиметрах, а время *t* – в секундах.

Найти уравнение траектории точки, изобразить траекторию на рисунке; для момента времени t =1 с определить и указать на рисунке скорость и ускорение точки, а также её касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.

Дано: $x = 4 - 9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$,

$$y = 6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 4.$$

Решение.

Для определения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время *t*. Используем известную формулу (таблица 7):

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \tag{6}$$

в данном случае $\alpha = \frac{\pi}{6}t$.

Из заданных уравнений движения находим

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{4-x}{9} \text{ и } \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) = \frac{y+4}{6},$$

откуда, с учётом (6), получаем

$$\frac{y+4}{6} = 2\left(\frac{4-x}{9}\right)^2 - 1.$$

Выполним несложные преобразования:

$$y+4=12\left(\frac{4-x}{9}\right)^2-6 \text{ или } y=\left(144\cdot\frac{x-4}{9}\right)^2-10.$$

В окончательном виде запишем уравнение траектории точки:

$$y=(16x-64)^2-10. \qquad (7)$$

Уравнение (7) – это уравнение параболы, ветви которой направлены вверх, а вершина смещена на –10 см по оси y и на + 64/16 = +4 см по оси x. Изобразим найденную траекторию (рисунок 10).

Для более точного изображения найденной траектории по заданным уравнениям движения определим положения точки в различные моменты времени (таблица 9).

Таблица 9 – Координаты точки в различные моменты времени

t, с	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x, см	-5	-3,794	-0,5	4	8,5	11,794	13	11,794	8,5	4	-0,5
y, см	2	-1	-7	-10	-7	-1	2	-1	-7	-10	-7

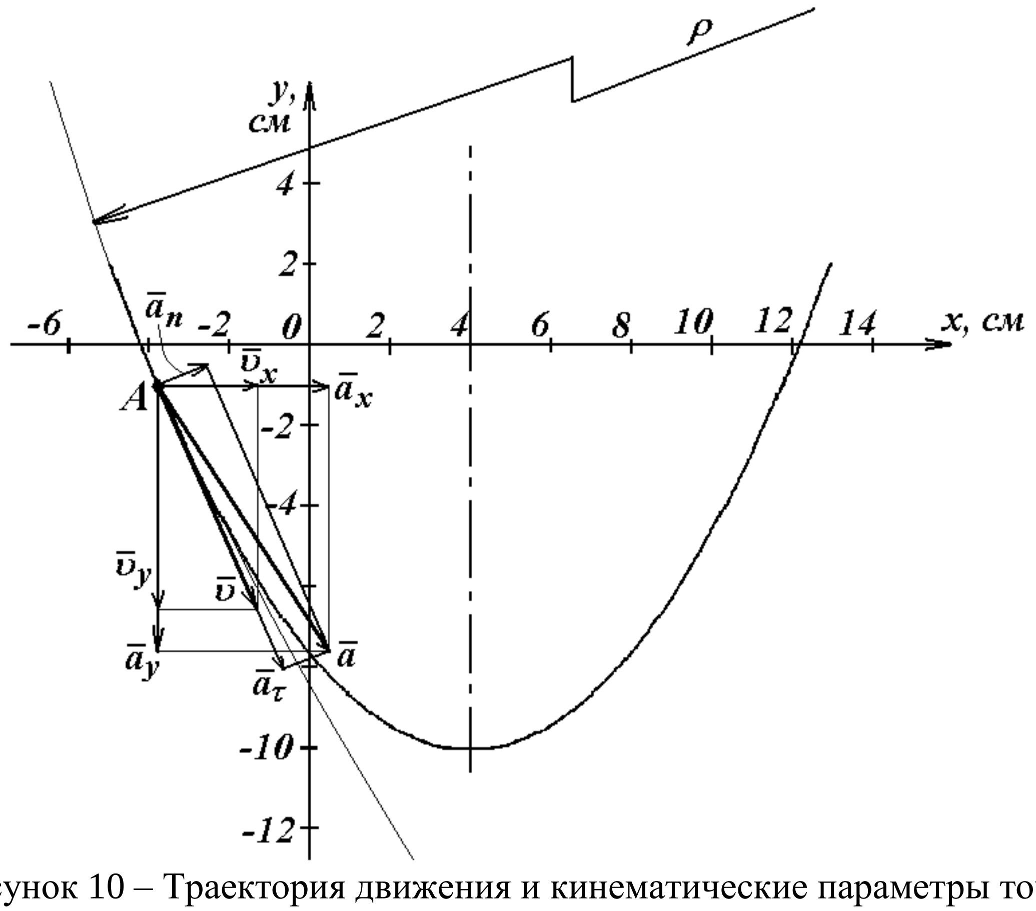


Рисунок 10 – Траектория движения и кинематические параметры точки

При желании можно выполнить проверку правильности построения траектории с помощью программного пакета *Mathcad* (рисунок 11).

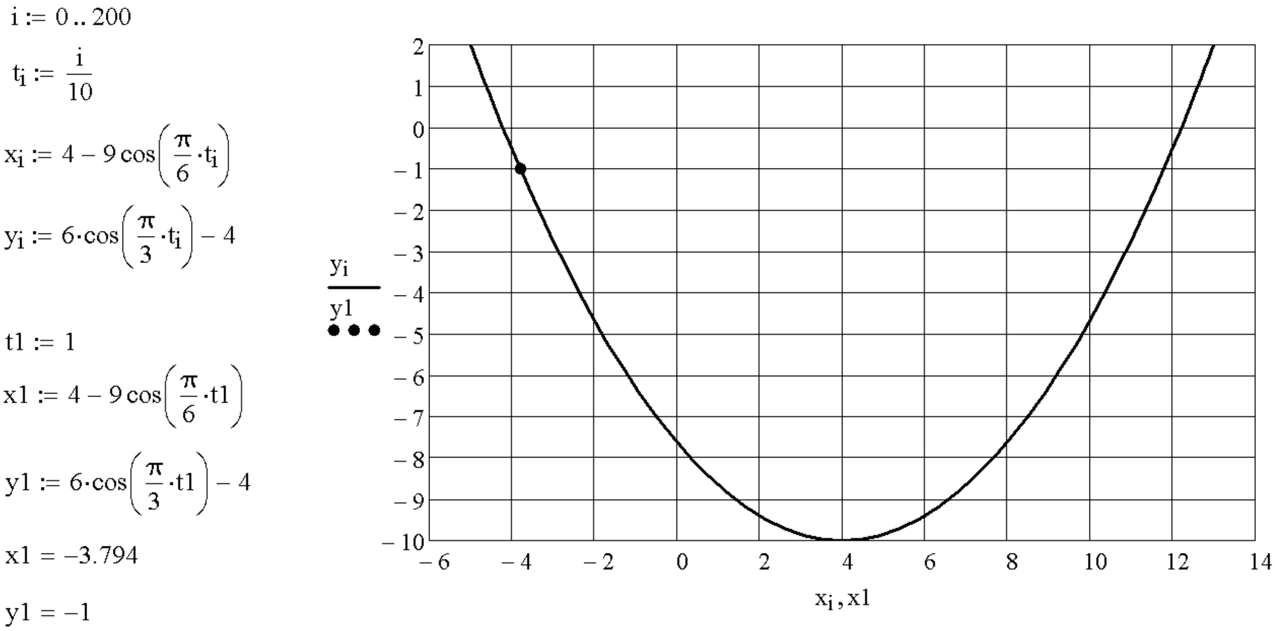


Рисунок 11 – Построение траектории точки в пакете *Mathcad*

Скорость точки найдём через её проекции на координатные оси:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}\,,$$

где υ_x – проекция вектора скорости на ось x;

υ_y – проекция вектора скорости на ось y.

Проекция вектора скорости на ось x равна первой производной по времени от уравнения движения для координаты x:

$$\upsilon_x = \dot{x}\,,$$

где точка над координатой x обозначает первую производную по времени (от уравнения движения для координаты x).

В данном случае имеем:

$$\upsilon_x = -9\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right)\cdot\frac{\pi}{6} \text{ или } \upsilon_x = \frac{3\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

Проекция вектора скорости на ось y равна первой производной по времени от уравнения движения для координаты y:

$$\upsilon_y = \dot{y}\,.$$

В данном случае имеем:

$$\upsilon_y = 6\left(-\sin\frac{\pi}{3}t\right)\cdot\frac{\pi}{3} \text{ или } \upsilon_y = -2\pi\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right).$$

При $t = 1$ с получаем:

$$\upsilon_x = \frac{3\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right) \text{ и } \upsilon_y = -2\pi\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 1\right).$$

В результате:

υ_x = 2,3562 см/с; υ_y = – 5,4412 см/с; $\upsilon = \sqrt{(2{,}3562)^2 + (-5{,}4412)^2} = 5{,}9294$ см/с.

По полученным данным, выбрав удобный масштаб, изобразим составляющие вектора скорости и вектор полной скорости точки *A* (рисунок 10). Убеждаемся в том, что вектор скорости $\vec{\upsilon}$ направлен по касательной к траектории в рассматриваемой точке *A*.

Ускорение точки найдём через её проекции на координатные оси:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

где a_x – проекция вектора ускорения на ось *x*;

a_y – проекция вектора ускорения на ось *y*.

Проекция вектора ускорения на ось *x* равна первой производной по времени от проекции вектора скорости на ось *x*:

$$a_x = \dot{\upsilon}_x .$$

В данном случае имеем:

$$a_x = \frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\cdot\frac{\pi}{6} \text{ или } a_x = \frac{\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

Проекция вектора ускорения на ось *y* равна первой производной по времени от проекции вектора скорости на ось *y*:

$$a_y = \dot{\upsilon}_y .$$

В данном случае имеем:

$$a_y = -2\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)\cdot\frac{\pi}{3} \text{ или } a_y = -\frac{2\pi^2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right).$$

При $t = 1$ с получаем:

$$a_x = \frac{\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right) \text{ и } a_y = -\frac{2\pi^2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 1\right).$$

В результате:

$a_x = 2{,}1370$ см/с^2; $a_y = -\,3{,}2902$ см/с^2; $a = \sqrt{(2{,}137)^2 + (-3{,}2902)^2} = 3{,}9233$ см/с^2.

Касательное ускорение определяем по формуле:

$$a_\tau = \frac{\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y}{\upsilon}.$$

В результате для момента времени $t = 1$ с получаем:

$$a_\tau = \frac{2{,}3562\cdot 2{,}137 + (-5{,}4412)\cdot(-3{,}2902)}{5{,}9294} = 3{,}8685 \text{ см/с}^2.$$

Нормальное ускорение определяем по формуле:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

В результате для момента времени $t = 1$ с получаем:

$$a_n = \sqrt{(3{,}9233)^2 - (3{,}8685)^2} = 0{,}6534 \text{ см/с}^2.$$

По полученным данным, выбрав удобный масштаб, изобразим составляющие вектора ускорения и вектор полного ускорения точки *A* (рисунок 10). Вектор нормального ускорения $\vec{a_n}$ всегда направлен перпендикулярно траектории в сторону её вогнутости. Вектор касательного ускорения $\vec{a_\tau}$ всегда располагается по касательной к траектории в ту сторону, чтобы выполнялось уравнение

$$\vec{a} = \vec{a_\tau} + \vec{a_n}.$$

В рассматриваем случае направление вектора $\vec{a_\tau}$ совпадает с направлением вектора $\vec{\upsilon}$, следовательно, точка движется ускоренно.

Радиус кривизны траектории определяем по формуле:

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a_n}.$$

В результате для момента времени t = 1 с получаем:

$$\rho = \frac{(5{,}9294)^2}{0{,}6534} = 53{,}8 \text{ см}.$$

Изображаем радиус кривизны траектории как радиус окружности, которая проходит через точку *A*, а центр этой окружности находится на нормали к траектории (рисунок 10).

Ответ: υ = 5,9294 см/с; a = 3,9233 см/с^2; a_τ= 3,8685 см/с^2; a_n= 0,6534 см/с^2; ρ = 53,8 см.

Примеры решения задачи № 3

Пример 1

Плоский шестизвенный механизм состоит из стержней *1–4* и ползуна *B* (рисунок 12). Соединения всех звеньев – шарнирные. Точка *D* располагается посередине своего стержня.

Длина первого стержня ℓ_1=1 м, длины остальных стержней одинаковы и составляют ℓ_2= ℓ_3= ℓ_4= 2 м.

Дано: ω_1=12 с$^{-1}$ (ω_1 – угловая скорость стержня *1*, направлена против хода часовой стрелки).

Определить: υ_B, υ_E, ω_2 (υ_B – скорость ползуна *B*; υ_E – скорость точки *E*; ω_2 – угловая скорость стержня *2*).

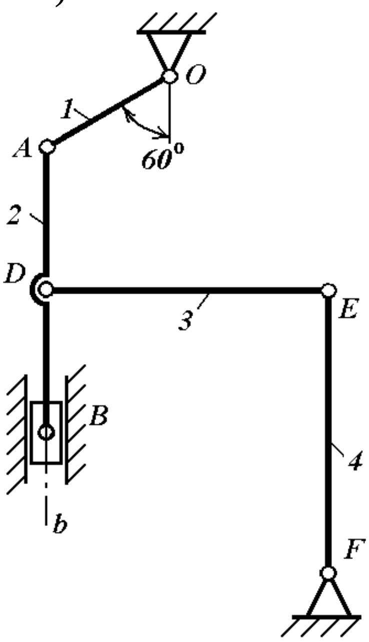


Рисунок 12 – Заданная схема механизма

Решение.

Из рассмотрения заданной схемы механизма (рисунок 12) заключаем следующее:

– звено *1* совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через точку *O*;

– звено *2* совершает плоское движение (в плоскости рисунка);

– звено *3* совершает плоское движение (в плоскости рисунка);

– звено *4* совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через точку *F*;

– ползун *B* совершает поступательное движение вдоль прямой *Bb*.

По заданной угловой скорости звена *1* находим скорость точки *A*:

$$\upsilon_A = \omega_1 \ell_1 \text{ или } \upsilon_A = 12 \cdot 1 = 12 \text{ м/с}.$$

Вектор скорости $\overrightarrow{\upsilon_A}$ направляем перпендикулярно отрезку *OA* по направлению угловой скорости ω_1 (рисунок 13).

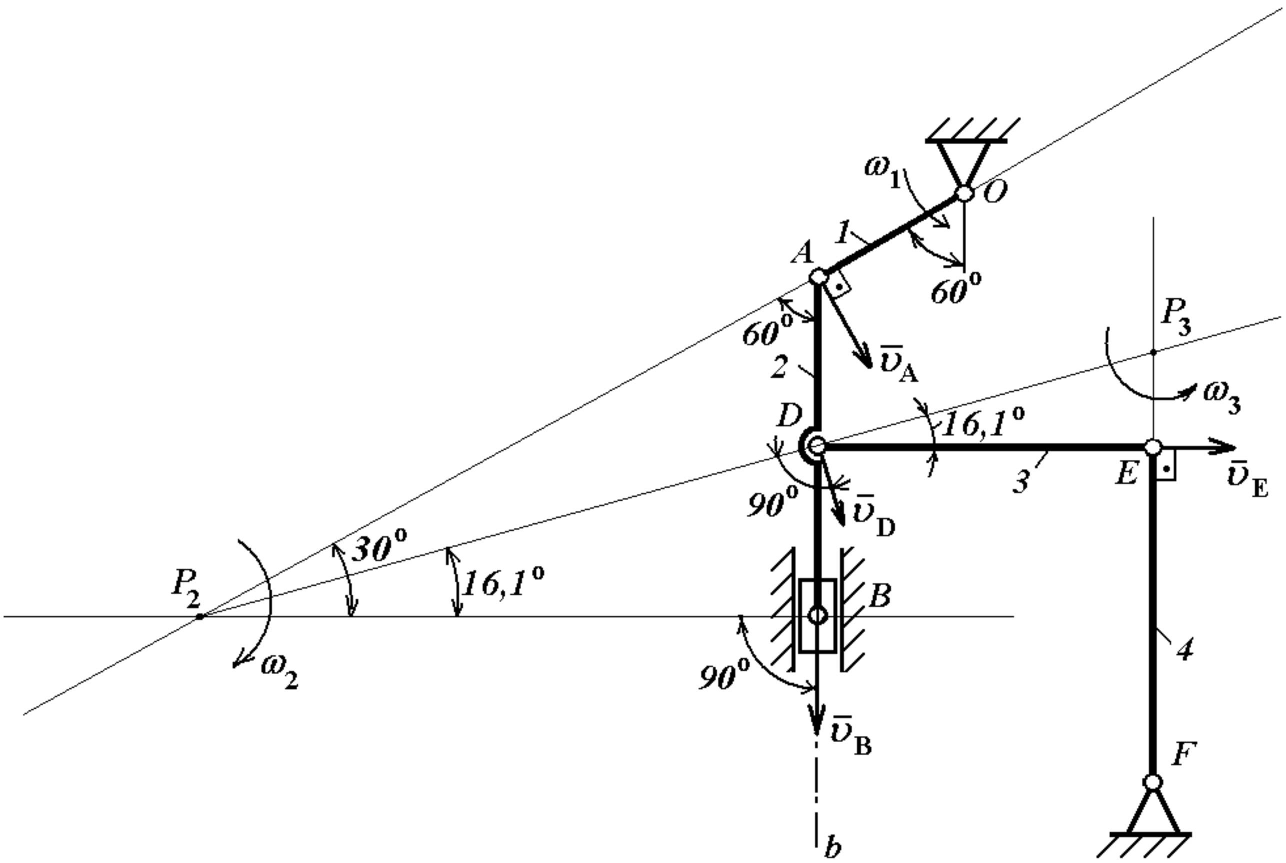


Рисунок 13 – Нахождение мгновенных центров скоростей звеньев и скоростей механизма

Поскольку звено *2* совершает плоское движение, определим его мгновенный центр скоростей (МЦС). Для этого из точки *A* проводим прямую, перпендикулярную к $\overrightarrow{\upsilon_A}$, а из точки *B* проводим прямую, перпендикулярную к вектору скорости точки *B* (т. е. перпендикулярно прямой *Bb*, вдоль которой движется ползун *B*). На пересечении проведённых перпендикуляров и находится МЦС звена *2*, который обозначим точкой P_2. Зная направление вектора $\overrightarrow{\upsilon_A}$, определяем направление вращения звена *2* вокруг P_2 (показываем на рисунке 13 направление угловой скорости ω_2). Зная направление угловой скорости ω_2, показываем направление вектора $\overrightarrow{\upsilon_B}$.

Таким образом, в данное мгновение звено *2* механизма совершает вращательное движение вокруг P_2. Следовательно:

$$\upsilon_A = \omega_2 |AP_2|, \text{ откуда } \omega_2 = \frac{\upsilon_A}{|AP_2|}.$$

Отрезок AP_2 является гипотенузой в прямоугольном треугольнике ABP_2 с углами 30° и 60°, из которого следует:

$$|AB| = |AP_2| \sin 30^\circ, \text{ откуда } |AP_2| = \frac{|AB|}{\sin 30^\circ} \text{ или } |AP_2| = \frac{2}{0{,}5} = 4 \text{ м.}$$

В результате $\omega_2 = \dfrac{12}{4} = 3\ \text{с}^{-1}$.

Поскольку в данное мгновение звено *2* механизма совершает вращательное движение вокруг P_2, то:

$$\upsilon_B = \omega_2 |BP_2|.$$

Отрезок BP_2 является катетом в прямоугольном треугольнике ABP_2 с углами 30° и 60°, из которого следует:

$$|BP_2| = |AP_2| \cos 30^\circ \text{ или } |BP_2| = 4 \cdot 0{,}866 = 3{,}464 \text{ м.}$$

В результате $\upsilon_B = 3 \cdot 3{,}464 = 10{,}392$ м/с.

Последующие действия необходимы для определения скорости точки *E*.

Поскольку в данное мгновение звено *2* механизма совершает вращательное движение вокруг P_2, то скорость точки *D*:

$$\upsilon_D = \omega_2 |DP_2|,$$

а вектор $\overrightarrow{\upsilon_D}$ направлен по направлению угловой скорости ω_2 перпендикулярно отрезку DP_2 (рисунок 13).

Отрезок DP_2 является гипотенузой в прямоугольном треугольнике DBP_2, из которого (по теореме Пифагора) следует:

$$|DP_2| = \sqrt{|DB|^2 + |BP_2|^2} \text{ или } |DP_2| = \sqrt{1^2 + (3{,}464)^2} = 3{,}605 \text{ м.}$$

В результате $\upsilon_D = 3 \cdot 3{,}605 = 10{,}815$ м/с.

Поскольку звено *3* совершает плоское движение, определим его мгновенный центр скоростей. Для этого из точки *D* проводим прямую, перпендикулярную к $\overrightarrow{\upsilon_D}$, а из точки *E* проводим прямую, перпендикулярную к вектору скорости точки *E* (т. е. вдоль звена *EF*, которому также принадлежит точка *E* и которое вращается вокруг *F*). На пересечении проведённых перпендикуляров и находится МЦС звена *3*, который обозначим точкой P_3. Зная направление вектора $\overrightarrow{\upsilon_D}$, определяем направление вращения звена *3* вокруг P_3 (показываем на рисунке 13 направление угловой скорости ω_3). Зная направление угловой скорости ω_3, показываем направление вектора $\overrightarrow{\upsilon_E}$.

Таким образом, в данное мгновение звено *3* механизма совершает вращательное движение вокруг P_3. Следовательно:

$$\upsilon_D = \omega_3 |DP_3|\text{, откуда } \omega_3 = \frac{\upsilon_D}{|DP_3|}.$$

Отрезок DP_3 является гипотенузой в прямоугольном треугольнике DEP_3, в котором угол $E\hat{D}P_3$ равен углу $B\hat{P_2}D$ в прямоугольном треугольнике DBP_2. Из прямоугольного треугольника DBP_2:

$$tg\, B\hat{P_2}D = \frac{DB}{BP_2}\text{, откуда } B\hat{P_2}D = arctg\left(\frac{DB}{BP_2}\right) = arctg\left(\frac{1}{3{,}464}\right) = 16{,}1^\circ \text{ и } E\hat{D}P_3 = 16{,}1^\circ.$$

В прямоугольном треугольнике DEP_3:

$$|DE| = |DP_3|\cos 16{,}1^\circ\text{, откуда } |DP_3| = \frac{|DE|}{\cos 16{,}1^\circ} = \frac{2}{0{,}9608} = 2{,}082 \text{ м.}$$

В результате $\omega_3 = \frac{10{,}815}{2{,}082} = 5{,}195$ с$^{-1}$.

Поскольку в данное мгновение звено *3* механизма совершает вращательное движение вокруг P_3, то:

$$\upsilon_E = \omega_3 |EP_3|.$$

Отрезок EP_3 является катетом в прямоугольном треугольнике DEP_3, из которого следует:

$$|EP_3| = |DP_3|\sin 16{,}1^\circ \text{ или } |EP_3| = 2{,}082 \cdot 0{,}2773 = 0{,}577 \text{ м.}$$

В результате $\upsilon_E = 5{,}195 \cdot 0{,}577 = 2{,}998$ м/с.

Ответ: υ_B = 10,392 см/с; υ_E = 2,998 см/с; ω_2 = 3 с$^{-1}$.

Пример 2

Плоский шестизвенный механизм состоит из стержней *1–4* и ползуна *B* (рисунок 14). Соединения всех звеньев – шарнирные. Точка *K* располагается посередине своего стержня.

Длина первого стержня ℓ_1=1 м, длины остальных стержней одинаковы и составляют $\ell_2 = \ell_3 = \ell_4$ = 2 м.

Дано: υ_B=11 м/с (υ_B – скорость ползуна *B*, направлена от *B* к *b*).

Определить: υ_A, υ_E, ω_2 (υ_A – скорость точки *A*; υ_E – скорость точки *E*; ω_2 – угловая скорость стержня *2*).

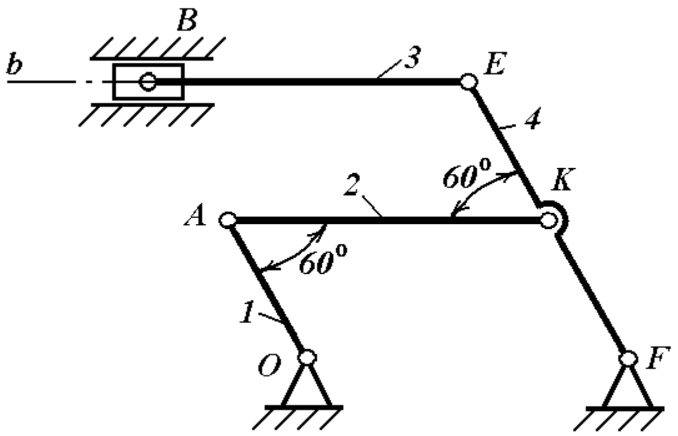


Рисунок 14 – Заданная схема механизма

Решение.

Из рассмотрения заданной схемы механизма (рисунок 14) заключаем следующее:

– звено *1* совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через точку *O*;

– звено *2* совершает плоское движение (в плоскости рисунка);

– звено *3* совершает плоское движение (в плоскости рисунка);

– звено *4* совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через точку *F*;

– ползун *B* совершает поступательное движение вдоль прямой *Bb*.

Поскольку звено *3* совершает плоское движение, определим его мгновенный центр скоростей (МЦС). Для этого из точки *B* проводим прямую, перпендикулярную к $\overrightarrow{\upsilon_B}$, а из точки *E* проводим прямую, перпендикулярную к вектору скорости точки *E* (т. е. вдоль звена *FE*, которому также принадлежит точка *E* и которое вращается вокруг *F*). На пересечении проведённых перпендикуляров и находится МЦС звена *3*, который обозначим точкой P_3. Зная направление вектора $\overrightarrow{\upsilon_B}$, определяем направление вращения звена *3* вокруг P_3 (показываем на рисунке 15 направление угловой скорости ω_3). Зная направление угловой скорости ω_3, показываем направление вектора $\overrightarrow{\upsilon_E}$.

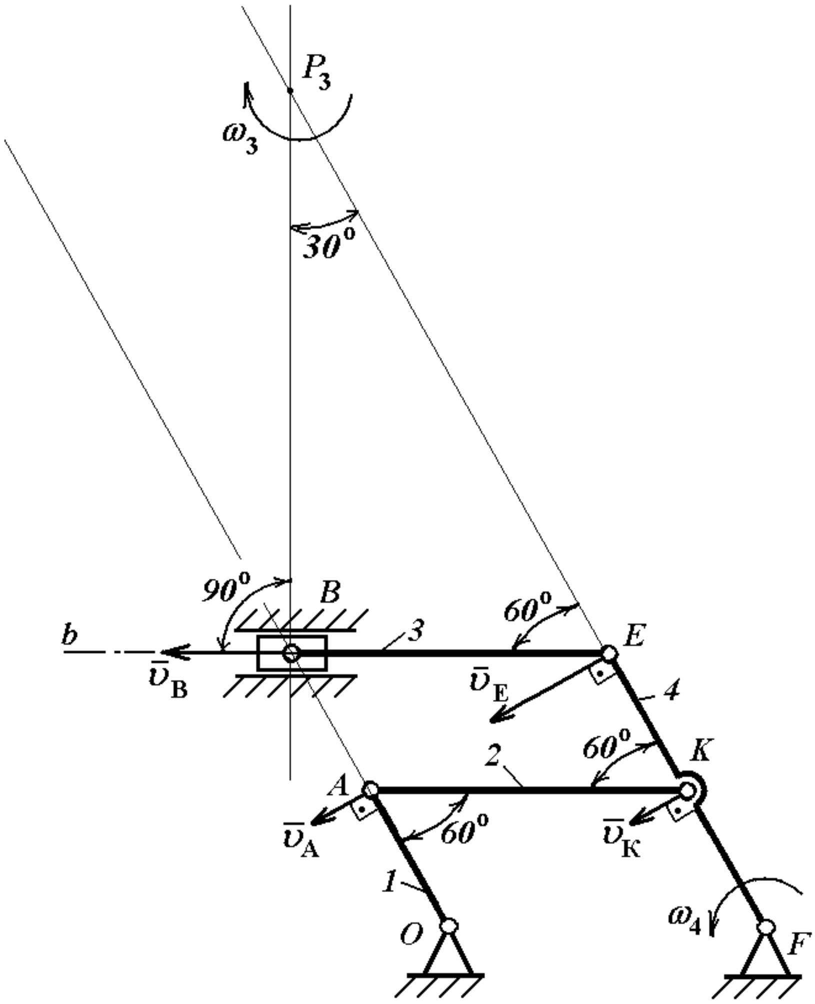


Рисунок 15 – Нахождение мгновенных центров скоростей звеньев и скоростей механизма

Таким образом, в данное мгновение звено *3* механизма совершает вращательное движение вокруг P_3. Следовательно:

$$\upsilon_B = \omega_3 |BP_3|, \text{ откуда } \omega_3 = \frac{\upsilon_B}{|BP_3|}.$$

Отрезок BP_3 является катетом в прямоугольном треугольнике BEP_3 с углами 30° и 60°, из которого следует:

$$\frac{|BP_3|}{|BE|} = tg\,60^\circ, \text{ откуда } |BP_3| = |BE| \cdot tg\,60^\circ \text{ или } |BP_3| = 2 \cdot 1{,}732 = 3{,}464 \text{ м.}$$

В результате $\omega_3 = \dfrac{11}{3{,}464} = 3{,}176$ с$^{-1}$.

Поскольку в данное мгновение звено *3* механизма совершает вращательное движение вокруг P_3, то:

$$\upsilon_E = \omega_3 |EP_3|.$$

Отрезок EP_3 является гипотенузой в прямоугольном треугольнике BEP_3, из которого (по теореме Пифагора) следует:

$$|EP_3| = \sqrt{|BP_3|^2 + |BE|^2} \text{ или } |EP_3| = \sqrt{(3{,}464)^2 + 2^2} = 4 \text{ м.}$$

В результате $\upsilon_E = 3{,}176 \cdot 4 = 12{,}704$ м/с.

Поскольку звено *4* механизма совершает вращательное движение вокруг F, то скорость точки E:

$$\upsilon_E = \omega_4 |EF|.$$

Отсюда угловая скорость звена *4*:

$$\omega_4 = \frac{\upsilon_E}{|EF|} \text{ или } \omega_4 = \frac{12{,}704}{2} = 6{,}352 \text{ с}^{-1}.$$

В соответствии с направлением вращения точки E относительно F, изображаем направление ω_4 (рисунок 15).

Поскольку звено *4* механизма совершает вращательное движение вокруг F, то скорость точки K:

$$\upsilon_K = \omega_4 |KF| \text{ или } \upsilon_K = 6{,}352 \cdot 1 = 6{,}352 \text{ м/с,}$$

а вектор $\overrightarrow{\upsilon_K}$ направлен по направлению угловой скорости ω_4 перпендикулярно отрезку KF (рисунок 15).

Поскольку звено *2* совершает плоское движение, определим его мгновенный центр скоростей. Для этого из точки K проводим прямую, перпендикулярную к $\overrightarrow{\upsilon_K}$, а из точки A проводим прямую, перпендикулярную к вектору скорости точки A (т. е. вдоль звена OA, которому также принадлежит точка A и которое вращается вокруг O). Проведённые перпендикуляры взаимно параллельны и не пересекаются, следовательно, МЦС звена *2* находится на бесконечно большом расстоянии, а звено *2* совершает поступательное движение (а не плоское движение, как предполагалось первоначально). При поступательном движении тела его угловая скорость равна нулю, а скорости всех его точек равны между собой и по величине, и по направлению, поэтому:

$$\omega_2 = 0, \ \overrightarrow{\upsilon_A} = \overrightarrow{\upsilon_K} \text{ и } \upsilon_A = 6{,}352 \text{ м/с.}$$

Ответ: $\upsilon_A = 6{,}352$ см/с; $\upsilon_E = 12{,}704$ см/с; $\omega_2 = 0$.

Пример решения задачи № 4

Плоская невесомая рама состоит из вертикального стержня *OK*, двух горизонтальных стержней и закреплена с помощью подпятника *O* (рисунок 16) и цилиндрического подшипника в точке *E*. На краях невесомых горизонтальных стержней (длиной ℓ каждый) расположены точечный груз массой m_1 и вертикальный однородный стержень длиной ℓ, имеющий массу m_2. Рама вращается с постоянной угловой скоростью ω.

Определить реакции подпятника и подшипника, если m_1=2 кг, m_2=5 кг, b = 0,35 м, ℓ = 0,7 м, ω =11 с$^{-1}$.

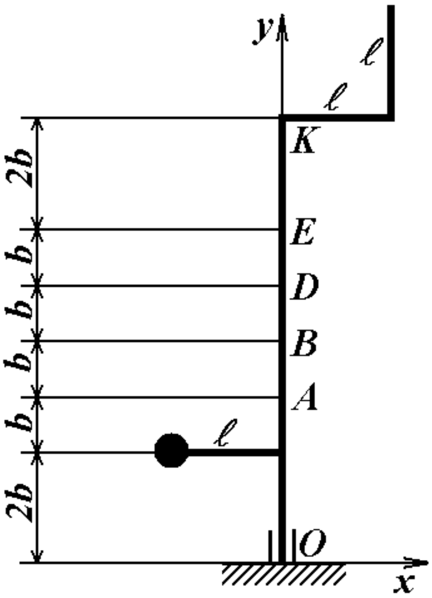


Рисунок 16 – Заданная схема рамы

Решение.

Составим расчётную схему, считая, что оси *Oxy* вращаются вместе с рамой так, что рама всегда находится в плоскости *xy* (рисунок 17). Покажем в заданной точке *E* цилиндрический подшипник, изобразим действующие внешние силы: силу тяжести точечного груза $\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{m_1 g}$, силу тяжести стержня $\overrightarrow{P_2} = \overrightarrow{m_2 g}$, составляющие $\overrightarrow{X_O}$, $\overrightarrow{Y_O}$ реакции подпятника и реакцию $\overrightarrow{R_E}$, подшипника. Согласно принципу Даламбера присоединим к этим силам силы инерции груза и стержня: $\overrightarrow{\Phi_1}$ и $\overrightarrow{\Phi_2}$ соответственно.

Даламберова сила инерции точечного груза направлена противоположно вектору его ускорения и имеет величину:

$$\Phi_1 = m_1 a_1,$$

где a_1 – величина ускорения точечного груза.

Поскольку рама вращается с постоянной угловой скоростью, то точечный груз имеет только центростремительное ускорение (направленное к оси вращения), величина которого:

$$a_1 = \omega^2 \ell .$$

В результате:

$$\Phi_1 = m_1 \omega^2 \ell \text{ или } \Phi_1 = 2 \cdot 11^2 \cdot 0{,}7 = 169{,}4 \text{ (Н)}.$$

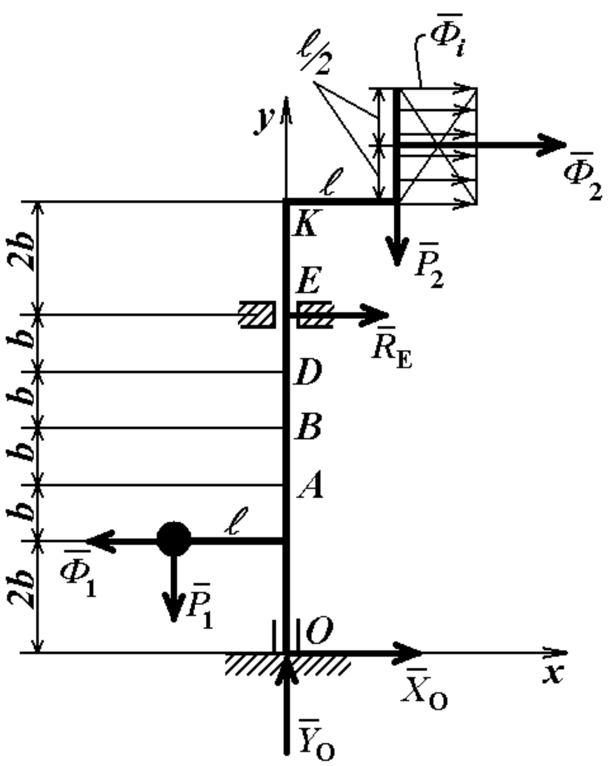


Рисунок 17 – Расчётная схема нагружения рамы

Поскольку рама вращается с постоянной угловой скоростью, то элементы стержня массой m_2=5 кг также имеют только центростремительные ускорения, величины которых:

$$a_i = \omega^2 \ell .$$

Даламберова сила инерции, действующая на *i*-й элемент стержня, направлена противоположно вектору его ускорения и имеет величину:

$$\Phi_i = \Delta m \cdot a_i \text{ или } \Phi_i = \Delta m \omega^2 \ell .$$

Таким образом, сила инерции равномерно распределена по длине стержня, образует эпюру параллельных сил в виде прямоугольника (рисунок 17), а её равнодействующая проходит через центр тяжести этого прямоугольника и равна:

$$\Phi_2 = m_2 \omega^2 \ell \text{ или } \Phi_2 = 5 \cdot 11^2 \cdot 0{,}7 = 423{,}5 \text{ (Н)}.$$

Согласно принципу Даламбера приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Для полученной плоской системы сил (рисунок 17) составляем уравнения равновесия. Используем те же правила, что и при решении задачи № 1 (таблицы 5 и 6).

Сумма проекций на ось *x* всех действующих сил равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0;$$

т. е. $$+X_O - \Phi_1 + R_E + \Phi_2 = 0. \quad (8)$$

Поскольку в уравнении (8) имеются две неизвестные величины (X_O и R_E), оставляем его пока нерешённым.

Сумма проекций на ось *y* всех действующих сил равна нулю:

$$\sum F_{ky} = 0;$$

т. е. $$+Y_O - P_1 - P_2 = 0,$$

откуда $Y_O = P_1 + P_2$ или $Y_O = m_1 g + m_2 g$.

В результате Y_O= 2·9,81 + 5·9,81= 68,67 (Н).

Сумма моментов относительно точки O от всей действующей нагрузки равна нулю:

$$\sum m_O\left(\vec{F_k}\right) = 0;$$

применяя правила вычисления моментов (таблица 6), получаем

$$+P_1 \cdot \ell + \Phi_1 \cdot 2b - R_E \cdot 6b - P_2 \cdot \ell - \Phi_2(8b + 0{,}5\ell) = 0;$$

откуда $R_E = \dfrac{P_1\ell + \Phi_1 2b - P_2\ell - \Phi_2(8b + 0{,}5\ell)}{6b}$ или $R_E = \dfrac{m_1 g\ell + \Phi_1 2b - m_2 g\ell - \Phi_2(8b + 0{,}5\ell)}{6b}$.

В результате

$$R_E = \frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}7 + 169{,}4 \cdot 2 \cdot 0{,}35 - 5 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}7 - 423{,}5(8 \cdot 0{,}35 + 0{,}5 \cdot 0{,}7)}{6 \cdot 0{,}35} = \underline{-588{,}59} \ \underline{(\text{Н})}.$$

Теперь в уравнении (8) осталась только одна неизвестная, находим её:

$$X_O = \Phi_1 - R_E - \Phi_2,$$

откуда X_O = 169,4 + 588,59 – 423,5 = 334,49 (Н).

Ответ: X_O= 334,49 Н; Y_O = 68,67 Н; R_E = – 588,59 Н. Знак «минус» указывает на то, что действительное направление силы $\vec{R_E}$ противоположно указанному на рисунке 17.

Задача решена. При желании можно выполнить проверку правильности нахождения опорных реакций. Для этого можно проверить равенство нулю суммы моментов всей нагрузки относительно любой точки рамы.

Тютрин Сергей Геннадьевич

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Контрольные задания и методические указания
для студентов заочной формы обучения
направлений 13.03.01, 13.03.02, 15.03.01, 15.03.04, 15.03.05,
20.03.01, 23.03.01, 23.03.02, 23.03.03, 27.03.01, 27.03.04, 44.03.01

Часть 1

Редактор Г. В. Меньщикова

Подписано в печать	Формат 60×84 1/16		Бумага 65 г/м^2
Печать цифровая	Усл. печ. л.	2,25	Уч.-изд. л. 2,25
Заказ	Тираж	25	Не для продажи

БИЦ Курганского государственного университета.
640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.