МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра «Автоматизация производственных процессов»

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АВТОМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для самостоятельной работы и выполнения контрольной работы
по дисциплине «Теоретические основы автоматики»
для студентов очной формы обучения направлений
15.03.04 « Автоматизация технологических процессов и производств»,
27.03.04 « Управление в технических системах»

Курган 2017

Кафедра автоматизации производственных процессов.

Дисциплина: «Теоретические основы автоматики».

Составили: канд. техн. наук, доц. О.В. Дмитриева,
канд. техн. наук, доц. Н.Б. Сбродов.

Утверждены на заседании кафедры 19 января 2017 г.

Рекомендованы методическим советом университета 12 декабря 2016 г.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания содержат краткое изложение теоретического материала по разделу «Математическая логика», примеры решения задач и задания для домашней контрольной работы.

1 ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ И ЛОГИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Основными логическими операциями являются: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, эквивалентность и импликация [1].

Отрицанием высказывания а называется высказывание $\overline{a}$, которое истинно, когда а ложно, и ложно, когда а истинно.

Отрицание высказывания $\boldsymbol{a}$ обозначается чертой над обозначением переменной или знаком $\neg$.

Логические значения отрицания высказывания a описываются таблицей 1.

Таблица 1 – Таблица истинности для отрицания

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

Дизъюнкцией двух высказываний a, b называется высказывание $a \vee b$, которое истинно, когда хотя бы одно их них истинно.

Дизъюнкция двух высказываний $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ обозначается $\boldsymbol{a \vee b}$. Логические значения дизъюнкции высказываний $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ описываются таблицей 2.

Таблица 2 – Таблица истинности для дизъюнкции

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Конъюнкцией двух высказываний a, b называется новое высказывание $a \wedge b$, которое истинно только в том случае, когда истинны оба высказывания a, b.

Конъюнкция двух высказываний $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ обозначается $\boldsymbol{a \wedge b}$ или a**&**$\boldsymbol{b}$. Логические значения конъюнкции высказываний $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ описываются таблицей 3.

Импликацией двух высказываний a, b называется новое высказывание, которое является ложным, если a истинно, а b – ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Таблица 3 – Таблица истинности для конъюнкции

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Импликация двух высказываний ***a***, ***b*** обозначается $a \to b$ или $a \supset b$. Высказывание ***a*** называют условием или посылкой, высказывание ***b*** – следствием или заключением. Логические значения импликации высказываний ***a***, ***b*** описываются таблицей 4.

Таблица 4 – Таблица истинности для импликации

a	b	$a \to b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентностью двух высказываний a, b называется высказывание $a \leftrightarrow b$***, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания a, b истинны или ложны.***

Эквивалентность двух высказываний ***a***, ***b*** обозначается $a \leftrightarrow b$ или $a \Leftrightarrow b$ или $a \sim b$. Логические значения эквивалентности высказываний *a*, *b* описываются таблицей 5.

Таблица 5 – Таблица истинности для эквивалентности

a	b	$a \leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Обозначая простые высказывания логическими переменными и используя рассмотренные выше логические операции и скобки, можно сложные высказывания представлять в виде ***логических формул***.

Все возможные значения истинности логических формул в зависимости от значений входящих в них логических переменных могут быть полностью описаны с помощью ***таблицы истинности***.

Две логические формулы называются равносильными (эквива-

лентными), если они принимают одинаковые значения истинности на любом наборе значений логических переменных, входящих в формулу.

Обычно равносильность обозначают знаком ≡, и запись $A \equiv B$ означает, что логические формулы A и B равносильны.

Логическая формула называется тождественно истинной (тавтологией), если она принимает значение 1 при всех значениях входящих в нее логических переменных.

Логическая формула называется тождественно ложной, если она принимает значение 0 при всех значениях входящих в нее логических переменных.

Пример 1. Постройте таблицу истинности для следующей логической формулы:

$$(\bar{a} \vee b) \leftrightarrow (a \& \bar{b})$$

Таблица истинности для заданной формулы представлена в виде таблицы 6.

Таблица 6 – Таблица истинности для логической формулы в примере 1

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} \vee b$	$a \& \bar{b}$	$(\bar{a} \vee b) \leftrightarrow (a \& \bar{b})$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0

Пример 2. Докажите тождественную истинность для следующей логической формулы:

$$\bar{a} \rightarrow (a \rightarrow b)$$

Таблица истинности для заданной формулы представлена в виде таблицы 7.

Таблица 7 – Таблица истинности для логической формулы в примере 2

a	b	$\bar{a}$	$a \rightarrow b$	$\bar{a} \rightarrow (a \rightarrow b)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Поскольку последний столбец таблицы содержит только 1, заданная логическая формула является тождественно истинной.

2 ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФОРМУЛ ЛОГИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Из перечисленных в разделе 1 функций особую роль играют три функции, а именно конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, поэтому рассмотрим более подробно их свойства.

1. Коммутативность конъюнкции и дизъюнкции:

$$x \vee y \equiv y \vee x;\; x \wedge y \equiv y \wedge x$$

2. Ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции:

$$x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z; \quad x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$$

Это свойство означает, что в конъюнкции или дизъюнкции нескольких переменных можно как угодно расставлять скобки (а значит, можно вообще их не ставить).

3. Законы поглощения:

$$x \vee (x \,\&\, y) \equiv x \,\&\, (1 \vee y) \equiv x$$

$$x \,\&\, (x \vee y) \equiv x$$

4. Дистрибутивность конъюнкции и дизъюнкции (распределительные законы):

$$x \,\&\, (y \vee z) \equiv (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z)$$

$$x \vee (y \,\&\, z) \equiv (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$$

5. Закон двойного отрицания:

$$\overline{\overline{x}} = x;$$

6. Правила де Моргана:

$$\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}; \quad \overline{x \vee y} = \overline{x}\;\overline{y},$$

оба эти правила обобщаются на любое число переменных:

$$\overline{x_1 x_2 \ldots x_n} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \ldots \vee \overline{x}_n; \qquad \overline{x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n} = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_n.$$

7. Универсальные границы:

$$x \vee 1 \equiv 1;\; x \vee 0 \equiv x;\; x \wedge 1 \equiv x;\; x \wedge 0 \equiv 0$$

$$x \vee \overline{x} \equiv 1;\; x \wedge \overline{x} \equiv 0;\; x \vee x \equiv x;\; x \wedge x \equiv x;\; \overline{0} \equiv 1;\; \overline{1} \equiv 0$$

При выполнении равносильных преобразований полезны равносильности, выражающие одни логические операции через другие:

$$x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \,\&\, (y \to x)$$

$$(x \to y) \equiv \overline{x} \vee y$$

Пример 1. Используя эквивалентные преобразования, докажите равносильность:

$$\overline{(x \,\&\, \overline{y}) \vee (y \,\&\, \overline{z})} = (\overline{x} \,\&\, \overline{y}) \vee (\overline{x} \,\&\, z) \vee (y \,\&\, z)$$

Используя приведенные выше равносильности, запишем цепочку равносильных логических формул для левой части формулы:

1. Используя правила де Моргана, получим:

$$\overline{(x \,\&\, \overline{y}) \vee (y \,\&\, \overline{z})} = \overline{(x \,\&\, \overline{y})} \,\&\, \overline{(y \,\&\, \overline{z})} = (\overline{x} \vee \overline{\overline{x}}) \,\&\, (\overline{y} \vee \overline{\overline{z}})$$

2. Используя закон двойного отрицания, получаем:

$$(\bar{x} \vee \bar{\bar{x}}) \,\&\, (\bar{y} \vee \bar{\bar{z}}) = (\bar{x} \vee y) \,\&\, (\bar{y} \vee z)$$

3. Применяя дистрибутивный закон, получаем:

$$(\bar{x} \vee y) \,\&\, (\bar{y} \vee z) = ((\bar{x} \vee y) \,\&\, \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee y) \,\&\, z) = (\bar{x} \,\&\, \bar{y}) \vee (y \,\&\, \bar{y}) \vee (\bar{x} \,\&\, z) \vee (y \,\&\, z) =$$

$$(\bar{x} \,\&\, \bar{y}) \vee 0 \vee (\bar{x} \,\&\, z) \vee (y \,\&\, z) = (\bar{x} \,\&\, \bar{y}) \vee (\bar{x} \,\&\, z) \vee (y \,\&\, z)$$

Пример 2. Используя эквивалентные преобразования, докажите тождественную истинность логической формулы:

$$\bar{x} \to (x \to y)$$

Запишем цепочку равносильных логических формул:

$$\bar{x} \to (x \to y) \equiv \bar{\bar{x}} \vee (x \to y) \equiv x \vee \bar{x} \vee y \equiv 1 \vee y \equiv 1$$

3 ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание №1

Постройте таблицу истинности для заданной логической формулы (таблица 8).

Таблица 8 − Варианты задания №1

№ варианта	Логическая формула
1	$(\bar{x} \,\&\, y) \vee \left(\overline{x \vee z}\right)$
2	$z \to \left(\bar{x} \vee \bar{y}\right)$
3	$(x \,\&\, y) \to (\overline{x \vee \bar{y}})$
4	$\left(x \,\&\, y \,\&\, \bar{z}\right) \leftrightarrow \left(\bar{x} \vee y\right)$
5	$\left(\bar{x} \vee \bar{y}\right) \leftrightarrow y$
6	$\left(x \to y\right) \to \bar{z}$
7	$\left(\bar{x} \to \bar{y}\right) \& \left(y \to z\right)$
8	$x \,\&\, \left(y \to z\right) \vee \bar{y}$
9	$\left(\overline{x \vee y \vee z}\right)$
10	$\left(x \leftrightarrow y\right) \& \left(\bar{y} \leftrightarrow \bar{z}\right)$
11	$\left(\bar{x} \to \bar{z}\right) \leftrightarrow y \to z$
12	$\left(\bar{y} \vee \bar{z}\right) \to \left(x \vee z\right)$
13	$x \to \left(\bar{y} \vee \bar{z}\right)$
14	$\left(\bar{x} \to y\right) \& \left(\bar{y} \to x\right) \& \bar{z} \cdot y$
15	$z \vee x \,\&\, \bar{y}$
16	$x \,\&\, \left(\bar{x} \,\&\, y \vee z\right) \& \left(x \vee \bar{z}\right)$
17	$\left(\bar{x} \vee y\right) \& \left(\bar{y} \vee x \,\&\, z\right)$

Продолжение таблицы 8

18	$x\&(y\leftrightarrow x)\&(\overline{x}\vee\overline{z})$
19	$(x\to y)\&x\&\overline{y}$
20	$(\overline{x}\&y)\to(z\&x)$
21	$((x\&y)\leftrightarrow z)\&x\&\overline{z}$
22	$(x\&z\vee\overline{x}\&\overline{y})\&(z\to y)$
23	$(x\vee y\&\overline{z}\vee\overline{x}\&\overline{y}\&z)\&x\&\overline{y}$
24	$(x\to y)\&(y\to x)$
25	$(x\&z\vee\overline{x}\&\overline{y})\&(z\vee y)$

Задание №2

Используя таблицу истинности, докажите тождественную истинность заданной логической формулы (таблица 9) [1, 2].

Таблица 9 − Варианты задания №2

№ варианта	Логическая формула
1	$(\overline{x}\to\overline{y})\to(y\to x)$
2	$(\overline{y}\to\overline{x})\to((\overline{y}\to x)\to y)$
3	$(x\to y)\to((z\vee x)\to(z\vee y))$
4	$(x\to y)\to x)\to x$
5	$x\to(y\to x)$
6	$(x\to y)\to(\overline{y}\to\overline{x})$
7	$\overline{a}\to(a\to b)$
8	$((a\&b)\leftrightarrow b)\leftrightarrow(b\to a)$
9	$((a\to b)\&(b\to c))\to(a\to c)$
10	$(a\to b)\to((a\vee c)\to(b\vee c))$
11	$(a\to(b\to c))\to((a\to b)\to(a\to c))$
12	$(\overline{y}\to\overline{x})\to(x\to y)$
13	$(x\to y)\&(x\to\overline{y})\to\overline{x}$
14	$(x\to(y\to z))\to((x\to y)\to(x\to z))$
15	$(z\to x)\to((z\to y)\to(z\to x\&y))$
16	$(x\to z)\to((y\to z)\to((x\vee y)\to z))$
17	$(x\to(y\to z))\to(x\&y\to z)$
18	$(x\&y\to z)\to(x\to(y\to z))$
19	$(a\to(b\&c))\leftrightarrow((a\to b)\&(a\to c))$

Продолжение таблицы 9

20	$((a \to b) \& (a \to \overline{b})) \to \overline{a}$
21	$(a \to b) \to ((a \to \overline{b}) \to \overline{a})$
22	$(a \to b) \vee (b \to a)$
23	$(a \to b) \to ((b \to a) \to (a \leftrightarrow b))$
24	$(a \to b) \to a) \to a$
25	$(a \leftrightarrow b) \to (a \to b)$

Задание №3

Используя равносильные преобразования, докажите эквивалентность логических формул (таблица 10).

Таблица 10 − Варианты задания №3

№ варианта	Логическая формула
1	$(x \leftrightarrow y) \& (x \vee y) \equiv x \& y$
2	$x \to (y \vee z) \equiv (x \to y) \vee (x \to z)$
3	$x \to (y \& z) \equiv (x \to y) \& (x \to z)$
4	$x \to (y \leftrightarrow z) \equiv (x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$
5	$x \vee (y \leftrightarrow z) \equiv (x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$
6	$(\overline{x} \to y) \vee \overline{(x \to y)} \equiv x \vee y$
7	$(x \to y) \vee z \equiv (x \vee z) \to (y \vee z)$
8	$x \to (x \leftrightarrow y) \equiv x \to y$
9	$x \to (x \& y) \equiv x \to y$
10	$\left(\overline{\overline{x} \& \overline{y}}\right) \vee ((x \to y) \& x) \equiv x \vee y$
11	$(x \to y) \& (y \to x) \& (x \vee y) \equiv x \& y$
12	$(x \& y) \vee (x \& \overline{y}) \vee (z \& y) \vee (\overline{x} \& y \& z) \equiv x \vee y \vee z$
13	$\overline{((x \leftrightarrow \overline{y}) \vee z)} \& y \equiv x \& y \& \overline{z}$
14	$(x \leftrightarrow y) \to (\overline{x} \to y) \equiv \overline{x} \to y$
15	$(x \to \overline{y}) \& ((x \to y) \vee (z \to x) \equiv x \to \overline{y}$
16	$\overline{((x \to y) \& x)} \& (\overline{x} \vee \overline{y}) \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$
17	$(x \leftrightarrow y) \& (x \vee y) \equiv x \& y$
18	$(x \& y) \vee (\overline{x} \& y) \vee (\overline{x} \& \overline{y}) \equiv x \to y$
19	$x \to (y \to z) \equiv (x \& y) \to z$
20	$\overline{(\overline{x} \& \overline{y})} \vee (x \to y) \& x \equiv x \vee y$
21	$\overline{(a \vee b) \to (\overline{b \vee c})} \equiv a \vee b \& c$

Продолжение таблицы 10

22	$(b \leftrightarrow c) \vee a \equiv (a \vee b) \leftrightarrow (a \vee c)$
23	$(b \to a) \& (a \vee b) \& (a \to b) \equiv a \& b$
24	$b \& \overline{((a \leftrightarrow \overline{b}) \vee c)} \equiv a \& b \& \overline{c}$
25	$(a \vee b) \& (a \leftrightarrow b) \equiv a \& b$

10 СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. Курс лекций: учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 1999. – 288 с.
2. Игошин В. И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учебное пособие. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 304 с.

Дмитриева Ольга Венедиктовна
Сбродов Николай Борисович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АВТОМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для самостоятельной работы и выполнения контрольной работы
по дисциплине «Теоретические основы автоматики»
для студентов очной формы обучения направлений
15.03.04 « Автоматизация технологических процессов и производств»,
27.03.04 « Управление в технических системах»

Авторская редакция

Подписано в печать 26.06.17	Формат 60x84 1/16	Бумага 65 г/м^2
Печать цифровая	Усл. печ. л. 0,75	Уч. изд. л. 0,75
Заказ № 104	Тираж 25	Не для продажи

БИЦ Курганского государственного университета.
640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.