МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра «Автоматизация производственных процессов»

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АВТОМАТИКИ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям
по дисциплине «Теоретические основы автоматики»
для студентов для студентов направлений
15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств»,
27.03.04 «Управление в технических системах»

Курган 2017

Кафедра автоматизации производственных процессов.

Дисциплина: «Теоретические основы автоматики».

Составили: канд. техн. наук, доц. О.В. Дмитриева,
канд. техн. наук, доц. Н.Б. Сбродов.

Утверждены на заседании кафедры 19 января 2017 г.

Рекомендованы методическим советом университета 12 декабря 2016 г.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Целью практических занятий по дисциплине «Теоретические основы автоматизации» является закрепление знаний, полученных студентами в ходе лекционных занятий и приобретение навыков в решении теоретических задач автоматизации.

Настоящие методические указания содержат краткое изложение теоретического материала по основным разделам дисциплины, примеры решения задач и задания для практических занятий.

1 ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ И ЛОГИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Высказыванием называется повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

Приведем примеры высказываний.

Пример 1. Волга впадает в Каспийское море.

Пример 2. Два больше трех.

Первое высказывание является истинным, а второе — ложным.

Таким образом, высказывание обладает свойством представлять истину или ложь, поэтому на высказывание можно смотреть как на величину, которая может принимать только одно из двух значений: «истина», «ложь».

Поставим в соответствие высказыванию логическую переменную x, которая принимает значение 1, если высказывание истинно, и 0, если высказывание ложно.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение, принято называть простым или элементарным. Примерами элементарных высказываний могут служить высказывания в примерах 1 и 2.

Высказывания, которые получаются из элементарных с помощью логических связок (логических операций) «не», «и», «или», «если то ...», «тогда и только тогда», принято называть сложными или составными.

Примеры сложных высказываний:

Пример 3. Число 6 делится на 2 и на 3.

Пример 4. Если число n делится на 4, то оно делится на 2.

Основными логическими операциями являются: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, эквивалентность и импликация [1].

Отрицанием высказывания x называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание x ложно, и ложным, если высказывание x истинно.

Отрицание высказывания x обозначается чертой над обозначением переменной или знаком $\neg$, и читается «не x» или «неверно, что x».

Логические значения отрицания высказывания x описываются таблицей 1.

Дизъюнкцией (логической суммой) двух высказываний x, y называется

новое высказывание, которое является истинным, если хотя бы одно из высказываний x, y истинно, и ложным, если они оба ложны.

Таблица 1 – Таблица истинности для отрицания

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Дизъюнкция двух высказываний *x, y* обозначается $x \vee y$, и читается «*x* или *y*». Логические значения дизъюнкции высказываний *x, y* описываются таблицей 2.

Таблица 2 – Таблица истинности для дизъюнкции

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Конъюнкцией (логическим произведением) двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое является истинным, если оба высказывания x, y истины, и ложным, если хотя бы одно из них ложно.

Конъюнкция двух высказываний *x, y* обозначается $x \wedge y$ или *x*&*y*, и читается «*x* и *y*». Логические значения конъюнкции высказываний *x, y* описываются таблицей 3.

Таблица 3 – Таблица истинности для конъюнкции

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Импликацией двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое является ложным, если x истинно, а y – ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Импликация двух высказываний *x, y* обозначается $x \to y$ или $x \supset y$, и читается «если *x*, то *y*» или «из *x* следует *y*». Высказывание *x* называют условием или посылкой, высказывание *y* – следствием или заключением.

Логические значения импликации высказываний x, y описываются таблицей 4.

Таблица 4 – Таблица истинности для импликации

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентностью двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое является истинным тогда, когда оба высказывания x, y либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях.

Эквивалентность двух высказываний x, y обозначается $x \leftrightarrow y$ или $x \Leftrightarrow y$ или $x \sim y$, и читается «x тогда и только тогда, когда y». Логические значения эквивалентности высказываний x, y описываются таблицей 5.

Таблица 5 – Таблица истинности для эквивалентности

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Обозначая простые высказывания логическими переменными и используя рассмотренные выше логические операции и скобки, можно сложные высказывания представлять в виде ***логических формул***.

Все возможные значения истинности логических формул в зависимости от значений входящих в них логических переменных могут быть полностью описаны с помощью ***таблицы истинности***.

Две логические формулы называются равносильными (эквивалентными), если они принимают одинаковые значения истинности на любом наборе значений логических переменных, входящих в формулу.

Обычно равносильность обозначают знаком ≡, и запись $A \equiv B$ означает, что логические формулы A и B равносильны.

Логическая формула называется тождественно истинной (тавтологией), если она принимает значение 1 при всех значениях входящих в нее логических переменных.

Логическая формула называется тождественно ложной, если она принимает значение 0 при всех значениях входящих в нее логических переменных.

Пример 5. Постройте таблицу истинности для следующей логической формулы:

$$(\bar{x} \vee y) \rightarrow (x \& \bar{y})$$

Таблица истинности для заданной формулы представлена в виде таблицы 6.

Таблица 6 – Таблица истинности для логической формулы в примере 5

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \vee y$	$x \& \bar{y}$	$(\bar{x} \vee y) \rightarrow (x \& \bar{y})$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Пример 6. Докажите тождественную истинность для следующей логической формулы:

$$x \rightarrow (y \rightarrow x)$$

Таблица истинности для заданной формулы представлена в виде таблицы 7.

Таблица 7 – Таблица истинности для логической формулы в примере 6

x	y	$y \rightarrow x$	$x \rightarrow (y \rightarrow x)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Поскольку последний столбец таблицы содержит только 1, заданная логическая формула является тождественно истинной.

Задачи к разделу 1

Задача 1. Постройте таблицы истинности для следующих логических формул:

а) $(\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \& (y \rightarrow z)$

б) $x \rightarrow (\bar{y} \vee \bar{z})$

в) $((\bar{x} \rightarrow \bar{z}) \leftrightarrow y) \rightarrow z$

г) $(\bar{y} \vee \bar{z}) \rightarrow (x \vee z)$

д) $x \& (y \rightarrow z) \vee \bar{y}$

е) $(\bar{x} \rightarrow y) \& (\bar{y} \rightarrow x) \& \bar{z} \cdot y$

Задача 2. Используя таблицы истинности, докажите тождественную истинность следующих логических формул:

а) $(\bar{x} \to \bar{y}) \to (y \to x)$

б) $(\bar{y} \to \bar{x}) \to ((\bar{y} \to x) \to y)$

в) $(x \to y) \to ((z \vee x) \to (z \vee y))$

г) $((x \to y) \to x) \to x$

д) $\bar{x} \to (x \to y)$

2 ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФОРМУЛ ЛОГИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Из перечисленных в разделе 1 функций особую роль играют три функции, а именно конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, поэтому рассмотрим более подробно их свойства.

1. Коммутативность конъюнкции и дизъюнкции:

$$x \vee y \equiv y \vee x; \;\; x \wedge y \equiv y \wedge x$$

2. Ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции:

$$x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z; \quad x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$$

Это свойство означает, что в конъюнкции или дизъюнкции нескольких переменных можно как угодно расставлять скобки (а значит, можно вообще их не ставить).

3. Законы поглощения:

$$x \vee (x \,\&\, y) \equiv x \,\&\, (1 \vee y) \equiv x$$
$$x \,\&\, (x \vee y) \equiv x$$

4. Дистрибутивность конъюнкции и дизъюнкции (распределительные законы):

$$x \,\&\, (y \vee z) \equiv (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z)$$
$$x \vee (y \,\&\, z) \equiv (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$$

5. Закон двойного отрицания:

$$\bar{\bar{x}} = x;$$

6. Правила де Моргана:

$$\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}; \quad \overline{x \vee y} = \bar{x}\,\bar{y},$$

оба эти правила обобщаются на любое число переменных:

$$\overline{x_1 x_2 \ldots x_n} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_n; \qquad \overline{x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_n.$$

7. Универсальные границы:

$$x \vee 1 \equiv 1; \;\; x \vee 0 \equiv x; \;\; x \wedge 1 \equiv x; \;\; x \wedge 0 \equiv 0$$
$$x \vee \bar{x} \equiv 1; \;\; x \wedge \bar{x} \equiv 0; \;\; x \vee x \equiv x; \;\; x \wedge x \equiv x; \;\; \bar{0} \equiv 1; \;\; \bar{1} \equiv 0$$

При выполнении равносильных преобразований полезны равносильности, выражающие одни логические операции через другие:

$$x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \,\&\, (y \to x)$$
$$(x \to y) \equiv \bar{x} \vee y$$

Пример 1. Используя эквивалентные преобразования, докажите равносильность:

$$x \leftrightarrow y \equiv \bar{x} \,\&\, \bar{y} \vee x \,\&\, y$$

Используя приведенные выше равносильности, запишем цепочку равносильных логических формул:

$$x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \,\&\, (y \rightarrow x) \equiv (\bar{x} \vee y) \,\&\, (\bar{y} \vee x) \equiv$$
$$\equiv \bar{x} \,\&\, \bar{y} \vee \bar{x} \,\&\, x \vee y \,\&\, \bar{y} \vee y \& x \equiv \bar{x} \,\&\, \bar{y} \vee 0 \vee 0 \vee y \& x \equiv$$
$$\equiv \bar{x} \,\&\, \bar{y} \vee y \& x \equiv \bar{x} \,\&\, \bar{y} \vee x \& y$$

Пример 2. Используя эквивалентные преобразования, докажите тождественную истинность логической формулы:

$$\bar{x} \rightarrow (x \rightarrow y)$$

Запишем цепочку равносильных логических формул:

$$\bar{x} \rightarrow (x \rightarrow y) \equiv \bar{\bar{x}} \vee (x \rightarrow y) \equiv x \vee \bar{x} \vee y \equiv 1 \vee y \equiv 1$$

Задачи к разделу 2

1. Доказать следующие равносильности:

а) $\overline{a \rightarrow b} \equiv a \& \bar{b};$

б) $a \rightarrow \bar{a} \equiv \bar{a};$

в) $(a \vee b) \& (a \vee c) \& (b \vee d) \& (c \vee d) \equiv (a \& d) \vee (b \& c);$

г) $a \& (a \vee c) \& (b \vee c) \equiv (a \& b) \vee (a \& c);$

д) $(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& d) \vee (c \& d) \equiv (a \vee d) \& (b \vee c);$

е) $a \vee (\bar{a} \& b) \equiv a \vee b$

2. Доказать тождественную истинность следующих формул:

а) $\left(\bar{a} \rightarrow \bar{b}\right) \rightarrow (b \rightarrow a);$

б) $\left(\bar{b} \rightarrow \bar{a}\right) \rightarrow \left(\left(\bar{b} \rightarrow a\right) \rightarrow b\right);$

в) $(a \rightarrow b) \rightarrow \left((c \vee a) \rightarrow (c \vee b)\right);$

г) $\left((a \rightarrow b) \rightarrow a\right) \rightarrow a;$

д) $\bar{a} \rightarrow (a \rightarrow b).$

3 РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Суть применения логических формул к решению логических задач состоит в том, что, имея конкретные условия логической задачи, стараются записать их в виде логической функции. При этом учитывается, что каждое высказывание может быть либо истинным, либо ложным и, значит, его можно обозначить логической переменной. В дальнейшем путем равносильных преобразований упрощают полученную формулу, что, как правило, приводит к ответу на все вопросы задачи, но иногда все-таки требуется применять логические рассуждения.

Покажем на примере, как использовать логические формулы для решения элементарных логических задач.

***Пример* 1**. По подозрению в совершении преступления задержали Брауна, Джонса и Смита. Вот что они показали:

Браун: Я совершил это. Джонс не виноват.

Джонс: Браун не виноват. Преступление совершил Смит.

Смит: Я не виноват. Виновен Браун.

В процессе следствия выяснилось, что у одного из них оба утверждения ложны, у другого одно ложно, одно истинно, а у третьего оба истинны, а также, что преступник только один. Требуется определить имя преступника, кто из них говорил правду, а кто нет.

Решение. Обозначим буквами b, d, c высказывания: виноват Браун, виноват Джонс, виноват Смит соответственно. Тогда утверждения, высказанные задержанными, можно записать в виде конъюнкций $b\&\bar{d}$, $\bar{b}\&c$, $b\&\bar{c}$, из которых по условию задачи, две ложны, а одна истинна. Истинной будет формула $k=(b\&\bar{d})\vee(\bar{b}\&c)\vee(b\&\bar{c})=1$. Но из этой формулы решение получится только дополнительным рассуждением: пусть $b=1$, тогда по условию $c=0$ и $d=0$. Но тогда из трех конъюнкций, составляющих k две будут верны: $b\&\bar{d}$, $\bar{b}\&c$, а это противоречит условию. Значит b=0. Видно, что c=1 удовлетворяет условию задачи, и это решение единственно, так как если предположить, что $d=1$, то это будет означать, что $(\bar{b}\&c)\vee(b\&\bar{c})=1$, а значит, что либо b, либо c равно 1, но это противоречит тому, что преступник только один.

Таким образом, преступник – Смит, оба его высказывания ложны, у Брауна одно высказывание ложно, одно нет, а Джонс сказал правду.

Задачи к разделу 3

Задача 1. Внимание Андрея, Дениса и Марата привлек промчавшийся мимо них автомобиль.

«Это английская машина марки «Феррари», - сказал Андрей.

«Нет, машина итальянская марки «Понтиак», - возразил Денис.

«Это «Сааб», и сделан он не в Англии» - сказал Марат.

Оказавшийся рядом знаток автомобилей сказал, что каждый из них прав только в одном из двух высказанных предположений. Какой же марки автомобиль, и в какой стране изготовлен?

Задача 2. Беседуют трое друзей: Белокуров, Рыжов и Чернов. Брюнет сказал Белокурову: «Любопытно, что один из нас блондин, другой - брюнет, третий - рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствуют фамилии». Какой цвет каждого из друзей?

Задача 3. В бутылке, стакане, кувшине и банке находится молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что:

- вода и молоко не в бутылке;
- сосуд с лимонадом стоит между кувшином и квасом;
- в банке не лимонад и не вода;
- стакан стоит между банкой и сосудом с молоком.

В каком сосуде находится каждая из жидкостей?

Задача 4. Известно, что каждый из двух персонажей А и В является либо рыцарем, либо лжецом. Выясните, кто есть кто, если А высказывает следующее утверждение:

- «По крайней мере один из нас лжец»;
- «Я - лжец, а В - не лжец»;
- «Или я - лжец, или В - рыцарь».

Задача 5. В гимназии, перешедшей на самообслуживание, четырем старшеклассникам - Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручили убрать 7-й, 8-й, 9-й и 10-й классы. При проверке оказалось, что 10-й класс плохо убран. Не ушедшие домой ученики сообщили о следующем.

Андреев: «Я убирал 9-й класс, а Савельев - 7-й».

Костин: «Я убирал 9-й класс, а Андреев - 8-й класс».

Савельев: «Я убирал 8-й класс, а Костин - 10 класс».

Давыдов ушел домой. Оказалось, что каждый ученик половину говорил правильно, а другую неправильно. Какой класс убирал каждый ученик?

Задача 6. Андрей и Борис разговаривали о предстоящей контрольной работе по математике. Андрей сказал: «Если я справлюсь с работой, то и ты с ней тоже справишься». Борис ответил: «А если я не справлюсь с работой, то и ты с ней тоже не справишься». Докажите, что во время этого разговора или оба говорят правду, или оба лгут.

Задача 7. Даны следующие утверждения:

1) Джо-ловкач,
2) Джо не везет,
3) Джо везет, но он не ловкач,
4) Если Джо - ловкач, то ему не везет,
5) Джо ловкач тогда и только тогда, когда ему везет,
6) Либо Джо ловкач, либо ему везет, но не то и другое одновременно.

Каково наибольшее число утверждений из данных шести, которые могут быть одновременно истинными?

Задача 8. Некий любитель приключений отправился в кругосветное путешествие на яхте, оснащенной бортовым компьютером. Его предупредили, что чаще всего выходит из строя три узла компьютера - a,b,c, и дали необходимые детали для замены. Выяснить, какой именно узел надо заменить он может по сигнальным лампочкам на контрольной панели. Лампочек тоже три: x, y, z.

Инструкция по выявлению неисправных узлов такова:

1) если неисправен хотя бы один из узлов компьютера, то горит по крайней мере одна из лампочек x, y, z;

2) если неисправен узел a, но исправен узел c, то загорается лампочка y;

3) если неисправен узел c, но исправен узел b,то загорается лампочка y, но не загорается лампочка x;

4) если неисправен узел b, но исправен узел c, то загораются лампочки x и y или не загорается лампочка x;

5) если горит лампочка x и при этом либо неисправен узел а, либо все три

узла *a, b, c* исправны, то горит и лампочка *y*.

В пути компьютер сломался. На контрольной панели загорелась лампочка *x*. Тщательно изучив инструкцию, путешественник починил компьютер. Но с этого момента и до конца плавания его не оставляла тревога. Он понял, что инструкция несовершенна и есть случаи, когда она ему не поможет.

Какие узлы заменил путешественник? Какие изъяны он обнаружил в инструкции?

4 БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Булевой (логической) функцией n переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется такая функция, у которой все переменные и сама функция могут принимать только два значения: 0 и 1.

Переменные, которые могут принимать только два значения **0** и **1** называются ***логическими*** переменными (или просто переменными).

Логическая функция может быть задана словесно, алгебраическим выражением или таблицей истинности. Например, функция трех переменных $f(x,y,z)$ может определяться следующей таблицей истинности (таблица 8):

Таблица 8 - Таблица истинности функции $f(x,y,z)$

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Это означает, что $f(0,0,0) = 1$, $f(0,0,1) = 0$, $f(0,1,0) = 1$ и т. д.

Две функции равны, если совпадают их таблицы истинности (на объединенном наборе переменных).

При таком задании наборы переменных всегда упорядочены естественным образом, это позволяет определять функцию только последним столбцом (который иногда для экономии места записывается в строчку). Например, в нашем примере функцию $f(x,y,z)$ можно задать так: $f(x,y,z) = (10110100)$.

Рассмотрим основные булевы.

Перенумеруем четыре функции одной переменной $y=f(x)$ естественным образом и расположим в виде таблицы 9.

Видно, что $f_0(x) = 0$, а $f_3(x) = 1$, т. е. эти две функции не зависят от x. Функция $f_1(x) = x$, т. е. она не меняет аргумента. Функция $f_2(x)$ действительно содержательная функция. Она принимает значения, противоположные значениям аргумента, обозначается $f_2(x)=\overline{x}$ и называется отрицанием.

Таблица 9 – Булевы функции одной переменной

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Число функций двух переменных $f(x,y)$ функций равно $2^4 = 16$. Перенумеруем и расположим их также в естественном порядке (таблица 10).

Таблица 10 – Булевы функции двух переменных

Переменные x / y / Функции f	$x=0$, $y=0$	$x=0$, $y=1$	$x=1$, $y=0$	$x=1$, $y=1$	Алгебраическое выражение	Наименование функции
f_0	0	0	0	0	$f_0 = 0$	Постоянный 0
f_1	0	0	0	1	$f_1 = x \cdot y$	Конъюнкция (функция И)
f_2	0	0	1	0	$f_2 = x \cdot \overline{y}$	Запрет
f_3	0	0	1	1	$f_3 = x$	Тождественность x
f_4	0	1	0	0	$f_4 = \overline{x} \cdot y$	Запрет
f_5	0	1	0	1	$f_5 = y$	Тождественность y
f_6	0	1	1	0	$f_6 = x \oplus y$	Сложение по модулю 2 Сумма Жегалкина (исключающее ИЛИ) (неравнозначность)
f_7	0	1	1	1	$f_7 = x \vee y$	Дизъюнкция (функция ИЛИ)
f_8	1	0	0	0	$f_8 = \overline{x \vee y}$	Стрелка Пирса Операция Вебба Антидизъюнкция (НЕ-ИЛИ)
f_9	1	0	0	1	$f_9 = x \Leftrightarrow y$	Эквивалентность (подобие) Равнозначность
f_{10}	1	0	1	0	$f_{10} = \overline{y}$	Отрицание y
f_{11}	1	0	1	1	$f_{11} = y \rightarrow x = \overline{y} \vee x$	Импликация от y к x
f_{12}	1	1	0	0	$f_{12} = \overline{x}$	Отрицание x

Продолжение таблицы 10

f_{13}	1	1	0	1	$f_{13} = x \to y = \overline{x} \vee y$	Импликация от x к y
f_{14}	1	1	1	0	$f_{14} = \overline{x \cdot y}$	Штрих Шеффера Антиконъюнкция (НЕ-И)
f_{15}	1	1	1	1	$f_{15} = 1$	Постоянная 1

5 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ СОВЕРШЕННЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Простой конъюнкцией называется конъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная встречается не более одного раза (либо сама, либо ее отрицание).

Например, $x \cdot y \cdot \overline{z}$ является простой конъюнкцией.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция простых конъюнкций.

Например, выражение $x \cdot y \vee \overline{y} \cdot z$ является ДНФ.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называется такая дизъюнктивная нормальная форма, у которой в каждую конъюнкцию входят все переменные данного списка (либо сами, либо их отрицания), причем в одном и том же порядке.

Например, выражение $x \vee y \cdot \overline{z}$ является ДНФ, но не СДНФ.

Выражение $x \cdot y \cdot z \vee x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot y \cdot z$ является СДНФ.

Аналогичные определения (с заменой конъюнкции на дизъюнкцию и наоборот) верны для КНФ и СКНФ. Приведем точные формулировки.

Простой дизъюнкцией называется дизъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная входит не более одного раза (либо сама, либо ее отрицание).

Например, выражение $x \vee \overline{y} \vee z$ – простая дизъюнкция.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция простых дизъюнкций.

Например, выражение $\left(x \vee y \vee \overline{z}\right) \cdot \left(x \vee z\right) \cdot \left(y \vee \overline{z}\right)$ – КНФ.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется такая КНФ, у которой в каждую простую дизъюнкцию входят все переменные данного списка (либо сами, либо их отрицания), причем в одинаковом порядке.

Например, выражение $\left(x \vee y \vee \overline{z}\right) \cdot \left(x \vee z\right) \cdot \left(y \vee \overline{z}\right)$ является СКНФ.

Если булева функция не равна тождественному нулю, то ее можно представить в виде СДНФ по ее таблице истинности следующим образом: берем только те наборы переменных (x_1, x_2, …, x_n), для которых f(x_1, x_2, …,

x_n) =1, и составляем простую конъюнкцию для этого набора так: если x_i = 0, то берем в этой конъюнкции $\bar{x}_i$, если x_i = 1, то берем x_i. Составляя дизъюнкцию этих простых конъюнкций, получим СДНФ.

Любую логическую (булеву) функцию можно выразить через три логические функции: конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

По аналогии с представлением любой функции (не равной тождественному нулю) в виде СДНФ можно функцию (не равную тождественной 1) представить в виде СКНФ: ***простая дизъюнкция составляется для тех наборов переменных (x_1, x_2, …, x_n), для которых f(x_1, x_2,…, x_n) = 0, причем если x_i = 1, то в этой дизъюнкции берем $\bar{x}_i$, если же x_i = 0, то берем x_i.***

Пример 1. Составить для импликации и суммы по модулю 2 СДНФ и СКНФ. Составим таблицу истинности для рассматриваемых функций (таблица 11).

Таблица 11 – Таблица истинности для функций импликация и сложение по модулю два

x	y	$f_1 = x \to y$	$f_2 = x \oplus y$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	0

СДНФ для этих функций: $f_1(x,y) = x \to y = \bar{x} \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot y \vee x \cdot y$;

$f_2(x,y) = x \oplus y = x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot y$

СКНФ для этих функций: $f_1(x,y) = x \to y = \bar{x} \vee y$

$f_2(x,y) = x + y = (x \vee y) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y})$

Пример 2. Составить СДНФ и СКНФ на примере мажоритарной системы подсчета голосов, т.е. системы, дающей сигнал «1» на выходе, если более половины сигналов на входе «1». Составим таблицу истинности для рассматриваемой функции (таблица 12).

Таблица 12 – Таблица истинности

	a	$в$	c	f		
0	0	0	0	**0**		$a \vee в \vee c$
1	0	0	1	**0**		$a \vee в \vee \bar{c}$
2	0	1	0	**0**		$a \vee \bar{в} \vee c$
3	0	1	1	**1**	$\bar{a} \cdot в \cdot c$	

Продолжение таблицы 12

4	1	0	0	**0**		$\bar{a} \vee в \vee c$
5	1	0	1	**1**	$a \cdot \bar{в} \cdot c$	
6	1	1	0	**1**	$a \cdot в \cdot \bar{c}$	
7	1	1	1	**1**	$a \cdot в \cdot c$	

В совершенной дизъюнктивной нормальной форме заданная функция записывается в виде:

$$f(a,b,c) = a \cdot в \cdot \bar{c} \vee a \cdot \bar{в} \cdot c \vee \bar{a} \cdot в \cdot c \vee a \cdot в \cdot c,$$

т.е. функция записана для тех строк, где она обращается в 1.

В совершенной конъюнктивной нормальной форме заданная функция записывается в виде:

$$f(a,b,c) = (a \vee в \vee c) \cdot (\bar{a} \vee в \vee c) \cdot (a \vee \bar{в} \vee c) \cdot (a \vee в \vee \bar{c}),$$

т.е. функция записана для тех строк, в которых она обращается в 0.

Как указано выше, в таблице 10 приведен полный набор логических функций для 2-х переменных.

Покажем эквивалентность СНДФ и СКНФ на примере функции НЕ-ИЛИ (это функция f_8 таблицы 10). Таблица истинности функции имеет вид, приведенный в таблице 13.

Таблица 13 – Таблица истинности для функции НЕ-ИЛИ

x	y	f_8		
0	0	1	$\bar{x} \cdot \bar{y}$	
0	1	0		$x \vee \bar{y}$
1	0	0		$\bar{x} \vee y$
1	1	0		$\bar{x} \vee \bar{y}$

Отсюда имеем СДНФ в виде $f_8(x,y) = \bar{x} \cdot \bar{y}$ и СКНФ в виде - $f_8(x,y) = (x \vee \bar{y}) \cdot (\bar{x} \vee y) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y})$.

Добавим в выражение для СКНФ член $\bar{x} \vee \bar{y}$ и получим:

$$f_8(x,y) = (x \vee \bar{y}) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) \cdot (\bar{x} \vee y) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y},$$

т.к. $(x \vee \bar{y}) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) = x \cdot \bar{x} \vee x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \vee \bar{y} \cdot \bar{y} = 0 \vee \bar{y}(x \vee \bar{x}) \vee \bar{y} = \bar{y} \vee \bar{y} = \bar{y}$,;

Аналогично $(\bar{x} \vee y) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) = \bar{x}$.

Таким образом, СДНФ и СКНФ эквивалентны.

Набор функций, через которые можно выразить любые другие функции, называется полным набором. Таким образом***, конъюнкция, дизъюнкция и отрицание является полным набором.***

Аналогичным свойством обладают еще две функции: ***стрелка Пирса (антидизъюнкция, НЕ-ИЛИ)*** и ***штрих Шеффера (антиконъюнкция НЕ-И)*** – любую булеву функцию можно выразить, используя только одну из указанных функций.

Упрощение логических выражений можно произвести с помощью методов минимизации. Для несложных функций используются эквивалентные (равносильные) преобразования. Для более сложных с числом переменных от 3 до 6 применяют карты Карно.

Задачи к разделу 5

Задача 1. Для функций, приведенных в таблице 14, выполнить следующее:

1. Составить таблицу истинности;
2. Записать СДНФ и СКНФ функции;
3. Доказать эквивалентность СДНФ и СКНФ.

Таблица 14 - Варианты заданий

№ варианта	Функция
1	$f(x,y,z) = \bar{x} \,\&\, y \vee \left(\overline{x \vee z}\right)$
2	$f(x,y,z) = z \to \left(\bar{x} \vee \bar{y}\right)$
3	$f(x,y,z) = x \,\&\, y \to \left(\overline{x \vee \bar{y}}\right)$
4	$f(x,y,z) = \left(x \,\&\, y \,\&\, \bar{z}\right) \sim \left(\bar{x} \vee y\right)$
5	$f(x,y,z) = \left(\bar{x} \vee \bar{y}\right) \sim y$
6	$f(x,y,z) = \left(x \to y\right) \to \bar{z}$
7	$f(x,y,z) = \left(\bar{x} \to \bar{y}\right) \& \left(y \to z\right)$

6 МИНИМИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ КАРТ КАРНО

Рассмотрим пример минимизации логической функции.

Упростим полученную в ***примере 2*** раздела 5 СНДФ функцию *f*, добавив в уравнение член *a&в&c* дважды (это допустимо, т.к. ***a*** $\vee$ ***a*** $\vee$ ***a = a***):

$$f = \bar{a}\cdot в\cdot c \vee a\cdot \bar{в}\cdot c \vee a\cdot в\cdot \bar{c} \vee a\cdot в\cdot c \vee a\cdot в\cdot c \vee a\cdot в\cdot c =$$

$$= в\cdot c\cdot\left(a \vee \bar{a}\right) \vee a\cdot c\cdot\left(в \vee \bar{в}\right) \vee a\cdot в\cdot\left(c \vee \bar{c}\right) = a\cdot в \vee a\cdot c \vee в\cdot c$$

Для упрощения более сложных функций приходится применять основные законы алгебры логики, наиболее употребительные законы отрицания и правило де Моргана, например:

$$f = \left(\overline{a \vee в \vee с}\right) \vee \bar{a} \vee c \vee \bar{a}\cdot\bar{в} \vee \left(\overline{a\cdot в}\right) = \left(\bar{a}\cdot\bar{в}\cdot\bar{c}\right) \vee \bar{a} \vee c \vee \bar{a}\cdot\bar{в} \vee \left(\bar{a} \vee \bar{в}\right).$$

Первый и последний член преобразованы на основании правила де Моргана. Далее сгруппируем члены уравнения.

$$f=\left(\bar{a}\cdot\bar{в}\cdot\bar{c}\vee\bar{a}\cdot\bar{в}\right)\vee\left(a\vee a\right)\vee c\vee в=\bar{a}\cdot\bar{в}\cdot\left(\bar{c}\vee 1\right)\vee\bar{a}\vee\bar{c}\vee\bar{в}=\bar{a}\cdot\bar{в}\vee\bar{a}\vee c\vee\bar{в},$$

т.к. $\bar{c}\vee 1=1$; $\bar{a}\vee\bar{a}=\underline{a}$

Можно еще упростить, добавив $\bar{a}\cdot\bar{в}$ (на основании аксиомы $a\vee a\vee a=a$) и снова сгруппировав члены уравнения:

$$f=\left(\bar{a}\cdot\bar{в}\vee\bar{в}\right)\vee\left(\bar{a}\cdot\bar{в}\vee\bar{a}\right)\vee c=\bar{в}\cdot\left(\bar{a}\vee 1\right)\vee\bar{a}\cdot\left(\bar{в}\vee 1\right)\vee c=\bar{в}\vee\bar{a}\vee c,$$

(на основании закона поглощения), таким образом, мы имеем:

$$f=\left(\overline{a\vee в\vee c}\right)\vee\bar{a}\vee c\vee\bar{a}\cdot в\vee\left(\overline{a\cdot в}\right)=\bar{a}\vee\bar{в}\vee c$$

При большом числе переменных использование алгебраических преобразований резко усложняется, поэтому применяют карты Карно. Карта Карно – это представление таблицы истинности в виде прямоугольной таблицы с соответствующим числом клеток, каждая из которых отвечает определенной конъюнкции (произведению переменных). Переменные следуют так, чтобы в соседних клетках отличалась только одна из них, т.е. вместо чередования 00; 01; 10 и 11 используют код Грея 00; 01; 11 и 10.

Внимание: необходимо учесть, что рабочей частью карты Карно является часть таблицы истинности, выделенная жирным шрифтом (таблица 12) и содержащая в данном случае 8 клеток, соответствующие 8 строкам таблицы истинности.

Например, левая верхняя клетка, которой соответствуют $\bar{a};\bar{в}$ (указаны выше) и $\bar{c}$ (указана слева), очевидно, отвечает 1-ой строке таблицы с номером 0. Правая нижняя клетка карты, которой соответствуют переменные $\bar{a};\bar{в}$ и $\bar{c}$, отвечает строке таблицы с номером 5, и т.д. Карта Карно для функции, рассмотренной в примере 2 раздела 5, представлена в таблице 15.

Таблица 15 – Карта Карно

$a\ в$ / c		00 $\bar{a}\cdot\bar{в}$	01 $\bar{a}\cdot в$	11 $a\cdot в$	10 $a\cdot\bar{в}$
$\bar{c}$	0	0	0	1	0
c	1	0	1	1	1

В клетки карты заносим 0 или 1 в соответствии с таблицей истинности (таблица 12). Далее необходимо в карте выделить один или несколько прямоугольников, включающих возможно большее число клеток с «1». При этом прямоугольники могут содержать 2^n клеток, т.е.1, 2, 4, 8 и т.д.

Одна и та же клетка может входить в несколько прямоугольников. В нашем случае таких прямоугольников можно выделить 3, каждому из них соответствует один член искомого уравнения. Для вертикального прямоугольника можно записать $a \cdot в \cdot c \vee a \cdot в \cdot \bar{c} = a \cdot в \cdot (c \vee c) = a \cdot в$.

Для двух оставшихся получаем $в \cdot c$ и $a \cdot c$; т.е. ту переменную, которая повторяется дважды – один раз «0», другой «1» - исключаем, а ту, которая не меняется, оставляем.

Сокращенная ДНФ функции $f = a \cdot в \vee a \cdot c \vee в \cdot c$.

Карты Карно используются для минимизации булевых функций при *n* = 3, 4, 5. При большем количестве переменных *n* карты Карно практически не используются.

Надо учесть, что в карте Карно можно объединить клетки в крайних строках (таблица 16), рассматривая карту как цилиндр, и даже в углах, рассматривая карту как шар (таблица 17).

Таблица 16 - Карта Карно для функции $y = в \cdot \bar{d} \vee \bar{в} \cdot d$

c d \ *a в*		00 $\bar{a} \cdot \bar{в}$	01 $\bar{a} \cdot в$	11 $a \cdot в$	10 $a \cdot \bar{в}$
$\bar{c} \cdot \bar{d}$	00	0	1	1	0
$\bar{c} \cdot d$	01	1	0	0	1
$c \cdot d$	11	1	0	0	1
$c \cdot \bar{d}$	10	0	1	1	0

Таблица 17 – Карта Карно для функции $y = \bar{в} \cdot \bar{d}$

c d \ *a в*		00 $\bar{a} \cdot \bar{в}$	01 $\bar{a} \cdot в$	11 $a \cdot в$	10 $a \cdot \bar{в}$
$\bar{c} \cdot \bar{d}$	00	1	0	0	1
$\bar{c} \cdot d$	01	0	0	0	0
$c \cdot d$	11	0	0	0	0
$c \cdot \bar{d}$	10	1	0	0	1

Задачи к разделу 6

Задача 1. Найдите СДНФ булевых функций:

а) *f (x, y, z) = (1,1,0,1,0,0,1,1)*
б) *f (x, y, z) = (1,1,1,1,0,0,1,0)*
в) *f (x, y, z) = (0,0,0,1,0,0,1,1)*
г) *f (x, y, z) = (1,1,1,1,0,0,0,0)*
д) *f (x, y, z) = (0,1,0,1,1,0,1,0)*
е) *f (x, y, z) = (1,0,1,1,0,0,1,1)*

Задача 2. Используя карту Карно, упростить СДНФ, полученные при решении задачи 1.

7 РАЗРАБОТКА И МИНИМИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ

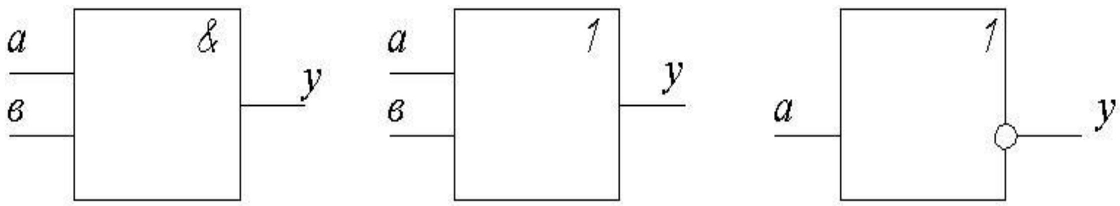
Рассмотрим построение логических схем на логических элементах, реализующих простейшие логические функции (рисунок 1).

Словесное определение функциям можно дать следующее:

1) ***Элемент И*** – на выходе появится «1», если на входе ***а*** **И** выходе ***в*** будет «1», в остальных случаях на входе «0», т.е. функция равна 0.

2) ***Элемент ИЛИ*** – на выходе появится «1», если **ИЛИ** на входе ***а,*** **ИЛИ** на входе ***в*** будет «1».

3) ***Элемент НЕ*** – состояние выхода всегда будет противоположно (инверсно) состоянию входа, т.е. на входе **НЕ** то, что на входе.



в	а	у
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

а

в	а	у
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

б

а	у
0	1
1	0

в

Рисунок 1 – Изображения логических элементов и таблиц истинности: *а* – конъюнкция (элемент И), *б* – дизъюнкция (элемент ИЛИ), *в* – отрицание (элемент НЕ)

С помощью данных логических элементов можно реализовать любую логическую функцию, описывающую работу логической схемы системы автоматики.

Чтобы представить два логических состояния «1» и «0» в схемах, соответствующие им входные и выходные сигналы имеют один из двух установленных уровней напряжения, например, +5В и 0В или +24В и 0В.

Высокий уровень обычно соответствует значению «истина» («1»), а низкий - значению «ложь» («0»).

Пример 1. Составить логическую схему, реализующую функцию мажоритарной системы подсчета голосов, т.е. системы, дающей сигнал «1» на выходе, если более половины сигналов на входе «1» (пример 2 в разделе 5).

Логическая схема, соответствующая СДНФ:

$$y = a \cdot в \cdot \overline{c} \vee a \cdot \overline{в} \cdot c \vee \overline{a} \cdot в \cdot c \vee a \cdot в \cdot c \,,$$

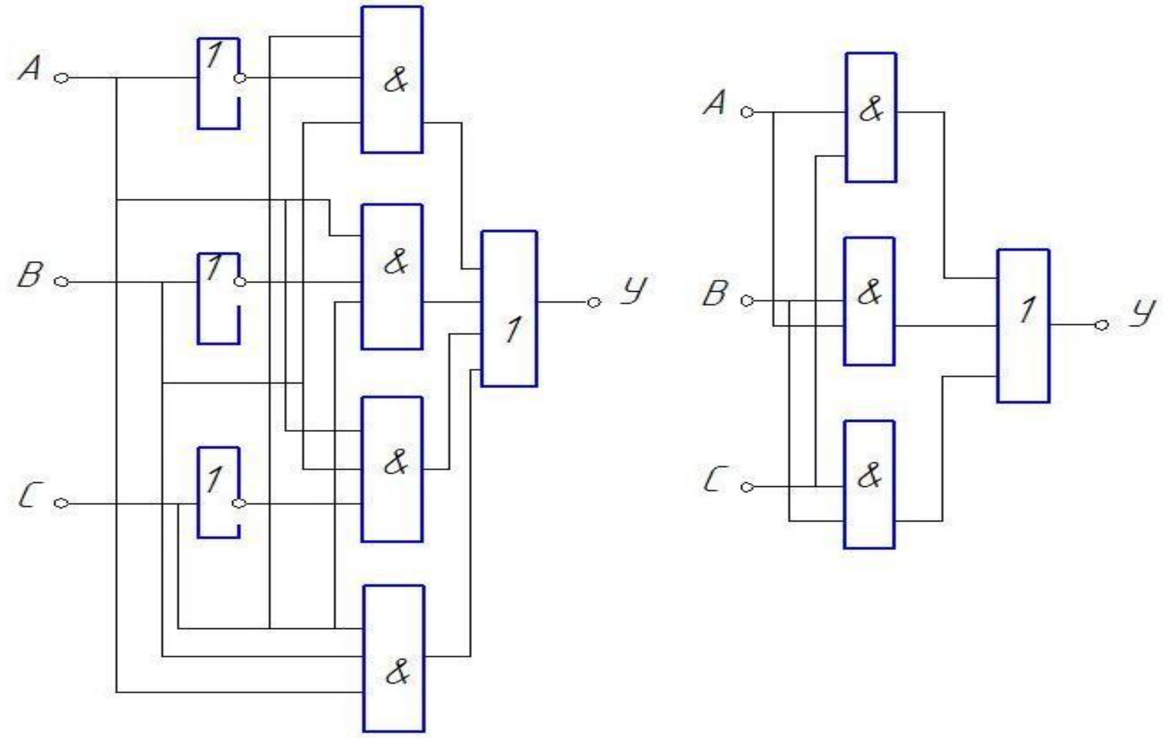
представлена на рисунке 2, *а*.

После минимизации функции схема, соответствующая сокращенной ДНФ, представлена на рисунке 2, *б*.

Таким образом, если исходное выражение требовало для реализации 8 элементов (четыре элемента «И», три элемента «НЕ» и один элемент «ИЛИ») при общем числе входов 19, то упрощенное выражение требует три элемента «И» и один элемент «ИЛИ» при общем числе входов 9. Сложность устройства уменьшена вдвое, если судить по числу входов.

Задачи к разделу 7

Задача 1. Составьте релейно-контактные схемы и схемы на логических



а *б*

Рисунок 2 – Электрические схемы, соответствующие исходной СДНФ (*а*) и сокращенной ДНФ (*б*) заданной логической функции

элементах по формулам проводимости.

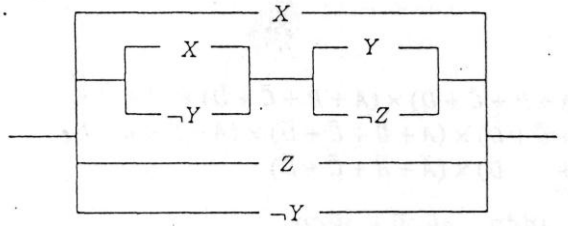
1. $(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee z)$.
2. $(\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{y} \wedge z)$.
3. $(x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z)$.
4. $(x \vee \bar{y}) \wedge \left(x \vee (\bar{y} \wedge z)\right)$.

Задача 2. Постройте релейно-контактные схемы и схемы на логических элементах по данным условиям работы,

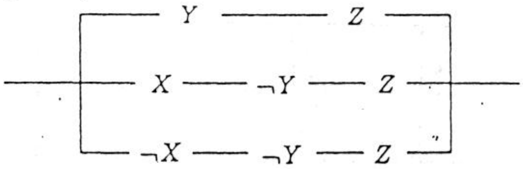
1. f = (1; 1; 0) = f = (1; 0; 1) = f = (0; 1; 1) = 1.
2. f = (1; 1; 1) = f = (1; 0; 1) = f = (1; 1; 0) = 1.
3. f = (1; 0; 0) = f = (0; 1; 0) = f = (0; 0; 1) = 1.
4. f = (0; 1; 1) = f = (0; 0; 1) = f = (0; 0; 0) = 1.

Задача 3. Упростите следующие релейно-контактные схемы и составьте для упрощенных функций проводимости схемы на логических элементах.

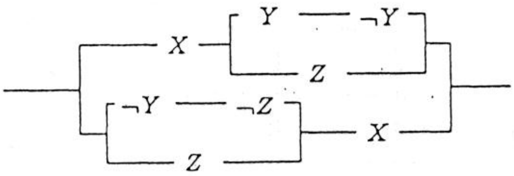
1.



2.

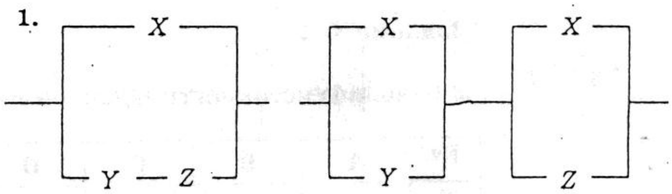


3.

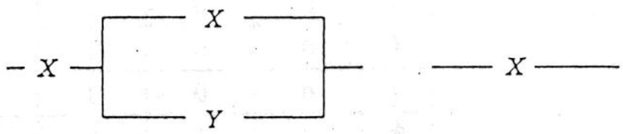


Задача 4. Проверьте, является ли равносильными следующие релейно-контактные схемы.

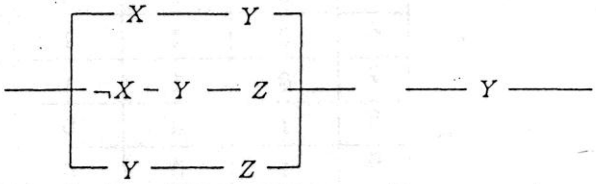
1.



2.



3.



Задача 5. Постройте релейно-контактные схемы и схемы на логических элементах для решения задач, приведенных ниже.

1.Машина-экзаменатор дает сигнал «зачтено» (зажигается лампочка) в том и только в том случае, если экзаменующийся ответил правильно, хотя бы на два из трех вопросов билета. При вводе правильного ответа замыкается контакт в цепи сигнальной лампочки. Постройте схему этой цепи.

2.Комитет, состоящий из трех человек, включая председателя, выносит решение большинством голосов, однако решение не может быть принято, если за него не проголосовал председатель. Голосование «за» производится поворотом ручки, замыкающей контакт, и в случае принятия решения зажигается лампочка. Постройте простейшую схему такой цепи.

3. Спроектируйте электрическую цепь для лестничного пролета двухэтажного здания, где желательно иметь два выключателя: на первом и втором этажах, при этом поворот каждого выключателя должен размыкать цепь, если до этого она была замкнута, и замыкать, если ранее она была разомкнута.

4. Составьте схему цепи с тремя независимыми контактами, которая замкнута тогда и только тогда, когда замкнуты не более чем два контакта.

5. Составьте схему цепи с тремя независимыми контактами, которая замкнута тогда и только тогда, когда разомкнут только один контакт.

8 ПОИСК КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ В ГРАФАХ

Пусть задан граф ***G=(V, E),*** ребрам которого заданы веса. Это означает, что каждому ребру поставлено в соответствие некоторое вещественное число, называемое весом данного ребра [2].

Задача нахождение кратчайших путей в графе может быть сформулирована следующим образом: для произвольного графа ***G=(V, E)*** с заданными весами ребер дуг найти длины кратчайших путей, ведущих от выделенной вершины ко всем остальным вершинам графа (в частном случае, до одной вершины), и определить эти пути.

Можно привести много практических интерпретаций задачи о нахождении кратчайших путей. Например: 1) нахождение кратчайшего маршрута между населенными пунктами, связанными сетью автомобильных дорог; 2) нахождение кратчайшего маршрута доставки сообщения в компьютерной сети; 3) нахождение оптимальной схемы прокладки инженерных сетей между зданиями населенного пункта с наименьшей стоимостью коммуникаций и т.п.

Существует много различных по эффективности алгоритмов решения сформулированной выше задачи: алгоритм Дейкстры, алгоритм Форда-Беллмана, алгоритм Флойда и др.

Рассмотрим суть алгоритма Дейкстры [3].

Необходимо найти кратчайшее расстояние от вершины v_1 к вершине v_n. Начинаем с вершины v_1 и находим расстояние от данной вершины v_1 до каждой из смежных с ней вершин. Выбираем вершину, расстояние от которой до вершины v_1 наименьшее, пусть это будет вершина v_i. Далее находим расстояние от вершины v_1 до каждой вершины, смежной к v_i вдоль пути, проходящего через вершину v_i. Если это расстояние меньше, чем текущее расстояние, присвоенное каждой из вершин, то заменяем им текущее расстояние. Снова выбираем вершину, ближайшую к v_1, но не совпадающую с выбранной ранее, и процесс повторяется.

Основные шаги алгоритма Дейкстры

Шаг 1. Каждой вершине поставить в соответствие упорядоченную пару **(∞, 0)**. Первая координата вершины v_i (m, v_r) будет означать присвоенное расстояние от вершины v_1 к вершине v_i , а вторая координата — предыдущую вершину пути от v_1 к v_i .

Шаг 2. Начать с вершины v_1 **(∞, 0)**, заменить ее координаты на v_1 **(0, 0)** и сделать ее постоянной. Остальные вершины на этот момент оставить временными.

Шаг 3. Когда вершина v_k (m, v_r) станет постоянной, для каждой вершины v_j, смежной к v_k, прибавить величину m к расстоянию от вершины v_k к вершине v_j. Если это значение меньше, чем текущее расстояние, присвоенное вершине v_j, то заменить текущее расстояние этой суммой и вторую координату на v_k.

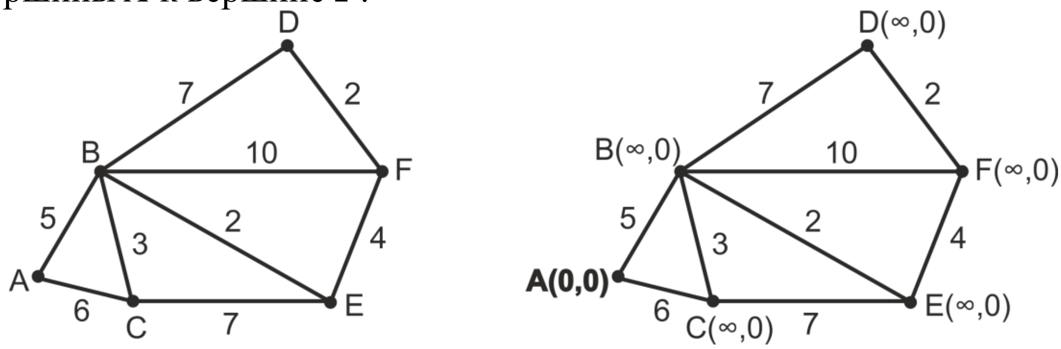
Шаг 4. Найти минимум из расстояний, присвоенных временным вершинам. Первую из вершин с таким расстоянием сделать постоянной.

Шаг 5. Если v_n – не постоянная вершина, то возвращаемся к шагу 3.

Шаг 6. Если v_n – постоянная вершина, то расстояние, присвоенное вершине v_n, является кратчайшим расстоянием от v_1 к v_n.

Шаг 7. Для нахождения кратчайшего пути начать в вершине v_n, найти предшествующую ей вершину пути (вторая координата). Для каждой вершины пути v_j находить предшествующую ей вершину пути, пока не будет достигнута вершина v_1 . Перестановка вершин в обратном порядке даст кратчайший путь.

Пример 1[3]. Для графа, изображенного на рисунке 3*а*, найти кратчайший путь от вершины ***A*** к вершине ***F***.



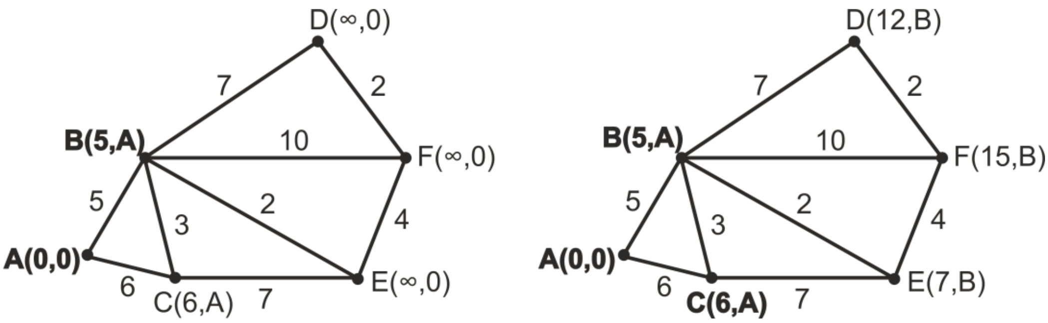
а *б*

Рисунок 3 – Поиск кратчайшего пути в графе:
а – исходный граф; *б* – этап 1

Этап 1. Приступим к построению путей от вершины ***A*** к другим вершинам. Первая компонента упорядоченной пары покажет длину кратчайшего пути к вершине в момент достижения, а вторая компонента укажет на предыдущую вершину кратчайшего пути. Первая компонента будет содержать ∞, а вторая – 0 до тех пор, пока путь не найден. Вершина, которая стала постоянной, будет выделена жирным шрифтом. Выполнив шаг 2 алгоритма, получаем граф, изображенный на рисунке 3*б*.

Этап 2. Поскольку вершины ***B*** и ***C*** – смежные с вершиной ***A***, выполняем шаг 3 и упорядоченной паре для вершины ***B*** присваиваем значение ***(5, A)***, а упорядоченной паре для вершины ***C*** присваиваем значение ***(6, A)***. Фактически, изменения вносятся, тогда и только тогда, когда новые расстояния меньше старых, но поскольку старые расстояния до вершин ***B*** и ***C*** равны ∞, в данном случае это не имеет значения. Выполнив шаг 4 алгоритма, выбираем наименьшее из временных присвоенных значений. В данном случае это расстояние до вершины ***A***, равное 5, и вершину ***B(5, A)*** делаем постоянной. Таким образом, получаем рисунок 4*а*.

Этап 3. Возвращаясь к шагу 3, рассмотрим временные вершины ***C, D, E*** и ***F***, смежные с вершиной ***B***. В каждом случае прибавляем расстояние от вершины ***A*** к вершине ***B*** к расстоянию от вершины *B* к данным вершинам. Таким образом, для вершины ***C*** это будет 5 + 3 = 8. Для вершины ***D*** имеем 5 + 7 = 12. Для вершины ***E*** имеем 5 + 2 = 7. Для вершины ***F*** получаем 5 + 10 = 15. Поскольку новое расстояние до вершины ***C*** не меньше, чем уже присвоенное, упорядоченную пару ***C(6, A)*** оставляем без изменения. Новые расстояния до вершин **D, *E*** и ***F*** меньше уже присвоенных, поэтому им задаем значения, которые получены для пути из вершины ***B***, т.е. меняем их на ***D(12, B)***, ***E(7, B)*** и ***F(15,B).*** Выполнив шаг 4 алгоритма, находим наименьшее из расстояний, присвоенных временным вершинам, поэтому берем ***min {6,12,15,7} = 6***, и поскольку вершина ***C*** имеет это расстояние, делаем вершину ***C(6,A)*** постоянной. Таким образом, получаем рисунок 4*б*.



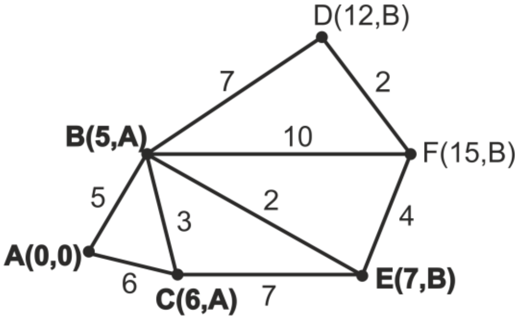
а *б*

Рисунок 4 – Поиск кратчайшего пути в графе:
а – этап 2; *б* – этап 3

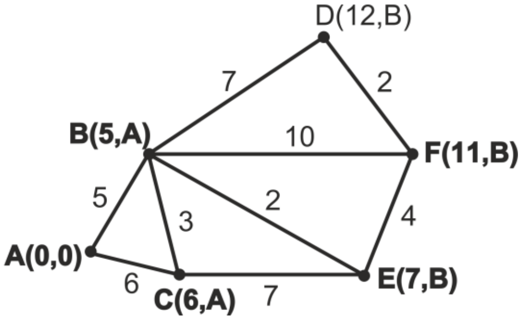
Этап 4. Берем новую постоянную вершину ***C***. Выполнение шага 3 не приводит к изменениям. Выполнив шаг 4, делаем вершину ***E(7, B)*** постоянной. Получаем в результате рисунок 5*а*.

Этап 5. Берем новую постоянную вершину ***E*** и, используя шаг 3, меняем ***F(15, B)*** на ***F(11, E)*** Выполнив шаг 4, делаем вершину ***F (11, E)*** постоянной. Таким образом, получаем рисунок 5*б*.

Этап 6. Вершина ***F*** стала постоянной, поэтому процесс завершен и 11 – это кратчайшее расстояние от вершины ***A*** к вершине ***F***. Если бы совокупность вершин, смежных с постоянной вершиной, была исчерпана до того, как мы достигли вершину ***F***, то задача не имела бы решения, поскольку не было бы пути от вершины ***A*** к вершине ***F***. Для нахождения кратчайшего пути заметим, что вершине ***F*** предшествует вершина ***E***, вершине ***E*** предшествует вершина ***B***, а вершине ***B*** предшествует вершина ***A***. Поэтому кратчайшим путем является ***ABEF***.



а

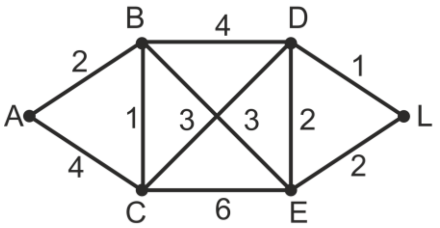


б

Рисунок 5 – Поиск кратчайшего пути в графе:
а – этап 4; *б* – этап 5

Задачи к разделу 8

Задача 1. Найти кратчайший путь между вершинами ***A*** и ***L*** для графов, приведенных на рисунке 6.



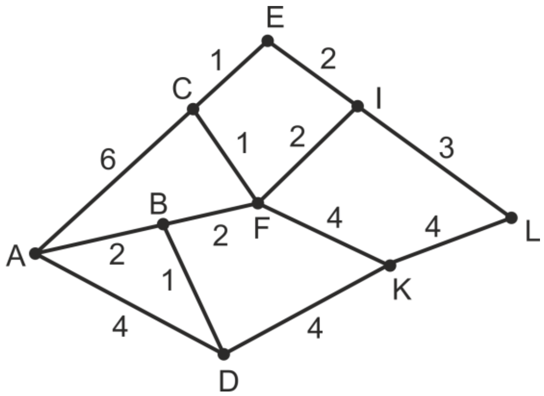


Рисунок 6 – Графы к задаче 1

9 АНАЛИЗ И СИНТЕЗ УСТРОЙСТВ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Конечным автоматом называется техническое устройство, имеющее несколько входов, несколько выходов и несколько внутренних состояний, которое предназначено для преобразования дискретной информации. Сигналы, подаваемые на входы и снимаемые с выходов, могут иметь только одно из двух значений: 0 или 1. В конечном автомате сигналы подаются на входы и снимаются с выходов в дискретные, или ***тактовые*** моменты времени ***0,T,2T,…,kT.*** Период времени ***T*** называется ***периодом дискретности***. Выходные сигналы зависят не только от комбинаций входных сигналов, но и от состояния, в котором находится конечный автомат в данный тактовый момент времени.

Математически конечный автомат описывают шесть объектов:

1) конечное множество входных сигналов (конечный входной алфавит сигналов) $\boldsymbol{u} = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$;

2) конечное множество выходных сигналов (конечный выходной алфавит сигналов) $\boldsymbol{y} = \{y_1, y_2, ..., y_r\}$;

3) конечное множество состояний (конечный алфавит состояний) $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$;

4) начальное состояние $a_0 \in a$;

5) функция выходов, определяющая состояние выходов в зависимости от состояния входов и состояний в данный тактовый момент времени $y[kT] = f_в(u[kT], a[kT])$;

6) функция переходов, определяющая последующее состояние конечного автомата в момент $(k+1)T$ в зависимости от входов и состояний в данный тактовый момент времени $a[(k+1)T] = f_n(u[kT], a[kT])$.

Функции выходов и переходов называются ***характеристическими функциями.***

Структурная схема конечного автомата может быть представлена в виде комбинационной схемы, реализующей характеристические функции $f_в$, f_n и памяти, сохраняющей на один такт предыдущее состояние автомата (рисунок 7) [4].

Рисунок 7 – Структурная схема конечного автомата

Данное в начале раздела 9 определение конечного автомата характеризует ***автомат Мили.*** Если выходные переменные являются функцией только состояния, то имеем автомат Мура, для которого $y[kT] = f_в(a[kT])$.

Комбинационные логические схемы, которые рассмотрены в разделе 7, также являются частным вариантом конечного автомата. Для них функция перехода не имеет смысла, а функция выходов вырождается к виду $y[kT] = f_в(u[kT])$. Их называют автоматами без памяти или тривиальными автоматами.

Конечный автомат может быть задан различными способами: словесное описание, таблицы, графы, матрицы.

Пример 1. Задать конечный автомат табличным способом.

Элементы множеств u, a, y пронумеруем порядковыми числами, начиная с нуля $u = \{0,1, 2, 3\}$, $a = \{0,1, 2, 3\}$, $y = \{0,1\}$, то есть $m = n = 4$, $r = 2$.Тогда характеристические функции f_n и $f_в$ можно представить двумя таблицами, строки которых соответствуют состояниям, а столбцы – входам. Первая таблица, называемая ***таблицей переходов*** (таблица 18), соответствует функции

$\boldsymbol{a[(k+1)T] = f_n(u[kT], a[kT])}$, и ее клетки заполняются номерами состояний $\boldsymbol{a[(k+1)T]}$, в которые переходит автомат при воздействии $\boldsymbol{u[kT]}$ и состоянии $\boldsymbol{a[kT]}$ в данный тактовый момент.

Таблица 18 – Таблица переходов $a[(k+1)T] = f_n(u[kT], a[kT])$

$a[kT]$ \ $u[kT]$	0	1	2	3
0	3	2	1	3
1	3	2	1	3
2	3	2	2	3
3	3	0	0	1

Вторая таблица, называемая ***таблицей выходов*** (таблица 19), соответствует функции $\boldsymbol{y[kT] = f_в(u[kT],a[kT])}$, и ее клетки заполняются номерами выходов $\boldsymbol{y[kT]}$ в данный тактовый момент, которые соответствуют воздействию $\boldsymbol{u[kT]}$ и состоянию $\boldsymbol{a[kT]}$ в тот же момент.

Таблица 19 – Таблица переходов $y[kT] = f_в(u[kT],a[kT])$

$a[kT]$ \ $u[kT]$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	1	0	1	1
3	0	0	1	1

Обе таблицы можно объединить в общую таблицу переходов (таблица 20). В клетках данной таблицы записаны пары чисел: номер следующего состояния автомата в числителе и номер входа в знаменателе

Таблица 20 – Общая таблица переходов

$a[kT]$ \ $u[kT]$	0	1	2	3
0	3/0	2/0	1/0	3/0
1	3/1	2/0	1/0	3/1
2	3/1	2/0	2/1	3/1
3	3/0	0/0	0/1	1/1

Граф конечного автомата строится таким образом, что его вершины соответствуют состояниям, а дуги, направленные из ***i***-й вершины в ***j***-ю, обозначаются дизъюнкциями дробей вход-выход (либо дизъюнкцией пар вход-выход). Под входом понимается входной сигнал, под воздействием которого осуществляется переход из состояния ***i*** в состояние ***j***. Выход – сигнал на выходе автомата при этом переходе.

На рисунке 8 показан граф, построенный в соответствии с приведенной выше общей таблицей переходов (таблица 20). Так как из состояния 0 автомат переходит в состояния 1, 2 и 3, то из вершины 0 графа исходят дуги в вершины 1, 2 и 3. При этом переход в состояние 1 совершается под воздействием 2, и ему соответствует выход 0, поэтому дуга из вершины 0 и 1 помечается как 2/0. Переход в состояние 2 совершается под воздействием 1, и ему соответствует выход 0, поэтому дуга из вершины 0 в 2 помечается как 1/0. Переход в состояние 3 совершается под воздействиями 0 и 3, и им обоим соответствует выход 0, поэтому дуга из вершины 0 в 3 помечается как дизъюнкция 0/0 $\vee$ 3/0. Аналогично определяются и другие дуги графа. Петли соответствуют переходам, при которых состояния не изменяются.

Анализ конечных автоматов

Анализ конечного автомата заключается в определение реакции автомата на входную последовательность, т.е. определении последовательности выходных сигналов при возбуждении его в тактовые моменты времени некоторой последовательностью входных сигналов [4]. Наиболее удобно это проводить по графу автомата. Для этого достаточно проследить путь в графе, начиная от вершины начального состояния, по направлению дуг, которые отмечены очередными номерами из входной последовательности. Выходная последовательность определяется номерами, которыми отмечены дуги в порядке их следования по пройденному пути, а последовательность состояний автомата – номерами вершин, через которые проходит этот путь.

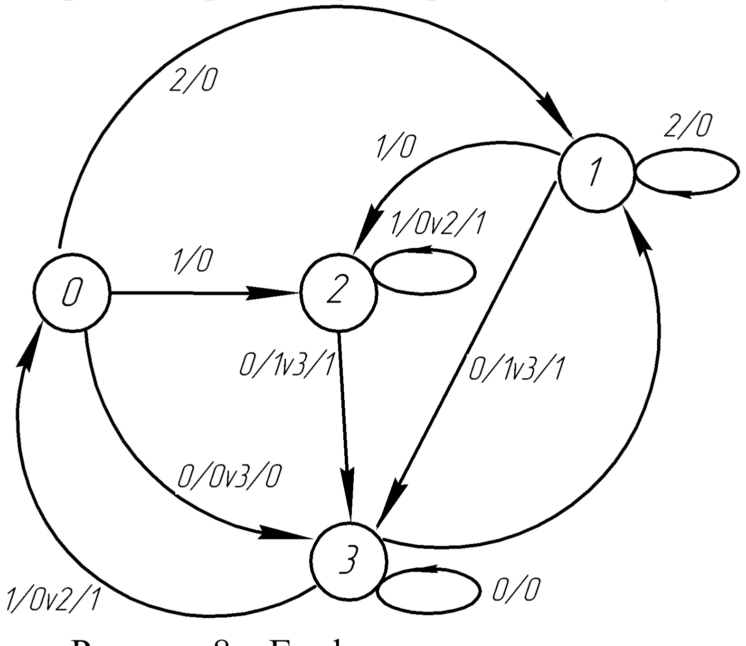


Рисунок 8 – Граф конечного автомата

Так для графа, показанного на рисунке 8, для выходной последовательности (2, 0, 1, 1, 2, 3) и начального состояния 0 имеем выходную последовательность (0, 1, 0, 0, 1, 1) и смену состояний автомата (1, 3, 0, 2, 2, 3). При начальном состоянии 2 и той же входной последовательности получаем соответственно (1, 1, 0, 0, 1, 1) и (2, 3, 0, 2, 2, 3).

С помощью графа автомата легко выделить следующие типы его состояний:

1) преходящее состояние, из которого можно перейти, по крайней мере, в одно другое состояние, но после этого уже нельзя возвратиться в него ни при каком воздействии (соответствующая вершина не имеет заходящих дуг, но имеет хотя бы одну исходящую дугу);

2) тупиковое состояние, в которое можно перейти, по крайней мере, из одного другого состояния, но после этого уже нельзя выйти из него ни при каком воздействии (соответствующая вершина не имеет исходящих дуг в другие вершины, но имеет хотя бы одну входящую дугу из другой вершины);

3) изолированное состояние, из которого нельзя перейти ни в какое другое состояние и в него нельзя попасть ни из какого другого состояния (соответствующая вершина содержит только петлю).

Синтез конечных автоматов

Синтез конечного автомата заключается в построении такого автомата, который бы имел заданные характеристики.

Пример 2. Конечный автомат задан графом (рисунок 9), которому соответствует общая таблица переходов (таблица 21).

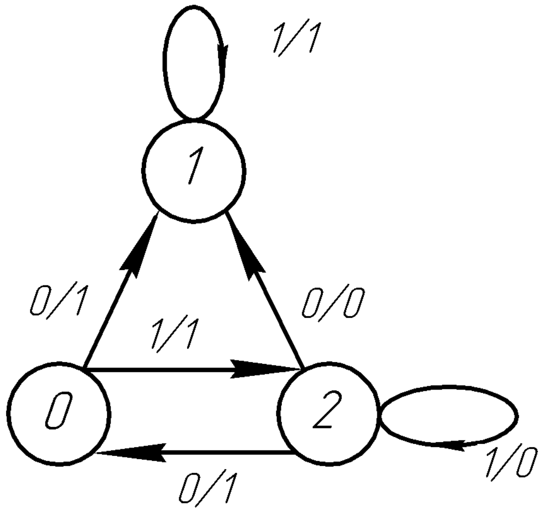


Рисунок 9 – Граф конечного автомата в примере 2

Таблица 21 – Общая таблица переходов

a[kT] \ *u[kT]*	0	1
0	1/1	2/1
1	2/0	1/1
2	0/1	2/0

Данный конечный автомат описывают:

u = {0,1} – входной алфавит сигналов (множество значений входной переменной);

x = {0,1} – выходной алфавит сигналов (множество значений выходной переменной);

a* = *{0,1,2} – алфавит состояний (множество состояний конечного автомата);

x[kT] = $f_в$(u[kT], a[kT]) – функция выходов;

a[(k+1)T] = $f_п$(u[kT], a[kT]) – функция переходов.

Необходимо: 1) найти аналитические выражения для функций выходов и переходов; 2) разработать структурную схему конечного автомата и его логическую на логических элементах.

Преобразуем общую таблицу переходов в таблицу 22.

Таблица 22 – Преобразованная таблица переходов

u[kT]	***a[kT]***	***a[(k+1)T]***	***x[kT]***
0	0	1	1
0	1	2	0
0	2	0	1
1	0	2	1
1	1	1	1
1	2	2	0

Продолжение таблицы 22

Заменим десятичные числа их двоичными эквивалентами (таблица 23).

Таблица 23 – Таблица переходов в двоичном коде

u[kT]	***a[kT]***		***a[(k+1)T]***		***x[kT]***
	a_1[kT]	***a_2[kT]***	***a_1[(k+1)T]***	***a_2[(k+1)T]***	
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0

Используя методику, изложенную в разделе 5 настоящих методических указаний, можно записать выражения для функций выходов и переходов либо в СКНФ, либо в СДНФ.

Функции переходов в СДНФ:

$$a_1[(k+1)T] = \overline{u[kT]} \& \overline{a_1[kT]} \& a_2[kT] \vee u[kT] \& \overline{a_1[kT]} \& \overline{a_2[kT]} \vee u[kT] \& a_1[kT] \& \overline{a_2[kT]}$$

$$a_2[(k+1)T] = \overline{u[kT]} \& \overline{a_1[kT]} \& \overline{a_2[kT]} \vee u[kT] \& \overline{a_1[kT]} \& a_2[kT]$$

Функция выходов в СКНФ:

$$x[kT] = (u[kT] \vee a_1[kT] \vee \overline{a_2[kT]}) \& (\overline{u[kT]} \vee \overline{a_1[kT]} \vee a_2[kT])$$

Структурная схема синтезированного конечного автомата приведена на рисунке 10, логическая схема – рисунке 11.

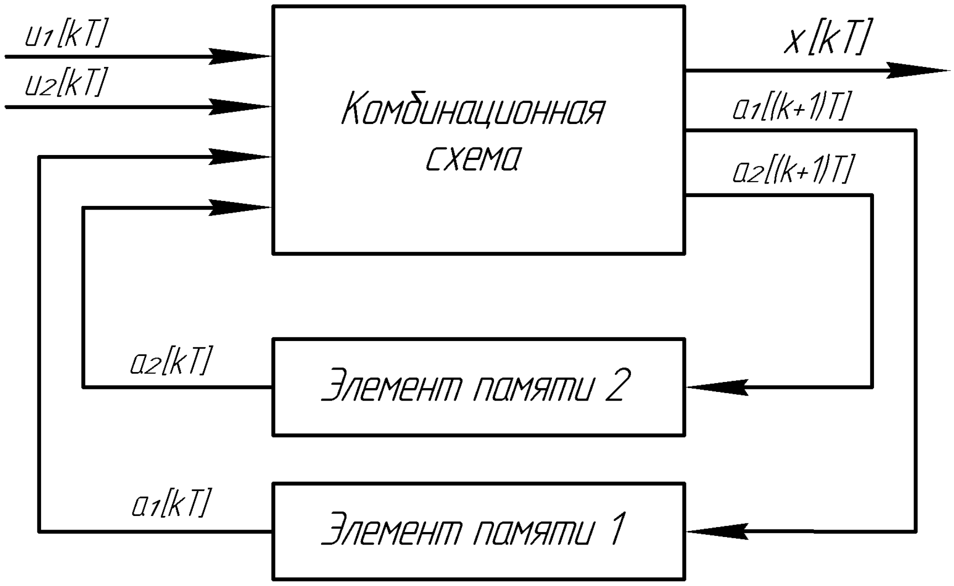


Рисунок 10 – Структурная схема конечного автомата к примеру 2

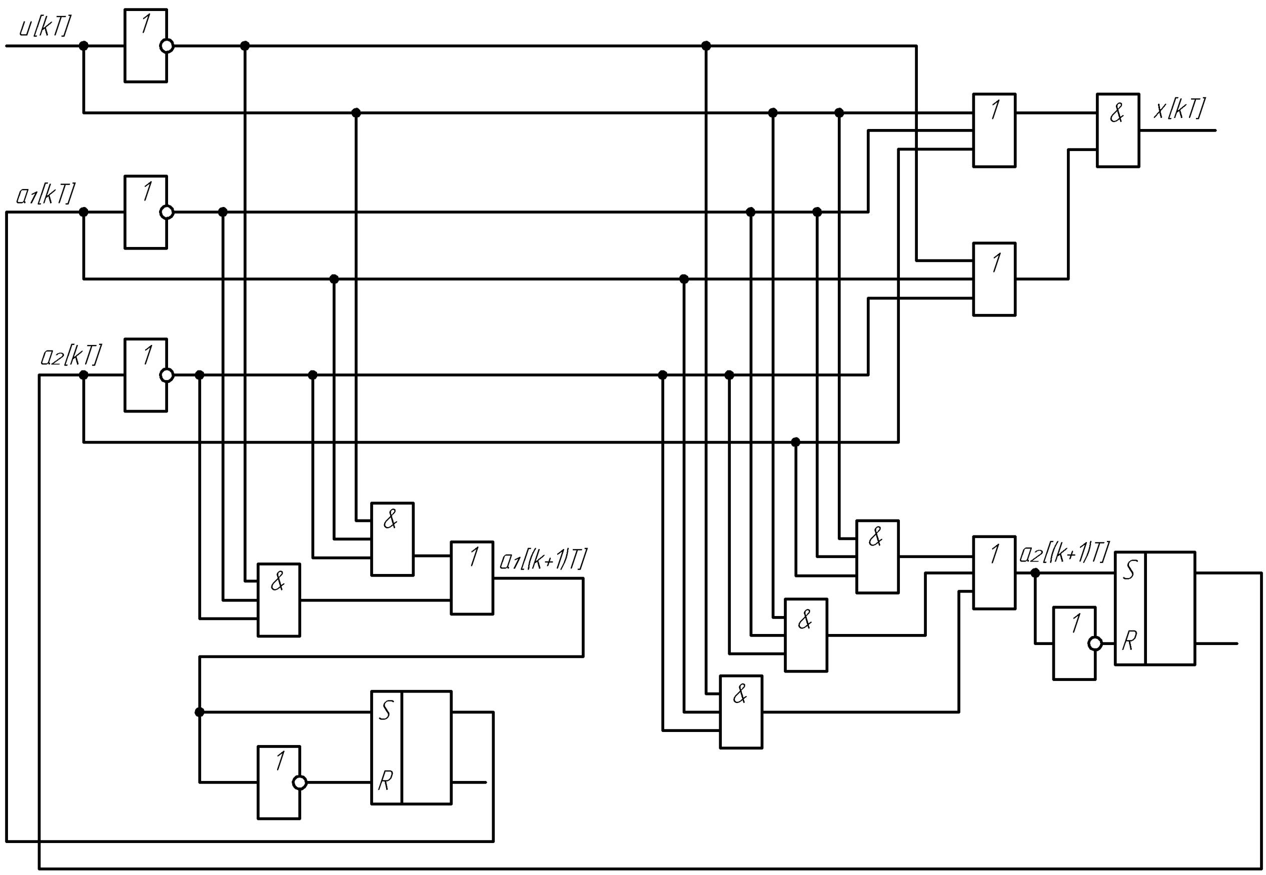


Рисунок 11 – Логическая схема конечного автомата

Задачи к разделу 9

Задача 1. Для конечного автомата, заданного таблицей выходов и переходов (таблица 24), провести синтез конечного автомата, и разработать его логическую схему на логических элементах.

Таблица 24 – Таблица выходов и переходов

№ варианта	Выходы и переходы					№ варианта	Выходы и переходы				
1	$u[kT]$ \ $a[kT]$	0	1	2	3	2	$u[kT]$ \ $a[kT]$	0	1	2	3
	0	0/1	1/1	2/0	3/1		0	1/0	0/0	2/0	3/0
	1	0/0	2/1	3/1	1/0		1	2/0	0/0	3/1	1/0
	2	0/0	3/0	1/0	2/1		2	3/0	0/0	1/1	2/1
	3	0/0	3/0	2/1	1/1		3	3/1	0/0	1/0	2/0

В таблице используются следующие обозначения:

$\boldsymbol{u = \{0,1,2,3\}}$ – входной алфавит сигналов (множество значений входной переменной);

$\boldsymbol{y = \{0,1\}}$ – выходной алфавит сигналов (множество значений выходной переменной);

$\boldsymbol{a = \{0,1,2,3\}}$ – алфавит состояний (множество состояний конечного автомата);

$\boldsymbol{y[kT] = f_{в}(u[kT], a[kT])}$ – функция выходов;

$\boldsymbol{a[(k+1)T] = f_{п}(u[kT], a[kT])}$ – функция переходов.

10 СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Рабкин Е.Л., Фарфоровская Ю.Б. Дискретная математика**:** Методические указания и контрольные задания. – СПб.: СПбГУТ, 2000. – 55 с.

2 Макоха А.Н. Дискретная математика: Учебное пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.– 368 с.

3 Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 960 с.

4 Кузьмин А.В. Теоретические основы систем управления дискретного действия: Учебное пособие. – Ульяновск: УГТУ, 2001. – 98 с.

Дмитриева Ольга Венедиктовна
Сбродов Николай Борисович

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АВТОМАТИКИ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям
по дисциплине «Теоретические основы автоматики»
для студентов для студентов направлений
15.03.04 « Автоматизация технологических процессов и производств»,
27.03.04 « Управление в технических системах»

Авторская редакция

Подписано в печать 26.06.17 Формат 60х84 1/16 Бумага 65 г/м^2
Печать цифровая Усл. печ. л. 2,25 Уч. изд. л. 2,25
Заказ №102 Тираж 25 Не для продажи

БИЦ Курганского государственного университета.
640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.