МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра «Теоретическая механика и сопротивление материалов»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 2

Методические указания
к выполнению лабораторных работ
для студентов направлений 190109.65, 190110.65

Курган 2016

Кафедра: «Теоретическая механика и сопротивление материалов»

Дисциплина: «Теоретическая механика»
(направления 190109.65, 190110.65).

Составил: канд. техн. наук Е.Н. Ревняков.

Утверждены на заседании кафедры «23» декабря 2015 г.

Рекомендованы методическим советом университета «19» декабря 2014 г.

Лабораторная работа № 4

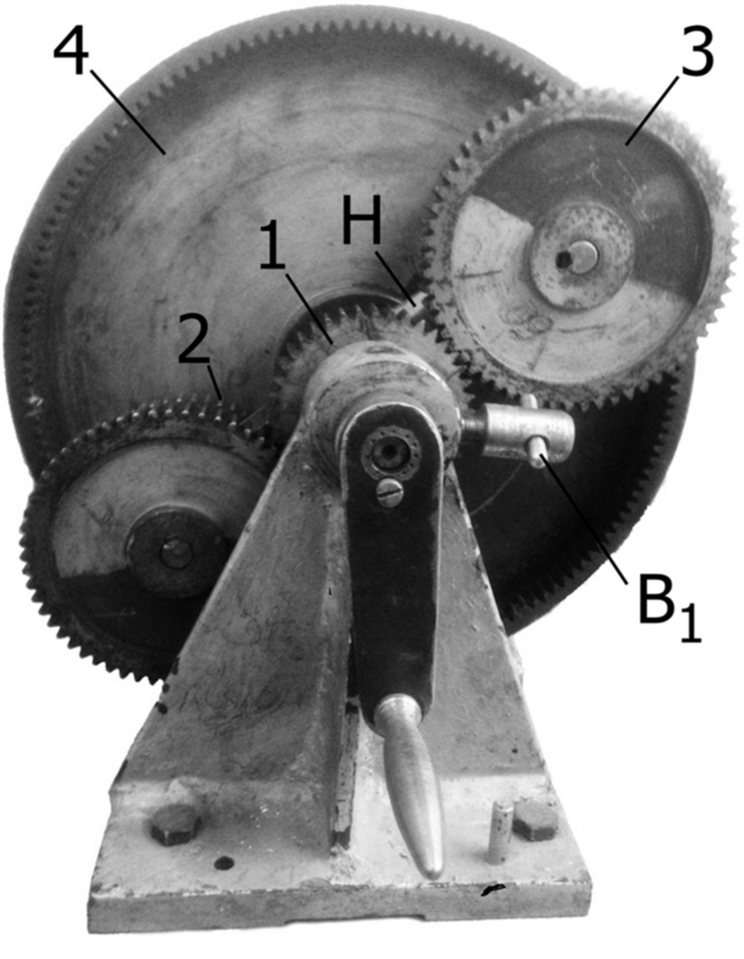
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОГО ЧИСЛА ПЛАНЕТАРНОГО РЕДУКТОРА

Цель: исследование кинематики планетарной передачи.

Теоретическая часть

Планетарными или дифференциальными назвают передачи вращения у которых ось хотя бы одного колеса перемещается в пространстве. Такие передачи могут иметь несколько степеней свободы. За счет этого можно суммировать или вычитать несколько вращений. Для передачи вращающего момента с входного вала на выходной необходимо уменьшить число степеней свободы до единицы за счет остановки соответствующих элементов. При этом за счет их комбинации можно получать различные соотношения угловых скоростей звеньев. Именно по такому принципу работают современные гидромеханические автоматические коробки передач автомобилей.

Основные элементы планетарной передачи (рисунок 1.1): центральные колеса 1, 4; сателлиты 2,3 и звено, в котором закреплена ось сателлитов, – водило *H*.



1,4 – центральные колеса; 2, 3 – сателлиты; H – водило

Рисунок 1.1 – Планетарная передача

Сателлиты совершают сложное движение: вращение относительно водила и переносное движение вместе с водилом. Именно с этим связаны основные сложности кинематического расчета планетарных передач, в ходе которого требуется определить передаточное число u – отношение угловых скоростей входного I и выходного II валов:

$$u = \frac{\omega_I}{\omega_{II}}. \tag{1.1}$$

Если $u>1$, передача называется редуктором (англ. to reduce – уменьшать), выходной вал вращается медленнее входного. Если $u<1$, передача называется мультипликатором (англ. to multiply – увеличивать), выходной вал вращается быстрее входного. Например, если в автомобиле включить 1 передачу, то коробка будет работать как редуктор, а если 5 передачу – как мультипликатор. Если передаточное число положительно, входной и выходной валы вращаются в одну сторону, а если отрицательно, то в противоположные.

В теоретической механике всегда от реального объекта переходят к его абстрактной модели – схеме. На рисунке 1.2 представлена кинематическая схема экспериментальной планетарной передачи.

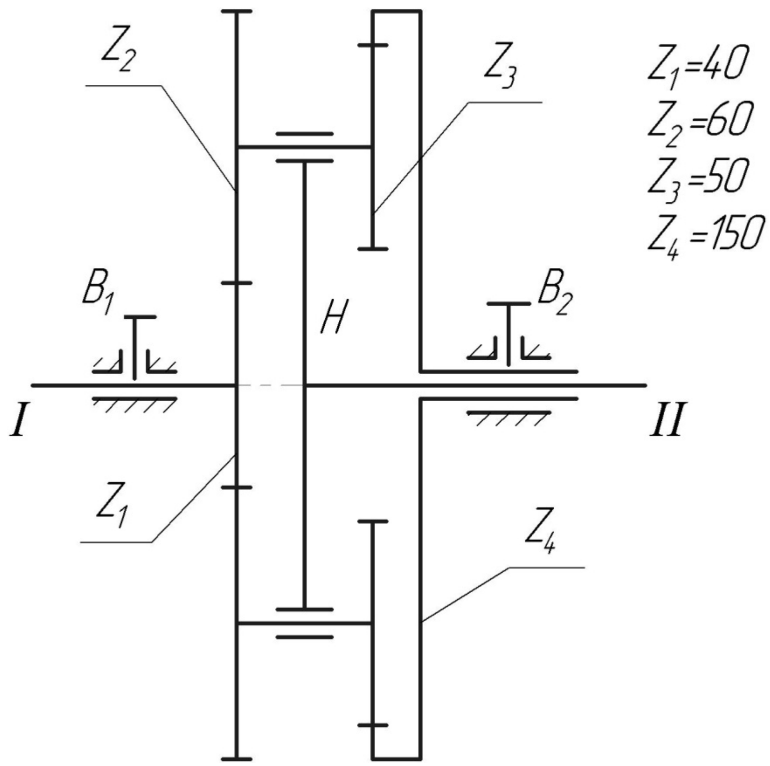


Рисунок 1.2 – Кинематическая схема планетарной передачи

Изначально у передачи две степени свободы, поэтому можно независимо друг от друга вращать любые два элемента. Например, мы можем вращать вал, связанный с центральным колесом *1* (солнечная шестерня) и одновременно в любую сторону вращать вал, связанный с водилом *H*. Передачи вращающего момента при этом не будет. Именно такая ситуация получается, если одно из ведущих колес оказывается на поверхности с низким коэффициентом сцепления: это колесо буксует, а движения автомобиля не происходит. Если уменьшить число степеней свободы до единицы, достаточно задать движение одного из элементов передачи и движение остальных будет кинематически определено. В автомобилях для этого применяют блокировку дифференциала, а мы в лабораторной работе мы можем при помощи винтов B_1 и B_2 уменьшить число степеней свободы за счет остановки центрального колеса *1* или колеса *4*.

Для теоретического определения передаточного числа будем использовать метод Виллиса (метод обратного вращения или метод остановленного водила). Суть этого метода состоит в том, что мы мысленно вращаем корпус передачи с угловой скоростью, равной по модулю угловой скорости водила ω_H, но направленной в противоположную сторону. При этом в соответствии с теоремой о сложении скоростей абсолютная угловая скорость водила будет равна нулю, и мы получим обычную рядовую передачу с неподвижными осями. В такой передаче отношение угловых скоростей обратно пропорционально отношению их радиусов *r* или чисел зубьев *z*:

$$\frac{\omega_1-\omega_H}{\omega_2-\omega_H}=-\frac{z_2}{z_1}; \tag{1.2}$$

$$\frac{\omega_3-\omega_H}{\omega_4-\omega_H}=\frac{z_4}{z_3}. \tag{1.3}$$

Колеса *1* и *2* находятся во внешнем зацеплении (рисунок 1.2) и при остановленном водиле будут вращаться в противоположные стороны, поэтому в формуле (1.2) стоит знак «-». Зацепление колес 3 и 4 – внутреннее и направление вращений в одну сторону. Всего в передаче 4 элемента, если мы остановим один из них, останется 3 неизвестных угловых скорости, следовательно, необходимо еще одно кинематическое уравнение. Для данной передачи воспользуемся тем, что сателлиты жестко связаны между собой осью и их угловые скорости равны:

$$\omega_2=\omega_3. \tag{1.4}$$

Умножим (1.2) на (1.3) с учетом (1.4)

$$\frac{\omega_1-\omega_H}{\omega_2-\omega_H}\cdot\frac{\omega_3-\omega_H}{\omega_4-\omega_H}=-\frac{z_2}{z_1}\cdot\frac{z_4}{z_3} \quad => \quad \frac{\omega_1-\omega_H}{\omega_4-\omega_H}=C, \tag{1.5}$$

где $C=-\frac{z_2}{z_1}\cdot\frac{z_4}{z_3}$ – константа для данной передачи, зависящая от ее геометрических характеристик и кинематической схемы.

Уравнение (1.5) называется уравнением кинематической связи планетарной передачи и позволяет определять соотношения между угловыми скоростями ее элементов. Выполним расчет для случая, когда остановлено центральное колесо *4* (винт B_2 ввернут и $\omega_4=0$). Кинематическая схема передачи для этого случая приведена на рисунке 1.3 а. Входным элементом будет центральное колесо *1* с угловой скоростью $\omega_I=\omega_1$, а выходным – водило *H* со скоростью $\omega_{II}=\omega_H$:

$$\frac{\omega_I-\omega_{II}}{-\omega_{II}}=C \quad => \quad u=\frac{\omega_I}{\omega_{II}}=1-C. \tag{1.6}$$

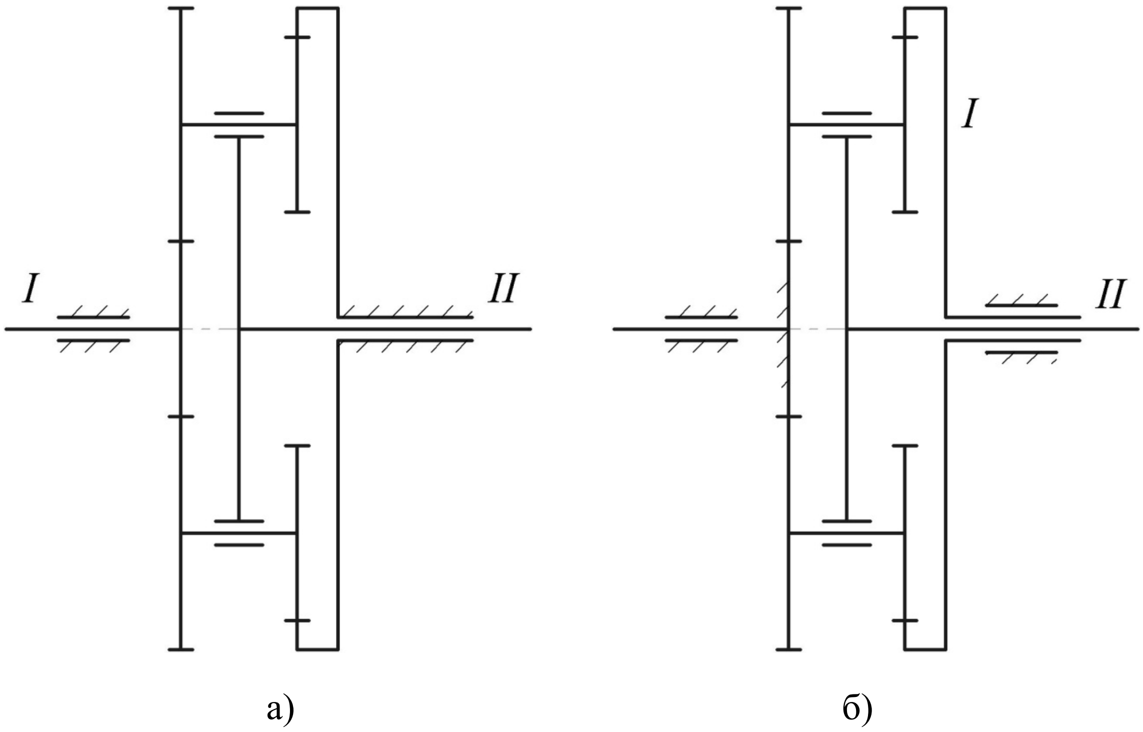


Рисунок 1.3 – Схемы работы планетарной передачи

Если остановить центральное колесо *1* (винт B_I ввернут и $\omega_1 = 0$) и считать входным элементом передачи колесо *4* ($\omega_I = \omega_4$), а выходным – по-прежнему водило *H* (рисунок 1.3 б), то передаточное число определится следующим образом:

$$\frac{-\omega_{II}}{\omega_I - \omega_{II}} = C \quad => \quad u = \frac{\omega_I}{\omega_{II}} = \frac{C-1}{C}. \qquad (1.7)$$

Теоретическое значение передаточного числа будем определять по формулам (1.6) и (1.7) с учетом геометрических характеристик передачи, приведенных на рисунке 1.2.

Ход работы

Ослабить винты B_1 и B_2, убедиться, что можно одновроеменно вращать центральное колесо *1* и водило *H* в любых направлениях и с любыми скоростями.

Затянуть винт B_1, убедиться, что число степеней свободы стало на одну меньше – вращения центрального колеса *1* и водила *H* связаны между собой.

Отметить мелом риску, соответствующую положению водила *H*, и вращать входной вал до тех пор, пока водило не совершит 3 полных оборота. Числа оборотов φ_I входного и φ_{II} выходного валов занести в таблицу 1.1.

Ослабить винт B_1 и затянуть винт B_2. Убедиться, что число степеней свободы снова равно единице. Повторить действия, описанные в предыдущем шаге.

Рассчитать экспериментальные значения передаточного числа по формуле:

$$u^* = \frac{\varphi_I}{\varphi_{II}}. \qquad (1.8)$$

По формулам (1.6) и (1.7) рассчитать теоретические значения передаточного числа и занести в таблицу 1.1.

Сопоставить теоретические и экспериментальные значения передаточного числа и сделать выводы о погрешности.

Отчет по работе

1 Тема работы, дата, цель.

2 Кинематические схемы передачи и ее геометрические параметры, основные формулы с пояснениями входящих в них величин.

3 *Таблица 1.1 – Результаты эксперимента*

№ опыта	Состояние винта B_1	Состояние винта B_2	Число оборотов входного вала φ_I	Число оборотов выходного вала φ_{II}	Передаточное число u	
					теория	опыт
1						
2						
3						

4 Сформулировать вывод о возможности изменения передаточного числа планетарного редуктора за счет остановки его различных элементов.

Лабораторная работа № 5

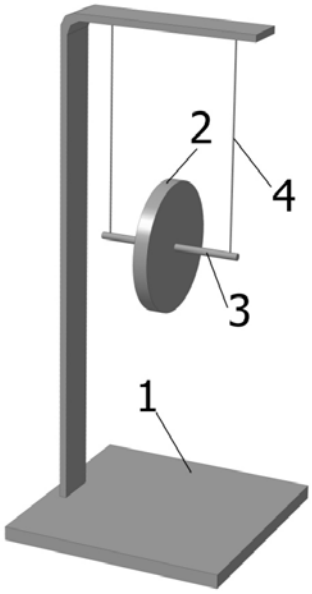
МАЯТНИК МАКСВЕЛЛА

Цель: экспериментальное исследование плоского движения тела.

Теоретическая часть

Маятник Максвелла (рисунок 2.1) представляет из себя диск *2*, расположенный на оси *3*, на концы которой намотана нить *4*, привязанная к штативу платформы *1*. За счет нити и оси реализуется кинематическая связь между поступательным и вращательным движением оси. Если бы этой связи не было, маятник совершал бы поступательное движение под действием силы тяжести с ускорением g. Из-за кинематической связи движение становится плоским: одновременно происходит и поступательное перемещение, и вращательное, поэтому ускорение будет отличаться от g.

Как и в любом маятнике, здесь мы видим переход потенциальной энергии (верхнее положение оси) в кинетическую (нижнее положение) и наоборот. При этом кинетическая энергия складывается из энергии поступательного движения и энергии вращательного движения. Колебания такого маятника будут со временем затухать из-за сил внутреннего трения в нити и трения диска о воздух.



1 – платформа; 2 – диск; 3 – ось; 4 – нить

Рисунок 2.1 – Маятник Максвелла

Рассмотрим расчетную схему установки (рисунок 2.2). Считаем нить нерастяжимой, тогда точка *K* будет мгновенным центром скоростей, и уравнение кинематической связи имеет вид:

$$V = \frac{\omega d}{2}. \qquad (2.1)$$

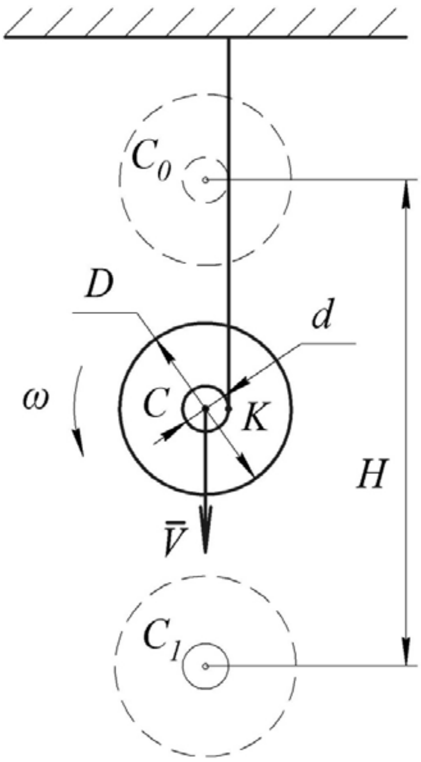


Рисунок 2.2 – Расчетная схема установки

Для определения скорости центра масс *C* маятника в нижнем положении C_1 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k, \tag{2.2}$$

где T_1 и T_0 – кинетическая энергия маятника в конечном и начальном положении; $\sum A_k$ – сумма работ сил, действующих на систему на данном перемещении.

Если пренебречь силами внутреннего трения в нити и силой сопротивления воздуха, единственной силой, совершающей работу в системе, будет сила тяжести:

$$\sum A_k = mgH. \tag{2.3}$$

Так как маятник начинает свое движение из состояния покоя, его начальная кинетическая энергия $T_0 = 0$. В конечном положении определяем ее как сумму энергии поступательного и вращательного движений:

$$T_1 = \frac{mV^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}, \tag{2.4}$$

где m и I_C – масса и осевой момент инерции тела.

Для диска осевой момент инерции равен:

$$I_C = \frac{mR^2}{2} = \frac{mD^2}{8}. \tag{2.5}$$

С учетом уравнения связи (2.1) и формулы (2.5) кинетическая энергия системы в конечном положении будет равна:

$$T_1 = \frac{mV^2}{2}\left(1 + \frac{D^2}{2d^2}\right). \tag{2.6}$$

Подставляя (2.3) и (2.6) в теорему (2.2), получим выражение для скорости маятника в точке C_1:

$$V_1 = \frac{1}{\gamma}\sqrt{2gH}, \tag{2.7}$$

где $\gamma = \sqrt{1 + \frac{D^2}{2d^2}}$ – постоянная величина, зависящая от геометрических характеристик маятника Максвелла, а множитель $\sqrt{2gH}$ – формула Галилея, позволяющая определить скорость при свободном падении тела с высоты *H*.

Так как величина γ значительно больше единицы, скорость маятника Максвелла будет меньше, чем скорость свободно падающего с той же высоты тела. Это происходит потому, что в первом случае работа силы тяжести идет на увеличение энергии поступательного и вращательного движений тела одновременно, а во втором – только на увеличение энергии поступательного движения. Именно поэтому при прыжках с большой высоты рекомендуется делать при приземлении кувырок, чтобы распределить кинетическую энергию между двумя составляющими и уменьшить ударные нагрузки.

Считая движение маятника равноускоренным, определим время, необходимое для его перемещения из начального положения в конечное:

$$t_1 = \frac{2H}{V_1} = \gamma\sqrt{\frac{2H}{g}}. \tag{2.8}$$

Ход работы

Измерить геометрические параметры маятника Максвелла и занести в таблицу 2.1. Вычислить значение коэффициента γ.

Измерить расстояние h_0 от платформы до оси маятника в нижнем положении. Намотать нити на ось и измерить расстояние h_1 от платформы до оси маятника в верхнем положении. Вычислить вертикальное перемещение $H = h_1 - h_0$. Результаты замеров и расчетов занести в таблицу 2.1.

При помощи секундомера определить экспериментальное значение времени t_1^* движения маятника Максвелла из верхнего положения в нижнее. Замер провести еще два раза. Данные занести в таблицу 2.1. Вычислить среднее значение $\overline{t_1^*}$.

По формуле (2.8) вычислить теоретическое значение времени и определить погрешность эксперимента:

$$\delta = \frac{t_1^* - t_1}{t_1} \cdot 100\ \%.$$

Отчет по работе

1 Тема работы, дата, цель.

2 Расчетная схема и основные формулы с пояснениями входящих в них величин.

3 Таблица 2.1 – Результаты эксперимента

D, мм	d, мм	γ	h_0, мм	h_1, мм	H, мм	t_1^*, c	$\overline{t_1^*}$, с	t_1, с	δ, %

4 Сделать вывод о замедлении маятника Максвелла по сравнению с телом, совершающим свободное падение. Оценить экспериментальную погрешность и определить ее причины.

Лабораторная работа № 6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Цель: исследование колебательного движения тела под действием силы тяжести.

Теоретическая часть

Колебательное движение возникает, когда на тело действует сила, пропорциональная координате и имеющая противоположный с ней знак. Такая сила называется восстанавливающей. Например, это может быть сила упругости или сила тяжести.

Колебательное движение постоянно встречается нам в окружающем мире: движение автомобиля по неровностям, детские качели, раскачивание стиральной машине при отжиме, диффузор динамика. Иногда мы стремимся к сохранению и увеличению амплитуды колебаний (акустические системы, сейсмографы), иногда наоборот – гасим их (амортизаторы подвески, мебельные доводчики).

Несмотря на разные внешние проявления, математически любое колебательное движение описывается одинаково. В качестве примера рассмотрим простейший случай – колебания материальной точки, подвешенной на невесомой нити. Такая механическая система называется математическим маятником (рисунок 3.1).

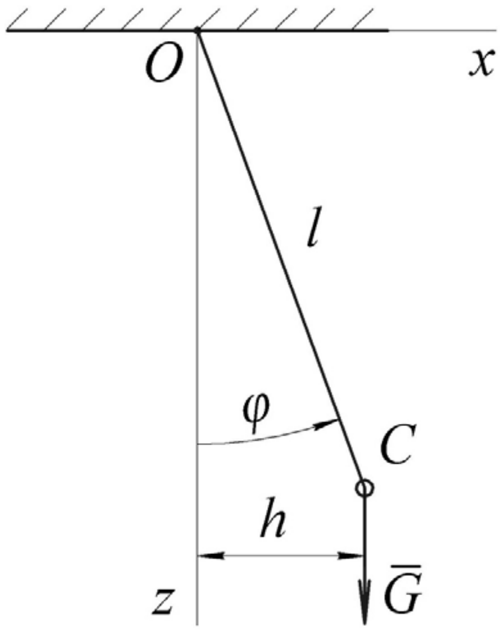


Рисунок 3.1 – Расчетная схема математического маятника

Составим дифференциальное уравнение движения системы по координате φ:

$$I_O\ddot{\varphi} = \sum m_O(F_k^e), \qquad (3.1)$$

где I_O – осевой момент инерции системы относительно точки O; $\sum m_O(F_k^e)$ – сумма моментов внешних сил также относительно точки O.

Если размеры тела по сравнению с длиной нити l малы, то осевой момент инерции будет равен $I_O = ml^2$. Пренебрегая действием силы сопротивления воздуха определяем момент внешних сил:

$$\sum m_O(F_k^e) = -Gh = -mgl\sin\varphi. \tag{3.2}$$

После преобразования с учетом (3.2) дифференциальное уравнение (3.1) примет вид:

$$\ddot{\varphi} + k^2\sin\varphi = 0, \tag{3.3}$$

где $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$ – константа, зависящая от длины маятника.

Дифференциальное уравнение (3.3) не имеет точного аналитического решения, однако в случае, если угол φ мал (до 7°), можно выполнить замену $\sin\varphi \approx \varphi$, и уравнение принимает классический вид:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0. \tag{3.4}$$

Решением уравнения (3.4) будет гармонический закон движения:

$$\varphi = A\sin(kt + \alpha), \tag{3.5}$$

где A – амплитуда колебаний; k – круговая (циклическая) частота; α – начальная фаза.

Величины A и α определяются по начальным условиям (начальный угол φ_0 и начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$), а k – параметром самого маятника (длиной нити l).

Нас в лабораторной работе интересует период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{3.6}$$

Ход работы

Измерить и записать в таблицу 3.1 длину нити l. Отклонить груз на малый угол (менее 7 градусов), отпустить без начальной скорости. В момент, когда груз будет в крайнем положении, запустить отсчет времени. Дождаться, пока маятник совершит $N = 10$ полных колебаний, записать в таблицу 3.1 время t_{10}. Повторить опыт для $N = 20$ и $N = 30$.

Вычислить экспериментальные значения периода колебаний:

$$T_N^* = \frac{t_N}{N}.$$

По формуле (3.6) вычислить и занести в таблицу 3.1 теоретическое значение периода колебаний, определить погрешность эксперимента для различных значений N:

$$\delta_N = \frac{T_N^* - T}{T} \cdot 100\ \%.$$

Отчет по работе

1 Тема работы, дата, цель.

2 Расчетная схема и основные формулы с пояснениями входящих в них величин.

3 Таблица 3.1 – Результаты эксперимента

№ опыта	l, мм	N	t_N, с	T_N^*, с	T, с	δ_N, %
1						
…						

4 Сформулировать вывод о величине погрешности эксперимента в зависимости от числа измеренных колебаний. Объяснить причины погрешности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. 20-е издание, стер. М. : Высшая школа, 2010. 416 с.

2 Григорьев А. Ю., Малявко Д. П., Фёдорова Л. А. Лабораторные работы по теоретической механике : учеб.-метод. пособие. СПб. : Изд-во Санкт-Петербургского нац. исслед. ун-та информационных технологий, механики и оптики, 2014. 53 с.

Ревняков Евгений Николаевич

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Часть 2
Методические указания
к выполнению лабораторных работ
для студентов направлений 190109.65, 190110.65.

Редактор О. Г. Арефьева

Подписано в печать	Формат 60×84 1/16	Бумага 65 г/м^2
Печать цифровая	Усл. печ.л. 1,0	Уч.-изд. л. 1,0
Заказ	Тираж 25	Не для продажи

РИЦ Курганского государственного университета.
640000, г.Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.