МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра алгебры, геометрии и методики преподавания математики

АЛГЕБРА
(ЧАСТЬ 3)

Материалы для практических занятий и самостоятельной работы
для студентов факультета МиИТ

Курган 2016

Кафедра алгебры, геометрии и методики преподавания математики

Дисциплина: «Алгебра»
(направления 01.03.01 и 44.03.01).

Составитель: доцент Шатных О.Н.

Утверждены на заседании кафедры «25»_декабря__2015 г.

Рекомендованы методическим
советом университета «19»_декабря_2014 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие составлено в соответствии с программой дисциплины «Алгебра» и предназначено для студентов направлений «Математика» и «Педагогическое образование» направленности «Математика и информатика», которые также изучают данный раздел алгебры, но в несколько меньшем объеме.

Разделы «Линейные операторы» и «Ортогональные операторы» изучаются на первом курсе. В данном пособии представлены все темы данных разделов, которые выносятся на практические занятия и самостоятельную работу студентов. Для каждой темы указаны вопросы для повторения теоретического материала, приведены образцы решения типовых задач и задачи для решения. По усмотрению преподавателя из раздела «Задачи для решения» отбираются задачи для решения в аудитории и для самостоятельной работы студентов.

Тема 1. Линейные операторы векторных пространств

Вопросы теории

1 Определение линейного оператора векторных пространств.
2 Свойства линейных операторов.
3 Задание линейных операторов матрицами.
4 Образ, ранг, ядро и дефект линейного оператора.
5 Действия над линейными операторами.
6 Матрицы оператора в различных базисах.

Образцы решения задач

Задача 1. Проверить, будет ли линейным оператор φ: $R^3 \to R^3$

$\forall x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in R^3$ $\varphi(x) = (2\alpha_1, 0, -\alpha_3)$.

Решение. Проверим аксиомы определения линейного оператора:
$\forall y \in R^3$ $y(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ $\varphi(y) = (2\beta_1, 0, -\beta_3)$.
$x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 +, \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$.
Тогда $\varphi(x + y) = (2(\alpha_1 + \beta_1), 0, -(\alpha_3 + \beta_3)) = (2\alpha_1 + 2\beta_1, 0, -\alpha_3 + (-\beta_3)) = (2\alpha_1, 0, -\alpha_3) + (2\beta_1, 0, \beta_3) = \varphi(x) + \varphi(y)$.
$\forall\ k \in R$ $k\,x = (k\alpha_1, k\alpha_2, k\alpha_3)$.
Тогда $\varphi(k\,x) = (2k\alpha_1, 0, -k\alpha_3) = k(2\alpha_1, 0, -\alpha_3) = k\,\varphi(x)$.
Таким образом обе аксиомы выполнены, следовательно, φ – линейный оператор.

Задача 2. Найти матрицу линейного преобразования φ в единичном базисе, если $\forall\ \bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ $\varphi(\bar{x}) = (\alpha_1 + 2\alpha_2;\ -\alpha_2; 0)$.

Решение. Найдем образы векторов единичного базиса.

$\overline{e_1} = (1,0,0)$ $\varphi(\overline{e_1}) = (1,0,0)$

$\overline{e_2} = (0,1,0)$ $\varphi(\overline{e_2}) = (2,-1,0)$

$\overline{e_3} = (0,0,1)$ $\varphi(\overline{e_3}) = (0,0,0)$

Составим матрицу преобразования φ, записав полученные образы базисных векторов в столбцы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Линейный оператор φ задан в базисе *(e)* матрицей

$$A_e^{\varphi} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$. Вектор a задан в том же базисе $a = 5e_1 + e_2 - 2e_3$.

Найти координаты образа вектора a.

Решение. Координаты образа вектора x находятся по следующей формуле $\varphi(x) = A_e^{\varphi}X$, где X есть столбец координат вектора x. Поэтому

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \varphi(a) = (-9, 4, -6).$$

Задачи для решения

1 Проверить, является ли оператор $\boldsymbol{A}$ линейным в $\boldsymbol{R^3}$, если является, то найти его матрицу. $A(x) = (2x_1 - 3x_2; x_3 - 2x_1; x_2 - 2x_1)$.

2 Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования: $A(x) = (3x_1 - 2x_2 - 1, 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,

$B(x) = (3x_1^2 - 2x_2 - x_3, 0, 0)$,

$C(x) = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

3 Линейный оператор φ переводит векторы $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ соответственно в векторы $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3}$. Найти матрицу оператора φ в том же базисе, в каком заданы координатами все векторы:

а) $\boldsymbol{a_1} = (1, 2, -3)$; $\boldsymbol{a_2} = (0, 1, 2)$; $\boldsymbol{a_3} = (1, 0, 4)$;

$\boldsymbol{b_1} = (1, 1, 1)$; $\boldsymbol{b_2} = (1, 2, 1)$; $\boldsymbol{b_3} = (0, 1, 1)$;

б) $\boldsymbol{a_1} = (1, 2, 1)$; $a_2 = (4, 3, -2)$; $\boldsymbol{a_3} = (-5, -4, -1)$;

$\boldsymbol{b_1} = (1, 1, 1)$; $\boldsymbol{b_2} = (1, 0, 1)$; $\boldsymbol{b_3} = (0, -1, 1)$;

в) $\boldsymbol{a_1} = (1, 1, 1)$; $\boldsymbol{a_2} = (2, -3, 1)$; $\boldsymbol{a_3} = (4, 1, -5)$;

$\boldsymbol{b_1} = (0, 1, 0)$; $\boldsymbol{b_2} = (0, 1, 1)$; $\boldsymbol{b_3} = (1, 1, 0)$;

г) $\boldsymbol{a_1} = (4, -8, -5)$; $\boldsymbol{a_2} = (-4, 7, -1)$; $\boldsymbol{a_3} = (-3, 5, 1)$;

$\boldsymbol{b_1} = (1, 1, 0)$; $\boldsymbol{b_2} = (0, 2, 1)$; $\boldsymbol{b_3} = (0, 1, 3)$.

4 Линейный оператор φ в базисе *(e)* имеет матрицу А. Найти матрицу этого оператора в базисе (e'), если а) $A^{\varphi}{}_{e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_1} = (1, 0, 1)$; $\boldsymbol{e_2} = (2, 1, 0)$; $\boldsymbol{e_3} = (-3, 2, 4)$;

$\boldsymbol{e'_1} = (1, -1, 1)$; $\boldsymbol{e'_2} = (0, 1, -1)$; $\boldsymbol{e'_3} = (0, 1, 1)$;

б) $A^{\varphi}{}_{e} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_1} = (1, 4, -5)$; $\boldsymbol{e_2} = (2, 3, -4)$; $\boldsymbol{e_3} = (1, -2, -1)$;

$\boldsymbol{e'_1} = (2, 1, 2)$; $\boldsymbol{e'_2} = (1, -1, 2)$; $\boldsymbol{e'_3} = (0, 1, -1)$;

в) $A^{\varphi}{}_{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_1} = (1, 2, 4)$; $\boldsymbol{e_2} = (1, -3, 1)$; $\boldsymbol{e_3} = (1, 1, -5)$;

$\boldsymbol{e'_1} = (1, 3, 2)$; $\boldsymbol{e'_2} = (1, -2, -1)$; $\boldsymbol{e'_3} = (0, 1, 1)$.

5 Линейный оператор φ переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $\boldsymbol{\varphi(x)}$**.** Найти образ вектора $\boldsymbol{a}$ и прообраз вектора $\boldsymbol{y}$, если

а) $\varphi(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_1 + x_3)$; $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1)$; $\mathbf{y} = (1, 2, 3)$;

б) $\varphi(x) = (2x_1,\ 3x_1 + x_2,\ x_1 + 2x_2 + x_3)$; $\boldsymbol{a} = (2, 1, 1)$; $\mathbf{y} = (1, 1, 0)$.

6 Линейное преобразование φ в базисе $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}$ имеет матрицу

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого же преобразования в базисе:

а) $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4}$**;**

б) $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3} + \boldsymbol{e_4}$.

7 Линейное преобразование φ в базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ имеет матрицу A = $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. Найти его матрицу в базисе

$\boldsymbol{f_1} = 2\boldsymbol{e_1} + 3\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{f_2} = 3\boldsymbol{e_1} + 4\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{f_3} = \boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_2} + 2\boldsymbol{e_3}$.

8 Линейное преобразование φ задано матрицей A. Найти его ядро и множество значений. Выяснить, является ли это преобразование обратимым. В случае положительного ответа найти матрицу обратного преобразования.

а) $A = \begin{pmatrix} 25 & 60 \\ 60 & 144 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, в) $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

9 Линейное преобразование φ имеет в базисе $\boldsymbol{a_1}$ = (1,2), $\boldsymbol{a_2}$ = (2,3) матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, а линейное преобразование ϕ в базисе $\boldsymbol{b_1}$ = (3,1), $\boldsymbol{b_2}$ = (4,2) задается матрицей $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицы линейных операторов $\varphi + \phi$, $\varphi\phi$ в базисе $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$.

10 Линейное преобразование φ, в базисе $\boldsymbol{a_1}$ = (–3 ,7), $\boldsymbol{a_2}$ = (1,–2) имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а преобразование ϕ в базисе $\boldsymbol{b_1}$ = (6,–7), $\boldsymbol{b_2}$ = (–5 ,6) задается матрицей $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $\varphi\phi$ в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

Тема 2. Собственные векторы и собственные значения

Вопросы теории

1 Характеристический многочлен линейного оператора.
2 Собственные значения линейного оператора.
3 Собственные векторы линейного оператора.
4 Алгоритм приведения матрицы к диагональному виду.

Образцы решения задач

Задача 1. Найти характеристический многочлен и корни линейного оператора, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристический многочлен:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2.$$

Корнями этого многочлена будут числа $\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = 2$.

Задача 2. Линейное отображение задано матрицей $A_e^{\varphi} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Найти все его собственные значения и собственные векторы.

Решение. Найдем собственные значения отображения *φ*.

$$|A_e^{\varphi} - \lambda E| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -3 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^3(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 16) =$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda^2(4-\lambda) + 4(4-\lambda) = 0$$

$$(\lambda^2+4)(4-\lambda) = 0$$

$$\lambda = 4.$$

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda = 4$. Для этого нужно решить уравнение $(A_e^{\varphi} - \lambda E)\,x = \theta$. Этому уравнению будет соответствовать матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть x_2 – свободная переменная, тогда общее решение будет выглядеть так: $\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = 0. \end{cases}$

Т. е. для данного отображения φ собственным значением является $\lambda = 4$, собственными векторами – векторы вида $x= (x_1, x_1, 0)$ $\forall x_1 \epsilon R$.

Задача 3. Построить каноническое разложение матрицы

$$A_e^{\varphi} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1) Найдем характеристический многочлен для матрицы A_e^{φ} и ее корни.

$$|\mathrm{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \\ -3 & 4-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2+\lambda)(-1)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$= (2- \lambda)\ (-4 - 3\lambda + \lambda^2 + 6) = (2 - \lambda)\ (\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (2 - \lambda)\ (\lambda - 1)\ (\lambda - 2) =$
$= (\lambda - 2)^2(1 - \lambda)$.

Решая уравнение $|\mathrm{A} - \lambda E| = 0$, получим корни $\lambda_1 = 2$ кратности $r_1 = 2$ и $\lambda_2 = 1$ кратности $r_2 = 1$. Запишем диагональную матрицу $\Lambda_{e'}$, где по главной диагонали будут стоять найденные собственные значения λ: $\Lambda_{e'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Найдем базис из собственных векторов, соответствующих найденным собственным значениям.

$$\lambda_1 = 2 \qquad \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $x_1, x_2 -$ свободные неизвестные, тогда получаем x_3= - $3x_1 + 3x_2$.

Отсюда находим ФСР:

x_1	x_2	x_3
1	0	-3
0	1	3

Таким образом базисные векторы, соответствующие $\lambda_1 = 2$, имеют вид $a_1(1,0,-3)$, $a_2(0,1,3)$

$$\lambda_2 = 1 \qquad \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$x_3 -$ свободная переменная

ФСР :

x_1	x_2	x_3
1	1	1

$b_1(1,1,1)$.

Из координат полученных базисных векторов, записанных по столбцам, составляем матрицу перехода $T_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, находим обратную к ней матрицу $T^{-1}_{e\to e'} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ и записываем каноническое разложение матрицы A_e^{φ}:

$$A_e^{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задачи для решения

1 Найдите собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе векторного пространства матрицами:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $D = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; д) $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2 Выяснить, какие из матриц линейных операторов в пространстве V над R можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найдите этот базис и соответствующую ему матрицу:

а) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 10 & -3 & -9 \\ -18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{pmatrix}$.

3 Подобна ли матрица диагональной матрице?

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4 Для матрицы А построить каноническое разложение и, пользуясь им, вычислить сотую степень и корень квадратный из каждой матрицы:

$$а)\ A=\begin{pmatrix}7&1&1\\1&7&1\\1&1&7\end{pmatrix};\quad б)\ A=\begin{pmatrix}3&-3&-1\\-3&3&1\\-1&1&7\end{pmatrix};\quad в)\ A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}.$$

5 Решить уравнение AX = b, если известно каноническое разложение A = $Q\Lambda Q^{-1}$ матрицы A и столбец свободных членов b:

$$а)\ A=\begin{pmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&3&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8&29&-11\\-5&18&-7\\1&-3&1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix};$$

$$б)\ A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&7\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$в)\ A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Тема 3. Линейные операторы в евклидовом пространстве

Вопросы теории

1 Определение ортогонального оператора.
2 Свойства ортогонального оператора.
3 Определение ортогональной матрицы.
4 Собственные значения ортогонального оператора.
5 Определение сопряженного оператора.
6 Свойства сопряженных операторов.
7 Связь матрицы линейного оператора и матрицы сопряженного с ним оператора.
8 Определение симметрического (самосопряженного) оператора.
9 Свойства симметрических операторов.

Образцы решения задач

Задача 1. Определить, является ли ортогональным преобразование φ, действующее на векторы ортонормированного базиса $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ по формулам:

а) $\varphi(\boldsymbol{e_1}) = \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}$, $\varphi(\boldsymbol{e_2}) = \boldsymbol{e_2}$;

б) $\varphi(\boldsymbol{e_1}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2})$, $\varphi(\boldsymbol{e_2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2})$.

Решение а) По определению ортогонального преобразования найдем $(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y}))$. Пусть $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2}$ и $\mathbf{y} = \beta_1\mathbf{y_1} + \beta_2\mathbf{y_2}$. Тогда $\varphi(\mathbf{x}) = \alpha_1\varphi(\mathbf{e_1}) + \alpha_2\varphi(\mathbf{e_2}) = \alpha_1(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}) + \alpha_2\mathbf{e_2} = \alpha_1\mathbf{e_1} + (\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{e_2}$. $\varphi(\mathbf{y}) = \beta_1\varphi(\mathbf{e_1}) + \beta_2\varphi(\mathbf{e_2}) = \beta_1\mathbf{e_1} + +(\beta_1 + \beta_2)\mathbf{e_2}$. Тогда $(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = (\alpha_1\mathbf{e_1} + (\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{e_2}, \beta_1\mathbf{e_1} + (\beta_1 + \beta_2)\mathbf{e_2}) = \alpha_1\beta_1 + +(\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)$. Найдем $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2}, \beta_1\mathbf{e_1} + \beta_2\mathbf{e_2}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$. Преобразование не является ортогональным, так как $(\varphi(x), \varphi(y)) \neq (x, y)$.

б) Эту задачу решим другим способом. Известно, что матрица ортогонального оператора является ортогональной и наоборот. Рассмотрим матрицу $A^{\varphi}{}_{e}$.

$A^{\varphi}{}_{e} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найдем матрицу, обратную к ней.

$$|A^{\varphi}{}_{e}| = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

$$(A^{\varphi}{}_{e})^{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A^{\varphi}{}_{e})^{T} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Значит, $(A^{\varphi}{}_{e})^{-1} = (A^{\varphi}{}_{e})^{T}$ и линейное преобразование φ является ортогональным.

Задача 2. Линейный оператор φ в базисе $\boldsymbol{e_1}$ = (1,1,1), $\boldsymbol{e_2}$ = (0,1,1), $\boldsymbol{e_3}$ = =*(0,0,1)* имеет матрицу $A^{\varphi}{}_{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу сопряженного оператора в этом же базисе, если векторы ***(e)*** заданы в ортонормированном базисе.

Решение. Учитывая формулу для матрицы сопряженного оператора

$A^* = Г^{-1} A^T Г$, найдем соответствующие матрицы:

1) матрица транспонированная к матрице $A^{\varphi}{}_{e}$ имеет вид

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

2) матрица Грама имеет вид

$$Г = \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & (e_1,e_3) \\ (e_2,e_1) & (e_2e_2) & (e_2,e_3) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_3) & (e_3,e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

3) матрица, обратная к матрице Грама Г, имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Значит, $Г^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

4) тогда $A^{\varphi^*}{}_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задачи для решения

1 Определить, является ли ортогональным линейное преобразование φ, действующее на векторы ортонормированного базиса $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$, по формулам:

1) $\varphi(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$, $\varphi(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}$;

2) $\varphi(\mathbf{e_1}) = \frac{1}{5}(3\mathbf{e_1} + 4\mathbf{e_2})$, $\varphi(\mathbf{e_2}) = \frac{1}{5}(4\mathbf{e_1} + 3\mathbf{e_2})$;

3) $\varphi(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} + 2\mathbf{e_3}$, $\varphi(\mathbf{e_2}) = 2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + 2\mathbf{e_3}$, $\varphi(\mathbf{e_3}) = 2\mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$.

2 Пусть А матрица линейного преобразования евклидова пространства в некотором базисе, Г – матрица Грама этого базиса. Найти матрицу A^* сопряженного преобразования в том же базисе, если:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Г = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Г = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $Г = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

3 Пусть в базисе ***(e)*** скалярное произведение задано формулой $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$, а линейный оператор φ – матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу сопряженного оператора φ^* в том же базисе.

4 Преобразование φ евклидова пространства многочленов степени n ≤2 со скалярным произведением (**p**,**g**) $=\int\limits_{-1}^{1} p(t)g(t)dt$ ставит в соответствие многочлену его производную. Найти матрицу сопряженного оператора в базисе 1, t, $3t^2-1$.

5 Будет ли самосопряженным линейное преобразование, заданное в ортонормированном базисе матрицей:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix};\ \ 2)\ A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix};\ 3)\ A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix};\ 4)\ A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

6 Найти собственные значения и ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного оператора, заданного в ортонормированном базисе матрицей $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & -1\\ -4 & 16 & 4\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

7 Ортогонально ли преобразование, переводящее систему векторов (**a**) в систему (**b**), если обе эти системы заданы в ортонормированном базисе:

1) $\mathbf{a_1}=(1, 2, 2)$, $\mathbf{b_1}=(2, 2, 1)$,
$\mathbf{a_2}=(1, 1, 0)$, $\mathbf{b_2}=(0, 1, 1)$,
$\mathbf{a_3}=(0, 1, -1)$, $\mathbf{b_3}=(-1, 1, 0)$;

2) $\mathbf{a_1}=(1, 4)$, $\mathbf{b_1}=(5, 0)$,
$\mathbf{a_2}=(1, 3)$, $\mathbf{b_2}=(3,1)$.

8 Найти собственные значения и ортонормированную систему собственных векторов ортогонального преобразования, заданного в ортонормированном базисе матрицей

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Список литературы

1 Кострикин А. И. Введение в алгебру : в 3 книгах. Кн. 2: Линейная алгебра. – М. : МЦНМО, 2009.

2 Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – 17 - е изд. – СПб. : Лань, 2008.

3 Окунев Л. Я. Высшая алгебра. – 3 - е изд. – СПб. : Лань, 2009. – 336 с .

4 Окунев Л. Я. Сборник задач по высшей алгебре. – 2-е изд. – СПб. : Лань, 2009.

5 Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Задачи по высшей алгебре. – 17-е изд. – СПб. : Лань, 288 с.

6 Нечаев В. А. Задачник-практикум по алгебре. – М. : Просвещение, 1983.

7 Косовских С. В. Линейная алгебра и геометрия. Материалы для практических занятий со студентами специальности 010100 «Математика». – Курган : Изд-во КГУ, 2001.

Шатных Олеся Николаевна

АЛГЕБРА
(ЧАСТЬ 3)

Материалы для практических занятий
и самостоятельной работы
для студентов направлений 01.03.01 и 44.03.01

Редактор О. Г. Арефьева

Подписано в печать	Формат 60х84 1/16	Бумага 65 г/м^2
Печать цифровая	Усл. печ.л. 1,25	Уч.-изд. л. 1,25
Заказ	Тираж 25 экз.	Не для продажи

РИЦ Курганского государственного университета.
640000, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.