МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ТЕОРЕМЫ И РАСЧЁТНЫЕ ФОРМУЛЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Методические указания
к практическим занятиям для студентов
направлений 13.03.01, 13.03.02, 15.03.01, 15.03.04, 15.03.05,
20.03.01, 23.03.01, 23.03.02, 23.03.03, 27.03.01, 27.03.04, 44.03.01
и специальностей 23.05.01 и 23.05.02

Курган 2015

Кафедра: «Теоретическая механика и сопротивление материалов»

Дисциплина: «Теоретическая механика»
(направления 13.03.01, 13.03.02, 15.03.01, 15.03.04, 15.03.05, 20.03.01, 23.03.01, 23.03.02, 23.03.03, 27.03.01, 27.03.04, 44.03.01; специальности 23.05.01, 23.05.02)

Составил: канд. техн. наук, доцент С.Г. Тютрин

Утверждены на заседании кафедры «26» ноября 2015 г.

Рекомендованы методическим советом университета

«19» декабря 2014 г.

1 СТАТИКА

В «Статике» изучают методы преобразования систем сил в эквивалентные системы и устанавливают условия равновесия тел.

Связи и реакции связей

Твердое тело называется *свободным*, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении. Если же движение тела ограничено, тело называется *несвободным*.

Тело, ограничивающее свободу движения другого тела, является по отношению к нему *связью*. А сила или система сил, выражающая действие связи на тело, называется *реакцией связи*.

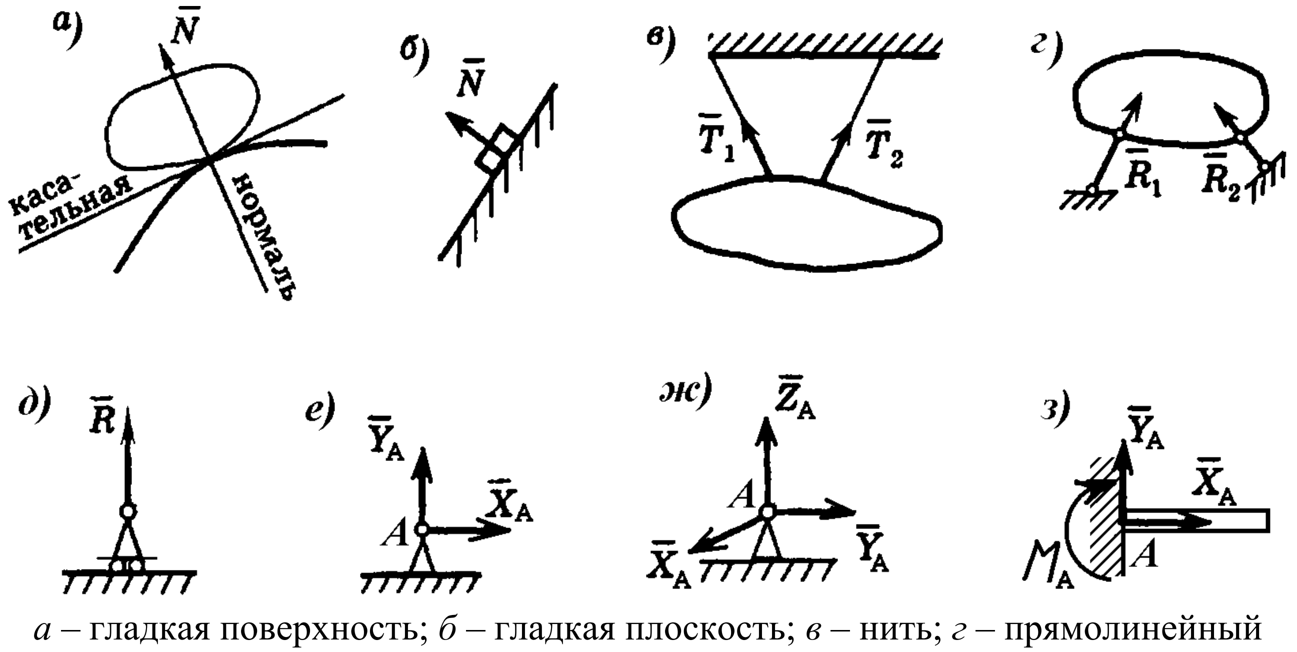
Принцип освобождения твердых тел от связей: несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, на которое кроме заданных сил действуют реакции связей.

Реакцией гладкой поверхности является одна сила N, направленная перпендикулярно к этой поверхности (рисунок 1.1 *а*).

Реакцией гладкой плоскости является одна сила N, направленная перпендикулярно к этой плоскости (рисунок 1.1 *б*).

Реакцией нити является одна сила T, направленная вдоль этой нити (рисунок 1.1 *в*).

Реакцией прямолинейного стержня с шарнирами по краям является одна сила R, направленная вдоль этого стержня (рисунок 1.1 *г*).



а – гладкая поверхность; *б* – гладкая плоскость; *в* – нить; *г* – прямолинейный стержень с шарнирами по краям; *д* – шарнирно-подвижная опора; *е* – шарнирно-неподвижная опора; *ж* – сферический шарнир; *з* – жесткое защемление (заделка)

Рисунок 1.1 – Виды связей

В шарнирно-подвижной опоре возникает одна сила $\vec{R}$, направленная перпендикулярно опорной плоскости (рисунок 1.1 *д*).

В шарнирно-неподвижной опоре возникает одна сила с неизвестным углом наклона, которую раскладывают на две составляющие $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленные по координатным осям (рисунок 1.1 *е*).

В сферическом шарнире возникает одна сила, неизвестно направленная в пространстве, которую раскладывают на три составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и $\vec{Z}_A$, направленные по координатным осям (рисунок 1.1 *ж*).

Жесткое защемление (заделка) используется как в плоских, так и в пространственных задачах. В плоской заделке (рисунок 1.1 *з*) реакция представлена двумя взаимно перпендикулярными составляющими $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и моментом M_A.

В пространственной заделке реакция представлена тремя взаимно перпендикулярными составляющими $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$ и тремя моментами M_{AX}, M_{AY}, M_{AZ} относительно трёх взаимно перпендикулярных осей.

Сложение и разложение сил

Для сложения нескольких сил применяют правило векторного многоугольника: $\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + ... + \vec{P}_n$ (рисунок 1.2 *а*).

Для сложения *двух* сил удобной в применении является *аксиома параллелограмма сил*: равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рисунок 1.2 *б*). При этом достаточно того, чтобы пересекались линии действия этих сил, поскольку сила – это скользящий вектор, её можно перемещать вдоль линии действия (рисунок 1.3 *а*).

Рисунок 1.2 – Сложение двух сил по правилу векторного многоугольника (*а*) и по аксиоме параллелограмма сил (*б*)

Применяя аксиому параллелограмма сил в обратной последовательности, получаем правило разложения силы на две составляющие, приложенные в точке действия силы и направленные по заданным осям (рисунок 1.3 *б*).

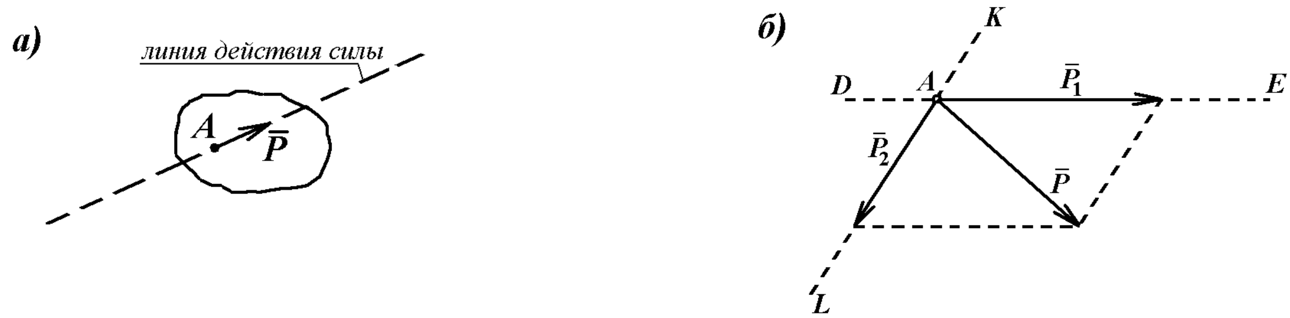


Рисунок 1.3 – Построение линии действия силы $\vec{P}$ (*а*)
и разложение силы $\vec{P}$ согласно аксиоме параллелограмма сил (*б*)

Сходящаяся система сил на плоскости и в пространстве

Силы называют *сходящимися*, если их линии действия пересекаются в одной точке.

Различают плоскую и пространственную системы сходящихся сил. В *плоской* системе сходящихся сил линии действия всех сил лежат в одной плоскости. В *пространственной* системе сходящихся сил линии действия сил лежат в разных плоскостях.

Сходящиеся силы *уравновешиваются* в том случае, если их равнодействующая равна нулю, т.е. многоугольник сил *замкнут* (рисунок 1.4).

Рисунок 1.4 – Система сходящихся сил (*а*) и проверка её уравновешенности (*б*)

Условие равновесия пространственной системы сходящихся сил описывается системой трёх уравнений:

$\sum F_{kx} = 0$ – сумма проекций на ось x всех сил системы равна нулю;

$\sum F_{ky} = 0$ – сумма проекций на ось y всех сил системы равна нулю;

$\sum F_{kz} = 0$ – сумма проекций на ось z всех сил системы равна нулю.

Условие равновесия плоской системы сходящихся сил описывается системой двух уравнений:

$\sum F_{kx} = 0$ – сумма проекций на ось x всех сил системы равна нулю;

$\sum F_{ky} = 0$ – сумма проекций на ось y всех сил системы равна нулю.

Проекция силы на ось

На рисунке 1.5 для заданных сил $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{N}$, $\vec{S}$ и $\vec{Q}$ изображены их проекции на некоторую ось t: F_t, P_t, N_t, S_t и Q_t.

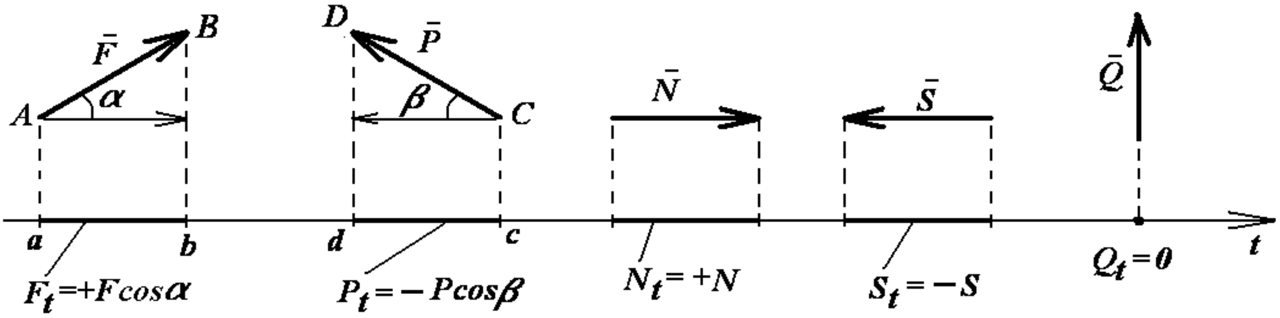


Рисунок 1.5 – Проекции сил на ось

Проекция силы на ось равна произведению величины силы на косинус угла между этой силой и *этой осью*.

Правило знака: проекция силы на ось считается положительной, если направление составляющей силы (параллельной оси) совпадает с направлением этой оси;

проекция силы на ось будет отрицательной, если направление составляющей силы (параллельной оси) противоположно направлению этой оси.

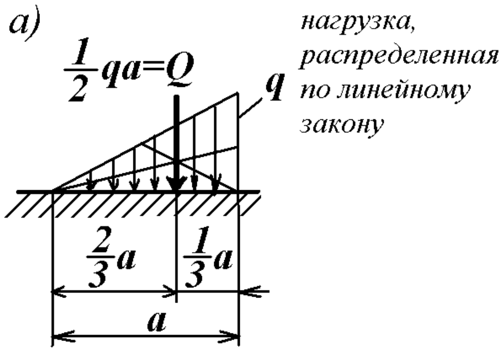
Сила, параллельная оси, проецируется на эту ось в *натуральную величину*.

Если сила перпендикулярна оси, то проекция силы на эту ось равна *нулю* (сила проецируется в точку).

Равнодействующая распределённой нагрузки

Часто на расчётных схемах изображают нагрузку действующей в какой-либо точке, т. е. в виде сосредоточенной силы. Однако существует много случаев, когда нагрузка распределена или по всему объёму тела (например, вес тела), или по какой-либо поверхности (например, давление жидкости или газа), или по линии (например, усилие резания на режущей кромке ножа). В «Статике» *распределённую нагрузку заменяют равнодействующей* (сосредоточенной) *силой*.

На рисунке 1.6 *а* показан случай линейного распределения нагрузки с максимальной интенсивностью q, а на рисунке 1.6 *б* показан случай равномерного распределения нагрузки с постоянной интенсивностью q.



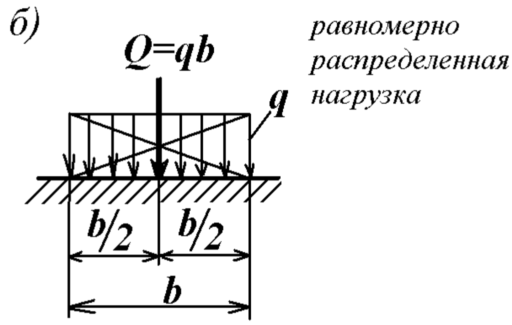


Рисунок 1.6 – Равнодействующая $\vec{Q}$ для линейно распределённой (*а*) и равномерно распределённой (*б*) нагрузки

Для случая распределения нагрузки по прямой линии доказано, что всегда равнодействующая $\vec{Q}$ равна *площади* грузовой эпюры (т.е. графика распределенной нагрузки) и проходит *через центр тяжести* этой эпюры.

Таким образом, в случае распределения нагрузки по линейному закону (рисунок 1.6 *а*) равнодействующая $\vec{Q}$ проходит через точку пересечения медиан треугольника и равна

$$Q = \frac{1}{2}qa\,. \tag{1.1}$$

А в случае равномерно распределенной нагрузки (рисунок 1.6 *б*) равнодействующая $\vec{Q}$ проходит через точку пересечения диагоналей прямоугольника и равна

$$Q = qb\,. \tag{1.2}$$

Момент силы относительно точки

Момент силы $\vec{F}$ *относительно некоторой точки O* – это векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведённого из точки *O* в точку приложения силы, на саму эту силу:

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}\,. \tag{1.3}$$

Вектор момента силы перпендикулярен плоскости, проведённой через линию действия силы и точку *O*, и направлен по правилу правого винта: при взгляде с острия вектора момента мы должны видеть вращение силы относительно точки *O* направленным против хода часовой стрелки.

Модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки *O* равен произведению модуля силы на её плечо:

$$M_O\left(\vec{F}\right) = Fh\,. \tag{1.4}$$

В случае плоской системы сил момент силы $\vec{F}$ относительно какой-либо точки *O* вычисляется по формуле:

$$M_O\left(\vec{F}\right) = \pm Fh\,, \tag{1.5}$$

где h – плечо силы $\vec{F}$ относительно точки O. Плечо силы $\vec{F}$ относительно точки O – это кратчайшее расстояние (т.е. длина перпендикуляра) от точки O до линии действия силы;

знак «плюс» берут, если сила $\vec{F}$ стремится вращать тело вокруг заданной точки O против хода часовой стрелки (рисунок 1.7 *а*);

знак «минус» берут, если сила $\vec{F}$ стремится вращать тело вокруг заданной точки O по ходу часовой стрелки (рисунок 1.7 *б*).

Рисунок 1.7 – Вычисление момента силы относительно точки (варианты)

Момент силы относительно точки равен нулю в единственном случае, когда плечо силы равно нулю, т.е. когда линия действия силы проходит через эту точку (рисунок 1.8 *а*).

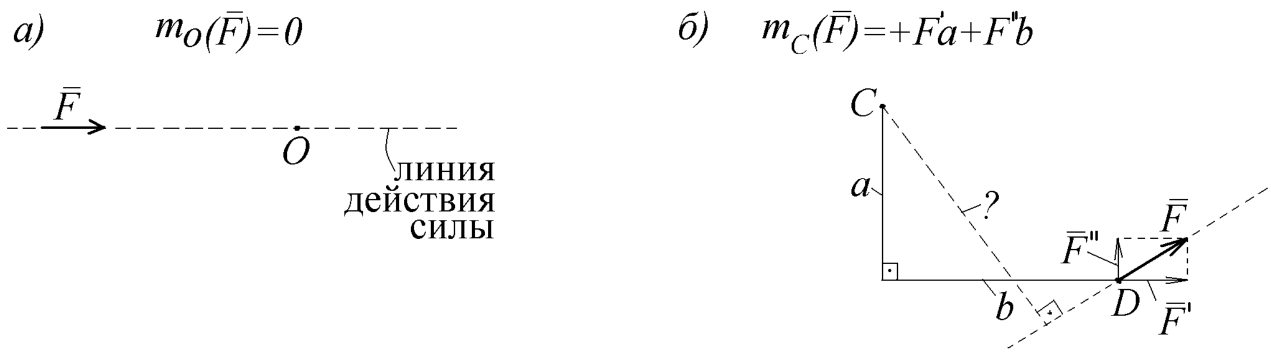


Рисунок 8 – Вычисление момента силы относительно точки (варианты)

Теорема Вариньона: момент равнодействующей равен сумме моментов её составляющих (рисунок 1.8 *б*). Таким образом, любую «неудобную» силу можно разложить на составляющие по «удобным» направлениям и применить теорему Вариньона!

Пара сил, сложение пар сил

Парой сил называется совокупность двух равных по модулю, противоположно направленных сил, не лежащих на одной прямой (рисунок 1.9).

Воздействие пары сил на тело характеризуется моментом, который имеет и величину, и направление, т.е. является векторной величиной.

Для плоской задачи (рисунок 1.9 *а*) момент пары сил равен взятому со знаком «плюс» или «минус» произведению одной из сил пары на плечо:

$$m = \pm F \cdot d\,, \qquad (1.6)$$

где знак «*плюс*» берется, когда мы видим вращение пары сил направленным против хода часовой стрелки, а знак «*минус*» – когда по ходу часовой стрелки;

плечо пары сил – это кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары.

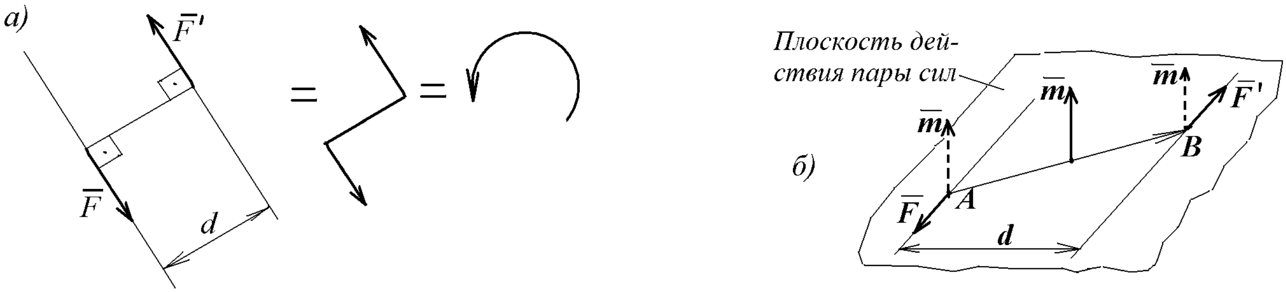


Рисунок 1.9 – Пара сил на плоскости чертежа (*а*) и в пространстве (*б*)

Вектор момента пары сил направлен перпендикулярно плоскости действия сил так, чтобы при взгляде с конца этого вектора (с острия) поворот пары был виден происходящим против хода часовой стрелки.

Вектор момента пары сил является свободным вектором: его можно переносить параллельно самому себе, не меняя при этом его величины и направления (рисунок 1.9 *б*).

Чтобы сложить несколько пар сил, нужно найти геометрическую (векторную) сумму их векторов: $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + ... + \vec{M}_n$.

Главным моментом $\vec{M}_O$ системы сил $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_n$ относительно некоторого центра O называется векторная сумма моментов всех сил системы относительно этого центра (точки O):

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_k\right). \qquad (1.7)$$

Момент силы относительно оси

Момент силы $\vec{F}$ относительно оси z (рисунок 1.10) равен произведению двух сомножителей:

$$M_z = \pm F_1 d_1,$$

где F_1 – модуль проекции силы на плоскость, перпендикулярную к оси;

d_1 – плечо проекции силы относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Правило знака:

момент силы относительно оси считается положительным, если при взгляде с острия оси мы видим вращение силы вокруг оси направленным против хода часовой стрелки;

момент силы относительно оси считается отрицательным, если при взгляде с острия оси мы видим вращение силы вокруг оси направленным по ходу часовой стрелки.

Момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях:

1) линия действия силы пересекает ось;

2) сила параллельна оси.

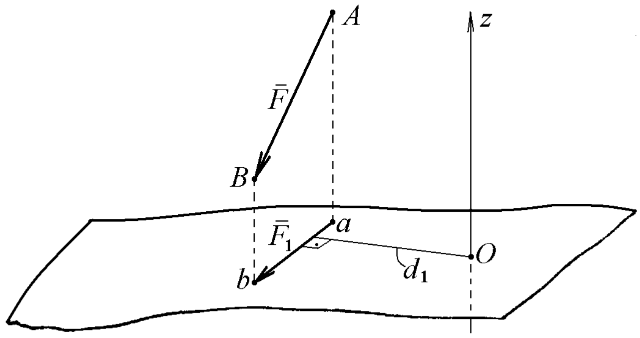


Рисунок 1.10 – Момент силы $\vec{F}$ относительно оси z

Аналитические выражения для моментов силы $\vec{F}$ относительно координатных осей x, y, z:

$$M_x\left(\vec{F}\right)= y_F F_z - z_F F_y; \quad M_y\left(\vec{F}\right)= z_F F_x - x_F F_z; \quad M_z\left(\vec{F}\right)= x_F F_y - y_F F_x, \tag{1.8}$$

где x_F, y_F, z_F – координаты точки приложения силы $\vec{F}$;

F_x, F_y, F_z – проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси x, y и z соответственно.

Сумму моментов системы сил относительно некоторой оси называют *главным моментом* системы сил относительно этой оси:

$$\vec{M}_z = \sum \vec{M}_z\left(\vec{F}_k\right). \tag{1.9}$$

Теорема о параллельном переносе силы

Силу, действующую на твердое тело, можно перенести параллельно самой себе в другую точку, *добавив при этом пару сил*, момент которой равен произведению силы на расстояние от линии действия силы до этой точки (рисунок 1.11).

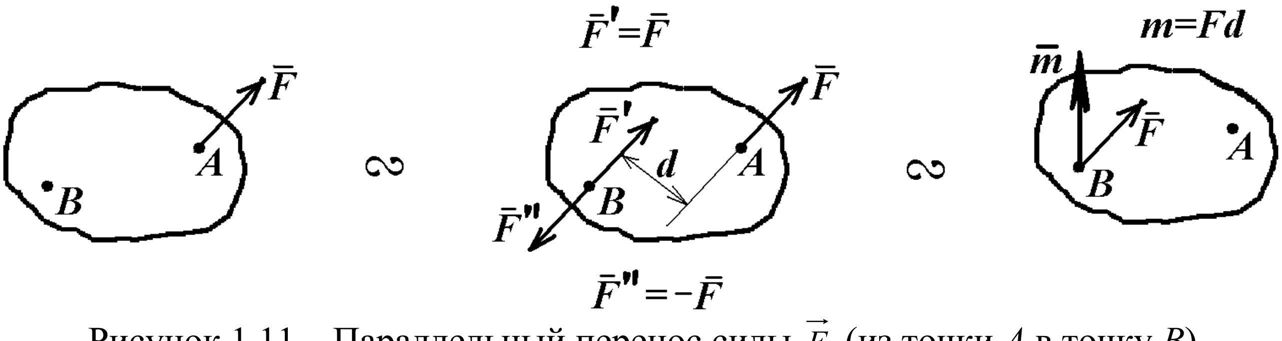


Рисунок 1.11 – Параллельный перенос силы $\vec{F}$ (из точки A в точку B)

Этот метод предложил французский ученый Пуансо. Метод широко применяется, например, при расчете валов.

Приведение произвольной системы сил к заданному центру (основная теорема статики)

Силы, произвольно расположенные в пространстве, можно привести к двум векторам:

1) к вектору силы, равному главному вектору $\overrightarrow{R^*}$ и приложенному в центре приведения;

2) к вектору момента пары сил, равному главному моменту $\overrightarrow{M}_O$ всей нагрузки относительно центра приведения.

В качестве центра приведения часто используется центр тяжести.

Главным вектором системы сил $\overrightarrow{R^*}$ называется геометрическая сумма всех сил системы.

Главным моментом относительно центра приведения $\overrightarrow{M}_O$ называется геометрическая сумма всех моментов сил (и пар сил) относительно центра приведения.

Выбор центра приведения никак не отражается на главном векторе $\overrightarrow{R^*}$, но влияет на модуль и направление главного момента $\overrightarrow{M}_O$.

Уравнения равновесия плоской и пространственной систем сил

Аналитическое условие равновесия пространственной системы сил представляет собой систему из шести уравнений:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0; \\ \sum F_{ky} = 0; \\ \sum F_{kz} = 0; \\ \sum m_x\left(\overrightarrow{F}_k\right) = 0; \\ \sum m_y\left(\overrightarrow{F}_k\right) = 0; \\ \sum m_z\left(\overrightarrow{F}_k\right) = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Аналитическое условие равновесия плоской системы сил представляет собой систему из трёх уравнений:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0; \\ \sum F_{ky} = 0; \\ \sum m_O\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Здесь $\sum F_{kx}$ – сумма проекций на ось x всех действующих сил;

$\sum F_{ky}$ – сумма проекций на ось y всех действующих сил;

$\sum F_{kz}$ – сумма проекций на ось z всех действующих сил;

$\sum m_x(\vec{F}_k)$ – сумма моментов относительно оси x от всей действующей нагрузки;

$\sum m_y(\vec{F}_k)$ – сумма моментов относительно оси y от всей действующей нагрузки;

$\sum m_z(\vec{F}_k)$ – сумма моментов относительно оси z от всей действующей нагрузки;

$\sum m_O(\vec{F}_k)$ – сумма моментов относительно произвольной точки O от всей действующей нагрузки;

x, y, z – взаимно перпендикулярные оси (оси декартовой системы координат).

Система параллельных сил

Система параллельных сил эквивалентна их главному вектору (равнодействующей).

Равнодействующая двух параллельных сил равна их главному вектору, а линия её действия расположена в плоскости сил на расстояниях от линий действия сил, обратно пропорциональных модулям сил.

Для однородной тонкой пластины, состоящей из n частей с площадями A_k, (общей площадью A) координаты центра тяжести определяются выражениями:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} A_k} \text{ и } y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} A_k}. \qquad (1.12)$$

Здесь $\sum_{k=1}^{n} A_k x_k = S_y$ – статический момент площади фигуры относительно оси y;

$\sum_{k=1}^{n} A_k y_k = S_x$ – статический момент площади фигуры относительно оси x;

x_k, y_k – координаты центра тяжести k–й части пластины (k=1… n);

$\sum_{k=1}^{n} A_k = A$.

Для стержневой конструкции, состоящей из n однородных (с одинаковой погонной массой) стержней длиной ℓ_k, координаты центра тяжести определяются выражениями:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} \ell_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \ell_k} \text{ и } y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} \ell_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} \ell_k}. \qquad (1.13)$$

Здесь x_k, y_k – координаты центра тяжести k–го стержня (k=1… n).

2 КИНЕМАТИКА

Кинематикой называют раздел механики, в котором изучаются геометрические аспекты движения тел без учета их массы, инертности и действующих на них сил.

Для определения положения движущегося объекта необходимо выбрать тело, по отношению к которому будет рассматриваться движение, и жестко связать с ним какую-либо систему координатных осей. Эту систему называют *системой отсчета*.

Кинематически задать движение или закон движения тела – это значит задать положение этого тела относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени.

Основная задача кинематики состоит в том, чтобы, зная закон движения тела, определить все кинематические величины его точек (траектории, скорости, ускорения и др.).

Движущаяся точка очерчивает в пространстве некоторую линию (оставляет след). Эта линия представляет собой геометрическое место положений точки в рассматриваемой системе отсчета и называется *траекторией* точки.

Если траекторией является прямая линия, движение точки называется *прямолинейным*, а если траектория кривая, то движение называется криволинейным.

Скорость – это векторная величина, характеризующая быстроту и направление перемещения точки в данной системе отсчета.

Ускорение – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости точки (по величине и направлению).

Существуют *3 способа задания движения точки*: векторный, координатный и естественный.

Различают *5 видов движения твердого тела*: 1) поступательное; 2) вращательное; 3) плоское или плоскопараллельное; 4) сферическое; 5) общий случай движения твердого тела.

Векторный способ задания движения точки

В векторном способе положение точки M в пространстве однозначно определяется радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным из некоторого неподвижного центра O в данную точку (рисунок 2.1 *а*). Для определения положения точки в любой момент времени необходимо знать зависимость радиус-вектора от времени. Поэтому уравнение движения точки при векторном способе задания движения имеет вид: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

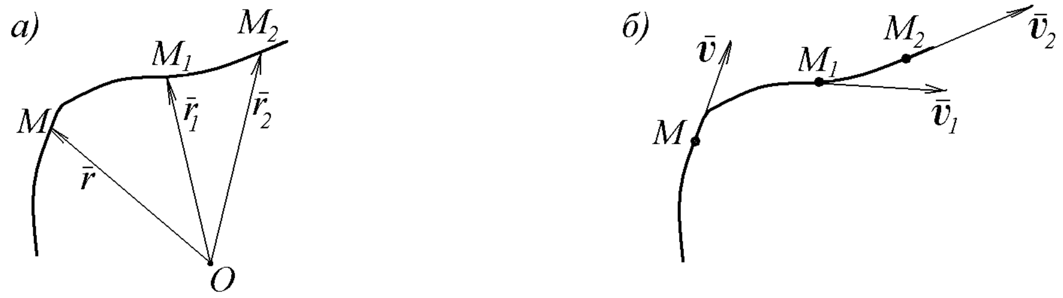


Рисунок 2.1 – Задание движения точки векторным способом

Траектория точки в данном случае является геометрическим местом точек концов радиуса-вектора $\vec{r}$ движущейся точки. Из математики известно, что линия, образованная концами переменного вектора, начало которого находится в одной точке пространства, называется *годографом* этого вектора. Таким образом, траектория точки *M* является годографом её радиус-вектора $\vec{r}$.

Вектор скорости точки равен первой производной от радиус-вектора точки по времени и направлен по касательной к траектории (в сторону движения):

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \tag{2.1}$$

где точка над радиус-вектором обозначает первую производную по времени (от радиус-вектора).

Вектор ускорения точки равен первой производной от скорости или второй производной от радиус-вектора точки по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dot{\vec{\upsilon}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}, \tag{2.2}$$

где одна точка сверху обозначает первую производную по времени, а две точки сверху обозначают вторую производную по времени.

Вектор ускорения точки направлен по касательной к годографу скорости (в сторону вогнутости траектории).

Координатный способ задания движения точки

При координатном способе положение точки в любой момент времени t задается её координатами, и уравнения движения точки в декартовых координатах имеют вид:

$$x=f_1(t); \quad y=f_2(t); \quad z=f_3(t). \tag{2.3}$$

Величина скорости точки определяется через проекции вектора скорости на координатные оси:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}\,. \tag{2.4}$$

Проекции скорости точки на неподвижные оси декартовых координат равны первым производным от соответствующих координат точки по времени:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \qquad (2.5)$$

Направление вектора скорости можно определить по направлениям его составляющих, параллельных координатным осям. Например, если $\frac{dx}{dt} > 0$, то направление составляющей $\overrightarrow{\upsilon_x}$ совпадает с направлением оси *x*. А если $\frac{dx}{dt} < 0$, то составляющая $\overrightarrow{\upsilon_x}$ направлена в сторону, противоположную направлению оси *x*.

Косинусы углов, которые вектор скорости точки составляет с осями координат:

$$\cos\left(\vec{\upsilon}, \hat{x}\right) = \frac{\upsilon_x}{\upsilon}; \quad \cos\left(\vec{\upsilon}, \hat{y}\right) = \frac{\upsilon_y}{\upsilon}; \quad \cos\left(\vec{\upsilon}, \hat{z}\right) = \frac{\upsilon_z}{\upsilon}. \qquad (2.6)$$

Величина ускорения точки определяется через проекции вектора ускорения на координатные оси:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (2.7)$$

Проекции ускорения точки на неподвижные оси декартовых координат равны вторым производным от соответствующих координат точки по времени:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \qquad (2.8)$$

Проекции ускорения точки на неподвижные оси декартовых координат также равны первым производным от соответствующих проекций скорости точки по времени:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \dot{\upsilon}_x; \quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \dot{\upsilon}_y; \quad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \dot{\upsilon}_z. \qquad (2.9)$$

Направление вектора ускорения можно определить по направлениям его составляющих, параллельных координатным осям. Например, если $\frac{d^2x}{dt^2} > 0$, то направление составляющей $\overrightarrow{a_x}$ совпадает с направлением оси *x*. А если $\frac{d^2x}{dt^2} < 0$, то составляющая $\overrightarrow{a_x}$ направлена в строну, противоположную направлению оси *x*.

Косинусы углов, которые вектор ускорения точки составляет с осями координат:

$$\cos\left(\vec{a}, \hat{x}\right) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos\left(\vec{a}, \hat{y}\right) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos\left(\vec{a}, \hat{z}\right) = \frac{a_z}{a}. \qquad (2.10)$$

Естественный способ задания движения точки

Для задания движения точки естественным способом необходимо указать траекторию движения точки, начало отсчета O, положительное и отрицательное направления. Тогда положение точки M однозначно определяется криволинейной координатой s, которая равна расстоянию от O до M, измеренному вдоль траектории и взятому со своим знаком (рисунок 2.2 *а*).

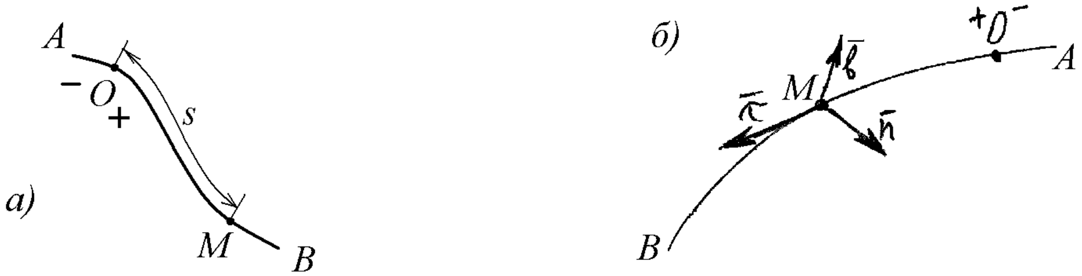


Рисунок 2.2 – Задание движения точки M естественным способом

Уравнение движения точки при естественном способе имеет вид

$$s = s(t), \tag{2.11}$$

где t – время.

При проведении расчётов через рассматриваемую точку проводят так называемые *естественные координатные оси*: касательная, главная нормаль и бинормаль. Касательная ось направлена по касательной к траектории в сторону возрастания дуговой координаты. Главная нормаль направлена перпендикулярно траектории в сторону её вогнутости. Бинормаль перпендикулярна и к касательной оси, и к главной нормали и направлена так, чтобы образовалась правая система координат. Орты естественных координатных осей обозначают $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$: это векторы, длина которых равна единице, а направления совпадают с положительными направлениями осей (рисунок 2.2 *б*).

Тогда вектор скорости точки: $\vec{\upsilon} = \vec{\tau}\dfrac{ds}{dt}$.

Таким образом, по модулю скорость точки равна $\upsilon = \left|\dfrac{ds}{dt}\right|$. При этом если $\dfrac{ds}{dt} > 0$, то вектор $\vec{\upsilon}$ направлен в сторону возрастания дуговой координаты s; если $\dfrac{ds}{dt} < 0$, тогда вектор $\vec{\upsilon}$ направлен в сторону убывания координаты s.

Вектор ускорения $\vec{a}$ точки равен геометрической сумме двух векторов, один из которых направлен по главной нормали и называется нормальным ускорением $\vec{a}_n$, а другой направлен по касательной и называется касательным ускорением точки $\vec{a}_\tau$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{a_\tau}, \tag{2.12}$$

где $\vec{a_n} = \vec{n}\dfrac{\upsilon^2}{\rho}$ (здесь ρ – радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке);

$\vec{a_\tau} = \vec{\tau}\dfrac{d\upsilon}{dt}$.

Проекция ускорения на главную нормаль равна квадрату модуля скорости точки, деленному на радиус кривизны траектории в данной точке. Эта проекция всегда положительна и всегда направлена к центру кривизны траектории (поэтому нормальное ускорение ещё называют центростремительным ускорением).

Нормальное ускорение характеризует изменение направления вектора скорости точки и существует лишь *при криволинейном* движении (при прямолинейном движении $\rho \to \infty$ и $a_n = 0$).

Касательное ускорение точки существует лишь *при неравномерном* движении точки и характеризует изменение модуля скорости. По величине она равна первой производной от скорости по времени или второй производной от дуговой координаты точки по времени. Если $\dfrac{d\upsilon}{dt} > 0$, то направление $\vec{a_\tau}$ совпадает с $\vec{\tau}$. Если $\dfrac{d\upsilon}{dt} < 0$, то направление $\vec{a_\tau}$ противоположно направлению $\vec{\tau}$.

Если направления векторов $\vec{\upsilon}$ и $\vec{a_\tau}$ совпадают, то точка движется *ускоренно*. Если направления векторов $\vec{\upsilon}$ и $\vec{a_\tau}$ взаимно противоположны, то точка движется *замедленно*.

Поступательное движение твердого тела

Поступательное движение твердого тела – это такое движение, при котором любая прямая, соединяющая две точки тела, движется параллельно самой себе.

Теорема: все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые (совпадающие при наложении) траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения.

Общие для всех точек тела, движущегося поступательно, скорости и ускорения называют скоростью и ускорением поступательного движения этого тела.

Таким образом, *уравнениями поступательного движения* твердого тела являются уравнения движения любой точки этого тела (в качестве такой точки обычно выбирают центр тяжести тела *C*):

$$x_C = f_1(t),\quad y_C = f_2(t),\quad z_C = f_3(t). \qquad (2.13)$$

Траекторией поступательного движения могут быть любые линии, в том числе и окружности.

Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Вращательное движение твердого тела – это такое движение, при котором существует прямая, неизменно связанная с телом, все точки которой остаются неподвижными. Эта прямая называется *осью вращения*.

При этом все остальные точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности, центры которых лежат на этой оси.

На рисунке 14 *а* изображено произвольное твердое тело, точки *A* и *B* которого неподвижны, лежат на оси вращения *z*. *P* – неподвижная полуплоскость; *Q* – подвижная полуплоскость, связанная с телом; φ – угол между *P* и *Q*.

Угол φ однозначно определяет положение тела в любой момент времени *t*. Поэтому зависимость $\varphi=f(t)$ представляет собой *уравнение вращательного движения твердого тела*.

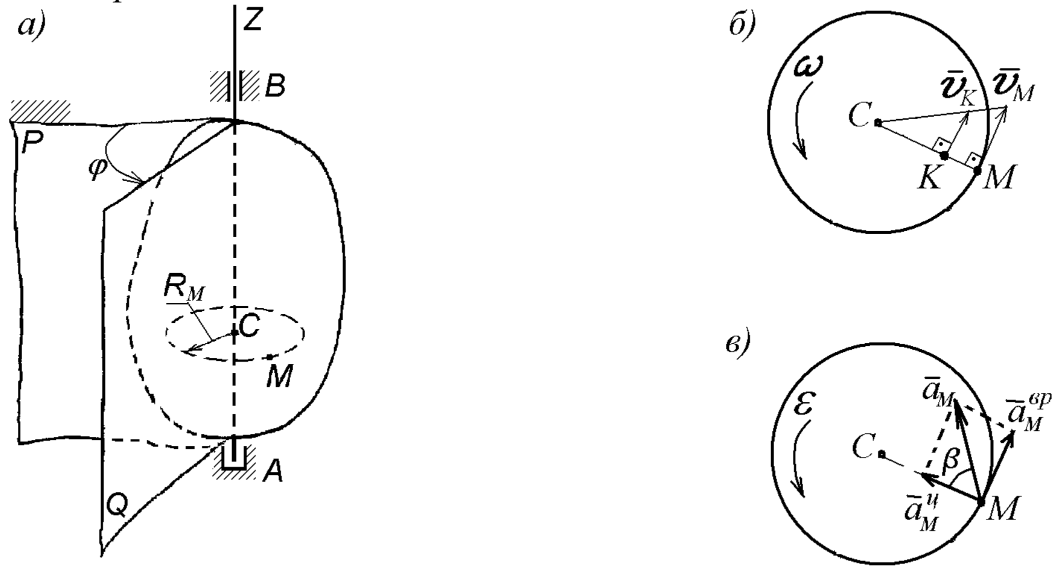


Рисунок 2.3 – Вращательное движение твёрдого тела вокруг оси *z*

Величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота φ с течением времени, называется *угловой скоростью тела*:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{2.14}$$

При $\omega=const$ происходит *равномерное вращение*.

При $\dfrac{d\varphi}{dt} > 0$ тело вращается в сторону положительного направления отсчёта угла φ. При $\dfrac{d\varphi}{dt} < 0$ тело вращается в сторону отрицательного направления отсчёта угла φ.

Величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости с течением времени, называется *угловым ускорением тела*:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \tag{2.15}$$

Если знаки у ω и ε одинаковы (т. е. $\omega\varepsilon>0$), то тело *вращается ускоренно*. Если знаки у ω и ε противоположны (т. е. $\omega\varepsilon<0$), то тело *вращается замедленно*.

При $\varepsilon = const$ тело совершает *равнопеременное вращение* (либо равноускоренное, либо равнозамедленное).

Произвольная точка M тела движется по окружности радиуса R_M (рисунок 2.3 *а*). Вектор вращательной *скорости точки М* направлен в сторону вращения по касательной к этой окружности (перпендикулярно радиусу окружности, проведённому в точку M). Величина скорости точки M определяется по формуле:

$$\upsilon_M = R_M \omega . \tag{2.16}$$

Таким образом, при вращательном движении тела величины скоростей точек прямо пропорциональны их расстояниям до оси вращения.

Ускорение точки M определяется по её составляющим (касательному и нормальному ускорениям).

Касательное ускорение *или вращательное ускорение* точки M (направлено по касательной к траектории точки в сторону углового ускорения ε):

$$a_M^{\tau} = a_M^{вр} = R_M \varepsilon . \tag{2.17}$$

Нормальное или центростремительное ускорение точки M (направлено по радиусу к центру окружности, по которой движется точка):

$$a_M^{n} = a_M^{ц} = \frac{\upsilon_M^2}{R_M} = R_M \omega^2 = \upsilon_M \omega . \tag{2.18}$$

Полное ускорение точки M (рисунок 2.3 *в*):

$$a_M = \sqrt{(a_M^{вр})^2 + (a_M^{ц})^2} = R_M \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} . \tag{2.19}$$

Угол β между векторами $\overrightarrow{a_M}$ и $\overrightarrow{a_M^{ц}}$ (рисунок 2.3 *в*) определяется выражением:

$$tg\beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2} . \tag{2.20}$$

Величина угла β является постоянной для всех точек тела (не зависит от местоположения точки).

Плоское движение твердого тела

Плоским, или плоскопараллельным, движением твердого тела называется такое движение, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости.

Это позволяет свести изучение плоского движения тела к рассмотрению движения плоской фигуры в плоскости её движения.

Плоское движение можно рассматривать как совокупность двух простых движений: 1) поступательное движение вместе с произвольной точкой, называемой *полюсом*; 2) вращательное движение вокруг полюса. При этом величина поступательного перемещения зависит от выбора полюса, а величина и направление угла поворота от выбора полюса не зависят.

Уравнениями плоского движения твердого тела являются следующие три уравнения (рисунок 2.4 *а*):

$$x_0 = f_1(t); \quad y_0 = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t). \tag{2.21}$$

Здесь первые два уравнения задают траекторию движения полюса O, третье уравнение определяет угол поворота тела относительно полюса.

Угловая скорость ω при плоском движении равна первой производной по времени от угла поворота φ, а угловое ускорение ε равно первой производной по времени от угловой скорости ω:

$$\omega = \dot{\varphi}; \qquad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \tag{2.22}$$

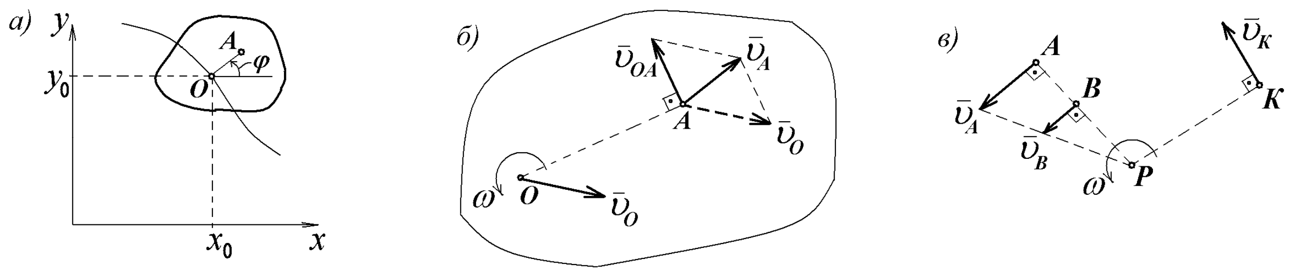


Рисунок 2.4 – Плоское движение твёрдого тела

Скорость любой точки A плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса O и вращательной скорости этой точки во вращательном движении фигуры вокруг полюса (рисунок 2.4 *б*):

$$\overrightarrow{\upsilon_A} = \overrightarrow{\upsilon_O} + \overrightarrow{\upsilon_{OA}}.$$

Проекции скоростей точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки, равны (т.е. равны между собой как по величине, так и по направлению).

При плоском движении тела существует точка, неизменно связанная с телом, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Эту точку называют *мгновенным центром скоростей* (МЦС).

МЦС плоской фигуры (обычно обозначается точкой P) находится на перпендикуляре к вектору скорости полюса $\overrightarrow{\upsilon_O}$ на расстоянии от полюса O, равном

$$OP = \frac{\upsilon_O}{\omega}. \tag{2.23}$$

Таким образом, скорость любой точки при плоском движении представляет собой в данный момент времени вращательную скорость этой точки вокруг МЦС (рисунок 2.4 *в*):

$$\upsilon_A = PA \cdot \omega; \quad \upsilon_B = PB \cdot \omega; \quad \upsilon_K = PK \cdot \omega. \tag{2.24}$$

На рисунке 2.5 показаны типичные способы нахождения МЦС, когда векторы скоростей $\overrightarrow{\upsilon_A}$ и $\overrightarrow{\upsilon_B}$ точек A и B перпендикулярны прямой, проходящей через эти точки. МЦС располагается на пересечении прямой, проходящей через рассматриваемые точки, с прямой, проходящей через концы векторов скоростей этих точек. В случае, когда векторы $\overrightarrow{\upsilon_A}$ и $\overrightarrow{\upsilon_B}$ равны по величине и одинаково направлены (рисунок 2.5 *в*), проведённые прямые параллельны и не пересекаются, следовательно, МЦС расположен на бесконечно большом расстоянии: тело совершает поступательное движение.

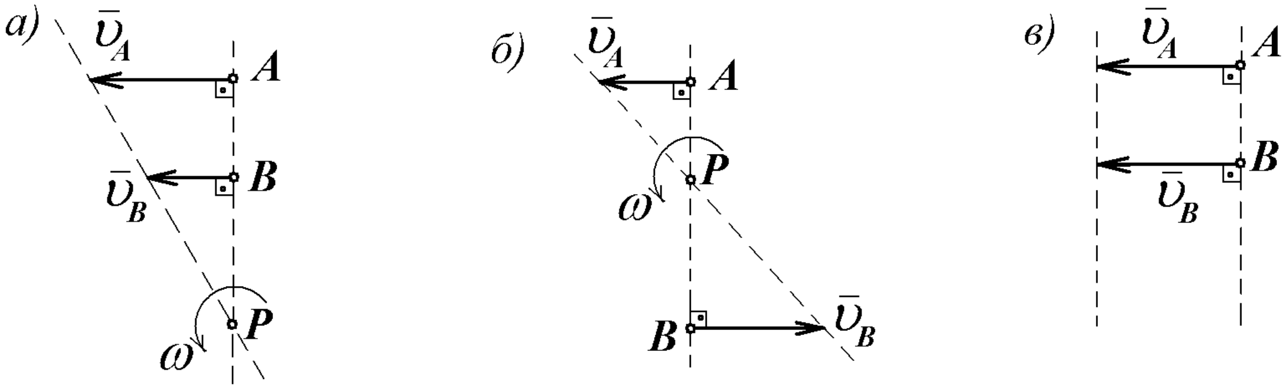


Рисунок 2.5 – Способы графического нахождения МЦС

Ускорение любой точки *A* тела при плоском движении равно геометрической сумме ускорения какой-либо другой точки *O*, принятой в качестве полюса, и ускорения точки *A* во вращательном движении вокруг этого полюса *O*:

$$\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_O} + \overrightarrow{a_{OA}^{вр}} + \overrightarrow{a_{OA}^{ц}}. \quad (2.25)$$

Здесь учтено, что вектор ускорения во вращательном движении *A* точки вокруг полюса *O* определяется геометрической суммой двух составляющих:

$$\overrightarrow{a_{OA}} = \overrightarrow{a_{OA}^{вр}} + \overrightarrow{a_{OA}^{ц}}, \quad (2.26)$$

где $a_{OA}^{вр} = \varepsilon|OA|$ – вращательное ускорение точки *A* во вращательном движении вокруг полюса *O* (направлено перпендикулярно к *OA* в сторону углового ускорения ε);

$a_{OA}^{ц} = |OA|\omega^2$ – центростремительное ускорение точки *A* во вращательном движении вокруг полюса *O* (направлено от точки *A* к точке *O*).

При плоском движении (кроме случая, когда одновременно и ω=0, и ε=0) в каждый момент движения плоской фигуры имеется единственная точка этой фигуры, ускорение которой равно нулю. Эту точку называют *мгновенным центром ускорений* и обозначают обычно буквой *Q*.

Мгновенный центр ускорений *Q* (рисунок 2.6) лежит на пересечении лучей, проведённых из точек фигуры к векторам их ускорений *под одним и тем же углом* α, причем угол α нужно откладывать от векторов ускорений точек в направлении углового ускорения ε.

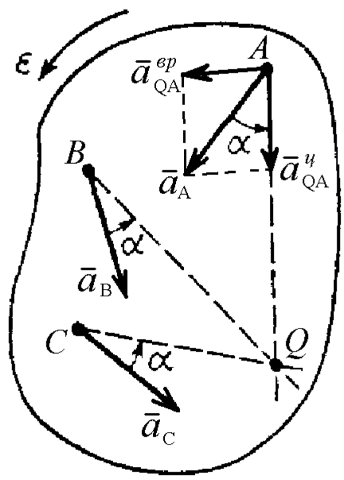


Рисунок 2.6 – Графическое определение мгновенного центра ускорений

Сложное, или составное, движение

Иногда необходимо (или удобно) рассматривать движение одновременно по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается условно неподвижной, а вторая движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом точкой или телом, называется *составным*, или *сложным*.

Движение, совершаемое точкой *M* по отношению к подвижным осям координат, называется *относительным движением*. Траектория точки в относительном движении называется *относительной траекторией*. Скорость движения точки вдоль этой траектории называется *относительной скоростью* $\overrightarrow{\upsilon_r}$, где индекс *r* – от французского *relatif* (относительный). Величина, характеризующая быстроту изменения относительной скорости, называется *относительным ускорением* $\overrightarrow{a_r}$.

Движение, совершаемое подвижной системой отсчета со всеми неизменно связанными с ней точками пространства по отношению к неподвижной системе, является для точки *M переносным движением*.

Скорость той неизменно связанной с подвижными осями точки, с которой в данный момент времени совпадает точка *M*, называется *переносной скоростью* точки *M* в этот момент времени $\overrightarrow{\upsilon_e}$, а ускорение этой точки называется *переносным ускорением* $\overrightarrow{a_e}$ точки *M*, где индекс *e* – от французского *emporter* (вынос).

Движение, совершаемое точкой *M* по отношению к неподвижной системе отсчета, называется *абсолютным* (или *сложным*). Траектория этого движения называется *абсолютной траекторией*, скорость – *абсолютной скоростью* $\overrightarrow{\upsilon_{abs}}$, а ускорение – *абсолютным ускорением* $\overrightarrow{a_{abs}}$.

Теорема о сложении скоростей: при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:

$$\overrightarrow{\upsilon_{abs}} = \overrightarrow{\upsilon_r} + \overrightarrow{\upsilon_e} . \tag{2.27}$$

Теорема Кориолиса о сложении ускорений: При сложном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме *трёх* ускорений: относительного, переносного и кориолисова (поворотного) ускорения

$$\overrightarrow{a_{abs}} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_K} . \tag{2.28}$$

Кориолисово ускорение точки равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения и относительной скорости точки:

$$\overrightarrow{a_K} = 2\left(\overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{\upsilon_r}\right). \tag{2.29}$$

Таким образом, по величине

$$a_K = 2\omega_e \upsilon_r \sin\alpha , \tag{2.30}$$

где α – угол между векторами скоростей $\overrightarrow{\omega_e}$ и $\overrightarrow{\upsilon_r}$.

Направление вектора кориолисова ускорения $\overrightarrow{a_K}$ можно определить по правилу векторного произведения: направлен вектор $\overrightarrow{a_K}$ перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\overrightarrow{\omega_e}$ и $\overrightarrow{\upsilon_r}$, причем в ту сторону, откуда кратчайший поворот от $\overrightarrow{\omega_e}$ к $\overrightarrow{\upsilon_r}$ виден происходящим против хода часовой стрелки.

Направление вектора кориолисова ускорения $\overrightarrow{a_K}$ также можно определить *по правилу Н.Е. Жуковского*. Для этого нужно:

1) спроецировать вектор относительной скорости $\overrightarrow{\upsilon_r}$ на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения;

2) полученную проекцию повернуть на 90° по направлению переносного вращения ω_e.

Найденное таким образом направление и является направлением вектора кориолисова ускорения $\overrightarrow{a_K}$.

Из формулы (2.30) следует, что кориолисово ускорение будет отсутствовать (a_K=0) в следующих трёх случаях:

1) когда ω_e=0, т.е. когда переносное движение является поступательным или в данный момент времени угловая скорость переносного вращения равна нулю;

2) когда $\upsilon_r = 0$, т.е. когда отсутствует относительное движение (в данный момент времени);

3) когда α=0 или α=180°, т.е. когда вектор относительной скорости $\overrightarrow{\upsilon_r}$ расположен параллельно оси переносного вращения.

При сложении двух поступательных движений твердого тела получается поступательное движение со скоростью, равной векторной сумме скоростей составляющих поступательных движений.

При сложении двух вращений, одно из которых переносное, а другое – относительное, получается вращение тела вокруг мгновенной оси, причем угловая скорость абсолютного вращения равна векторной сумме угловых скоростей составляющих вращений:

$$\overrightarrow{\omega_{abs}} = \overrightarrow{\omega_r} + \overrightarrow{\omega_e}\,. \tag{2.31}$$

Движение твёрдого тела вокруг неподвижной точки

Движение, при котором одна из точек тела во всё время движения остается неподвижной, называется *сферическим движением* твердого тела.

Примером сферического движения может служить движение юлы (волчка). При таком движении все остальные точки тела движутся по сферическим поверхностям, центры которых совпадают с неподвижной точкой.

Леонард Эйлер в результате своих исследований пришел к выводу о том, что сферическое движение твердого тела слагается из серии последовательных элементарных поворотов вокруг мгновенной оси вращения, которая непрерывно меняет своё положение в пространстве, проходя через неподвижную точку.

Уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки, или *уравнения сферического движения*, имеют вид (рисунок 2.7 *а*):

$$\varphi = f_1(t); \quad \psi = f_2(t); \quad \theta = f_3(t), \tag{2.32}$$

где φ – угол собственного вращения;

ψ– угол прецессии;

Θ – угол нутации;

t – время.

Решение задач основано на следующих положениях.

1 У тела, совершающего сферическое движение, в каждый момент времени имеется прямая, все точки которой неподвижны. Она проходит через неподвижную точку O тела и называется *мгновенной осью вращения*.

Поворот тела в данный момент времени происходит вокруг мгновенной оси вращения с некоторой угловой скоростью Ω. Вектор $\vec{\Omega}$ лежит на мгновенной оси вращения и направлен согласно правилу правого винта.

2 Если тело катится по неподвижной поверхности без проскальзывания, то мгновенная ось вращения совпадает с линией соприкосновения тела и поверхности.

3 Скорости точек тела при сферическом движении находятся по формуле

$$\upsilon = \Omega h, \tag{2.33}$$

где h – расстояние от точки до мгновенной оси вращения, т.е. длина соответствующего перпендикуляра (рисунок 2.7 *б*).

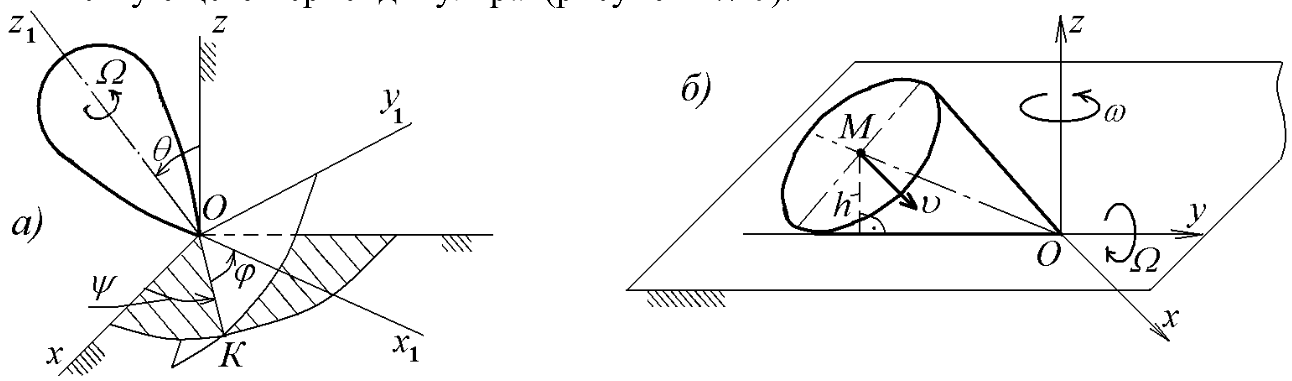


Рисунок 2.7 – Сферическое движение тел

Общий случай движения свободного твёрдого тела

Наиболее общий случай движения твердого тела, когда оно является свободным и может перемещаться как угодно по отношению к системе отсчета, слагается в из поступательного движения, при котором все точки движутся как произвольно выбранный полюс A со скоростью $\overrightarrow{\upsilon_A}$, и из серии элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через полюс.

Таким образом, *уравнения движения свободного твердого тела*, позволяющие найти его положение по отношению к неподвижной системе отсчета в любой момент времени t, имеют вид:

$$\begin{cases} x_A = f_1(t); \quad y_A = f_2(t); \quad z_A = f_3(t); \\ \varphi = f_4(t); \quad \psi = f_5(t); \quad \theta = f_6(t), \end{cases} \tag{2.34}$$

где x_A, y_A, z_A – координаты точки A тела, выбранной в качестве полюса (верхние три уравнения описывают поступательную часть движения тела);

φ, ψ, Θ – углы Эйлера (нижние три уравнения описывают сферическое движение тела вокруг полюса A).

Взяв первые производные по времени от этих выражений, определяют скорости, а по вторым производным находят ускорения.

3 ДИНАМИКА

Динамика – это раздел теоретической механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием сил.

Законы механики Галилея-Ньютона

I закон (закон инерции): материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние.

II закон (закон пропорциональности силы и ускорения): ускорение $\vec{a}$ материальной точки массой m пропорционально приложенной к ней силе $\vec{F}$ и имеет одинаковое с ней направление: $m\vec{a} = \vec{F}$.

III закон (закон действия и противодействия): всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

IV закон (закон независимости действия сил, или закон суперпозиции сил): несколько одновременно действующих на материальную точку сил $\vec{F_k}$ сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная геометрической сумме действующих сил:

$$\vec{a} = \Sigma\overrightarrow{a_k}. \tag{3.1}$$

Умножив левую и правую части данного выражения на массу m и применив II закон Галилея-Ньютона, получают *основное уравнение динамики для материальной точки*:

$$m\vec{a} = \Sigma\overrightarrow{F_k}. \tag{3.2}$$

Задачи динамики

Первая задача динамики: зная закон движения материальной точки, определить действующую на неё силу.

Вторая или основная задача динамики: зная действующие на точку силы, определить закон движения материальной точки.

Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки

Рассматривая движение материальной точки массой m под действием приложенных к ней сил $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ...\overrightarrow{F_n}$, получают дифференциальные уравнения движения материальной точки (в декартовых координатах):

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \\ m\ddot{y} &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky}; \\ m\ddot{z} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kz}, \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

где $\ddot{x}$ – вторая производная по времени от координаты x точки, или проекция вектора ускорения точки на ось x;

$\ddot{y}$ – вторая производная по времени от координаты y точки, или проекция вектора ускорения точки на ось y;

$\ddot{z}$ – вторая производная по времени от координаты z точки, или проекция вектора ускорения точки на ось z;

F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции силы $\overrightarrow{F_k}$ на оси x, y и z соответственно.

Механическая система

Механической системой материальных точек или тел называется такая их совокупность, в которой положение и движение каждой точки или тела зависит от положения и движения всех остальных.

Все действующие силы подразделяются на внешние и внутренние. *Внешними* $\overrightarrow{F^e}$ называются силы, действующие на точки системы со стороны тел, не входящих в состав данной системы (индекс e – от французского *extérieur*: внешний, наружный).

Внутренними $\overrightarrow{F^i}$ называются силы, действующие на точки системы со стороны других точек или тел этой же системы (индекс i – от французского *intérieur*: внутренний, внутри).

Внутренние силы обладают следующими свойствами:

1) геометрическая сумма всех внутренних сил системы (т.е. их главный вектор) равняется нулю: $\sum \overrightarrow{F_k^i} = 0$;

2) сумма моментов (т.е. главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю: $\sum m_O(\overrightarrow{F_k^i}) = 0$ и $\sum m_x(\overrightarrow{F_k^i}) = 0$.

Масса механической системы равна арифметической сумме масс всех материальных точек или тел, образующих систему: $M = \sum m_k$.

Координаты центра масс механической системы:

$$x_C = \frac{\sum (m_k x_k)}{M}; \quad y_C = \frac{\sum (m_k y_k)}{M}; \quad z_C = \frac{\sum (m_k z_k)}{M}, \tag{3.4}$$

где x_k, y_k и z_k – координаты k-й материальной точки массой m_k, входящей в систему.

Радиус-вектор центра масс механической системы:

$$\overrightarrow{r_C} = \frac{\sum (m_k \overrightarrow{r_k})}{M}, \tag{3.5}$$

где $\overrightarrow{r_C}$ – радиус-вектор k-й материальной точки (массой m_k), входящей в систему.

Теорема о движении центра масс механической системы: центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе M всей системы и к которой приложены все *внешние* силы $\overrightarrow{F_k^e}$, действующие на систему:

$$M\overrightarrow{a_C} = \sum \overrightarrow{F_k^e}. \tag{3.6}$$

Спроецировав обе части равенства (3.6) на оси координат, получают *дифференциальные уравнения движения центра масс* механической системы (в проекциях на декартовы оси координат):

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e; \ M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e; \ M\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e. \tag{3.7}$$

В частном случае, когда $\sum \overrightarrow{F_k^e} = 0$, из формулы (3.6) следует, что

$$\overrightarrow{a_C} = 0 \quad \text{и} \quad \overrightarrow{\upsilon_C} = const. \tag{3.8}$$

Если же $\sum \overrightarrow{F_k^e} \neq 0$, но, например, $\sum F_{kx}^e = 0$, то из выражения (3.7) следует, что

$$\ddot{x}_C = a_{Cx} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{x}_C = \upsilon_{Cx} = const. \tag{3.9}$$

Выражения (3.6) и (3.7) описывают *закон сохранения движения центра масс*:

а) если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс этой системы движется с постоянной (по модулю и направлению) скоростью, т.е. равномерно и прямолинейно (например, если центр масс был в покое, то он и останется в покое);

б) если сумма проекций всех внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная.

Момент инерции твердого тела относительно оси

Масса тела является мерой инертности твёрдого тела лишь при поступательном движении. А при вращательном движении твёрдого тела мерой его инертности является момент инерции тела относительно оси вращения.

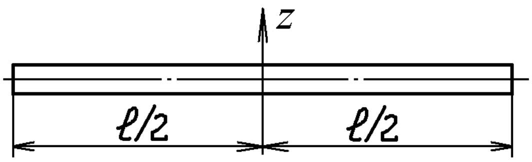
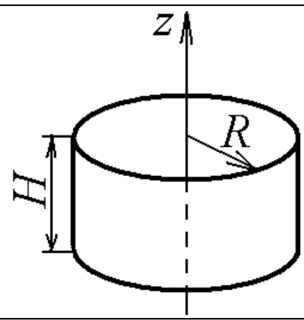
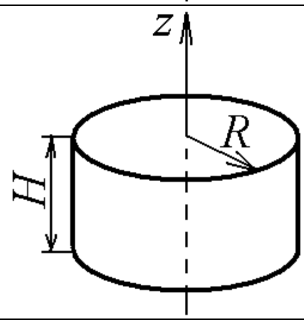
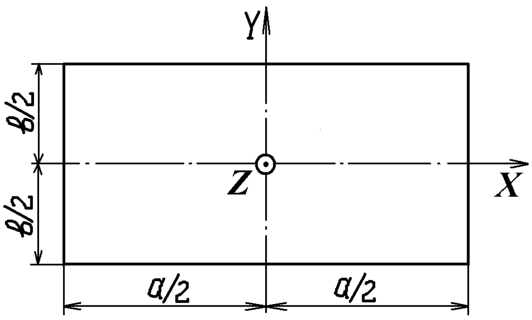
Моментом инерции твёрдого тела J_z относительно оси z называется скалярная величина, равная сумме произведений массы m_k каждой точки тела на квадрат расстояния h_k от этой точки до оси:

$$\sum m_k h_k^2 = J_Z . \tag{3.10}$$

Ось, проходящая через центр масс тела, называется *центральной осью*.

Расчётные формулы для вычисления моментов инерции однородных тел относительно осей симметрии приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Моменты инерции J_z и радиусы инерции ρ_z тел массой m

Наименование тела, его J_z и ρ_z	Расчётная схема
Однородный тонкий стержень длиной ℓ: $J_Z = \dfrac{m\ell^2}{12}$, $\rho_Z = \dfrac{\ell}{\sqrt{12}}$	
Однородные тонкие трубы и кольца радиусом R и высотой H: $J_Z = mR^2$, $\rho_Z = R$	
Однородные круглые пластины, диски и цилиндры радиусом R и высотой H: $J_Z = \dfrac{mR^2}{2}$, $\rho_Z = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$	
Однородная пластина со сторонами a и b: $J_Y = \dfrac{ma^2}{2}$, $J_X = \dfrac{mb^2}{2}$, $J_Z = \dfrac{m}{12}(a^2 + b^2)$, $\rho_Z = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{12}}$	

Расчетные формулы для определения моментов инерции разных тел формально имеют одну структуру:

$$J_Z = m\rho_Z^2, \tag{3.11}$$

где ρ_Z – *радиус инерции* относительно оси z.

Таким образом, момент инерции тела может быть задан с помощью радиуса инерции (см. таблицу 3.1).

Теорема Гюйгенса-Штейнера: момент инерции тела относительно некоторой оси z_1 равен сумме момента инерции относительно параллельной ей оси z, проходящей через центр масс, и величины, равной произведению массы системы на квадрат расстояния d между осями:

$$J_{Z1} = J_Z + md^2 . \tag{3.12}$$

Количество движения материальной точки и механической системы

Количеством движения точки называется векторная величина $\overrightarrow{m\upsilon}$, равная произведению массы m точки на вектор её скорости $\vec{\upsilon}$.

Направлен вектор количества движения так же, как и вектор скорости точки, т.е. по касательной к траектории в сторону движения, и имеет размерность кг·м/с.

Теорема об изменении количества движения точки: изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени:

$$\overrightarrow{m\upsilon_1} - \overrightarrow{m\upsilon_0} = \sum \overrightarrow{S_k} , \tag{3.13}$$

где $\overrightarrow{\upsilon_1}$ – скорость в момент времени t_1;.

$\overrightarrow{\upsilon_0}$ – скорость в начальный момент времени t=0.

$\overrightarrow{S_k} = \int_0^{t_1} \overrightarrow{F_k} dt$ – импульс силы $\overrightarrow{F_k}$ за период времени от 0 до t_1.

Количеством движения системы называют векторную величину $\vec{Q}$, равную геометрической сумме количеств движения всех точек системы:

$$\vec{Q} = \sum \overrightarrow{m_k \upsilon_k} . \tag{3.14}$$

Количество движения системы является характеристикой поступательного движения системы и равно произведению массы M всей системы на скорость $\overrightarrow{\upsilon_C}$ её центра масс:

$$\vec{Q} = M \cdot \overrightarrow{\upsilon_C} . \tag{3.15}$$

Теорема об изменении количества движения системы (в дифференциальной форме): производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме действующих на систему *внешних* сил:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_k^e} . \tag{3.16}$$

Или в проекциях на оси координат:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e . \qquad (3.17)$$

Из выражений (3.16) и (3.17) вытекает, как следствие, *закон сохранения количества движения системы*:

а) если сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы есть величина постоянная по модулю и направлению;

б) если сумма проекций действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.

Таким образом, внутренние силы не могут изменить суммарного количества движения системы.

Теорема об изменении количества движения системы (в интегральной форме): изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему *внешних* сил за тот же промежуток времени:

$$\overrightarrow{Q_1} - \overrightarrow{Q_0} = \sum \overrightarrow{S_k^e} , \qquad (3.18)$$

где $\overrightarrow{Q_1}$ – количество движения системы в момент времени t_1;

$\overrightarrow{Q_0}$ – количество движения системы при $t = 0$.

В проекциях на оси координат:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e; \quad Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}^e; \quad Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}^e . \qquad (3.19)$$

Момент количества движения материальной точки и механической системы

Момент вектора $\overrightarrow{m\upsilon}$ количества движения точки относительно заданного центра O или оси z обозначается $m_O(\overrightarrow{m\upsilon})$ или $m_z(\overrightarrow{m\upsilon})$ и называется *моментом количества движения точки* относительно этого центра (или оси), или *кинетическим моментом точки*.

Вычисляется момент вектора $\overrightarrow{m\upsilon}$ так же, как и момент силы (при этом вектор $\overrightarrow{m\upsilon}$ считается приложенным к движущейся материальной точке).

Кинетическим моментом механической системы (или *её главным моментом количества движения*) относительно заданного центра O или оси z называется величина, равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно центра или оси: $\overrightarrow{K_O} = \sum m_O(\overrightarrow{m_k \upsilon_k})$ или $\overrightarrow{K_z} = \sum m_z(\overrightarrow{m_k \upsilon_k})$.

Кинетический момент механической системы является характеристикой вращательного движения системы.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы: производная по времени от кинетического момента механической системы относительно оси равна сумме моментов *внешних* сил системы относительно той же оси.

$$\frac{dK_Z}{dt} = \sum m_Z(\overrightarrow{F_k^e}). \tag{3.20}$$

Закон сохранения кинетического момента механической системы: если сумма моментов действующих на систему внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то кинетический момент механической системы относительно этой оси будет величиной постоянной.

Эти теоремы применимы также и относительно центра. Из них следует, что внутренние силы изменить кинетический момент механической системы не могут.

Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения z равен произведению момента инерции J_z тела относительно этой оси на угловую скорость ω тела:

$$K_Z = J_Z \omega. \tag{3.21}$$

При равенстве нулю суммы моментов действующих на систему внешних сил относительно какой-либо оси вращения z, кинетический момент механической системы K_z относительно этой оси будет оставаться величиной постоянной (и $J_Z\,\omega = const$), что будет проявляться в следующем:

а) если система изменяема, то при удалении её точек от оси вращения будет возрастать момент инерции J_Z, что вызовет пропорциональное снижение величины угловой скорости ω;

б) если система изменяема, то при приближении её точек к оси вращения будет уменьшаться момент инерции J_Z, что вызовет пропорциональное увеличение угловой скорости ω;

в) если система неизменяема (абсолютно твердое тело), её $J_Z = const$, следовательно, твердое тело будет вращаться с постоянной угловой скоростью.

Кинетическая энергия материальной точки и механической системы

Кинетической энергией материальной точки называют половину произведения массы m точки на квадрат ее скорости: $\dfrac{m\upsilon^2}{2}$.

Кинетическая энергия является *скалярной положительной* величиной. Единицей измерения кинетической энергии является Джоуль (1Дж=1Н·м).

Теорема об изменении кинетической энергии точки: изменение кинетической энергии точки при некотором её перемещении из положения M_0 в положение M_1 равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на этом перемещении:

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \sum A_{(M_0 M_1)}, \tag{3.22}$$

где $\overrightarrow{\upsilon_0}$ – скорость точки в начальном положении M_0;.

$\vec{\upsilon}_1$ – скорость точки в конечном положении M_1.

Кинетической энергией механической системы называется скалярная величина T, равная *арифметической* сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \sum \frac{m_k \upsilon_k^2}{2}. \qquad (3.23)$$

Кинетическую энергию T отличает то, что она – величина скалярная и всегда положительная. Она не зависит от изменения направления движения, значит, на величину T оказывают влияние и внутренние силы.

Если механическая система состоит из нескольких тел, то её кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий этих тел: $T = \sum T_k$.

Теорема об изменении кинетической энергии системы: изменение кинетической энергии системы при некотором её перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i , \qquad (3.24)$$

где T_0 – кинетическая энергия системы в начальном положении;

T_1 – кинетическая энергия системы в конечном положении.

Кинетическая энергия твёрдого тела *при поступательном движении* равна половине произведения массы M тела на квадрат скорости υ_C центра масс:

$$T = \frac{1}{2} M \upsilon_C^2. \qquad (3.25)$$

Кинетическая энергия тела *при вращательном движении* равна половине произведения момента инерции J_Z тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости ω:

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2. \qquad (3.26)$$

Кинетическая энергия тела *при плоском движении* равна *сумме* кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс и кинетической энергии вращательного движения вокруг центра масс:

$$T = \frac{1}{2} M \upsilon_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2. \qquad (3.27)$$

Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу

Элементарная работа силы $\vec{F}$, приложенной в точке M, на её элементарном перемещении $\vec{ds}$ равна

$$dA = Fds \cos\alpha , \qquad (3.28)$$

где α – угол между векторами $\vec{ds}$ и $\vec{F}$.

Из выражения (3.28) следует:

а) если угол α острый, то работа положительна (в частности, при α=0 элементарная работа равна $dA = Fds$);

б) если угол α тупой, то работа отрицательна (в частности, при α=180° элементарная работа равна $dA = -Fds$);

в) если угол α=90°, т.е. сила направлена перпендикулярно перемещению, то элементарная работа равна нулю.

Аналитическое выражение элементарной работы:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz\,, \tag{3.29}$$

где F_x, F_y, F_z – проекции вектора силы $\vec{F}$ на оси x, y и z соответственно;

dx, dy, dz – проекции вектора элементарного перемещения точки на оси x, y и z соответственно.

Работа силы на любом перемещении M_0M_1 равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы:

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau ds\,. \tag{3.30}$$

Единицей измерения работы в системе является Джоуль (1 Дж=1Н·м).

Мощностью называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени:

$$N = \frac{dA}{dt} = F_\tau \upsilon\,, \tag{3.31}$$

где F_τ – проекция силы $\vec{F}$ на касательную к траектории точки приложения силы, направленную в сторону перемещения этой точки;

υ – скорость точки.

Если работа совершается равномерно, то мощность определяется как

$$N = A/t_1\,, \tag{3.32}$$

где t_1 – время, в течение которого произведена работа A.

Единицей измерения мощности является Ватт (1 Вт =1 Дж/с).

Работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки её приложения. Эта работа положительна, если начальная точка выше конечной, и отрицательна, если начальная точка ниже конечной.

Работа силы тяжести не зависит от вида той траектории, по которой перемещается точка её приложения. Силы, обладающие такими свойствами, называются *потенциальными*.

Работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости c на разность квадратов начального и конечного удлинений (или сжатий) пружины:

$$A_{(M_0M_1)} = \frac{c}{2}\left(\lambda_0^2 - \lambda_1^2\right). \tag{3.33}$$

Работа пружины будет положительной, когда $\lambda_0>\lambda_1$, т.е. когда конец пружины перемещается к равновесному положению. Работа пружины будет отрицательной, когда $\lambda_0<\lambda_1$, т.е. когда конец пружины удаляется от равновесного положения.

Работа силы упругости не зависит от вида траектории движения тела M из положения M_0 в положение M_1, следовательно, сила упругости является *потенциальной* силой.

При перемещении точки M по шероховатой поверхности из положения M_0 в положение M_1 *работа силы трения* $\vec{F}_{TP}$

$$A_{(M_0M_1)} = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{TP} ds = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} fNds, \tag{3.34}$$

где f – коэффициент трения скольжения;

N – нормальная составляющая реакции поверхности.

Если численно сила трения постоянна, то её работа

$$A_{(M_0M_1)} = -F_{TP} s, \tag{3.35}$$

где s – длина дуги кривой M_0M_1, по которой перемещается точка.

Работа силы трения при скольжении всегда отрицательна. Эта работа зависит от длины траектории, поэтому сила трения является силой *непотенциальной*.

Работа сил, приложенных к вращающемуся твердому телу:

$$A = \int_0^{\varphi 1} M_z d\varphi, \tag{3.36}$$

где M_z – момент приложенных сил относительно оси вращения z;

φ_1 – угол поворота тела.

В случае постоянного момента M_z=*const*:

$$A = M_z \varphi_1. \tag{3.37}$$

При действии сил на вращающееся тело *мощность* равна произведению вращающего момента M_z на угловую скорость ω тела:

$$N = \frac{dA}{dt} = M_z \omega. \tag{3.38}$$

При неизменной мощности вращающий момент будет тем больше, чем меньше угловая скорость.

Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы

Векторную величину $\overrightarrow{\Phi_k}$, равную по модулю произведению массы m_k точки на её ускорение $\overrightarrow{a_k}$ и направленную противоположно этому ускорению, называют *даламберовой силой инерции точки*:

$$\overrightarrow{\Phi_k} = -m_k \overrightarrow{a_k}. \tag{3.39}$$

Принцип Даламбера для материальной точки: если в каждый момент времени к фактически действующим на точку силам присоединить даламберову силу инерции $\overrightarrow{\Phi_k}$, то полученная система сил будет уравновешенной:

$$\overrightarrow{F_k^e} + \overrightarrow{F_k^i} + \overrightarrow{\Phi_k} = 0, \tag{3.40}$$

где $\overrightarrow{F_k^e}$ – равнодействующая приложенных к точке внешних сил;

$\overrightarrow{F_k^i}$ – равнодействующая приложенных к точке внутренних сил.

Значение принципа Даламбера состоит в том, что он позволяет задачи динамики рассматривать в форме уравнений равновесия статики. При этом даламберова сила инерции является условной или фиктивной силой (в отличие от реально действующих $\overrightarrow{F_k^e}$ и $\overrightarrow{F_k^i}$).

Принцип Даламбера для механической системы: если в любой момент времени к каждой из точек системы, кроме фактически действующих на неё внешних и внутренних сил, приложить соответствующие даламберовы силы инерции, то полученная система сил будет находиться в равновесии и к ней можно будет применить все уравнения статики.

Условия равновесия для движущейся с ускорением механической системы (с учётом свойств внутренних сил системы):

$$\begin{cases} \sum \overrightarrow{F_k^e} + \overrightarrow{R^u} = 0; \\ \sum m_O\left(\overrightarrow{F_k^e}\right) + \overrightarrow{M_O^u} = 0, \end{cases} \tag{3.41}$$

где $\overrightarrow{R^u} = \sum \overrightarrow{\Phi_k}$ – главный вектор даламберовых сил инерции;

$\overrightarrow{M_O^u} = \sum M_O(\overrightarrow{\Phi_k})$ – главный момент относительно центра O даламберовых сил инерции.

Главный вектор $\overrightarrow{R^u}$ *сил инерции твёрдого тела* равен произведению массы M тела на ускорение $\overrightarrow{a_C}$ его центра масс и направлен противоположно этому ускорению:

$$\overrightarrow{R^u} = -M\overrightarrow{a_C}. \tag{3.42}$$

Главный момент сил инерции твёрдого тела (относительно центра масс C тела):

$$\overrightarrow{M_C^u} = -J_C\vec{\varepsilon}, \tag{3.43}$$

где J_C – момент инерции тела относительно центра масс C тела;

$\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение тела.

Связи и их уравнения

Связью называется тело, ограничивающее свободу движения другого тела или точки. Если связь представляет собой поверхность какого-либо тела, по которой движется материальная точка, то координаты точки должны удовлетворять уравнению этой поверхности, которое и будет называться *уравнением связи*:

$$f(x, y, z) = 0. \tag{3.44}$$

Связь называется *двусторонней* (*удерживающей*), если накладываемые ею ограничения выражаются в форме *равенств*, определяющих линии или поверхности в пространстве. (Двусторонняя, или удерживающая, связь препятствует перемещению точки тела в двух противоположных направлениях.)

Ограничения, накладываемые *односторонней* связью, выражаются *неравенствами*. Односторонняя связь препятствует перемещению тела лишь в одном направлении и допускает его перемещение в противоположном направлении, а также во всех других направлениях.

Двусторонние связи подразделяются на геометрические (или конечные) и кинематические (или дифференциальные).

Если в уравнения связей входят только координаты точек и не входят производные от координат, то такие связи называются *геометрическими*, или *конечными*. Их вид:

$$f(x, y, z, t) = 0 , \tag{3.45}$$

где t – время (в общем случае).

Если в уравнения связей входят производные от координат по времени, то такие связи называются *кинематическими* (или *дифференциальными*). Вид уравнений связей в этом случае такой:

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0 , \tag{3.46}$$

где координаты x, y, z связи и время t также могут входить в эти уравнения (в общем случае).

Все геометрические и интегрируемые кинематические связи называются *голономными*. Неинтегрируемые кинематические связи (которые нельзя свести к геометрическим) являются *неголономными*.

Связи, в уравнения которых время явно не входит, называются *стационарными* (*склерономными*). Если время входит явно в уравнение связи, то связь называется *нестационарной* (*реономной*).

Возможные (виртуальные) перемещения материальной точки и механической системы

Возможными (или *виртуальными*) перемещениями несвободной механической системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения, допускаемые в данный момент наложенными на систему связями.

Возможные перемещения точек механической системы рассматривают как величины первого порядка малости, пренебрегая при этом величинами высших порядков малости. Поэтому криволинейные перемещения точек заменяют прямолинейными отрезками, отложенными по касательной к траекториям точек. Обозначают возможные перемещения $\delta\vec{s}$.

Число независимых возможных перемещений называют *числом степеней свободы системы*.

Свободное тело имеет 6 степеней свободы, свободная точка имеет 3 степени свободы.

Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений: необходимое и достаточное условие равновесия системы сил, приложенных к механической системе со стационарными двусторонними идеальными связями, заключается в равенстве нулю суммы элементарных работ действующих сил $\overrightarrow{F_k}$ на любом возможном перемещении $\delta\overrightarrow{s_k}$ системы –

$$\sum_{k=1}^{n}(\overrightarrow{F_k}\cdot\delta\overrightarrow{s_k})=0\,. \qquad (3.47)$$

Принцип возможных скоростей: для того, чтобы механическая система находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы возможная мощность всех активных сил $\overrightarrow{F_k}$ на любых возможных скоростях $\overrightarrow{\upsilon_k}$ была равна нулю –

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{F_k}\cdot\overrightarrow{\upsilon_k}\right)=0\,. \qquad (3.48)$$

Здесь возможные скорости $\overrightarrow{\upsilon_k}$ определяются из предположения, что возможные перемещения $\delta\overrightarrow{s_k}$ происходят за очень малый промежуток времени τ:

$$\overrightarrow{\upsilon_k}=\frac{\delta\overrightarrow{s_k}}{\tau}\,. \qquad (3.49)$$

Принцип Даламбера-Лагранжа или *общее уравнение динамики*: при движении механической системы сумма возможных работ активных сил $\overrightarrow{F_k}$ и сил инерции $\overrightarrow{\Phi_k}$ на любых возможных перемещениях $\delta\overrightarrow{r_k}$ всегда равна нулю –

$$\sum\left(\overrightarrow{F_k}+\overrightarrow{\Phi_k}\right)\delta\overrightarrow{r_k}=0\,. \qquad (3.50)$$

Другая формулировка принципа Даламбера-Лагранжа: при движении механической системы сумма возможных мощностей активных сил $\overrightarrow{F_k}$ и сил инерции $\overrightarrow{\Phi_k}$ на любых возможных скоростях $\overrightarrow{\upsilon_k}$ всегда равна нулю –

$$\sum\left(\overrightarrow{F_k}+\overrightarrow{\Phi_k}\right)\overrightarrow{\upsilon_k}=0\,. \qquad (3.51)$$

Обобщённые координаты, обобщённые скорости, обобщённые силы

Независимые между собой параметры любой размерности, число которых равно числу степеней свободы системы и которые однозначно определяют положение этой системы, называют *обобщенными координатами* системы.

Обозначаются обобщённые координаты буквой q.

Производные от обобщённых координат по времени $\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_s$ называются обобщёнными скоростями системы. При этом $\dot{q}_i=\dfrac{dq_i}{dt}$ имеет размерность, зависящую от размерности обобщённой координаты. Таким образом, понятие обобщённой скорости охватывает все возможные в кинематике понятия о скоростях (линейная скорость, угловая скорость, секторальная скорость и т.д.).

Элементарную работу δA_i на возможном перемещении δq_i можно представить с помощью известной формулы:

$$\delta A_i = Q_i \delta q_i, \tag{3.52}$$

где Q_i – обобщённая сила, соответствующая обобщённой координате q_i.

Обобщенная сила Q заменяет собой нагрузку любого происхождения (сила, момент,...). Её размерность зависит от размерности обобщённой координаты q и может быть: Н, Н·м и др.

Выражение полной элементарной работы всех действующих на систему сил в обобщённых координатах при s степенях свободы имеет вид:

$$\sum \delta A_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_s \delta q_s\ . \tag{3.53}$$

Для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы все обобщённые силы, соответствующие выбранным для системы обобщённым координатам, были равны нулю:

$$Q_1 = 0,\ \ Q_2 = 0, \ldots, Q_s = 0\ . \tag{3.54}$$

При этом число уравнений равновесия равно числу обобщённых координат, т.е. числу степеней свободы s системы.

С помощью принципа Даламбера уравнения равновесия (3.54) механической системы можно записать в более общем виде:

$$Q_1 + Q_1^u = 0,\ \ Q_2 + Q_2^u = 0, \ldots, Q_s + Q_s^u = 0\ , \tag{3.55}$$

где $Q_1^u, Q_2^u, \ldots, Q_s^u$ – обобщённые силы инерции.

Обобщённая сила инерции, как и любая даламберова сила инерции, зависит от ускорения, которое можно выразить через производную от скорости, а затем через производную от кинетической энергии системы. После преобразований равенства (3.55) принимают следующий вид:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s. \end{array}\right\} \tag{3.56}$$

Уравнения (3.56) представляют собой *дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщённых координатах* или *уравнения Лагранжа второго рода*.

Явление удара

Явление, при котором за ничтожно малый промежуток времени скорости точек изменяются на конечную величину, называется *ударом*.

Теорема об изменении количества движения при ударе – изменение количества движения механической системы за время удара равно геометрической сумме внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы:

$$\overrightarrow{Q_2} - \overrightarrow{Q_1} = \sum \overrightarrow{S_i^e} \, . \tag{3.57}$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе – изменение кинетического момента механической системы относительно любого неподвижного центра при ударе равно геометрической сумме моментов внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, относительно того же центра:

$$\overrightarrow{K_{O2}} - \overrightarrow{K_{O1}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_O}\left(\overrightarrow{S_i^e}\right). \tag{3.58}$$

Тютрин Сергей Геннадьевич

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ТЕОРЕМЫ И РАСЧЁТНЫЕ ФОРМУЛЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Методические указания
к практическим занятиям для студентов
направлений 13.03.01, 13.03.02, 15.03.01, 15.03.04, 15.03.05,
20.03.01, 23.03.01, 23.03.02, 23.03.03, 27.03.01, 27.03.04, 44.03.01
и специальностей 23.05.01 и 23.05.02

Редактор Н.Л. Борисова

Подписано в печать	Формат 60×84	1/16	Бумага 65 г/м^2	
Печать цифровая	Усл. печ. л.	2,5	Уч.-изд. л.	2,5
Заказ	Тираж	25	Не для продажи	

РИЦ Курганского государственного университета.
640000, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.