

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра алгебры, геометрии и методики преподавания математики

МАТЕМАТИКА

Материалы для практических занятий и самостоятельной работы
для студентов-бакалавров направлений 040100.62 «Социология»,
040400.62 «Социальная работа»

Курган 2015

Кафедра: «Алгебра, геометрия и методика преподавания математики»

Дисциплины: «Математика» (направления 040100.62; 040400.62).

Составили: старший преподаватель Е.Л. Потеряйко.

Утверждены на заседании кафедры «30» сентября 2015 г.

Рекомендованы методическим советом университета «19» декабря 2014 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Раздел 1. Элементы линейной алгебры	5
Тема 1. Матрицы и определители	5
Тема 2. Системы линейных уравнений	7
Раздел 2. Элементы аналитической геометрии	9
Тема 1. Метод координат на плоскости и в пространстве	9
Тема 2. Векторы на плоскости и в пространстве	10
Тема 3. Прямая линия на плоскости	12
Тема 4. Линии второго порядка на плоскости	14
Тема 5. Плоскость и прямая в пространстве	16
Раздел 3. Элементы теории множеств	19
Тема 1. Множества. Действия над множествами. Множество комплексных чисел	19
Раздел 4. Элементы дифференциального исчисления функции одной переменной	22
Тема 1. Предел и непрерывность функции	22
Тема 2. Производная функции	25
Тема 3. Производные высших порядков. Дифференциал функции	27
Тема 4. Применение производной к исследованию функций	30
Раздел 5. Элементы интегрального исчисления функции одной переменной	32
Тема 1. Неопределённый интеграл	32
Тема 2. Определённый интеграл. Приложения определённого интеграла	34
Раздел 6. Элементы теории функций нескольких переменных	36
Тема 1. Функции двух независимых переменных	36
Раздел 7. Дифференциальные уравнения	38
Тема 1. Дифференциальные уравнения 1-го и 2-го порядков	38
Раздел 8. Ряды	39
Тема 1. Числовые и степенные ряды. Разложение функций в степенные ряды	39
Проверочные тесты для подготовки к зачёту и экзамену	42

Введение

Настоящие материалы предназначены для студентов – бакалавров, обучающихся по направлениям «Социология» и «Социальная работа». Они составлены в соответствии с учебным планом по дисциплине «Математика».

Для каждой темы составлены вопросы по теории для повторения, предложены задачи для работы на практических занятиях и дома, а также даны темы для самостоятельного изучения и повторения.

Цель данных материалов – оказать помощь студентам при подготовке к практическим занятиям по данному курсу.

Данное пособие может быть использовано также студентами направлений 040700.62 «Организация работы с молодёжью», 050100.62 Педагогическое образование (профиль «Технология»), 051000.62 Профессиональное обучение (профиль «Декоративно-прикладное искусство и дизайн»).

Раздел 1. Элементы линейной алгебры

Тема 1. Матрицы и определители

Вопросы теории для повторения:

- 1 Определение матрицы размера $m \times n$.
- 2 Определение квадратной матрицы n - го порядка.
- 3 Виды матриц: а) диагональная; б) единичная; в) нулевая; г) вырожденная; д) невырожденная; е) матрица – столбец; ж) матрица – строка.
- 4 Определитель матрицы второго порядка.
- 5 Определитель матрицы третьего порядка.
- 6 Свойства определителей.
- 7 Действия над матрицами: а) сложение, б) вычитание, в) умножение матрицы на число, г) умножение матриц.
- 8 Определение ранга матрицы.
- 9 Вычисление ранга матрицы (теорема о ранге матрицы).
- 10 Обратная матрица. Определение и вычисление.
- 11 Матричные уравнения.

Задачи для решения в аудитории и дома

- 1 Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,
 $C = (1 \ -1 \ 4)$, $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Найти: а) $A + B$; б) $-3A$; в) $5A - 2B$; г) $K - N$; д) $K + D$; е) $A \cdot B$; ж) $D \cdot M$;
з) $N \cdot K$; и) $A \cdot D$; к) $M \cdot C$; л) $N \cdot D$.

- 2 Дано: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $A^2 - 12E$.

- 3 Дано: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти $A^2 + B^2$.

- 4 Дано: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$. Найти $A^2 + 4A + E$.

- 5 Найти A^{-1} , если: а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$;

е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

6 Вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}; \text{ г) } \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \text{ д) } \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}; \text{ е) } \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}; \text{ ж) } \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{з) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \text{ и) } \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}; \text{ к) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 31 & 5 & -7 \\ 14 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \text{ л) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}; \text{ м) } \begin{vmatrix} o & a & o \\ b & c & d \\ o & e & o \end{vmatrix};$$

$$\text{н) } \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}; \text{ о) } \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}; \text{ п) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \text{ р) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \text{ с) } \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 3 & -12 & -9 \\ 5 & 30 & 71 \end{vmatrix};$$

$$\text{т) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}; \text{ у) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}.$$

7 Найти x , если:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0; \text{ б) } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4; \text{ в) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2 & 7 \\ -2 & x & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix},$$

где $x \in \mathbb{Z}$.

8 Вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

9 Решить матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \text{ б) } X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\text{е) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{ж) } X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix};$$

$$и) X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix};$$

$$к) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$л) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

10 Найти ранг матрицы:

$$а) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}; б) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 8 & -7 & 3 \end{pmatrix}; в) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 15 & 7 & 11 \\ 11 & 5 & 8 \end{pmatrix}; г) \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$д) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тема 2. Системы линейных уравнений

Вопросы теории для повторения:

- 1 Определение системы m линейных уравнений с n неизвестными.
- 2 Исследование систем линейных уравнений: а) совместные и несовместные системы, б) определенные и неопределенные системы уравнений.
- 3 Матричный метод решения n линейных уравнений с n неизвестными.
- 4 Метод Крамера решения n линейных уравнений с n неизвестными.
- 5 Метод Гаусса решения m линейных уравнений с n неизвестными.

Задачи для решения в аудитории и дома

Решить системы уравнений методом Крамера:

$$1 \begin{cases} 2x + 3y = -11, \\ 5x - 4y = 30. \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} 3x - y = 4, \\ 15x - 3y = 6. \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} x - 2y = -19, \\ 2x - 3y = -23. \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 2x - 3y + 3z = 5, \\ 3x - 4y + 5z = 10. \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ 3y + 4z = -6, \\ x + z = 1. \end{cases}$$

$$7 \begin{cases} 2x - 3y - z = -6, \\ 3x + 4y + 3z = -5, \\ x + y + z = -2. \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} -2x + y = -6, \\ x - 2y - z = 5, \\ 3x + 4y - 2z = 13. \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

Решить системы уравнений матричным методом:

$$10 \begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 5x + 12y - 2z = -1, \\ 4x + 9y - 2z = 2. \end{cases} \quad 11 \begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ x + y + z = 6, \\ x + y = 3. \end{cases} \quad 12 \begin{cases} 3x - 4y + 5z = -3, \\ 2x - 3y + z = -7, \\ 3x - 5y - z = -16. \end{cases}$$

$$13 \begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8. \end{cases} \quad 14 \begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases} \quad 15 \begin{cases} 2x + y - z = 5, \\ x - 2y + 2z = -5, \\ 7x + y - z = 10. \end{cases}$$

Исследовать и решить системы уравнений методом Гаусса.

$$16 \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9. \end{cases} \quad 17 \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20. \end{cases} \quad 18 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$19 \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases} \quad 20 \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \quad 21 \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 29x_3 = -5. \end{cases}$$

$$22 \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 4, \\ 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 18. \end{cases} \quad 23 \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 11x_2 - 7x_3 = -3. \end{cases} \quad 24 \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

$$25 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases} \quad 26 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 9 - 8. \end{cases}$$

Решить системы уравнений любым методом.

$$27 \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases} \quad 28 \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases} \quad 29 \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -1, \\ 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 15x_4 = -32, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -8 \end{cases}$$

$$30 \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 = -1. \end{cases} \quad 31 \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3. \end{cases} \quad 32 \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

Раздел 2. Элементы аналитической геометрии

Тема 1. Метод координат на плоскости и в пространстве

Вопросы теории для повторения:

- 1 Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве.
- 2 Полярная система координат на плоскости.
- 3 Формулы, позволяющие находить прямоугольные координаты точки по ее полярным координатам и наоборот.
- 4 Формула расстояния между двумя точками, заданных своими координатами на плоскости и в пространстве.
- 5 Формулы, позволяющие находить координаты точки, делящей отрезок в заданном соотношении на плоскости и в пространстве.

Задачи для решения в аудитории и дома

- 1 Построить точки, заданные полярными координатами:

$A\left(2; \frac{5\pi}{6}\right)$, $B(1; -\pi)$, $C(3; 0)$, $D\left(\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$. Найти декартовы координаты этих точек.

- 2 Найти полярные координаты точек:

$A(2; 0)$, $B(-1; 0)$, $C(0; 2)$, $D(-1; -1)$, $E(-\sqrt{3}; 1)$, $F(2\sqrt{3}; 2)$.

- 3 Даны две смежные вершины квадрата $A(3; -7)$ и $B(-1; 4)$. Вычислить его площадь.

- 4 Даны две противоположные вершины квадрата $P(3; 5)$ и $Q(1; -3)$. Вычислить его площадь.

- 5 Вычислить площадь правильного треугольника, две вершины которого точки $A(-3; 2)$ и $B(1; 6)$.

- 6 Даны три вершины $A(3; -7)$, $B(5; -7)$, $C(-2; 5)$ параллелограмма $ABCD$, четвертая вершина которого D противоположна B , Определить длину диагоналей этого параллелограмма.

- 7 Доказать, что треугольник с вершинами $A(1; 1)$, $B(2; 3)$ и $C(5; -1)$ прямоугольный.

- 8 Определить, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами $M_1(1; 1)$, $M_2(0; 2)$ и $M_3(2; -1)$ тупой угол.

- 9 Вершины треугольника точки $A(5; 0)$, $B(0; 1)$ и $C(3; 3)$. Вычислить его внутренние углы.

- 10 На оси абсцисс найти такую точку M , расстояние которой до точки $N(2; -3)$ равнялось бы 5.

- 11 На оси ординат найти такую точку M , расстояние которой до точки $N(-8; 13)$ равнялось бы 17.

- 12 Даны две точки $M(2; 2)$ и $N(5; -2)$; на оси абсцисс найти такую точку P , чтобы угол MPN был прямым.

- 13 Через точку $A(4; 2)$ проведена окружность, касающаяся обеих координатных осей. Определить ее центр S и радиус R .
- 14 Даны вершины треугольника $A(1; -3)$, $B(3; -5)$ и $C(-5; 7)$. Определить середины его сторон.
- 15 Точки $M(2; -1)$, $N(-1; 4)$ и $P(-2; 2)$ являются серединами сторон треугольника. Определить его вершины.
- 16 Даны три вершины параллелограмма $A(3; -5)$, $B(5; -3)$, $C(-1; 3)$. Определить четвертую вершину D , противоположную B .
- 17 Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-3; 5)$, $B(1; 7)$ и точка пересечения его диагоналей $M(1; 1)$. Определить две другие вершины.
- 18 Даны вершины треугольника $A(1; 4)$, $B(3; -9)$, $C(-5; 2)$. Определить длину его медианы, проведенной из вершины B .
- 19 Отрезок, ограниченный точками $A(1; -3)$ и $B(4; 3)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.
- 20 Даны вершины треугольника $A(2; -5)$, $B(1; -2)$, $C(4; 7)$. Найти точку пересечения со стороной AC биссектрисы его внутреннего угла при вершине B .
- 21 Доказать, что треугольник с вершинами $A(3; -1; 2)$, $B(0; -4; 2)$ и $C(-3; 2; 1)$ равнобедренный.
- 22 На оси абсцисс найти точку, расстояние которой от точки $A(-3; 4; 8)$ равно 12.
- 23 На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек $A(1; -3; 7)$ и $B(5; 7; -5)$.
- 24 Даны вершины: $A(2; -1; 4)$, $B(3; 2; -6)$, $C(-5; 0; 2)$ треугольника. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A .
- 25 Даны две вершины: $A(2; -3; -5)$, $B(-1; 3; 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $E(4; -1; 7)$. Определить две другие вершины этого параллелограмма.
- 26 Определить координаты концов отрезка, который точками $C(2; 0; 2)$ и $D(5; -2; 0)$ разделен на три равные части.
- 27 Даны вершины треугольника $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$ и $C(-4; 7; 5)$. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине B .

Тема 2. Векторы на плоскости и в пространстве

Вопросы теории для повторения:

- 1 Определение вектора.
- 2 Виды векторов: а) коллинеарные векторы, б) нулевой вектор, в) единичный вектор, г) равные векторы.
- 3 Длина вектора.
- 4 Линейные операции над векторами: а) сложение, б) вычитание, в) умножение на число.
- 5 Координаты вектора.
- 6 Векторный базис на плоскости и в пространстве.
- 7 Скалярное произведение векторов. Свойства.

- 8 Векторное произведение векторов. Свойства.
 9 Смешанное произведение векторов. Свойства.

Задачи для решения в аудитории и дома

- 1 Дан правильный шестиугольник $A_1 \dots A_6$, т. O – его центр. Найти координаты векторов а) $\overline{A_4 A_2}$; б) $\overline{A_4 A_6}$; в) $\overline{A_3 A_5}$; г) $\overline{A_5 A_1}$ в базисе $\bar{e}_1 = \overline{OA_1}, \bar{e}_2 = \overline{OA_2}$.
- 2 Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ некопланарные векторы. Выяснить коллинеарны ли векторы $\bar{m} = \bar{b} + \bar{c}$ и $\bar{n} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$.
- 3 Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ некопланарные векторы. Выяснить коллинеарны ли векторы $\bar{m} = 2\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}$ и $\bar{n} = 2\bar{b} - \bar{c} - \bar{a}$.
- 4 Определить, при каком значении α векторы $3\bar{a} + \alpha\bar{b}$ и $\bar{a} - 2\bar{b}$ будут взаимно перпендикулярны, если $|\bar{a}| = 7\sqrt{2}$; $|\bar{b}| = 4$; $\bar{a} \wedge \bar{b} = \frac{\pi}{4}$.
- 5 Определить, при каком значении γ векторы $\gamma\bar{a} + 17\bar{b}$ и $3\bar{a} - \bar{b}$ будут взаимно перпендикулярны, если $|\bar{a}| = 2$; $|\bar{b}| = 5$; $(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{2\pi}{3}$.
- 6 Даны два вектора $\vec{a} (2; -3; 4)$ и $\vec{b} (-1; -2; -5)$ Найти сумму, разность, длину, скалярное произведение и угол между ними.
- 7 На плоскости даны два вектора $\vec{p}(2; -3), \vec{q}(1; 2)$. Найти разложение ра $\vec{a}(9; 4)$ по базису \vec{p}, \vec{q} .
- 8 Даны три вектора $\vec{p}(3; -2; 1), \vec{q}(-1; 1; -2), \vec{r}(2; 1; -3)$. Найти разложение вектора $\vec{c}(11; -6; 5)$ по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.
- 9 Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны; вектор \vec{c} образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 6$, $|\vec{c}| = 8$, вычислить: $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c})$.
- 10 Даны векторы $\vec{a}(4; -2; -4), \vec{b}(6; -3; 2)$. Вычислить: $\vec{a}\vec{b}$; $|\vec{a}|$; $|\vec{b}|$.
- 11 Вычислить косинус угла, образованного векторами $\vec{a}(2; -4; 4)$ и $\vec{b}(-3; 2; -6)$.
- 12 Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}| = 6$ и $|\vec{b}| = 5$, вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.
- 17 Даны: $|\vec{a}| = 10$ и $|\vec{b}| = 2, \vec{a}\vec{b} = 12$. Вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.
- 18 Даны векторы $\bar{a}(1; 0; 3), \bar{b}(4; 0; z)$. При каком значении z вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ коллинеарен вектору $\bar{e}(0; 1; 0)$?
- 19 Даны векторы $\bar{a}(1; 2; 3), \bar{b}(1; -3; z)$. При каком значении z вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ коллинеарен вектору $\bar{c}(-9; -3; 5)$?
- 20 Даны векторы $\bar{a}(0; 1; 2), \bar{b}(-2; -1; 0)$. При каком значении z вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ перпендикулярен вектору $\bar{c}(3; 4; z)$?
- 21 Установить, компланарны ли векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, если
 - а) $\bar{a}(4; -3; 2), \bar{b}(-2; 6; 8), \bar{c}(2; 3; 10)$;
 - б) $\bar{a}(1; -2; 5), \bar{b}(-4; 3; 0), \bar{c}(3; -5; 8)$;

в) $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{k}$, $\vec{c} = \overrightarrow{MN}$, где \overrightarrow{OM} (6; 3; 4), \overrightarrow{ON} (-2; 3; 1).

22 Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , если

а) \vec{a} (1; 2; 3), \vec{b} (-5; 0; 4), \vec{c} (-1; 1; 1); б) \vec{a} (-3; 0; 1), \vec{b} (2; -1; 5), \vec{c} (-7; 6; 0).

Тема 3. Прямая линия на плоскости

Вопросы теории для повторения:

- 1 Способы задания прямой на плоскости.
- 2 Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
- 3 Уравнение прямой по двум точкам.
- 4 Уравнение прямой по точке и направляющему вектору а) каноническое, б) параметрические.
- 5 Уравнение прямой по точке и нормальному вектору.
- 6 Общее уравнение прямой.
- 7 Уравнение прямой в «отрезках» на осях координат.
- 8 Взаимное расположение прямых на плоскости.
- 9 Угол между прямыми.
- 10 Расстояние от точки до прямой.

Задачи для решения в аудитории и дома

- 1 Дан треугольник ABC: A (5; -3), B (-1; -2), C (2; 4). Составить уравнения сторон.
- 2 Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $l_1: x + 2y + 3 = 0$ и $l_2: 4x + 5y + 6 = 0$ и составляющей тот же угол с осью OX, что и прямая $m: 3x - y + 1 = 0$.
- 3 Составить уравнение прямой:
 - а) проходящей через точку A (-1; 3) и перпендикулярной к прямой $x - y + 1 = 0$;
 - б) проходящей через точку B (5; 10) и параллельной прямой $2x + y - 7 = 0$;
 - в) проходящей через точку P (1; 2) и отсекающей равные отрезки на осях координат.
- 4 Даны прямые: а) $3x - y + 5 = 0$; б) $x + y - 3 = 0$; в) $x + 3y = 0$. Написать уравнения каждой из них в параметрическом виде.
- 5 Найти длины отрезков, отсекаемых на осях координат прямыми:

а) $3x - 2y + 6 = 0$; б) $x + y - 6 = 0$; в) $2x - y + 3 = 0$. Составить уравнения этих прямых в отрезках.

6 Даны вершины треугольника ABC: A (-4; -5), B (4; 1), C (-0,5; 7). Написать уравнения: а) медианы CM, б) высоты BD.

7 Найти угол, образованный двумя прямыми:

а) $3x + y - 6 = 0$, $2x - y + 5 = 0$; б) $\sqrt{3}x - 3y + 6 = 0$. $\sqrt{3}x + y - 5 = 0$;

в) $x - 2y + 1 = 0$, $6x + 3y - 2 = 0$.

8 Через точку A(-1; 5) провести прямые, наклоненные к прямой

$l: x - y + 3 = 0$ под углом, тангенс которого равен: а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{1}{3}$.

9 Определить, при каких значениях m и n две прямые $l_1: mx + 8y + n = 0$,

$l_2: 2x + my - 1 = 0$. а) параллельны; б) совпадают; в) перпендикулярны.

10 Найти проекцию точки P (-6; 4) на прямую $l: 4x - 5y + 3 = 0$.

11 На оси OX найти точку, равноудаленную от прямых:

1) $x + 3y + 2 = 0$, $3x - y + 1 = 0$;

2) $3x + 4y - 1 = 0$, $4x - 3y = 0$.

12 Найти расстояние от точки до прямой:

а) M (-1; 5), $l: 4x + 3y - 5 = 0$;

б) A (-3; 4), $m: x + 2y + 3 = 0$;

в) B (3; 1), $l: 5x - 12y - 6 = 0$.

13 Найти длины высот треугольника, стороны которого заданы уравнения

$y - 2 = 0$, $2x - y - 12 = 0$, $4x - 11y + 30 = 0$.

14 Найти точку Q, симметричную точке P(-5;13) относительно прямой $2x - 3y - 3 = 0$.

15 Вычислить угловой коэффициент k прямой, проходящей через две данные точки: а) $M_1 (2; -5)$, $M_2 (3; 2)$; б) P (-3; 1), Q (7; 8); в) A (5; -3), B (-1; 6).

16 Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника A (5; -4), B (-1; 3), C (-3; -2) параллельно противоположным сторонам.

- 17 Даны середины сторон треугольника: $M_1(2;1)$, $M_2(5; 3)$ и $M_3(3; -4)$. Составить уравнение его сторон.
- 18 Даны вершины треугольник $M_1(2;1)$, $M_2(-1; -1)$ и $M_3(3; 2)$. Составить уравнения его высот.
- 19 Определить угол φ между двумя прямыми:
- 1) $5x + y + 7 = 0$; $3x + 2y = 0$;
 - 2) $3x - 2y + 7 = 0$, $2x + 3y - 3 = 0$;
 - 3) $x - 2y - 4 = 0$, $2x - 4y + 3 = 0$;
 - 4) $3x + 2y - 1 = 0$, $5x - 2y + 3 = 0$.
- 20 Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;1)$ под углом 45° к данной прямой.
- 21 Установить, какие из следующих пар перпендикулярны:
- 1) $3x - y + 5 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$;
 - 2) $3x - 4y + 1 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$;
 - 3) $6x - 15y + 7 = 0$, $10x + 4y - 3 = 0$;
 - 4) $7x - 2y + 1 = 0$, $4x + 6y + 17 = 0$.
- 22 Вычислить расстояние d между параллельными прямыми в каждом из следующих случаев:
- 1) $3x - 4y - 10 = 0$, $6x - 8y + 5 = 0$;
 - 2) $4x - 3y + 15 = 0$, $8x - 6y + 25 = 0$;
 - 3) $5x - 12y + 26 = 0$, $5x - 12y - 13 = 0$;
 - 4) $24x - 10y + 39 = 0$, $12x - 5y - 26 = 0$.
- 23 Две стороны квадрата лежат на прямых $5x - 12y - 65 = 0$, $5x - 12y + 26 = 0$. Вычислить его площадь.
- 24 Доказать, что прямая $5x - 2y - 1 = 0$ параллельна прямой $5x - 2y + 7 = 0$, $5x - 2y - 9 = 0$.
- 25 Доказать, что через точку $P(2;7)$ можно провести две прямые так, чтобы их расстояния от точки $Q(1;2)$ были равны 5. Составить уравнения этих прямых.

Тема 4. Линии второго порядка на плоскости Вопросы теории для повторения:

- 1 Определение окружности. Каноническое уравнение.

- 2 Определение эллипса. Каноническое уравнение.
- 3 Характеристики и свойства эллипса. Эксцентриситет.
- 4 Определение гиперболы. Каноническое уравнение.
- 5 Характеристики и свойства гиперболы. Асимптоты.
- 6 Определение параболы. Каноническое уравнение.
- 7 Свойства и виды парабол.

Задачи для решения в аудитории и дома

- 1 Составить каноническое уравнение окружности. Найти координаты центра и радиус.

а) $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 101 = 0$; б) $x^2 + y^2 - 2x = 0$;

в) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$.

- 2 Составить уравнение окружности с центром в точке $C(5; 2)$, касающейся прямой $l: x - 3y + 2 = 0$.

- 3 Составить уравнение эллипса, если а) $a - b = 1, c = \sqrt{13}$; б) $a + b = 8$;

в) $F_1F_2 = 8; \varepsilon = \frac{1}{2}$; г) эллипс проходит через точки $M_1(2; 0), M_2(1; 2)$.

- 4 Показать, что уравнения 1) $25x^2 + 16y^2 - 50x + 16y - 371 = 0$;

2) $5x^2 + 9y^2 - 10x + 36y - 4 = 0$ выражают эллипсы.

Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет каждого эллипса.

- 5 Составить каноническое уравнение гиперболы, если

а) $A_1A_2 = 16, F_1(10; 0), F_2(-10; 0)$,

б) действительная ось равна 6 и кривая проходит через точку $A(9; -4)$,

в) уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x, F_1F_2 = 20$,

г) $F_1F_2 = 6, \varepsilon = 1,5$.

- 6 Даны уравнения гипербол:

а) $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$; б) $25x^2 - 16y^2 - 400 = 0$; в) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 18y - 41 = 0$;

г) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 80 = 0$.

Найти координаты центра, фокусов, полуоси, эксцентриситет, написать уравнения асимптот.

7 Дана гипербола $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{12} = 1$. Написать уравнение сопряженной с ней гиперболы. Найти эксцентриситет и асимптоты данной и сопряженной гипербол.

8 Найти уравнение гиперболы, проходящей через точку М (-5; 3) и имеющей общие фокусы с равносторонней гиперболой $x^2 - y^2 = 8$.

9 Определить координаты фокуса и составить уравнение директрисы для каждой из парабол:

а) $y^2 = 6x$, б) $x^2 = 3y$, в) $x^2 = -4y$, г) $y^2 = -2x$, д) $2x^2 - 3y = 0$, е) $3y^2 + 16x = 0$.

10 Составить каноническое уравнение параболы, если

а) $p = 3$;

б) фокус находится в точке F(0; 5);

в) парабола проходит через точку P (1; -4);

г) директриса определяется уравнением $x + 3 = 0$;

д) фокус F (0; 5), а ось ординат служит директрисой параболы.

11 Составить каноническое уравнение параболы, если она имеет общий фокус с эллипсом $\alpha: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ и вершину в центре этого эллипса.

12 На параболе $y^2 = 4x$ найти точку, расстояние которой от директрисы параболы равно 5.

Тема 5. Плоскость и прямая в пространстве

Вопросы теории для повторения:

- 1 Способы задания плоскости в пространстве.
- 2 Детерминантное уравнение плоскости в пространстве по точке и двум направляющим векторам.
- 3 Детерминантное уравнение плоскости в пространстве по трем точкам.
- 4 Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору.
- 5 Общее уравнение плоскости.
- 6 Взаимное расположение плоскостей.
- 7 Угол между плоскостями.
- 8 Расстояние от точки до плоскости.
- 9 Способы задания прямой в пространстве.
- 10 Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве по точке и направляющему вектору.
- 11 Уравнения прямой по двум точкам в пространстве.

- 12 Уравнения прямой, заданной пересечением двух плоскостей.
 13 Взаимное расположение прямых в пространстве.
 14 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
 15 Угол между двумя прямыми, угол между прямой плоскостью в пространстве.

Задачи для решения в аудитории и дома

- 1 Даны вершины тетраэдра $A(4; 0; 2)$, $B(0; 5; 1)$, $C(4; -1; 3)$, $D(3; -1; 5)$. Найти:
 а) уравнение плоскости, проходящей через вершину A и параллельной грани $B CD$;
 б) уравнения трех плоскостей, проходящих через вершину D и перпендикулярных соответственно сторонам AB , BC и AC .
- 2 Написать «в отрезках» уравнения плоскостей: а) $2x - 3y + z - 6 = 0$;
 б) плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(3; 1; 5)$, $M_3(1; 2; 3)$.
- 3 Составить уравнение касательной плоскости к сфере
 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 24$ в точке $M_0(0; 1; 3)$.
- 4 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 1; -2)$ и перпендикулярной плоскостям $2x + 3z = 0$ и $x - y + z - 1 = 0$.
- 5 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -3; 5)$ и параллельной плоскости:
 а) $3x - y + z + 4 = 0$; б) $x - 3y + z = 0$.
- 6 Установить взаимное расположение следующих пар плоскостей:
 а) $x - 3y + z + 1 = 0$; $2x + y + z + 2 = 0$;
 б) $3x + y - z + 2 = 0$; $6x + 2y - 2z + 3 = 0$;
 в) $6x - 2y + z + 10 = 0$; $12x - 4y + 2z + 20 = 0$;
 г) $x + y - z + 7 = 0$, $x - y + 15 = 0$.
- 7 Найти двугранные углы между следующими парами плоскостей:
 а) $16x + 8y + 2z + 1 = 0$; $2x - 2y + z + 5 = 0$;
 б) $2x + 5y + 4z + 15 = 0$; $6x - 3z + 2 = 0$.
- 8 Найти расстояние от точки до плоскости:

а) $M_1(1; -2; 2)$, $\pi: 2x + y + 2z - 7 = 0$;

б) $M_2(3; 0; 4)$, $\pi: 2x + 3y + 8 = 0$;

в) $M_3(-1; 2; \sqrt{2})$, $\pi: 5x - 3y + \sqrt{2}z = 0$.

9 На оси Ox найти точку, равноудаленную от точки $M(9; -2; 2)$ и от плоскости $3x - 6y + 2z - 3 = 0$.

10 Составить уравнения прямой:

а) проходящей через точку $M_0(2; 1; -3)$ и параллельной вектору $\vec{a}(1; -3; 1)$;

б) проходящей через две точки $M_1(2; -3; 0,5)$, $M_2(3; 5; 1,5)$;

в) образованной пересечением плоскости $x - y + z = 0$ с плоскостью, проходящей через точки $A(2; 0; 3)$, $B(1; 1; 1)$, $C(2; 4; -3)$.

11 Через точку $M(1; -3; 4)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

12 Составить канонические и параметрические уравнения прямых:

а) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - 4z - 8 = 0 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$.

13 Показать, что прямая $l: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 3t, \\ z = -2 + t; \end{cases}$ пересекает плоскость $2x - y + z + 1 = 0$.

Найти координаты точки пересечения и угол между этой прямой и плоскостью.

14 Показать, что прямая $l: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{1}$ параллельна плоскости

$x - 2y + 5z - 6 = 0$, а прямая $m: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}$ лежит в этой плоскости.

15 При каких значениях А и В плоскость $Ax + By + 3z - 5 = 0$ перпендикулярна к

$$\text{прямой } l : \begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 5 - 3t, \\ z = -2 - 2t \end{cases} ?$$

16 Даны две прямые: $l_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$ и $l_2 : \frac{x+4}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{0}$. Доказать, что они скрещиваются.

17 Найти угол между прямыми $l_1 : \begin{cases} y+1=0 \\ x+2z-1=0 \end{cases}$ и $l_2 : \begin{cases} x=0 \\ z=1 \end{cases}$.

18 Определить взаимное расположение двух прямых в каждом из следующих случаев:

а) $l_1 : \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$; $l_2 : \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{8} = \frac{z-2}{-4}$;

б) $l_1 : \begin{cases} x = 2t - 4, \\ y = -t + 4, \\ z = -2t - 1; \end{cases}$ $l_2 : \begin{cases} x = 4t - 5, \\ y = -3t + 5, \\ z = -5t + 5; \end{cases}$ в) $l_1 : \frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$; $l_2 : \begin{cases} x = 4 - 9t, \\ y = 1 - 6t, \\ z = -5 + 6t; \end{cases}$

Раздел 3. Элементы теории множеств

Тема 1. Множества. Действия над множествами. Множество комплексных чисел

Вопросы теории для повторения:

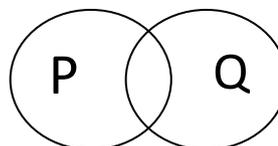
- 1 Понятие множества. Виды множеств: а) конечное, б) бесконечное, в) числовые множества, г) равные множества.
- 2 Действия над множествами: а) объединение, б) пересечение, в) разность множеств.
- 3 Диаграммы Эйлера – Венна.
- 4 Теоремы о числе элементов в объединении конечных множеств.
- 5 Множество комплексных чисел: а) алгебраическая форма записи комплексного числа, б) тригонометрическая форма записи комплексного числа.
- 6 Действия с комплексными числами в алгебраической форме.

Задачи для решения в аудитории и дома

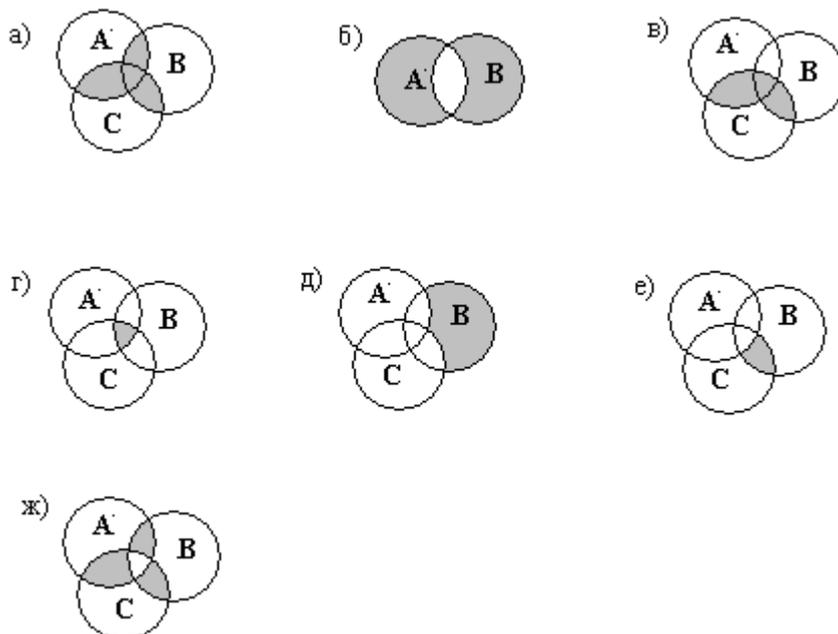
- 1 М – множество четырехугольников. Принадлежит ли этому множеству:
- 1) ромб; 2) трапеция; 3) окружность; 4) прямоугольник; 5) диагональ параллелограмма; 6) квадрат.

2 В следующих множествах все элементы, кроме одного, обладают некоторыми общими свойствами. Опишите это свойство и найдите элементы, не обладающие им:

- 1) {квадрат; круг; ромб; параллелограмм} ; 2) {4; 9; 16; 25; 30};
 3) {синий, красный, белый, цвет, черный}.
- 3 Среди следующих множеств найдите равные множества: $A = \{1, 3, 6\}$;
 $B = \{3, 6, 9\}$; $C = \{6, 9, 3\}$; $D = \{9, 6, 3\}$; $E = \{3, 2, 6\}$; $K = \{6, 2, 3\}$.
- 4 Укажите, каким характеристическим свойством обладают элементы каждого из следующих множеств: $\{a, e, ё, и, о, э, ю, я, ы, у\}$;
 $\{23; 22; 21; 20; 19; 18; 17; 16; 15\}$.
- 5 Задать с помощью характеристического свойства: 1) множество всех действительных положительных чисел; 2) множество всех действительных отрицательных чисел.
- 6 Задать множества, перечислив их элементы: 1) множество всех положительных простых чисел меньше 40; 2) множество всех целых положительных чисел, кратных 3, меньших 33.
- 7 Записать следующие множества, используя различные формы записи множеств: 1) множества корней уравнения $x^2 - 1 = 0$; 2) множество натуральных чисел, лежащих в интервале $(0; 5)$.
- 8 Дано множество чисел $K = \{21; 54; 153; 171; 234\}$. Составьте подмножества K из чисел, которые: 1) являются четными; 2) являются нечетными; 3) делятся на 7; 4) делятся на 9.
- 9 Укажите пустые множества среди следующих: 1) множество целых корней уравнения $x^2 - 9 = 0$; 2) множество целых корней уравнения $x^2 + 9 = 0$; 3) множество действительных корней уравнения $\frac{1}{x} = 0$; 4) множество натуральных чисел, меньших единицы; 5) множество натуральных чисел, не являющихся ни простыми, ни составными.
- 10 Начертите два треугольника так, чтобы их пересечением: 1) была точка; 2) был треугольник; 3) был отрезок; 4) был четырёхугольник; 5) был пятиугольник; 6) был шестиугольник.
- 11 Даны множества: $A = \{12; 20; 48; 60; 90\}$, $B = \{48; 60; 90; 92\}$,
 $M = \{12; 20; 35\}$. Найдите множества: 1) $M \cap A$; 2) $M \cap B$; 3) $A \cap B$; 4) $M \cup A$;
 5) $M \cup B$; 6) $A \cup B$; 7) $A \setminus B$; 8) $B \setminus M$; 9) $A \setminus B \setminus M$; 10) $(A \cup B) \setminus (M \cap B)$.
- 12 На рисунке изображены множества P и Q . Отметьте на этом рисунке следующие множества: 1) $P \setminus Q$; 2) $Q \setminus P$; 3) $P \cup Q$; 4) $P \cup Q \setminus Q$; 5) $Q \cap P$;
 6) $P \setminus (P \cap Q)$; 7) $P \cap Q \setminus P$; 8) $(P \cup Q) \setminus (P \cap Q)$.



13 Используя операции над множествами A , B , C , записать символически каждую из заштрихованных областей.



14 Каждый из членов команды играет либо в футбол, либо в теннис, либо в футбол и в теннис. Сколько человек в команде, если известно, что 18 человек играют в обе игры, 23 человека играют в футбол, 21 – в теннис?

15 Из 220 студентов 163 играют в баскетбол, 175 – в футбол, 24 – не играют в эти игры. Сколько человек одновременно играют в баскетбол и в футбол?

16 Из 20 человек 2 изучают только английский язык, 3 – только немецкий, 6 – только французский. Никто не изучает 3 языков. Один изучает немецкий и английский язык, трое – французский и английский. Сколько человек изучает французский и немецкий языки?

17 Контрольную работу, содержащую одну задачу по алгебре, одну по геометрии, одну по тригонометрии, писали 105 учащихся. Задачу по алгебре решили 70 человек, по геометрии – 59, по тригонометрии – 62. 90 учащихся решили задачи по алгебре или геометрии, 89 – по геометрии или тригонометрии. По алгебре или по тригонометрии задачи были решены 91 учащимся, а 6 школьников не решили ни одной задачи. Сколько учащихся решили все 3 задачи?

18 Вычислить:

1) $(3 - 2i) + (5 + 3i)$; 2) $(1 + 2i) - (3 - i)$; 3) $3(2 - i) \cdot (1 - i)$;

4) $(1 + 3i)(-7 + 2i)$; 5) $(2 - i)^2$; 6) $(1 + 2i)^3$.

19 Вычислить:

1) i^{13} ; 2) i^{65} ; 3) $\left(\frac{1}{1-i}\right)^2$; 4) $\frac{5}{1+2i}$; 5) $\frac{2i-3}{1+i}$; 6) $\frac{2+3i}{i}$; 7) $\frac{1+2i}{-2+i}(-i)+1$;
8) $(1+i\sqrt{3})^3(1-i)^7$; 9) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-12}$; 10) $\frac{(1+i)^8}{(-1+i)^4}$.

20 Найти действительную и мнимую части числа $z = \frac{5+2i}{2-5i} - \frac{3-4i}{4+3i} - \frac{1}{i}$.

21 Представить следующие комплексные числа в тригонометрическом виде:

1) 1, -1, i , $-i$; 2) $z = 3 - 3i$; 3) $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}i}{2}$; 4) $z = 1 + i$; 5) $z = \sqrt{3} - i$.

22 Вычислить $|z|$ и $\arg z$, если $z = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$.

23 Выполнить действия:

1) $\frac{2-i}{3+i} + i(1-8i)$; 2) $\frac{1+i}{2-i} + (3-i)(1+2i)$; 3) $(3-i)(5+2i) + \frac{1-3i}{1+i}$;

4) $3i(2-i) + \frac{7-2i}{2+i}$; 5) $\frac{2-i}{1+i} + (3-2i) \cdot (1+7i)$; 6) $\frac{3-i}{1+i} - (2+7i) \cdot (1-i)$;

7) $(5-3i) \cdot (4+7i) - \frac{1+i}{2+3i}$; 8) $\frac{2+i}{-3-i} + (5+2i) \cdot (4-2i)$;

9) $\frac{3+i}{-1+i} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot (1+4i)$; 10) $\frac{2+i}{2-i} - (3+4i) + \frac{4-i}{3+2i}$.

Раздел 4. Элементы дифференциального исчисления функции одной переменной

Тема 1. Предел и непрерывность функций

Вопросы теории для повторения:

1 Определение числовой последовательности.

- 2 Определение предела числовой последовательности.
- 3 Определение предела функции в точке.
- 4 Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства.
- 5 Основные теоремы о пределах.
- 6 Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$.
- 7 Замечательные пределы.
- 8 Определения непрерывной функции в точке и на отрезке.

Задачи для решения в аудитории

Вычислить предел функции или числовой последовательности.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 8}{x^2 - x + 4}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\pi} \arcsin x - 3}{x^2 + 3}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 5x}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{1 - x^2}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x - 4}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x^2 - x + 2}{x + 2}$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x + 6}$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$;
- 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n^3 - 2n^2 + 3n + 1}{4n^3 + 2n^2 - 3n + 2}$;
- 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 5n + 1}{3n^4 + 4n^3 + 2n^2 - 4n - 2}$;
- 13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n + 1}{2n^3 + 3n^2 - 7}$;
- 14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 4n^2 - 3n - 10}{n^2 + 3n + 5}$;
- 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x + 3}{5x^4 + 3x^3 - 2x}$;
- 16) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$;
- 17) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}$;
- 18) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$;
- 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$;
- 20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$;
- 21) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{x-1} - 2}$;

$$\begin{aligned}
22) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}; & \quad 23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}{1 - \sqrt{1+x}}; & \quad 24) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}; \\
25) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}; & \quad 26) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}; & \quad 27) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}; \\
28) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 1}; & \quad 29) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2} - (1+x)}{x}; & \quad 30) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}; \\
31) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{2x}; & \quad 32) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}; & \quad 33) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}; \\
34) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \cos x}; & \quad 35) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\operatorname{tg} x - \sin x}; & \quad 36) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 2x}{4x^2}; \\
37) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n; & \quad 38) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1}; & \quad 39) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2}; \\
40) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+4}{3n+7} \right)^{2n-5}; & \quad 41) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1} \right)^{n^2}; & \quad 42) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^4}; \\
43) \lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{3x}{2-x}}; & \quad 44) \lim_{x \rightarrow 4} (5-x)^{\frac{x}{4-x}}; & \quad 45) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 3x)^{1/\sin 5x}.
\end{aligned}$$

Исследовать на непрерывность функции.

$$1 \quad f(x) = \begin{cases} x-2, 0 < x < 1, \\ 1-x, 1 \leq x \leq 3, \end{cases} \quad \text{в точке } x_0 = 1. \qquad 2 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \leq 0, \\ x, x > 0, \end{cases} \quad \text{в точке } x_0 = 1.$$

$$3 \quad y = \begin{cases} 2x, 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, 1 < x \leq 2. \end{cases} \qquad 4 \quad y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}. \qquad 5 \quad y = \frac{x}{1+x}. \qquad 6 \quad y = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Задачи для решения дома

Вычислить предел функции или числовой последовательности

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + x - 6}. \quad 2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2}. \quad 3 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 64}.$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-3} - \sqrt{3}}{x-6}. \quad 5 \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x+5}{\sqrt{x+30} - 5}. \quad 6 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{\sqrt{x} - 2}.$$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^3 - 2x^2 + x + 7}{2x^2 - 6x^3 + x - 3}. \quad 8 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 7x^3 + 2x - 3}{2x^3 - x + 8}.$$

$$9 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 3n + 4}{n + 3}. \quad 10 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 5x}{x^2}. \quad 11 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 7x}{1 - \cos^2 x}.$$

$$12 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{5 \sin 3x}. \quad 13 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{3n+5}. \quad 14 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3}{n^2 + 1} \right)^{n^2 - 5}.$$

Исследовать на непрерывность функции:

$$1 \quad y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}. \quad 2 \quad y = \frac{3x^2}{(x-3)(x+4)}. \quad 3 \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 20 - 8x, & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

Тема 2. Производная функции

Вопросы теории для повторения:

- 1 Задачи, приводящие к понятию производной.
- 2 Определение производной функции в точке.
- 3 Геометрический и физический смысл производной.
- 4 Определения дифференцируемой функции в точке, на промежутке.
- 5 Правила дифференцирования функции.
- 6 Таблица производных элементарных функций.
- 7 Производная сложной и показательно-степенной функций

Задачи для решения в аудитории

Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производные следующих функций.

$$1 \quad y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4.$$

$$2 \quad y = \frac{7}{x^3}.$$

$$3 \quad y = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \frac{2}{15}x^7\sqrt{x}.$$

$$4 \quad y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}.$$

$$5 \quad y = 3x^3 \ln x - x^3.$$

$$6 \quad y = \frac{5^{8x}}{8 \ln 5} + 3x^2 - 9.$$

$$7 \quad y = \sqrt{1 - 3x^2}.$$

$$8 \quad y = \frac{x^2 - 1}{x}.$$

$$9 \quad y = \ln(2x^3 + 3x^2).$$

$$10 \quad y = \cos^3 \frac{x}{3}.$$

$$11 \quad y = \ln \operatorname{tg} \frac{2x+1}{4}.$$

$$12 \quad y = \operatorname{tg} 2x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 2x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 2x.$$

$$13 \quad y = x \arccos \frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}.$$

$$14 \quad y = \frac{1 \sin^2 5x}{5 \cos 10x}.$$

$$15 \quad y = \arcsin \frac{2x^3}{1+x^6}, \text{ если } |x| < 1.$$

$$16 \quad y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2}.$$

$$17 \quad y = \frac{e^{x^3}}{1+x^3}.$$

$$18 \quad y = \arccos \frac{9-x^2}{9+x^2}.$$

$$19 \quad y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}.$$

$$20 \quad y = \log_2 \sin^2 x.$$

21 Чему равно выражение $u = y^2 + (y')^2 + \frac{4y^2}{(y')^2}$, если $y = 2 \cos x$?

22 Показать, что функция $y = (x^2 + 1)(e^x + c)$, где $c = \text{const}$ обращает уравнение

$$y' - \frac{2xy}{x^2 + 1} = e^x (x^2 + 1)$$

в тождество.

Найти производную показательно-степенной функции.

1 $y = (\text{arctg } x)^{\frac{1}{2} \ln(\text{arctg } x)}$. 2 $y = (\text{arcsin } x)^{e^x}$. 3 $y = x^{\text{arcsin } x}$.

4 $y = (\ln x)^{3^x}$. 5 $y = (\cos 5x)^{e^x}$. 6 $y = (x^3 + 4)^{\text{tg } x}$.

7 $y = x^{\sin x^3}$. 8 $y = (x^2 + 1)^{\cos x}$.

Задачи для решения дома

Найти производные указанных функций.

1 $y = 7x^5 + 3x^2 - 4x - 9$. 2 $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$. 3 $y = e^x \cos 2x$.

4 $y = x \arccos x$. 5 $y = x^2 \log_3 x$. 6 $y = \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x}$.

7 $y = \frac{x^4 - 8x^2}{2(x^2 - 4)}$. 8 $y = \sin^2 x^3$. 9 $y = \ln \frac{x^2}{1 - x^2}$. 10 $y = \text{arctg} \frac{x^2 - 1}{x}$.

11 Найти $\varphi'(1)$, $\varphi'(e)$, $\varphi'\left(\frac{1}{e}\right)$, $\varphi'\left(\frac{1}{e^2}\right)$, если $\varphi(x) = x \ln x$.

12 Найти $f'(0)$, если $f(x) = \frac{1 - 10^x}{1 + 10^x}$.

Тема 3. Производные высших порядков. Дифференциал функции

Вопросы теории для повторения:

- 1 Определение производной второго порядка. Физический смысл.
- 2 Определение производной n -го порядка.
- 3 Определение дифференциала функции. Геометрический смысл.
- 4 Связь производной и дифференциала функции. Основные свойства дифференциала.
- 5 Применение дифференциала функции к приближенным вычислениям.
- 6 Правило Лопиталья вычисления пределов функций

Задачи для решения в аудитории

Найти производные второго порядка:

$$1 \quad y = -\frac{22}{x+5}. \quad 2 \quad y = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 3). \quad 3 \quad y = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x.$$

$$4 \quad y = -\frac{1}{9}x \sin 3x - \frac{2}{27} \cos 3x. \quad 5 \quad y = \cos^2 5x. \quad 6 \quad y = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) - \sqrt{x^2 + 9}.$$

Найти производные третьего порядка:

$$7 \quad y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}.$$

$$8 \quad y = xe^{-x}$$

$$9 \quad y = e^x \cos x.$$

$$10 \quad y = x^2 \sin x.$$

$$11 \quad y = \frac{x}{6(x+1)}.$$

$$12 \quad y = \frac{1}{2} \ln^2 x.$$

Найти производные указанного порядка:

$$13 \quad y = \frac{1}{2x+1}, y''' - ?$$

$$15 \quad y = 5 - 3\cos^2 x, y' - ?$$

$$14 \quad y = 2^x + 2^{-x}, y'' - ?$$

$$16 \quad y = x^2 \ln x, y' - ?$$

Найти дифференциалы функций:

$$17 \quad y = \frac{1}{12} \ln \frac{x-6}{x+6}.$$

$$20 \quad y = \arcsin \sqrt{x}.$$

$$18 \quad y = x \operatorname{arctg} x.$$

$$21 \quad y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}.$$

19 $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

22 $y = 2^{-x^2}$.

23 Найти приближенное значение $\operatorname{arctg} 1,05$.24 Найти приближенное значение $\sqrt[3]{7,76}$.25 Найти приближенное значение $(2,01)^6$.26 Найти приближенное значение $\arcsin 0,08$.

Используя правило Лопиталья, найти пределы:

27 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e}{\ln(1+x)}$.

28 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}$.

29 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$.

30 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x^2}{(1+x)^5 - 1 + x^2}$.

31 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-2)}{\ln(e^x - e^2)}$.

Задачи для решения дома

Найти дифференциалы функций:

1 $y = x^3 \sqrt{x}$.

3 $y = \frac{2-x^2}{2+x^2}$.

2 $y = \ln(\sin \sqrt{x})$.

4 $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + 1}$.

Найти производные указанных порядков для функций:

5 $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - x + 7$; найти y^V .

6 $y = x^3 e^x$; найти y^{IV} .

7 $y = \sin^2 3x$; найти y^{III} .

8 Найти приближенное значение $\sqrt[5]{(1,03)^2}$.9 Найти приближенное значение $\sqrt{1,005}$.10 Показать, что функция $y = x + \sin 2x$ удовлетворяет уравнению

$$y'' + 4y = 4x.$$

Используя правило Лопиталья, найти пределы:

$$11 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$$

$$12 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$$

$$13 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 3x^3 - 2x + 6}{x^5 - 4x^2 + 3}$$

Тема 4. Применение производной к исследованию функций (самостоятельно)

Вопросы для повторения:

- 1 Определение возрастающей и убывающей функций, экстремум функции.
- 2 Теоремы, позволяющие находить промежутки монотонности функции.
- 3 Необходимое условие существования экстремума функции.
- 4 Первое достаточное условие существования экстремума функции.
- 5 Второе достаточное условие существования экстремума функции.
- 6 Алгоритм исследования функции на экстремум с помощью производной второго порядка.
- 7 Определения выпуклости (вогнутости) графика функции в точке, на интервале.
- 8 Определение точки перегиба графика функции.
- 9 Теоремы, позволяющие находить интервалы выпуклости (вогнутости), точки перегиба.
- 10 Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.
- 11 Асимптоты графика функции, классификация, нахождение.

Задачи для самостоятельного решения

Найти интервалы возрастания и убывания функций:

$$1 \quad y = x^3 + 5x + 6.$$

$$4 \quad y = 2 - 3x + x^3.$$

$$2 \quad y = (x^2 - 1)^{3/2}.$$

$$5 \quad y = xe^{-x}.$$

$$3 \quad y = (2 - x)(x + 1)^2.$$

$$6 \quad y = (x - 2)(x + 1)(x - 3).$$

Найти экстремумы функций, используя производную 1-ого порядка:

$$7 \quad y = (2x - 1)\sqrt{(x - 3)^2}.$$

$$10 \quad y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}.$$

8 $y = \frac{x^2}{x^2 + 2x + 2}$.

11 $y = \frac{x^2 - x}{x^2 + 5x + 6}$.

9 $y = \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 3}$.

12 $y = x^2 e^{-x}$.

Найти наименьшее и наибольшее значения функций на отрезке:

13 $y = x^4 - 2x^2 + 3$; $[-3; 2]$.

14 $y = 3x - x^3$; $[-2; 3]$.

15 $y = -5x^3 + x|x - 1|$; $[0; 2]$.

Найти экстремумы функций, используя производную 2-го порядка:

16 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12$.

20 $y = x^{2/3}(x - 5)$.

17 $y = x + \sqrt{3 - x}$.

21 $y = (x - 1)^{6/7}$.

18 $y = xe^x$.

22 $y = \frac{\ln x}{x}$.

23 $y = \frac{4x}{1 + x^2}$.

19 $y = \ln(x^2 + 1)$.

Найти интервалы выпуклости и вогнутости графиков функций:

24 $y = x^2 - 5x + 6$.

25 $y = \frac{4}{x^2}$.

Найти точки перегиба кривых:

26 $y = x^3 - \frac{1}{2}x^2$.

29 $y = x^4 - \frac{4}{3}x^3$.

27 $y = (x - 4)^5 + 4x + 4$.

30 $y = (x - 1)\sqrt[3]{(x - 1)^6}$.

28 $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.

31 $y = \frac{x}{1 - x^2}$.

Найти асимптоты графиков функций:

32 $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

33 $f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$.

34 $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2x + 2}$.

35 $f(x) = \frac{5x}{x - 1}$.

36 $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} + 2x$.

38 $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$.

$$39 \quad f(x) = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x. \quad 40 \quad f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x.$$

Провести полное исследование функций и построить их графики:

$$1 \quad y = x^3 - 3x. \quad 2 \quad y = 12x - x^3. \quad 3 \quad y = \ln x - \ln(x-1).$$

$$4 \quad y = \frac{x^3}{x^2 - 4}. \quad 5 \quad y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}. \quad 6 \quad y = \frac{x^2}{1 - x^2}.$$

$$7 \quad y = \frac{x}{x^2 - 1}. \quad 8 \quad y = \sqrt[3]{1 - x^3}. \quad 9 \quad y = 2x + \frac{1}{x^2}.$$

$$10 \quad y = e^{-x^2}. \quad 11 \quad y = \frac{1 + \ln x}{x}. \quad 12 \quad y = x - \ln x.$$

Раздел 5. Элементы интегрального исчисления функции одной переменной

Тема 1. Неопределённый интеграл

Вопросы для повторения:

- 1 Определение первообразной функции для данной.
- 2 Определение неопределённого интеграла.
- 3 Таблица основных интегралов.
- 4 Методы вычисления неопределённого интеграла.

Задачи для решения в аудитории

Вычислить интегралы, используя таблицу основных интегралов:

$$1 \quad \int (2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 5) dx. \quad 2 \quad \int (1 + x^5) dx. \quad 3 \quad \int \frac{dx}{x^3}.$$

$$4 \quad \int (5^{2x} - \sqrt{x}) dx. \quad 5 \quad \int (\cos x + \sin x) dx. \quad 6 \quad \int (5x + e^x) dx.$$

$$7 \quad \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx. \quad 8 \quad \int (e^{3x} + \sin 2x) dx. \quad 9 \quad \int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}.$$

$$10 \quad \int \frac{dx}{x^2 + 9}. \quad 11 \quad \int \left(\frac{8}{\sin^2 x} + \frac{7}{\cos^2 x}\right) dx. \quad 12 \quad \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{x^2 - 1}\right) dx.$$

Вычислить интегралы методом замены переменной:

$$13 \int x e^{x^2} dx. \quad 14 \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx. \quad 15 \int \frac{\ln^3 x}{x} dx. \quad 16 \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

$$17 \int e^{2x^3+3} x^2 dx. \quad 18 \int \frac{x^2}{2x^3+3} dx. \quad 19 \int x\sqrt{2-x} dx. \quad 20 \int \operatorname{tg} x dx.$$

$$21 \int \frac{e^x dx}{2+3e^x}. \quad 22 \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{16-x^8}}. \quad 23 \int \frac{\arcsin^3 x - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad 24 \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx.$$

$$25 \int \frac{x^3+x}{x^4+1} dx. \quad 26 \int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx. \quad 27 \int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$$

Вычислить интегралы, применяя метод интегрирования по частям:

$$28 \int x \ln x dx. \quad 29 \int x e^x dx. \quad 30 \int x \sin x dx. \quad 31 \int \ln x dx. \quad 32 \int x e^{-x} dx.$$

$$33 \int (5x+1) \ln x dx. \quad 34 \int (5x-2) e^{3x} dx. \quad 35 \int (5x+6) \cos 2x dx.$$

$$36 \int (x+5) \sin 3x dx. \quad 37 \int (8-3x) \cos 5x dx. \quad 38 \int x^3 \ln 2x dx.$$

$$39 \int x^2 e^{3x} dx. \quad 40 \int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx. \quad 41 \int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx.$$

$$42 \int \frac{x dx}{\cos^2 x}. \quad 43 \int x \sin^2 x dx. \quad 44 \int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}. \quad 45 \int x \ln^2 x dx.$$

Задания для решения дома

Вычислить неопределенные интегралы:

$$46 \int \frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2} dx. \quad 47 \int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx. \quad 48 \int \frac{dx}{\cos^2 5x}. \quad 49 \int 3^{2x} dx.$$

$$50 \int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \right) dx. \quad 51 \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}. \quad 52 \int e^{\sin x} \cos x dx.$$

$$53 \int 2^{x^3+2x^2} (3x^2+4x) dx. \quad 54 \int \frac{(\ln x + 3) dx}{x}. \quad 55 \int \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1}.$$

$$56 \int \operatorname{ctg} x dx. \quad 57 \int (4-3x)e^{-3x} dx. \quad 58 \int (2-x) \sin x dx. \quad 59 \int x e^{5x} dx.$$

$$60 \int \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx. \quad 61 \int \frac{x}{x^4+1} dx. \quad 62 \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}. \quad 63 \int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx.$$

$$64 \int \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} dx. \quad 65 \int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

Тема 2. Определённый интеграл. Приложения определённого интеграла

Вопросы для повторения:

- 1 Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла.
- 2 Определение определённого интеграла. Его геометрический смысл.
- 3 Свойства определённого интеграла.
- 4 Связь определённого и неопределённого интегралов. Формула Ньютона-Лейбница.
- 5 Методы вычисления определённого интеграла.
- 6 Вычисление площадей плоских фигур.

Задачи для решения в аудитории и дома

Вычислить определённые интегралы:

$$1. \int_1^2 (3x^2 + x) dx. \quad 2. \int_a^{2a} (x^2 + 2ax) dx. \quad 3. \int_1^2 2^x dx. \quad 4. \int_2^3 (x-2)^2 dx.$$

$$5 \int_{-1}^1 (a^4 + ax^2) dx. \quad 6 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}. \quad 7 \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}. \quad 8 \int_0^4 \frac{dx}{16+x^2}.$$

$$9 \int_{-2}^3 \varphi(x) dx, \text{ если } \varphi(x) = \begin{cases} 3x, & x < 1, \\ x+2, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$10 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx, \text{ если } f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{4}, \\ \sin x, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$11 \int_5^6 |x-3| dx.$$

$$12 \int_{-1}^2 |x-3| dx.$$

$$13 \int_{-1}^5 |x-3| dx.$$

$$14 \int_{-2}^1 |x|(x-2) dx.$$

$$15 \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4} dx.$$

$$16 \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$17 \int_{-1}^0 e^{x^2} x dx.$$

$$18 \int_0^5 \sqrt{25-x^2} dx.$$

$$19 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$20 \int_0^7 \sqrt{49-x^2} dx.$$

$$21 \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$22 \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

$$23 \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

$$24 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx.$$

$$25 \int_0^1 \frac{x dx}{x^4+1}.$$

$$26 \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$$

$$27 \int_0^1 x e^x dx.$$

$$28 \int_1^e \ln x dx.$$

$$29 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx.$$

$$30 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$$

$$31 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx.$$

$$32 \int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx.$$

$$33 \int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$$

$$34 \text{ Решить уравнение } \int_1^2 \left(\frac{2y}{x^2} + xy^2 \right) dx = 8.$$

Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

- 35 $2x - 3y + 2 = 0, x = 2, y = 0.$ 36 $y = 6x - 3x^2, y = 0.$
- 37 $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1, x = 2.$ 38 $y = \frac{4}{x}, y = -x + 5.$
- 39 $y = -x^2, x + y + 2 = 0.$ 40 $y = x^2, y = 2 - x^2.$
- 41 $y = \ln x, y = 0, x = 2, x = 8.$ 42 $y = x, y = x^3.$
- 43 $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$ 44 $y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3.$
- 45 $y = \operatorname{arctg} x, y = 0, x = \sqrt{3}.$ 46 $y = \operatorname{arccos} x, y = 0, x = 0.$
- 47 $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0, x = 0, x = 1.$

Раздел 6. Элементы теории функций нескольких переменных

Тема 1. Функции двух независимых переменных

Вопросы для повторения

- 1 Определение функции двух независимых переменных.
- 2 Область определения функции двух переменных. Геометрический смысл.
- 3 Частные производные функции двух переменных.
- 4 Частные производные 2-го порядка функции двух переменных.
- 5 Полный дифференциал.

Задачи для решения в аудитории

Найти области определения функций:

- 1 $z = \sqrt{x^2 + y^2}.$ 2 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}.$
- 3 $z = \arcsin(x + y).$ 4 $z = \ln(x^2 - y).$

Найти частные производные и полный дифференциал функции:

- 5 $z = x^2 + 2y^2 - 3xy - 4x + 2y + 5.$ 6 $z = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y}.$ 7 $z = \frac{x + 3y^3}{x - y}.$
- 8 $z = x^4 y^3 + 3x \ln y + x^y.$ 9 $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{1 + x^2}\right).$

10 Найти частные производные функции $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ в точке $(1; 2)$.

11 Показать, что функция $z = y \ln(x^2 - y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

Найти частные производные второго порядка функций:

12 $z = y \ln x$.

13 $z = x^2 y$.

14 $z = \ln(x^2 + y^2)$.

15 $z = \sin xy$.

16 $z = x^y$.

17 $z = \sin x \sin y$.

Задачи для решения дома

Найти области определения функций:

1 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$.

2 $z = \ln(y - x)$.

3 Найти значение функции $z = x^3 - 5xy + y^2$ в точке $P(3; -2)$.

Найти частные производные функций и полный дифференциал:

4 $z = x^5 - 3x^2 y^3 + 4xy + y^2$.

5 $y = \ln \frac{x}{y}$.

6 $z = \frac{3x - 2y^2}{x + y}$.

7 $y = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{x - y}$.

Найти частные производные второго порядка для функций:

8 $z = 3x^2 y - 3xy^2$.

9 $z = \cos xy$.

10 $z = e^{xy}$.

11 $z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Раздел 7. Дифференциальные уравнения

Тема 1. Дифференциальные уравнения 1-го и 2-го порядков

Вопросы для повторения:

- 1 Определение дифференциального уравнения первого порядка.
- 2 Общее решение и начальные условия. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.
- 3 Уравнения с разделяющимися переменными.
- 4 Однородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Задачи для решения в аудитории

Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

- 1 $xy^2y' = 1$.
- 2 $(x^2 + 1)y' = y^3$.
- 3 $\sqrt{4-x^2}y' = y + 2$.
- 4 $\cos 5x = y'y^2$.
- 5 $x^2(y^3 + 5)dx + (x^3 + 5)y^2dy = 0, y(0) = 1$.
- 6 $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0, y(\sqrt{3}) = 0$.
- 7 $xydx + (1+y^2)\sqrt{1+x^2}dy = 0, y(\sqrt{8}) = 1$.
- 8 $\operatorname{tgy} \cdot dx - x \ln x dy = 0, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$.
- 9 $y' = 2x^2 + 5x + 12, y(1) = \frac{1}{6}$.
- 10 $\sqrt{1-y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0, y(0) = 1$.
- 11 $y' \cos x = y \sin x + \sin x, y(\pi) = -2$.
- 12 $yy' = e^{x-y}$.

Решить дифференциальные уравнения 2-го порядка:

- 13 $y'' = 80x^3 - 24x^2 + 6x - 2, y(0) = 1, y'(0) = 8$.
- 14 $y'' = 64x^3 - 8x^2 + 4, y(0) = 4, y'(0) = 2$.

Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

- 15 $y'' - 7y' + 10y = 0$.
- 16 $y'' - 6y' + 9y = 0$.

$$17 \quad y'' + 2y' + 10y = 0.$$

$$18 \quad y'' + 8y' = 0.$$

Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$19 \quad y'' + 8y' + 7y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1. \quad 20 \quad y'' - 4y' + 4y = 0,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

$$21 \quad y'' + y = 0, \quad y(\pi) = -1, \quad y'(\pi) = -4.$$

Задачи для решения дома

Решить дифференциальные уравнения:

$$1 \quad y' = 5x^4 - 3x^2 + 2x - 1.$$

$$2 \quad y' = e^x, \quad y(1) = e.$$

$$3 \quad yy' = x^2.$$

$$5 \quad (1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0, \quad y(1) = 2.$$

$$4 \quad \sin x = yy'$$

$$6 \quad y'' + 2y' - 3y = 0.$$

$$7 \quad y'' + 2y' + 5y = 0.$$

$$8 \quad y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Раздел 8. Ряды

Тема 1. Числовые и степенные ряды. Разложение функций в степенной ряд Тейлора

Вопросы теории для повторения:

- 1 Определения числового ряда, суммы ряда.
- 2 Признаки сходимости рядов с положительными членами.
- 3 Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.
- 4 Определения функционального и степенного рядов.
- 5 Радиус сходимости степенного ряда.
- 6 Формула Тейлора (Маклорена).
- 7 Разложения элементарных функции в степенной ряд Тейлора.

Задачи для решения в аудитории

$$1 \quad \text{Записать первые пять членов ряда с общим членом } u_n = \frac{1}{2n-1}, \quad u_n = \frac{2n-1}{4n^2+1}.$$

$$2 \quad \text{Найти общий член ряда а) } \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} + \dots; \quad б) \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots$$

$$3 \quad \text{Найти сумму ряда а) } \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{26} + \dots; \quad б) 1 \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

4 Исследовать сходимость ряда а) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{3n-1} + \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

5 Исследовать сходимость ряда с общим членом $u_n = \frac{1}{4 \cdot 2^n - 3}$.

6 Используя признак Коши, исследовать сходимость ряда

а) $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

7 Используя признак Даламбера, исследовать сходимость ряда

а) $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \dots + \frac{2^n}{n^{10}} + \dots$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9\sqrt{3}} + \dots$; в) $\frac{10}{1!} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \dots$

8 Применяя интегральный признак, исследовать сходимость ряда

а) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$; б) $\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} + \dots$.

9 Применяя признак Лейбница, исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2 + 1} + \frac{3}{3^2 + 1} - \frac{4}{4^2 + 1} + \dots$$

10 Исследовать сходимость ряда а) $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$; б) $1, 1 - 1, 01 + 1, 001 - 1, 0001 + \dots$;

в) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \dots$.

Исследовать сходимость степенных рядов:

1 $(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + \dots$

2 $1!(x-5) + 2!(x-5)^2 + 3!(x-5)^3 + \dots$

3 $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

4 $1 + \frac{x^3}{8} + \frac{x^6}{8^2} + \frac{x^9}{8^3} + \dots$

5 $(x-4) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-4)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)^3 + \dots$

6 $\frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(x-1)^3}{2^3} + \dots$

7 $x + (2x)^2 + (3x)^3 + (4x)^4 + \dots$

8 $5x + \frac{5^2 x^2}{2!} + \frac{5^3 x^3}{3!} + \frac{5^4 x^4}{4!} + \dots$

- 9 Разложить в ряд по степеням x функцию $y = (3 + e^{-x})^2$.
- 10 Разложить в ряд по степеням $x-1$ функцию $y = x^4 + x^2$.
- 11 Разложить в ряд по степеням $x-2$ функцию $y = e^{-2x}$.
- 12 Разложить в ряд по степеням $x-1$ функцию $y = \ln x$.

Задачи для решения дома

Найти сумму числового ряда:

$$1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \quad 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$$

Определить, какой из числовых рядов является сходящимся:

$$1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+10} \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-7}{n^2+6n-1} \quad 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{n^3}} \quad 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$$

Определить, какие из числовых рядов являются расходящимися:

$$1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \quad 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1} \quad 4 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ar} \operatorname{ctg} n$$

Определить, какой из знакочередующихся рядов является абсолютно сходящимся:

$$1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{7n+3} \quad 3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-1} \quad 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{2^n}$$

Найти интервал сходимости степенного ряда, если радиус сходимости равен 3:

$$1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-7)^n \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+2)^n \quad 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Найти радиус сходимости степенного ряда:

$$1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5n+3} \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{2n+1} \quad 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n n^2}{4^n} \quad 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-5}{2^n} (x-4)^n$$

Найти количество целых чисел, принадлежащих интервалу сходимости степенного ряда:

$$1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{3^n n^2} \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n-2} (x-1,5)^n$$

$$3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{9^n \sqrt[3]{9n^2+1}} \quad 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n x^{3n}}{125^n}$$

Найти коэффициент a_n разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$, если:

1 $f(x) = x^4 - 1, x_0 = 1, a_5 - ?$

2 $f(x) = (x+3)^2, x_0 = 0, a_2 - ?$

3 $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x + 5, x_0 = 0, a_4 - ?$

4 $f(x) = \sin x + 7x^2 - 3, x_0 = \pi, a_3 - ?$

Проверочный тест для подготовки к зачёту

1 Пусть даны множества $A = \{-7; -3; 2; 4; 33\}$ и $B = \{-1; 0; 1; 2; 4; 3\}$. Установите соответствие между заданиями и ответами:

задания	ответы
1) $A \cap B$	а) $\{-1; 0; 3; 1\}$
2) $A \cup B$	б) $\{2; 4\}$
3) $A \setminus B$	в) $\{-7; -3; -1; 0; 1; 3; 33\}$
4) $B \setminus A$	г) $\{-7; -3; 33\}$
5) $(B \cup A) \setminus (A \cap B)$	д) $\{0; 1; 2; 4; -1; -3; -7; 3; 33\}$

- 2 Для того чтобы выполнить действие $\frac{-3+2i}{-1-i}$, мы должны:
- умножить числитель дроби на комплексное число $-1-i$;
 - умножить числитель и знаменатель дроби на комплексное число $1-i$;
 - умножить знаменатель дроби на комплексное число $-3-2 \cdot i$;
 - умножить числитель и знаменатель дроби на комплексное число $-1+i$.
- 3 Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Можно ли найти:
- $A \cdot B$;
 - $B \cdot A$.
- 4 Чему равен определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$?
- 8;
 - 29;
 - 30;
 - 29.
- 5 Найти алгебраическое дополнение для третьего элемента второй строки матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$:
- 0;
 - 1;
 - 3;
 - 13;
 - 3.
- 6 Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$:
- $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$;
 - $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$;
 - $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$;
 - обратной матрицы не существует.
- 7 Найти расстояние между точками А (-3;2) и В (1;5):
- $\sqrt{53}$;
 - 5;
 - 8;
 - $\sqrt{15}$.
- 8 Какие из перечисленных формул не являются уравнением прямой линии на плоскости?
- $y = k \cdot x + b$;
 - $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$;
 - $y - y_1 = k \cdot (x - x_1)$;
 - $\frac{x - x_1}{x} = \frac{y}{x_2 - x_1}$;
 - $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.
- 9 Условие перпендикулярности прямых $l_1 : y = k_1 \cdot x + b_1$ и $l_2 : y = k_2 \cdot x + b_2$ записывается следующим образом:

а) $k_1 \cdot k_2 = 1$; б) $k_1 = k_2$; в) $k_1 \cdot k_2 = -1$; г) $k_1 = -k_2$.

10 Найти расстояние от точки А (-2;1) до прямой $l: 2 \cdot x - 3 \cdot y + 5 = 0$:

а) 3; б) 21; в) $\sqrt{51}$; г) $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

11 Дано уравнение окружности $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$. Найти координаты центра и радиус окружности:

а) А(2;1) и R=3; б) А(2;-1) и R=9;

в) А(2;-1) и R=3; г) А(-2;-1) и R=3.

12 Какое из перечисленных уравнений является уравнением гиперболы?

а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$; б) $x = y - 2$; в) $-3 \cdot x^2 - y^2 = 9$; г) $x^2 + 3 \cdot y^2 = 1$.

13 Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами $2c=10$:

а) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{36} = 1$; б) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$; в) $\frac{x^2}{169} - \frac{y^2}{144} = 1$; г) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$.

14 Решить систему с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 10; \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$$

15 Исследовать систему и, если она совместна, найти ее решение:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

Проверочный тест для подготовки к экзамену

1 Установите соответствие между периодической функцией и значением ее периода:

1) $y = \cos \pi x$; 2) $y = \operatorname{tg} \frac{3\pi x}{2}$; 3) $y = \sin \frac{\pi x}{2}$.

Варианты ответов:

1) 4; 2) π ; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 2.

2 Точками разрыва функции $y = \frac{x+3}{x(x+1)}$ являются точки... (выбрать несколько вариантов ответов):

1) $x = 0$; 2) $x = 1$; 3) $x = -1$; 4) $x = -3$.

3 Результат вычисления предела $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+x-3}{x^2-4}$ имеет вид...:

1) 0; 2) ∞ ; 3) 5; 4) $\frac{1}{5}$.

4 Результат вычисления предела $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ имеет вид...:

1) 0,25; 2) 0; 3) 4; 4) ∞ .

5 Результат вычисления предела $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^x$ имеет вид ...:

1) ∞ ; 2) 0; 3) e ; 4) 1.

6 Результат вычисления предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 12x}{\sin 3x}$ имеет вид ...:

1) ∞ ; 2) 4; 3) 1; 4) 0.

7 Если к пределу $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ применить правило Лопиталю, то он примет вид:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$; 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

8 Установите соответствие между функциями и их производными:

1) $y = \arcsin x^3$; 2) $y = 5^{3x}$; 3) $y = \ln 8x$.

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{x^3}$; 2) 5^{3x} ; 3) $\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$; 4) $3 \cdot 5^{3x} \ln 5$.

9 Производная второго порядка функции $y = \sin^2 x$ имеет вид...:

1) $2\cos 2x$; 2) $2\cos x$; 3) $-2\sin x$; 4) $2\sin x \cos x$.

10 Множество первообразных функции $f(x) = \cos 3x$ имеет вид...:

1) $3\sin 3x + C$; 2) $3\sin x + C$; 3) $\frac{1}{3}\sin 3x + C$; 4) $-\frac{1}{3}\sin 3x + C$.

11 Продолжить формулу $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = \dots$:

- 1) $f(x)$; 2) $f(x) + C$; 3) $F(x) + C$; 4) $f(x) dx$.

12 Установить соответствие между интегралом и его значением:

- 1) $\int \sin^3 x \cos x dx$; 2) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$; 3) $\int e^x (\sin e^x) dx$; 4) $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$.

- A) $\operatorname{tg} x$; B) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$; C) $\frac{1}{4} \sin^4 x$; D) $\frac{1}{\cos x}$; E) $-\cos e^x$.

13 Определенный интеграл $\int_0^2 x^3 dx$ равен:

- 1) 2; 2) 0; 3) 4; 4) $\frac{1}{4}$.

14 Определенный интеграл $\int_3^5 |x-8| dx$ равен:

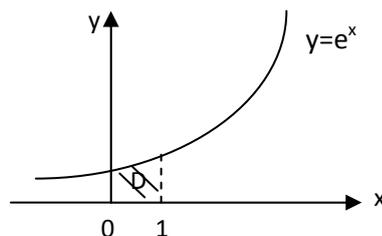
- 1) $|x-8|$; 2) $\int_3^5 (8-x) dx$; 3) $\int_3^5 (x-8) dx$; 4) $\int_2^4 (x-8) dx$.

15 Продолжить формулу $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \dots$:

- 1) $k \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx$; 2) $\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx$; 3) $\int f_1(x) dx \pm f_2(x) dx$; 4) $\int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$.

16 Площадь криволинейной трапеции D равна...:

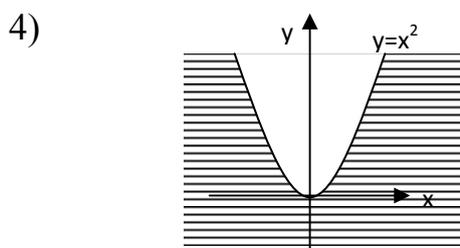
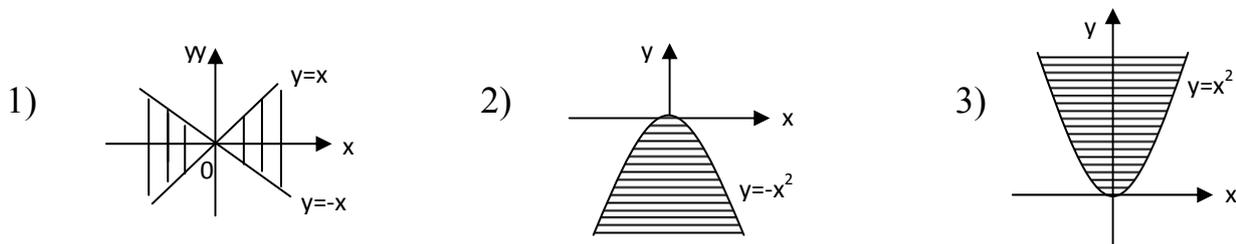
- 1) $e-1$; 2) $2e$; 3) e ; 4) $e+1$.



17 Определенный интеграл $\int_a^b (5f(x) - 2g(x)) dx$ может быть равен...:

$$1) 5 \int_a^b f(x) dx - 2 \int_a^b g(x) dx; \quad 2) 10 \int_a^b f(x) g(x) dx; \quad 3) 3 \int_a^b (f(x) - g(x)) dx; \quad 4) \frac{5}{2} \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx.$$

18 Областью определения функции $z = \sqrt{y - x^2}$ является...:



19 Производная z'_x функции $z = x^2 \ln y + y \ln x$ равна...:

1) $2x \ln y + \frac{y}{x}$; 2) $\frac{x^2}{y} + \ln x$; 3) $x^2 + y$; 4) $\ln xy$.

20 Производная z''_{y^2} функции $z = x^3 y^2$ равна:

1) $2x^3$; 2) $x^3 y^2$; 3) $6xy^2$; 4) $6x^2 y$.

21 Расположить дифференциальные уравнения по возрастанию порядка:

1) $xy'' - 3y' = 5xy$; 2) $xy' - 3y = 5xy$; 3) $xy - 3y'' = 5xy'''$; 4) $y^{IV} = xy$.

22 Дано дифференциальное уравнение $y' = (2k - 2)x^3$, тогда функция $y = x^4 - 3$ является его решением при k , равном:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 0.

23 Установить соответствие между дифференциальными уравнениями и их общими интегралами:

1) $y' - 14x^{13}y = 0$; 2) $y' - 7x^6y = 0$; 3) $y' = 14xy$.

A) $\ln|y| = 7x^2 + C$; B) $\ln|y| = x^{14} + C$; C) $\ln|y| = 14x^2 + C$; D) $\ln|y| = x^7 + C$.

24 Дано дифференциальное уравнение $y'' + 5y' + 6y = 0$, тогда соответствующее ему характеристическое уравнение имеет вид...:

1) $1 + 5k + 6k^2 = 0$; 2) $k^2 - 5k - 6 = 0$; 3) $k^2 + 5k + 6 = 0$; 4) $k^2 - 5k + 6 = 0$.

25 Общий член ряда $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \dots$ имеет вид...:

1 $a_n = \frac{3}{2^n}$. 3 $a_n = \frac{3}{n(n+3)}$.

2 $a_n = \frac{3}{n^2}$. 4 $a_n = \frac{3}{2n}$.

26 Укажите правильное утверждение относительно сходимости числовых рядов:

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

- 1) А и В сходятся;
- 2) В – сходится, А – расходится;
- 3) В – расходится, А – сходится;
- 4) А и В расходятся.

27 Укажите правильное утверждение относительно сходимости знакочередующихся рядов:

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 3}$.

- 1) А и В сходятся абсолютно;
- 2) В сходится абсолютно, А сходится условно;
- 3) А и В сходятся условно;
- 4) В сходится абсолютно, А расходится;
- 5) А и В расходятся;
- 6) В сходится условно, А сходится абсолютно.

28 Коэффициент a_5 в разложении функции $f(x) = x^4 + 3x^2 - x + 1$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ равен:

1) -3; 2) 0; 3) 1; 4) 9.

29 Интервал **[0;2)** является интервалом сходимости степенного ряда:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} n(x+2)^n ; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-2)^n ; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n ; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n .$$

Список литературы

- 1 *Ахтямов А. М.* Математика для социологов и экономистов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010.
- 2 *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я., Данко С. П.* Высшая математика в упражнениях и задачах. – М. : Оникс, 2008.
- 3 *Демидович Б. П., Кудрявцев В. А.* Краткий курс высшей математики. - М. : Астрель, АСТ, 2004.
- 4 *Дорофеева А. В.* Высшая математика. Гуманитарные специальности. – М. : Дрофа, 2004.
- 5 *Ильин В. А., Куркина А. В.* Высшая математика. - М. : Изд-во Московского университета, 2010.
- 6 *Смирнов В. И.* Курс высшей математики.– СПб. : БХВ-Петербург, 2008. - Т. 1
- 7 *Туганбаев А. А.* Задачи и упражнения по высшей математике для гуманитариев. – М. : Флинта, МПСИ, 2007.
- 8 *Шипачев В. С.* Основы высшей математики. – М. : Высшая школа, 2004.

Потеряйко Елена Львовна

МАТЕМАТИКА

Материалы для практических занятий и самостоятельной работы
для студентов-бакалавров направлений 040100.62 «Социология»,
040400.62 «Социальная работа»

Редактор О.Г. Арефьева

Подписано к печати	Формат бумаги 60x84 1/16	Бумага 65 г/м ²
Печать цифровая	Усл. печ. л. 3,25	Уч.- изд.л. 3,25
Заказ	Тираж 25	Не для продажи

РИЦ Курганского государственного университета.
640000, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.