МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Курганский государственный университет»

Кафедра «Прикладная математика и компьютерное моделирование»

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ

для студентов заочной формы обучения специальностей
151900.62, 220700.62, 280000.62, 221700.62, 150700.62, 222000.62,
190100.62, 190600.62, 140400.62, 190700.62
(бакалавриат)

(1 курс 2 семестр)

Курган 2015

Кафедра: «Прикладная математика и компьютерное моделирование»

Дисциплина: «Высшая математика»

Составила: доцент В.Н. Агафонова

Утверждены на заседании кафедры «27» июня 2014 г.

Рекомендованы методическим советом университета «19» декабря 2014 г.

Введение

Во II семестре студенты заочного факультета выполняют две контрольные работы №3 и №4.

Контрольная работа 3 содержит задачи по темам: «Функции многих переменных», «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл, его приложения».

Контрольная работа 4 содержит задачи по темам: «Дифференциальные уравнения», «Кратные и криволинейные интегралы».

Ниже приводятся таблицы с номерами задач, входящих в контрольные работы в соответствии с вариантом.

Студент должен выполнить вариант, номер которого совпадает с последней цифрой его шифра (номера зачетной книжки), если последняя цифра 0, то нужно решить задачи с №10, 20, 30 и т.д.

№ вар.	**Номера задач для контрольных работ**										
	№ 3					**№ 4**					
1	101	111	121	131	141	151	161	171	181	191	201
2	102	112	122	132	142	152	162	172	182	192	202
3	103	113	123	133	143	153	163	173	183	193	203
4	104	114	124	134	144	154	164	174	184	194	204
5	105	115	125	135	145	155	165	175	185	195	205
6	106	116	126	136	146	156	166	176	186	196	206
7	107	117	127	137	147	157	167	177	187	197	207
8	108	118	128	138	148	158	168	178	188	198	208
9	109	119	129	139	149	159	169	179	189	199	209
10	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210

ПРОГРАММА КУРСА МАТЕМАТИКИ

I курс, II семестр

I Функции нескольких переменных

1 Понятие функции нескольких переменных. Область определения. Предел функции двух переменных. Непрерывность.
2 Частные производные, их геометрический смысл.
3 Дифференцируемость функции. Полный дифференциал, его геометрический смысл. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
4 Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Касательная и нормальная плоскость к пространственной кривой.
5 Дифференцирование сложных функций, функций, заданных неявно.
6 Частные производные высших порядков.
7 Экстремум функции двух переменных. Необходимое и достаточное условия существования экстремума. Условный экстремум.
8 Наибольшее и наименьшее значения функций двух переменных в замкнутой области.
9 Производная по направлению. Градиент. Связь между ними.

II Элементы высшей алгебры

1 Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Геометрическое представление комплексного числа.
2 Действия с комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах.
3 Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа. Формула Муавра. Решение двучленных уравнений.
4 Многочлены. Теоремы Безу. Корни многочлена. Основная теорема алгебры (без доказательства). Разложение многочлена на множители.

III Интегральное исчисление функции одной переменной

1 Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла. Теоремы о первообразных.
2 Свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование.
3 Основные методы интегрирования. (Метод замены переменной, подведение множителя под знак дифференциала, интегрирование по частям).
4 Интегрирование выражений, содержащих в знаменателе квадратный трехчлен.

5 Интегрирование рациональных дробей. Разложение дроби на простейшие.
6 Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. (Интегрирование нечетных и четных степеней синуса и косинуса.

Подстановки sin x = t, cos x = t, tg x = t. Универсальная тригонометрическая подстановка tg x/2 = t.)
7 Интегрирование простейших иррациональных функций. Применение тригонометрических подстановок для вычисления интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$.
8 Поверхности II порядка. Поверхности вращения. Правило получения уравнения поверхности вращения (вывод). Виды поверхностей II порядка: эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, цилиндрические поверхности, их канонические уравнения и их особенности.

IV Определенный интеграл

1 Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла, его определение и основные свойства. Теорема существования определенного интеграла. Теорема об оценке определенного интеграла. Теорема о среднем.
2 Вычисление определенного интеграла. Теорема о производной интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница.
3 Замена переменной в определенном интеграле, интегрирование по частям.
4 Несобственные интегралы. Интегралы с бесконечными пределами, их вычисление. Интегралы от разрывных функций, их вычисление. Теоремы об оценке несобственных интегралов.
5 Приближенное вычисление определенных интегралов. Формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона.
6 Приложение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур в декартовых, полярных координатах, в параметрической форме.
7 Приложение определенного интеграла к вычислению длины дуги плоской кривой (в декартовых, полярных координатах, в параметрической форме).
8 Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений с помощью определенного интеграла. Вычисление объемов тел вращения, поверхности вращения.
9 Приложения определенного интеграла к решению физических задач. (Вычисление работы переменной силы, статических моментов, моментов инерции, центра тяжести плоских фигур и дуг).

Контрольная работа №3

V Обыкновенные дифференциальные уравнения

1 Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения. Основные понятия. Теорема существования и единственности решения. Задача Коши. Особые решения.

2 Дифференциальные уравнения I-го порядка. Общее решение. Задача Коши. Дифференциальные уравнения I-го порядка с разделяющимися переменными.
3 Однородные функции. Однородные дифференциальные уравнения I-го порядка. Уравнения, приводящиеся к однородным.
4 Линейные дифференциальные уравнения I-го порядка. Решение их методом вариации произвольной постоянной и методом Бернулли.
5 Уравнение Бернулли. Уравнение в полных дифференциалах.
6 Дифференциальные уравнения высших порядков. Дифференциальные уравнения II-го порядка, допускающие понижение порядка.
7 Линейные однородные дифференциальные уравнения II-го порядка. Линейная независимость частных решений. Определитель Вронского. Теоремы о свойствах решения (доказать).
8 Структура общего решения однородных дифференциальных уравнений.
9 Линейные однородные дифференциальные уравнения II-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Формула общего решения в случае действительных корней характеристического уравнения.
10 Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения II-го порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.
11 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения II-го порядка. Теорема о структуре общего решения.
12 Решение неоднородных уравнений методом вариации произвольных постоянных.
13 Неоднородные линейные уравнения II-го порядка с постоянными коэффициентами. Нахождение частного решения в зависимости от корней характеристического уравнения. Структура общего решения.
14 Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение системы двух линейных дифференциальных уравнений I-го порядка методом последовательного дифференцирования с помощью характеристического уравнения.

VI Кратные и криволинейные интегралы

1 Двойной интеграл, его определение. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла, его свойства.
2 Замена переменной в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.
3 Приложения двойного интеграла к вычислению площадей плоских фигур в прямоугольных и полярных координатах.
4 Вычисление объемов тел, статических моментов, моментов инерции и координат центра тяжести плоских фигур.

5 Криволинейные интегралы по длине дуги (I-го рода), их свойства и вычисление в декартовых, полярных координатах, в параметрической форме. Механический смысл криволинейного интеграла I-го рода.
6 Приложения криволинейных интегралов I-го рода, к вычислению длины дуги плоской кривой, статических моментов, моментов инерции и координат центра тяжести плоской дуги.
7 Криволинейный интеграл II-го рода (по координатам), его механический смысл, свойства и вычисление в декартовых координатах, параметрической форме.
8 Приложения криволинейного интеграла II-го рода.
9 Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Интегралы от полных дифференциалов.
10 Криволинейные интегралы по замкнутому контуру. Формула Грина.
11 Восстановление функции по ее полному дифференциалу.

Контрольная работа№4

Контрольная работа № 3

Функции многих переменных. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл, его приложения

101-110 Найти частные производные I порядка функций.

101 $z = \dfrac{y}{(x^2 - y^2)^5}$.

102 $z = \dfrac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$.

103 z=ln(x² + y² + 2x + 1).

104 $z = e^{xy} + x^2 \cdot \cos 2y + y^3$.

105 $z = \ln(x + e^{-y}) + x^2 \cdot y^3$.

106 $z = \dfrac{x}{y} + y \cdot arctg\, e^x$.

107 $z = x^y + \arcsin(x^2 y)$.

108 $z = e^{\frac{x}{y}} + x^2 \cdot tg\, e^y + 2y^2$.

109 $z = \sin(x + 4y) + 2^x \cdot y^3 + tg(xy)$.

110 $z = \cos y + (y - x)^2 \sin y + e^{x^2 y}$.

111–120 Даны функция z = F(x;y), точка $A(x_0;y_0)$ и вектор ***a***. Найти: 1) grad z в точке A, т.е. $(\text{grad}z)_A$; 2) производную функцию z в точке A по направлению вектора ***a***, т.е. $\left(\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{a}}\right)_A$.

111 $z = x^2 + xy + y^2$; A(1; 1), ***a* = 2i - j.**

112 $z = 2x^2 + 3xy + y^2$; A(2; 1), ***a*** = 3**i** - 4 **j**.

113 $z = \ln(x^2 + 3y^2)$; A(1; 1), ***a*** = 3**i** + 2**j**.

114 $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$; A(1; 1), ***a*** = 2**i** - **j**.

115 $z = 5x^2 + 6xy$; A(2; 1), ***a*** =**i** + 2**j**.

116 $z = arctg(xy^2)$; A(2; 3), ***a*** = 4**i** - 3**j**.

117 $z = \arcsin\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$; A(1; 2), ***a*** = 5**i** - 12**j**.

118 $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$; A(1; 3), ***a*** = 2**i** - **j**.

119 $z = 3x^4 + 2x^2y^3$; A(- 1; 2), ***a*** = 4**i** - 3**j**.

120 $z = 3x^2y^2 + 5y^2x$; A(1; 1), ***a*** = 2**i** + **j**.

121–130 Найти неопределенные интегралы. В двух первых примерах результаты проверить дифференцированием:

121 а) $\int \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

в) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

б) $\int \operatorname{arctg} x\, dx$;

г) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

122 а) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+4)^6}$;

в) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$;

б) $\int \frac{4\operatorname{arctg}x - x}{1+x^2}dx$;

г) $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$.

123 а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$;

в) $\int \sin^3 x dx$;

б) $\int x e^x dx$;

г) $\int \frac{\ln x}{x}dx$.

124 а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg}x+1)}$;

в) $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx$;

б) $\int x \cos 2x\, dx$;

г) $\int e^{sinx} \cdot cosxdx.$

125 а) $\int \frac{\cos 3x}{4+\sin 3x}dx$;

в) $\int \cos x \cdot \sin^3 x dx$;

б) $\int x \cdot e^{3x}\, dx$;

г) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

126 а) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$;

в) $\int \sin x \cdot \cos^2 x dx$;

б) $\int x \arcsin\frac{1}{x}dx$;

г) $\int x \cdot \sqrt{1+x^2}dx$.

127 а) $\int \frac{(x+\operatorname{arctg}x)dx}{1+x^2}$;

в) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$;

б) $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$.

128 а) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$; в) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

б) $\int \frac{x-(\operatorname{arcctg} x)^4}{1+x^2}$; г) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$.

129 а) $\int \frac{\sin dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$; в) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}x+2}}$;

б) $\int x^2 \sin 4x\, dx$; г) $\int x\cdot e^{-x^2}dx$.

130 а) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx$; в) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$;

б) $\int x\ln x\, dx$; г) $\int x\cdot\cos x^2 dx$.

131–140 Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

131 $\int\limits_0^{\infty} x e^{-x^2}dx$. **132** $\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

133 $\int_0^{\infty} x^2\cdot e^{x^3}\,dx$. **134** $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{\ln x}}$.

135 $\int\limits_1^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$. **136** $\int\limits_3^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$.

137 $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$. **138** $\int\limits_1^{\infty} \frac{xdx}{x^4+1}$.

139 $\int\limits_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$. **140** $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

141 Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 2x$. Сделать чертёж.

142 Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t); \\ y = a(1-\cos t); \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi) \text{ и осью Ox.}$$

143 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой r =4cosφ, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Сделать чертёж.

144 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой r=4sinφ, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Сделать чертёж.

145 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox, фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{8x}$. Сделать чертёж.

146 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2=4x$ и $y=x$ ($y \geq x$). Сделать чертёж.

147 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ох, фигуры, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{1}{2}x$. Сделать чертёж.

148 Вычислить длину дуги кривой $r = 2\cos\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

149 Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = 2\sin t. \end{cases}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

150 Вычислить длину одной арки циклоиды $\begin{cases} x = 3(t - \sin t); \\ y = 3(1 - \cos t); \end{cases}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

Контрольная работа № 4

Дифференциальные уравнения, кратные и криволинейные интегралы

151-160 Решить дифференциальные уравнения.

151 а) $(x^2+1)y^3dx+(1-y^2)x^3dy=0$; б) $y'=\frac{x+y}{x}$.

152 а) $y'=\frac{xy}{x^2-y^2}$; б) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$.

153 а) $y'+2y=x^2+2x$; б) $xy'=y\ln(\frac{y}{x})$.

154 а) $x^2y'-y^2-xy=0$; б) $xy'+y-3=0$.

155 а) $2ydx+(x-y)dy=0$; б) $(1+x^2)y'-2xy-(1+x^2)=0$.

156 а) $y'=4+\frac{y}{x}+(\frac{y}{x})^2$; б) $y'\cos x=(y+1)\sin x$.

157 а) $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$; б) $\frac{dy}{dx}-y=(3-x)e^x$.

158 а) $y'-2xy=xe^{-x^2}$; б) $(x^2+x)y'=y+1$.

159 а) $y'=\frac{y}{x-y}$; б) $y'-\frac{y}{x}=2x$.

160 а) $y'-\frac{y}{x}=x^3$; б) $xy'+y-x-1=0$.

161-170 Найти общее решение дифференциальных уравнений.

$$y''+py'+qy=f(x).$$

161 $y''+4y'-12y=x\cdot e^x$.

162 $y''-6y'+9y=(x^2-x+3)$.

163 $y''+4y=e^x$.

164 $y''-2y'+5y=x\cdot e^x$.

165 $y''+5y'+6y=2\cdot e^{-3x}$.

166 $y''-5y'+6y=(12x-7)e^{-x}$.

167 $y''-4y'+13y=26x+5$.

168 $y''-4y'=6x^2+1$.

169 $y''-2y'+y=16x\cdot e^{2x}$.

170 $y''+6y'+9y=10e^{3x}$.

171-180 Не находя общих решений дифференциальных уравнений, написать виды их частных решений.

171 а) $y'' - 9y' = e^{9x}(x^2+1)$; б) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(x\cos x - \sin x)$.

172 а) $y'' + 8y' + 20y = 8x^2e^{4x}\cos 2x$; б) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(x^2+x)$.

173 а) $y'' + 4y' + 5y = 2x^2e^{-2x}\cos x$; б) y''-$2y'$+y=$e^x \cdot (x^2+3)$.

174 а) y´´- 9y=$e^{-3x} \cdot x^2$; б) $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\sin 2x$.

175 а) y´´-2y´+5y=2xe^x; б) $y'' + 16y = x\sin 4x$.

176 а) $y'' + 8y' + 20y = 8x^2e^{4x}\cos 2x$. б) y''+$2y'$+y=$(x+1)e^{-x}$.

177 а) y´´-6y´+5y=-3xe^x; б) $y'' - 2y' + 2y = (x^2+1)e^x\sin x$.

178 а) y´´+2y´+y=$(x^2+3)e^{-x}$; б) y''+$6y'$+$9y$=$(x+1)$sinx.

179 а) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(x^2\cos x - \sin x)$; б) $y'' + 4y' = e^{-4x}(x^2+5)$.

180 а) $y'' + 9y = x^2\cos 3x - x\sin 3x$; б) $y'' - 6y' + 9y = (x^2+2x)e^{3x}$.

181-190 Вычислить указанные двойные интегралы и изменить порядок интегрирования не вычисляя их.

181 $\iint\limits_D xydxdy$, где область D: 1 ≤ x ≤ 2; y = 1; y = x.

182 $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$, где область D: x+ y ≤ 1, x – y ≤ 1, x ≥ 0.

183 $\iint\limits_D xydxdy$, где область D: y ≤ e^x, y ≥ 0, x ≥ 0, x ≤ 1.

184 $\iint\limits_D xdxdy$, где область D: x ≥ 0; x ≤ $\frac{\pi}{2}$; y ≤sin x; y ≥ 0.

185 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, где область D: y ≥ x; y ≤ 2x; x+ y ≤ 6.

186 $\iint\limits_D (x^2+2y)dxdy$, где область D: 0 ≤ y ≤ 1; x= y; x = $\sqrt{y}$.

187 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}$ dxdy, где область D: x = 2; y = x; xy = 1.

188 $\iint\limits_D \cos(x+y)$ dxdy, где область D: x = 0; y = π; y = x.

189 $\iint\limits_D (x^2+y)$ dxdy, где область D: y = x^2 ; y^2 = x.

190 $\iint\limits_{D} dxdy$, где область D: y = 1; y = 2; x = 0; y = e^x .

191 Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L} y\,ds$, вдоль первой арки циклоиды

$$\begin{cases} x = a\,(t - \sin t); \\ y = a\,(1 - \cos t) \end{cases} 0 \le t \le 2\pi .$$

192 Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+y}} + \frac{dy}{\sqrt{1+x^2}}$,

где L – парабола y = x^2 ($0 \le x \le 2$).

193 Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L} \frac{y}{x}dx + x \cdot dy$, вдоль дуги y = ln x от точки A(1; 0) до точки B(e; 1).

194 Вычислить криволинейный интеграл $\oint_L x^2y dx$ – (y^2 + x)dy,где L – треугольник AOB. {A(3; 0), B (3; 1), O(0; 0)}.

195 Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L} xy\ dx - (y - x)\ dy$,

вдоль L дуги параболы y = x^2 от точки A (1; 1) до точки B (2; 4).

196 Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L} (x \cdot y - 3x)\ dx + (y \cdot x + 2y)\ dy$,

вдоль верхней половины L эллипса $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$ ($0 \le t \le \pi$).

197 Вычислить криволинейный интеграл $\oint_L x^2 ds$, вдоль дуги L окружности $\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = a\sin t. \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

198 Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L} x ds$, вдоль дуги L параболы

y = $\frac{x^2}{2}$ от точки A (1; $\frac{1}{2}$) до точки B(2; 2).

199 Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L} \frac{y^2+1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$, вдоль отрезка

прямой L = AB от точки A(1; 2) до точки B(2; 4).

200 Вычислить криволинейный интеграл $\oint_L ydx + xdy$, вдоль границы L треугольника ABC, обходя ее против хода часовой стрелки, если A(1; 0), B(1; 1), C (0; 1).

201–210 Преобразовать криволинейный интеграл вдвойной и вычислить его (по формуле Грина).

201 $\oint_C (y + \ln x)dx + (y + 2x)dy$, где C– контур области, ограниченной линиями: y = x, y = 2x – x^2 .

202 $\oint_C (x^2 - 2y + 2)dx + (y^3 - x)dy$, где C: y = 2 – x^2, y = x^2 .

203 $\oint_C (2xy + 1)dx + (y^2 - 3x^2 + 1)dy$, где C: xy = 1, y = 2, x = 2.

204 $\oint_C ydx + 3xdy$, где C: y=$\sqrt{1-x^2}$, y = x, y = 0.

205 $\oint_C (x^3 - 2y)dx + (y^3 - x)dy$,где C: x =1, y^2 = x.

206 $\oint_C (x^2 + 6y)dx + (x + y)dy$, где C: x + y = 2, x = 0, y = 0.

207 $\oint_C (x + y)dx + (2x + y^2)dy$, где C - контур треугольника ABC: A(1; 1), B(2; 1), C(2; 3).

208 $\oint_C 3xdy + 2ydx$, где C: $x^2 + y^2$ = 2y.

209 $\oint_C (x + 2y)dx + (y + 8x)dy$, где C: x+y=2, y=$x^2$.

210 $\oint_C (x + 2y)dx + (y^2 + x)dy$, где C: y = 2$x^2$, y = 2x.

Методические указания для выполнения контрольной работы № 3

Решение типового варианта

1 Частные производные

Задача 1. Найти частные производные I порядка функции

$z=y^x+ arctg\frac{x}{y} +3^y\cdot x^2+2y^3$.

Решение

Так как z зависит от двух переменных x и y, дифференцируем её по каждой из них, т.е. находим две частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

При этом нужно помнить, что при дифференцировании по x, переменная y считается постоянной, а при дифференцировании по y, постоянной считается x . Дифференцирование производится по тем же правилам и таблицам, что и для функции одной переменной.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(y^x)'_x+(arctg\frac{x}{y})'_x+(3^y\cdot x2)'_x+(2y^3)'_x=y^x\cdot \ln y\cdot(x)'_x+\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x+3^y\cdot 2x+0=$$

$$=y^x\cdot \ln y+\frac{y^2}{(y^2+x^2)}\cdot\frac{1}{y}+3^y\cdot 2x=y^x\cdot \ln y+\frac{y}{y^2+x^2}+2x\cdot 3^y.$$

Пояснения. При нахождении $\frac{\partial z}{\partial x}$ y является постоянной, поэтому первое слагаемое является показательной функцией относительно x, его дифференцируем по формуле:

$(a^u)'=a^u\cdot \ln a\cdot u'$, где $a=y$, $u=x$, $u'=x'=1$.

Во втором и в третьем слагаемых постоянными являются $\frac{1}{y}$ и 3^y, поэтому они вынесены за знаки производных.

Последнее слагаемое не содержит x, поэтому является постоянным и производная от него равна 0.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(y^x)'_y+\left(arctg\ \frac{x}{y}\right)'_y+(3^y\cdot x^2)'_y+(2y^3)'_y=$$

$$=xy^{x-1}\cdot(y)'_y+\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\left(\frac{x}{y}\right)'_y+x^2\cdot 3^y\cdot \ln 3\cdot(y)'_y+6y^2=x\cdot y^{x-1}+$$

$$+\frac{y^2}{(y^2+x^2)}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+x^2\cdot 3^y\cdot \ln 3+6y^2=x\cdot y^{x-1}-\frac{x}{y^2+x^2}+x^2\cdot 3^y\cdot \ln 3+6y^2.$$

Производная от первого слагаемого вычисляется по формуле:

$(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$, где $n=x$, $u=y$, $u'=y'_y=1$.

Производная от аргумента арктангенса находится по формуле: $\left(\frac{c}{u}\right)'=-\frac{c}{u^2}u''$,где $c=x$, $u=y$, $u'=y'_y=1$.

2 Градиент и производная по направлению

Пусть функция $u=f(x;\ y;\ z)$ определена и дифференцируема в некоторой области, содержащей точку $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и вектор $\overrightarrow{a}$ образует с осями координат углы α, β, γ, тогда производная функции u в точке А по направлению вектора $\vec{a}$ существует и вычисляется по формуле:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}\right)_A=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A\cos\alpha+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_A\cos\beta+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_A\cos\gamma, \qquad (2.1)$$

где $cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma$– направляющие косинусы вектора $\vec{a}$, вычисляемые по формулам: $cos\,\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|}$, $cos\,\beta=\frac{y}{|\vec{a}|}$, $cos\,\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}$, x, y, z – координаты вектора $\vec{a}$. Его модуль вычисляется по формуле: $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Градиентом функции u в точке A называется вектор, выходящий из точки A, координатами которого являются частные производные функции u в точке A.

$$(gradu)_A=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A\cdot\vec{\boldsymbol{i}}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_A\cdot\vec{j}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_A\cdot\vec{\boldsymbol{k}}. \qquad (2.2)$$

Замечание. Если функция зависит от двух переменных, т. е. $z=f(x;\,y)$, то рассмотренные формулы имеют вид:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right)_A=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A cos\,\alpha+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A cos\,\beta; \qquad (2.3)$$

$$(grad\ z)_A=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A\cdot\vec{\imath}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_A\cdot\vec{\jmath}. \qquad (2.4)$$

Задача 2. Дана функция $z=ln(x^3+2y^2)$,точка $A(1;2)$ и вектор $\vec{a}=\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$. Найти: 1) $(gradz)_A$. 2) Производную функции z в точке A по направлению вектора $\vec{a}$, т. е. $\left(\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right)_A$.

Решение

1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3x^2}{x^3+2y^2}$; $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A=\frac{3\cdot 1^2}{1^3+2\cdot 2^2}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4y}{x^3+2y^2}$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A=\frac{4\cdot 2}{1^3+2\cdot 2^2}=\frac{8}{9}$.

$(\text{grad}\ z)_A=\frac{1}{3}\boldsymbol{i}+\frac{8}{9}\boldsymbol{j}$; т.е. $(\text{grad}\ z)_A=\left\{\frac{1}{3};\frac{8}{9}\right\}$.

2) $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$; $cos\,\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$; $cos\,\beta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$\left(\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right)_A=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{8}{9}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{13}{9\sqrt{5}}$.

Отрицательный знак производной по направлению указывает на то, что в данном направлении функция убывает.

3 Неопределенные и определенные интегралы

При вычисления неопределенных интегралов очень часто приходится приводить их к табличным, выполняя простейшие эквивалентные преобразования.

3.1 К переменной (или функции), стоящей под знаком дифференциала можно прибавлять (или вычитать) любую константу, т.к. дифференциал от неё равен 0.

$dx = d(x \pm 5)$.

$$\int \sqrt{x+4}\, dx = \int (x+4)^{\frac{1}{2}}\, d(x+4) = 2\frac{(x+4)^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3} + C.$$

3.2 Переменную (или функцию), стоящую под знаком дифференциала можно одновременно умножать и делить на любую константу.

$$\int cos\, 5x\, dx = \int cos\, 5x\, \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5}\int cos\, 5x\, d(5x) = \frac{1}{5} sin\, 5x + C.$$

3.3 Замечание. Если нужно применить оба преобразования, то нужно сначала выполнить второе, затем первое.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x+3}} = \frac{1}{4}\int (4x+3)^{\frac{-1}{3}}\, d(4x+3) = \frac{1}{4}\cdot 3\frac{(4x+3)^{\frac{2}{3}}}{2} + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(4x+3)^2} + C.$$

Задача 3. Найти неопределенные интегралы.

а) $\int \frac{cos\, x}{sin^3 x} dx$; б) $\int \frac{\sqrt{arctg\, x} + x}{1+x^2} dx$;

в) $\int x \cdot ln(1+x)\, dx$; г) $\int \frac{x\, dx}{1+\sqrt{1+x}}$.

При решении первого примера можно применить метод замены переменной (метод подстановки) или метод подведения множителя под знак дифференциала.

а) $\int \frac{cos\, x}{sin^3 x} dx$.

Решение

3.4 Метод замены переменной

Введём замену $sin\, x = t \Rightarrow d\, sin\, x = dt \Rightarrow cos\, x dx = dt$. Всё под знаком интеграла выражаем через t.

$$\int \frac{cos\, x}{sin^3 x} dx = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}\, dt = \frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2\, sin^2 \mathrm{x}} + C.$$

Получили табличный степенной интеграл. Возвращаемся к первоначальной переменной.

3.5 Метод подведения множителя под знак дифференциала

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \int \sin^{-3} x \cos x \, dx = \int \sin^{-3} x \, d \sin x = \frac{\sin^{-2} x}{-2} + C =$$
$$= -\frac{1}{2\sin^2 x} + C.$$

Можно заметить, что *cosxdx=dsinx.*

Если подвести $\cos x$ под знак дифференциала, то получим табличный степенной интеграл.

Подвести множитель под знак дифференциала – значит выполнить действие, обратное дифференцированию, т.е. интегрирование. Тем самым восстановить вид функции до дифференцирования.

$$\cos x \, dx \Rightarrow \int \cos x \, dx = \sin x; \ \cos x \, dx = d \sin x.$$

Вывод. Подвести множитель под знак дифференциала – это значит взять от него интеграл и ту первообразную, которая при этом получится, написать под знаком дифференциала вместо той переменной (или функции), которая там была.

Этот метод позволяет многие интегралы вычислять устно.

<u>Пример 1.</u> $\int e^{x^2} \cdot x dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$

<u>Пример 2.</u> $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int \ln x \cdot d \ln x = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

б) $\int \frac{\sqrt{arctg\, x} + x}{1+x^2} dx = \int \frac{\sqrt{arctg\, x}}{1+x^2} dx + \int \frac{x}{1+x^2} dx =$

Интеграл разложим на два. Оба интеграла табличные и вычисляютсяподведением множителя под знак дифференциала (п.3.5) или методом замены (п.3.4).

$$= \int (arctgx)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{x}{1+x^2} dx = \int (arctgx)^{\frac{1}{2}} \, darctgx + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} =$$

$$= 2\frac{(arctgx)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{2} ln(1+x^2) + C = \frac{2}{3}\sqrt{(arctgx)^3} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Пояснения. Первый интеграл сведён к степенному,второй к интегралу $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C.$

Сначала подвели x под знак дифференциала, затем прибавили к нему 1. (п.3.4, и п.3.1).

в) $\int x \cdot ln(1+x) \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot ln(1+x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x} dx. \ (*)$

Применим формулу интегрирования по частям: $\int u dv = uv - \int v du.$ (3.1)

$ln(1+x) = u;$	$du = \frac{1}{1+x}dx;$
$xdx = dv;$	$v = \int xdx = \frac{x^2}{2};$

В последнем интеграле $(*)$ подынтегральная функция является неправильной дробью, поэтому выделяем у неё целую часть.

Вычислим интеграл отдельно.

$$\int \frac{x^2}{1+x}dx = \int \frac{(x^2-1)+1}{1+x}dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{1+x}dx + \int \frac{1}{1+x}dx =$$

$$= \int (x-1)d(x-1) + \int \frac{d(x+1)}{1+x} = \frac{(x-1)^2}{2} + ln|1+x| + C.$$

Пояснения. В числителе вычитаем и прибавляем 1, затем дробь разбиваем на две, деля каждое слагаемое числителя на знаменатель. Применяя (п.3.1) сводим первый интеграл к степенному, второй к $\int \frac{du}{u}$.

Подставим вычисленные интегралы в формулу $(*)$.

$$\int x \cdot ln(1+x)\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot ln(1+x) - \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{2} ln|1+x| + C.$$

г) $\int \frac{x\, dx}{1+\sqrt{1+x}}.$

Решение

Чтобы освободиться от иррациональности, введём замену: $t^2 = 1 + x$ и всё под знаком интеграла выражаем через t.

$x = t^2 - 1;$ $dx = 2tdt.$

$$\int \frac{x\, dx}{1+\sqrt{1+x}} = \int \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{1+t} = 2\int \frac{(t-1)(t+1)tdt}{t+1} = 2\int (t-1)tdt = 2\int (t^2-t)dt =$$
$$2\left(\int t^2dt - \int tdt\right) = 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right) + C = 2\left(\frac{\sqrt{(1+x)^3}}{3} - \frac{1+x}{2}\right) + C = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3} -$$
$$-(1+x) + C\ .$$

В результате возвратиться к первоначальной переменной, подставив

$$t = \sqrt{1+x}\ .$$

Задача 4. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ или доказать его расходимость.

Решение

Так как в интеграле верхний предел бесконечный, то он является несобственным интегралом I рода. Любой несобственный интеграл вычисляется путем предельного перехода: $\int_0^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_0^b f(x)dx$.

Если предел конечный, то несобственный интеграл сходится и имеет конечное значение. Если предел не существует или бесконечный, то несобственный интеграл расходится.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \lim_{b\to\infty} \left[arctg(x+1) \Big|_0^b \right] =$$

$$= \lim_{b\to\infty} [arctg(b+1) - arctg1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Пояснения. Для нахождения первообразной нужно в квадратном трехчлене выделить полный квадрат.

$$x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x + 1) + 1 = (x+1)^2 + 1.$$

Затем воспользоваться формулой:

$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C.$ $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1;$ $\quad u = x + 1.$

Затем применить формулу Ньютона-Лейбница. Аргумент арктангенса является бесконечно большим, а сам арктангенс равен $\frac{\pi}{2}$, $arctg1 = \frac{\pi}{4}$.

Вычисляемый предел конечный, следовательно, несобственный интеграл сходится и его значение равно $\frac{\pi}{4}$.

Задача 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами:

$y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = \sqrt{2x}$.

Решение

Строим чертеж, расставляем пределы интегрирования и проводим вычисления (Рисунок 1 – вычисляемая площадь).

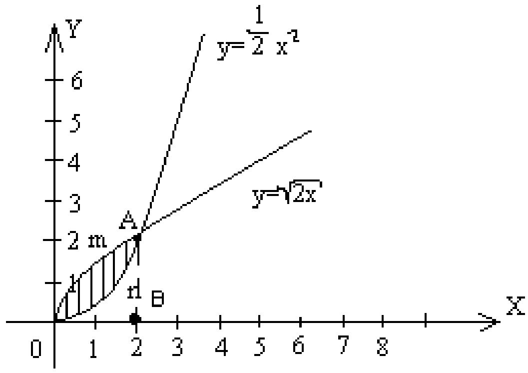

Рисунок 1 – Вычисляемая площадь

Находим координаты точек A и O.

Решаем систему:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2; \\ y = \sqrt{2x}. \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = \sqrt{2x} \Rightarrow \frac{1}{4}x^4 = 2x.$$

$$\frac{1}{4}x^4 - 2x = 0; \;\; x\left(\frac{1}{4}x^3 - 2\right) = 0.$$

$$\begin{cases} x_1 = 0; \\ y_1 = 0. \end{cases} x_2 = \sqrt[3]{8} = 2; y_2 = \sqrt{4} = 2.$$

O(0;0);A(2;2).

Искомая площадь равна разности площадей двух криволинейных трапеций.

$$S = S_{\text{о}mAB} - S_{\text{о}nAB}.$$

$$\int_0^2 (\sqrt{2x} - \frac{1}{2}x^2)\,dx = \int_0^2 \sqrt{2x}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = \sqrt{2}\int_0^2 x^{\frac{1}{2}}\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right) = \sqrt{2}\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - 0\right) = \sqrt{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{2^3} - 0\right) - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} -$$

$$-\frac{4}{3} = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}\text{(кв.ед.)}.$$

Методические указания для выполнения контрольной работы №4

Решение типового варианта

4 Дифференциальные уравнения

Задача 1. Решить дифференциальные уравнения I порядка.

а)$3e^x \cdot tgydx + (2 - e^x) \cdot \frac{1}{cos^2 y} dy = 0$; б)$y' = \frac{x+y}{x-y}$.

Решение

а)$3e^x \cdot tgydx + (2 - e^x) \cdot \frac{1}{cos^2 y} dy = 0.$

Это дифференциальное уравнение I порядка с разделяющимися

переменными, т.к. каждое выражение при dx и dy представляет произведение сомножителей, зависящих от одного переменного, и переменные можно разделить, чтобы можно было интегрировать.

Для того, чтобы разделить переменные, нужно поделить обе части данного уравнения на произведение функций $tgy \cdot (2 - e^x)$,

где $tgy \cdot (2 - e^x) \neq 0$.

$\frac{3e^x \cdot tgydx}{tgy\cdot(2-e^x)}+\frac{(2-e^x)dy}{cos^2 y\cdot tgy(2-e^x)} = 0.$ $\frac{3e^x}{(2-e^x)}dx+\frac{dy}{cos^2 y\cdot tgy} = 0.$

$\frac{3e^x}{(2-e^x)}dx = -\frac{dy}{cos^2 y\cdot tgy}.$ $\frac{3e^x}{(2-e^x)}dx = -\frac{3e^x}{(e^x-2)}dx.$

$-\frac{3e^x}{(e^x-2)}dx = -\frac{dy}{cos^2 y\cdot tgy}$ или $\frac{3e^x}{(e^x-2)}dx = \frac{dy}{cos^2 y\cdot tgy}$.

Интегрируем:

$3\int \frac{e^x}{e^x-2}dx=\int \frac{1}{tgy} \cdot \frac{1}{cos^2 y}dy.$

$3\int \frac{d(e^x-2)}{e^x-2}=\int \frac{d(tgy)}{tgy}$; $3ln|e^x - 2| = ln|tgy| + ln|C|$; $C\neq 0$.

$ln|e^x - 2|^3 = ln|tgy \cdot C|$;

$|e^x - 2|^3 = C \cdot tgy,$ —это общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Пояснение. Оба интеграла слева и справа методом подведения множителя под знак дифференциала приведены к табличному $\int \frac{du}{u}=ln|u| + C.$

Чтобы освободиться от логарифмов, константу тоже нужно записать в виде логарифма $ln|C|$.

Замечание. Очень часто дифференциальное уравнение может иметь особые решения, которые ему удовлетворяют, но не получаются из общего решения или общего интеграла.

В данном уравнении при разделении переменных полагаем, что

$tgy \cdot (2 - \mathrm{e}^{\mathrm{x}}) \neq 0$.

Рассмотрим два случая.

1Если $2 - \mathrm{e}^{\mathrm{x}} = 0 \; => e^{x} = 2 \; => x = ln2 \; => dx = 0$. Подставляя это значение x в исходное дифференциальное уравнение, получим тождество:

$3 \cdot e^{ln2} \cdot tgy \cdot 0 + (2 - e^{ln2}) \cdot \frac{1}{cos^2 y} dy = 0$;

$e^{ln2} = 2$по тождеству $a^{log_2 x} = x$.

$3 \cdot 2 \cdot tgy \cdot 0 + (2 - 2) \cdot \frac{1}{cos^2 y} dy = 0$.

0=0, т.е. $\boldsymbol{x = ln2}$ является **его особым решением,** т.к. удовлетворяет дифференциальному уравнению. Геометрически это прямая, параллельная оси OY.

2 Если $tgy = 0 \; => y = k \cdot \pi,$ где $k = 0; \pm 1; \pm 2 \pm \cdots$.

$dy = 0$.

Подставим это в дифференциальное уравнение:

$3 \cdot e^{x} \cdot tg(k\pi) + (2 - e^{x}) \cdot \frac{1}{cos^2 k\pi} \cdot 0 = 0$.

$cos^2 k\pi = (\pm 1)^2 = 1; \; tg(k\pi) = 0$.

Получим 0=0. Уравнение обратимо в тождество, т.е. $y = k \cdot \pi$(при k=0; $\pm 1; \pm 2 \pm \cdots$) представляет собой особое решение. Геометрически это множество представляет семейство прямых, параллельных оси OX.

б) $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

Решение

Уравнение имеет вид $y' = f(x; y)$.

Функция $f(x; y)$ не может быть представлена в виде $f(x) \cdot \varphi(y)$, поэтому сразу переменные разделить нельзя.

Проверяем на однородность. Подставим в $f(x;y)$ $x=\lambda x$, $y=\lambda y$.

$f(x;y)=\frac{x+y}{x-y}$; $f(\lambda x;\lambda y)=\frac{\lambda x+\lambda y}{\lambda x-\lambda y}=\frac{\lambda(x+y)}{\lambda(x-y)}=\frac{x+y}{x-y}$. Так как функция не изменилась, то она является однородной нулевого измерения, а дифференциальное уравнение является однородным I порядка.

Вводим подстановку $\frac{y}{x}=u(x\neq 0)$.

$y=ux;\ y'=u'x+u.$

Подставляем в первоначальное уравнение y' и y.

$u'x+u=\frac{x+ux}{x-ux};\qquad \frac{du}{dx}\cdot x=\frac{x(1+u)}{x(1-u)}-u;$

$\frac{du}{dx}\cdot x=\frac{1+u}{1-u}-u;\qquad \frac{du}{dx}\cdot x=\frac{1+u-u+u^2}{1-u}$.

$\frac{du}{dx}\cdot x=\frac{1+u^2}{1-u}$; разделяем переменные.

При разделении переменных обе части дифференциального уравнения делим на произведение $[x\cdot(1+u^2)]\neq 0$, т.к. $x\neq 0$(из замены), $1+u^2=0$(сумма квадратов не равна нулю в области действительных чисел).

$\frac{(1-u)du}{1+u^2}=\frac{dx}{x}$,интегрируем обе части.

$\int\frac{(1-u)du}{1+u^2}=\int\frac{dx}{x};\ \int\frac{du}{1+u^2}-\int\frac{udu}{1+u^2}=ln|x|$.Интегрируя, получим:

$arctgu-\frac{1}{2}\int\frac{d(u^2+1)}{1+u^2}=ln|x|$.

$arctg\,u-\frac{1}{2}ln(1+u^2)=ln|x|+ln|C|,(C\neq 0).$

Чтобы освободиться от логарифмов, представим $arctgu$ в виде логарифма

$arctg\,u=lne^{arctg\,u}$.

$lne^{arctg\,u}$-$ln\sqrt{(1+u^2)}$=$ln|C\cdot x|$.

$ln\frac{e^{arctg\,u}}{\sqrt{1+u^2}}$=$ln|C\cdot x|$; $\frac{e^{arctg\,u}}{\sqrt{1+u^2}}$=$C\cdot x$.

Разность логарифмов заменена логарифмом от дроби, а сумма логарифмом произведения. Подставим вместо u значение: $u=\frac{y}{x}$.

$\frac{e^{arctg\frac{y}{x}}}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}=x\cdot C;\quad \frac{e^{arctg\frac{y}{x}}*x}{\sqrt{x^2+y^2}}=x\cdot C;$

Т.к. $x\neq 0$, сокращаем и получаем: $\frac{e^{arctg\frac{y}{x}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=C, (C\neq 0)$.

Это общий интеграл однородного дифференциального уравнения I порядка.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения II порядка спостоянными коэффициентами

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение II порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y'' + py' + qy = f(x). \qquad (4.1)$$

Его общее решение находится по формуле:

$$y_{общ}=\overline{y}+y^*, \qquad (4.2)$$

где $\overline{y}$-общее решение ссоответствующего однородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$, а y^*-частное решение данного неоднородного.

Чтобы найти $\overline{y}$, нужно решить однородное уравнение $y'' + py' + qy = 0. (*)$

Его решение связано с корнями квадратного уравнения, которое называется характеристическим.

Характеристическое уравнение получается из однородного уравнения с помощью замены:

$$y'' = k^2;\ \ y' = k;\ \ y = 1. \qquad (4.3)$$

Подставляя это в уравнение (*), получим $k^2 + pk + q = 0$.

Это квадратное уравнение будет характеристическим.

При его решении может быть три случая, а значит три случая нахождения $\overline{y}$:

1 если корни характеристического уравнения действительные и разные, т.е. $k_1\neq k_2$, тогда $\overline{y}$ находится по формуле:

$$\overline{y}=C_1\cdot e^{k_1x}+C_2\cdot e^{k_2x}; \qquad (4.4)$$

2 если корни характеристического уравнения действительные равные т.е.

$k_1=k_2$, тогда $\overline{y}$ находится по формуле:

$\bar{y} = e^{kx}(C_1+C_2x);$ (4.5)

3 если корни характеристического уравнения комплексные, т.е.

$k_1=\alpha+\beta i$; $k_2=\alpha-\beta i$, тогда $\bar{y}$ находится по формуле:

$\bar{y} = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$ (4.6)

Нахождение частного решения неоднородного дифференциального уравнения.

Рассмотрим случай, когда правая часть неоднородного уравнения имеет вид:

$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен $n^{ой}$ степени.

При нахождении y^* тоже может быть три случая. Его нахождение связано с правой частью неоднородного уравнения и с корнями характеристического уравнения:

а) если $\alpha \neq k_1$ и $\alpha \neq k_2$, т.е. не совпадает ни с одним корнем

характеристического уравнения, то частное решение имеет вид:

$$y^* = e^{\alpha x} \cdot Qn(x). \qquad (4.7)$$

$e^{\alpha x}$ – переносится из правой части в частное решение без изменения, степень многочлена $Qn(x)$такая же, как у $P_n(x)$ только у него будут другие коэффициенты и записывается он в общем виде;

б) если α совпадает только с одним корнем характеристического уравнения, т.е. $\alpha = k_1$, но $\alpha \neq k_2$или $\alpha = k_2$,но $\alpha \neq k_1$, тогда

$$y^* = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x) \cdot x. \qquad (4.8)$$

Всё сказанное выше сохраняется, только в случае совпадения α с одним корнем значение y^* домножается на x;

в) если $\alpha = k_1 = k_2$, т.е. αсовпадает с двумя корнями характеристического уравнения y^* примет вид:

$$y^* = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x) \cdot x^2. \qquad (4.9)$$

Аналогично, все сказанное выше имеет место, только y^*домножается на x^2.

Задача 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' = 3e^{-2x} (**).$$

Решение

Составим характеристическое уравнение (п 4.3) и решаем его:

$k^2+2k=0;\ k(k+2)=0;\ k_1=0;\ k_2=-2.$ Корни действительные, различные, поэтому $\bar{y}$ находим по формуле (4.4):

$\bar{y}=C_1 \cdot e^{0x}+C_2 \cdot e^{-2x}=C_1+C_2 \cdot e^{-2x};\ (e^{0x}=1).$

Далее нужно найти частное решение y^*,которое связано с правой частью уравнения (**). В данном уравнении правая часть $f(x)=3*e^{-2x}$, где α=-2. Сравниваем α=-2 с корнями характеристического уравнения, α совпадает с одном корнем $k_2=-2$. $P_n(x)=3$, имеет нулевую степень относительно x, следовательно и многочлен$Q_n(x)$будет иметь такую же нулевую степень, т.е. это будет константа, которую можно обозначить любой буквой, например А.

В данном уравнении $f(x)=3 \cdot e^{-2x}, \alpha=-2$, т.е. совпадает с одним корнем характеристического уравнения. $Pn(x)=3$ – имеет нулевую степень, то и $Qn(x)$будет иметь нулевую степень, т.е. это будет константа, которую можно будет обозначить буквой А.

Учитывая все сказанное выше, $y^*=e^{-2x} \cdot \text{A} \cdot x$ (по формуле4.8). Находим неизвестный параметр А.

Так как y* является частным решением дифференциального уравнения, то оно должно ему удовлетворять. Найденные y*′′, y*′ и y*, подставим в уравнение (**). Сгруппировав левую часть относительно степеней x и воспользуемся равенством двух многочленов. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, составляем систему уравнений с искомыми неизвестными. Решая которую, находим их.

$$y^*=\text{A} \cdot e^{-2x} \cdot x;\ y^{*\prime}=A(-2e^{-2x} \cdot x+e^{-2x})=\text{A} \cdot e^{-2x} \cdot (-2x+1);$$

$$y^{*\prime\prime}=A[-2 \cdot e^{-2x} \cdot (-2x+1)+e^{-2x} \cdot (-2)]=-2\,\text{A} \cdot e^{-2x}[-2x+1+1] = -4Ae^{-2x}(-x+1).$$

Подставляем y*′′, y*′ и y*в данные дифференциальное уравнение. Так как $e^{-2x} \neq 0$, то на него сокращаем сразу обе части.

$-4A(1-x)+2A(-2x+1)=3;$

$-4A+4Ax-4Ax+2A=3; -2A=3;\ A=-\frac{3}{2}.$

Подставим А в формулу y^***:**

$y^*=-\frac{3}{2}e^{-2x} \cdot x.$

Находим общее решение, подставляя $\bar{y}$ и y* в формулу (4.2):

$y_{общ}=C_1+C_2 \cdot e^{-2x}-\frac{3}{2}e^{-2x} \cdot x.$

Рассмотрим случай, когда правая часть неоднородных дифференциальных уравнений II порядка имеет более общий вид:

$f(x) = e^{\alpha x}[Pn(x) \cdot \; cos\beta x + Qm(x) \cdot \; sin\beta x]$.

При β=0 имеем $f(x) = e^{\alpha x}Pn(x)$, т.к. $sin\beta x = 0$, $cos\beta x = 1$, т.е. имеет место первый случай.

При нахождении частного решения может быть два случая. Так как вид частного решения связан с корнями характеристического уравнения, то нужно его составить и решить. Затем из правой части неоднородного уравнения нужно составить выражение $\alpha+\beta i$, где α- коэффициент при x в показателе экспоненты $e^{\alpha x}$ (если $e^{\alpha x}$отсутствует, то α=0), а β – коэффициент в аргументе присутствующей тригонометрической функции $\cos\beta x$ или $\sin\beta x$.(Если они присутствует обе, то аргументы у них одинаковые).

Сравниваем $\alpha+\beta i$ с корнями характеристического уравнения.

1Если $\alpha+\beta i$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравненият.е.$\alpha + \beta i \neq k_1$ и $\alpha + \beta i \neq k_2$, тогда у* имеет следующий вид:

$$y^* = e^{\alpha x}[Vn(x)cos\beta x + Wn(x)sin\beta x], \text{если } n \geq m. \qquad (4.10)$$

Хотя в правой части степени многочленов Pn(x)и$Qm(x)$могут быть различными или одинаковыми, в частном решении степени многочленов $Vn(x)$и $Wn(x)$должны быть одинаковыми и равными наивысшей из степеней многочленов Pn(x)и $Qm(x)$.

В частном решении должны присутствовать обе функции $cos\beta x$ и $sin\beta x$ с одинаковыми аргументами, даже в том случае, если в правой части присутствует только одна из них. При этом, многочлены, стоящие перед $cos\beta x$ и $sin\beta x$ должны иметь **одинаковую** степень, которая равна **наивысшей** из степеней многочленов $Pn(x)$ и $Qm(x)$.

2 Если $\alpha+\beta i$ совпадает с одним из корней характеристического

уравнения, тогда у* имеет следующий вид:

$$y^* = e^{\alpha x}[Vn(x)cos\beta x + Wn(x)sin\beta x] \cdot x, \text{если } n \geq m. \qquad (4.11)$$

Замечание. $\alpha+\beta i$ может совпадать только с одним корнем характеристического уравнения, т.к. если корни характеристического уравнения комплексные, то они сопряженные, т.е. $k_1 = \alpha+\beta i$, $k_2 = \alpha-\beta i$ и выражение $(\alpha+\beta i)$может совпадать только с одним корнем характеристического уравнения, поэтому третьего случая нахождения y^* быть не может.

Задача 3

Не находя общего решения дифференциальных уравнений, написать виды их частных решений (решать не надо).

а) $y'' + 25y = x^2 \cdot cos5x - (x-1) \cdot sin5x$;

б) $y'' - 2y' + 2y = 4x \cdot e^x \cdot sinx$.

Решение

а) $y'' + 25y = x^2 \cdot cos5x + (x+1)sin5x$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$k^2+25=0$; $k^2= -25$; $k_{1,2}=\pm\sqrt{-25}=\pm 5i$; $k_1=5i$, $k_2= -5i$.

Так как $e^{\alpha x}$ отсутствует, то $\alpha=0$, $\beta=5$.

Составляем$\alpha+\beta i$=0+5i=5iсравниваем с корнями характеристического уравнения. $5i=k_1$совпадает с одним корнем характеристического уравнения. Определяем степени многочленов при $cos5x$ и $sin5x$.

$Pn(x) = x^2$ – многочлен второй степени.

$Qm(x) = x + 1$ – многочлен первой степени. Наивысшая степень многочленов Pn(x)и $Qm(x)$ равна 2, значит в частном решении оба многочлена$V(x)$ и $W(x)$будут иметь вторую степень, с неопределенными коэффициентами $V_n(x) = Ax^2 + Bx + C$ и$W(x) = Dx^2 + Ex + N$.

$y* = x[(Ax^2 + Bx + C)cos5x + (Dx^2 + Ex + N)sin5x]$.

Так как$\alpha+\beta i = 5i$совпало с одним корнем характеристического уравнения y^* домножим на x по (4.11).

б)$y'' - 2y' + 2y$=$4x \cdot e^x \cdot sinx$.

Решение

Правая часть имеет вид: y=e^x*[0· cosx+4x· sinx].*

Характеристическое уравнение имеет вид:

$k^2-2k+2=0$; $k_{1,2}=1\pm\sqrt{1-2}=1\pm i$.

Из вида правой части: $\alpha+\beta i=1+i$, т.е. $\alpha+\beta i$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения.

$P_n(x)=0$ (т.к.cos$x$ отсутствует), т.е. многочлен $P(x)$ равен константе (она

может быть любым числом) и имеет нулевую степень относительно x).

$Q_m(x) = 4x$ – многочлен первой степени.

Наивысшей степенью является первая, значит в частном решении многочлены $V(x)$ и $W(x)$ будут иметь первую степень. Их общий вид будет $(Ax + B)$ $и$ $(Cx + D)$.

$y^* = e^x[(Ax + B)cosx + (Cx + D)sinx] \cdot x$ по формуле (4.11).

5 Кратные и криволинейные интегралы

Задача 4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x + y)dxdy$, где область D ограничена линиями $y^2=x, x+y=2$. Изменить порядок интегрирования, не вычисляя интеграла.

Решение

Строим область D, вид которой позволит расставить пределы интегрирования и выполнить вычисление. Она ограничена двумя линиями. Уравнение $y^2=x$ определяет параболу, симметричную относительно оси OX, с вершиной в начале координат. Уравнение $x+y=2$ определяет прямую линию. Находим координаты их точек пересечения A и B, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 = x; \\ x + y = 2. \end{cases} => \begin{cases} y^2 = x; \\ x = 2 - y. \end{cases} => \begin{cases} y^2 = 2 - y; \\ x = 2 - y. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение и находим два значения y, которые подставляем во второе уравнение системы и находим два значения x.

$$y^2 + y - 2 = 0 => y_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2};$$

$y_1 = 1;\ y_2 = -2;\ x_1 = 2 - 1 = 1;\ x_2 = 2 - (-2) = 4;$ Имеем A(1;1) и B(4;-2).

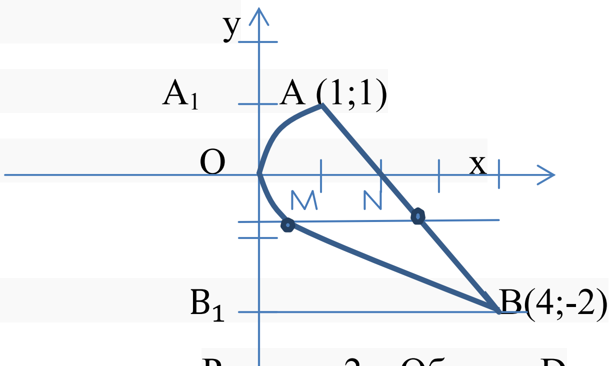

Рисунок 2 – Область D

При вычислении двойной интеграл сводится к двум последовательным определенным интегралам, которые называются повторными. Крайний левый из них называется внешним, а второй – внутренним. Вычислять можно двумя способами, меняя порядок интегрирования.

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{f_{2(x)}}^{f_{2(x)}} f(x;y)dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_{1(y)}}^{\varphi_{2(y)}} f(x;y)dx$$

Можно внешний интеграл брать по x внутренний по y или наоборот. Результата вычисления не зависит от порядка интегрирования.
Если область D спроецировать на ось ОХ то внешний интеграл берется по x, а внутренний по y. Если область D спроецировать на ось ОУ, то порядок интегрирования меняется.
Спроецируем область D на ось ОУ (рисунок 2). Проецируем точки A и B. На оси ОУ получим один отрезок B_1A_1 поэтому нужно вычислять один интеграл, в котором внешний интеграл берется по y а внутренний по x.

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_{-2}^{1} dy \int_{y^2}^{2-y} (x+y)dx = \int_{-2}^{1}[(\frac{x^2}{2}+yx)|_{y^2}^{2-y}]dy =$$

$$\int_{-2}^{1}\left[\frac{(2-y)^2}{2}+y\cdot(2-y)-\frac{y^4}{2}-y^3\right]dy = \int_{-2}^{1}\left(\frac{4-4y+y^2}{2}+2y-y^2-\frac{y^4}{2}-y^3\right)dy =$$

$$\int_{-2}^{1}\left(2-\cancel{2y}+\frac{1}{2}y^2+\cancel{2y}-y^2-\frac{y^4}{2}-y^3\right)dy = \left(2y-\frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{y^5}{5}--\frac{y^4}{4}\right)\Big|_{-2}^{1}=2\cdot$$

$$1-\frac{1}{6}-\frac{1}{10}-\frac{1}{4}+4-\frac{8}{6}-\frac{32}{10}+\frac{16}{4}) = 2-\frac{1}{6}-\frac{1}{10}-\frac{1}{4}+4-\frac{4}{3}-\frac{16}{5}+4 =$$

$$10+\frac{-10-6-15-80-192}{60} = 10-\frac{303}{60} = 10-\frac{101}{20} = \frac{200-101}{20} = \frac{99}{20}.$$

Пояснение. Пределы интегрирования во внешнем интеграле всегда постоянные и видно из чертежа, как изменяется y (рисунок 2) (идем всегда в положительном направлении оси). Пределы интегрирования во внутреннем интеграле переменные, за исключением того случая, когда область D является прямоугольником, стороны которого параллельны осям ОХ и ОУ. Для того чтобы найти пределы внутреннего интеграла нужно через любую внутреннюю точку области D провести прямую параллельно той оси по которой берется внутренний интеграл, и идти вдоль этой прямой в положительном направлении оси (т.е. вправо). Найти точку M входа в область D и точку N выхода из нее (рисунок 2). Уравнения всех линий ограничивающих область D нужно разрешить относительно той переменной по которой берется внутренний интеграл. Точка входа M лежит на параболе из ее уравнения выражаем x: $x=y^2$ – это нижний предел внутреннего интеграла. Точка выхода N лежит на прямой АВ. Из ее уравнения выражаем х: х=2-у – это верхний предел внутреннего интеграла (рисунок 2). Все вычисления начинаются с внутреннего интеграла, который берется по переменной х, поэтому переменная у является постоянной.

Чтобы изменить порядок интегрирования нужно область D спроецировать на ось ОХ. На нее проецируются все точки пересечения на оси ОХ получится два отрезка OA_1 и A_1B_1 (рисунок 3).

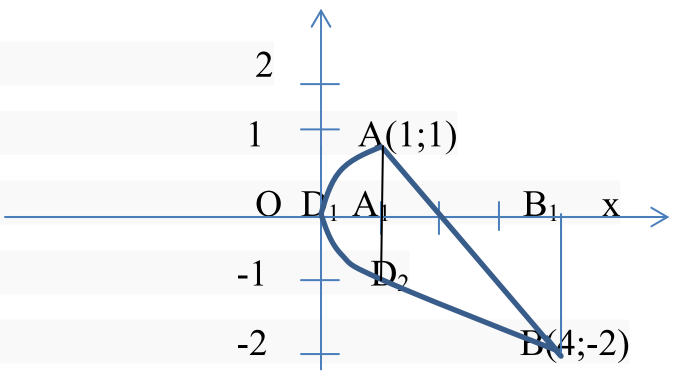

Рисунок 3 – Область D

При этом область D разобьется на 2 области D1 и D2, а двойной интеграл будет равен сумме двух двойных интегралов по этим областям.

$$\iint_D (x+y)dxdy=\iint_{D_1}(x+y)dxdy+\iint_{D_2}(x+y)dxdy.$$

В каждом из них внешний интеграл будет браться по переменной х, а внутренний по у т.е. вычислений будет в два раза больше, а результат такой же как в первом случае. Поэтому можно сделать вывод что рациональнее проецировать область D на ось ОУ. Расстановка пределов в каждом из интегралов по областям D1 и D2 проводится аналогично первому случаю.

$$\iint_D (x+y)dxdy=\iint_{D_1}(x+y)dxdy+\iint_{D_2}(x+y)dxdy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}(x+y)dy+\int_1^4 dx\int_{-\sqrt{x}}^{2-x}(x+y)dy.$$

Подробнее о вычислении двойных интегралов можно прочитать в пособии [См.[6]п.1.5].

5.1 Вычисление криволинейного интеграла II рода (по координатам)

Вычисление криволинейного интеграла II рода сводится к вычислению обычного определенного интеграла, поэтому все под знаком интеграла нужно выразить через одну переменную.

Задача 5. Вычислить криволинейный интеграл

$\int_C (x-2y)\,dx+(y^2-x^2)dy$, где С – часть параболы $y^2=x$ от точки А(0;0) до точки В(4;2).

Решение

Это криволинейный интеграл II рода. Так как уравнение кривой С задано в декартовых координатах y^2=x, то нужно все под знаком интеграла выразить через переменную у, чтобы не было иррациональности (если у выражать через х, у=$\sqrt{x}$, то появится радикал). Нужно найти $dx=2ydy$. Так как нужно идти от точки А до точки В, то **у** меняется от 0 до 2.

$$\int_C (x-2y)dx+(y^2-x^2)dy=\int_0^2[(y^2-2y)\cdot 2y+(y^2-y^4)]dy=$$

$$=\int_0^2(2y^3-4y^2+y^2-y^4)dy=\int_0^2(2y^3-3y^2-y^4)dy=\left(2\cdot\frac{y^4}{4}-3\cdot\frac{y^3}{3}-\right.$$
$$\left.-\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=\left(\frac{y^4}{2}-y^3-\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=8-8-\frac{32}{5}=-\frac{32}{5}.$$

Замечание. Если уравнение дуги АВ задано в параметрической форме.

$$\begin{cases}x=x(t)=\varphi(t);\\ y=y(t)=\Psi(t).\end{cases}\begin{cases}dx=\varphi'(t)dt;\\ dy=\Psi'(t)dt.\end{cases}\alpha\le t\le\beta.$$

Криволинейный интеграл вычисляется по формуле:

$$\int_{AB}P(x;y)dx+Q(x;y)dy=$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t);\Psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t);\Psi(t)]\Psi'(t)\}dt. \quad (5.1)$$

Всё в подынтегральной функции выражается через параметр t.Подробнее о вычислении криволинейных интегралов (См[6], п.6).

5.2 Вычисление криволинейного интеграла I рода (по длине дуги)

Вычисление криволинейного интеграла I рода сводится тоже к вычислению определенного интеграла. По форме написания он отличается от криволинейного интеграла II рода тем, что в подынтегральной функции присутствует дифференциал дуги dS (или dL), т.е. пишется так: $\int_{AB} f(x;y)dS$.

При вычислении криволинейного интеграла I рода может быть 3 случая:

а) уравнение дуги AB, по которой ведется интегрирование, задано в декартовых координатах y=$\varphi(x)$. В этом случае $dS=\sqrt{1+(y')^2}dx$; тогда $\int_{\mathrm{AB}} f(x;y)dS$=$\int_{x_1}^{x2} f[x;\varphi(x)]\cdot\sqrt{1+(y')^2dx}$. (5.2)

Если уравнение дуги AB имеет вид x=φ(y), тогда
$\int_{\mathrm{AB}} f(x;y)dS=\int_{\mathrm{y}_1}^{\mathrm{y}_2} f[\varphi(\mathrm{y});y]\cdot\sqrt{1+(\mathrm{x}')^2}d\mathrm{y}$; (5.3)

б) уравнение дуги AB задано в параметрической форме, т.е. $\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t). \end{cases}$

Дифференциал дуги dS вычисляется по формуле:$dS=\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$.

$\int_{\mathrm{AB}} f(x;y)dS=\int_{t_1}^{t_2} f[x(t);y(t)]\cdot\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}dt$; (5.4)

в) уравнение дуги AB задано в полярных координатах ρ=ρ(φ),

$\varphi_1\leq$ φ $\leq\varphi_2$, а f(x,y) непрерывна на AB, тогда:

$\int_{\mathrm{AB}} f(x;y)dS=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f[\rho(\varphi)\cdot cos\varphi\,;\rho(\varphi)\cdot sin\varphi]\cdot\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi$. (5.5)

Более подробно о вычислении криволинейных интегралов можно прочитать в учебном пособии (См.[6],п.5).

Замечание. Если дуга C является замкнутой, то криволинейный интеграл обозначается $\oint_{\mathrm{C}} P(x;y)dx+Q(x;y)dy$.

5.3 Формула Грина

Формула Грина позволяет преобразовать криволинейный интеграл в двойной, что во многих случаях упрощает вычисление. Пусть в плоскости XOY задана правильная область D (т.е. линия L, ограничивающая область D, пересекаются любыми прямыми, параллельными осям координат, не более двух раз).

Теорема Грина. Если функции P(x;y) и Q(x;y) непрерывны вместе со своими частными производными в области D, то в этой области имеет место формула: $\oint_C P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$ (5.6)

где C – граница области D и интегрирование вдоль C производится в положительном направлении (против хода часовой стрелки). Формула (5.6) называется формулой Грина. Следует помнить, что формула Грина применяется только в тех случаях, если контур C замкнутый.

Более подробно можно прочитать в учебном пособии (см.[6], п. 7).

Задача 6. Преобразовать криволинейный интеграл вдвойной и вычислить его по формуле Грина.

$\oint_C (x^3 - 3y)dx + (5x - y^2)dy,$ где C-контур, ограниченный линиями:

$y = 1 - x^2$; x-y=1.

Решение

Формула Грина позволяет преобразовать криволинейный интеграл в двойной. Она применяется только для замкнутого контура. Функции P(x;y) и Q(x;y) должны быть непрерывными вместе со своими частными производными в области D.

$$\oint_C P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \quad (5.3)$$

Строим область D:

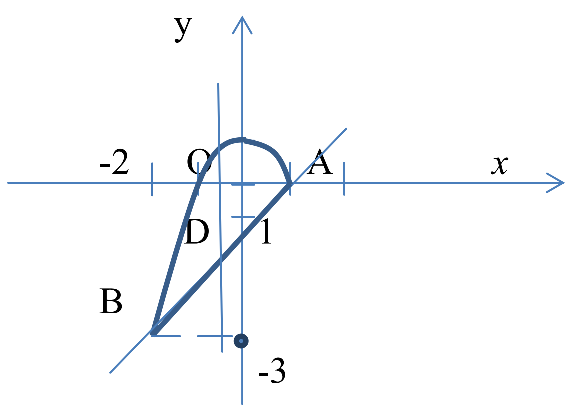

Рисунок 4 – Область D

y=1-x^2 – это уравнение параболы, с фокальной осью y, ветви направлены вниз, x-y=1 – прямая линия AB.

Для того, чтобы расставить пределы интегрирования в двойном интеграле, находим координаты точек пересечения A и B.

Решаем систему уравнений: $\begin{cases} y = 1 - x^2; \\ x - y = 1. \end{cases}$ => $\begin{cases} y = 1 - x^2; \\ y = x - 1. \end{cases}$ =>

$$=> \begin{cases} 1 - x^2 = x - 1; \\ y = x - 1. \end{cases} => \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0; \\ y = x - 1. \end{cases}$$

$x_{1,2}$= - $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$= - $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$ = - $\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$;

x_1= - $\frac{1}{2}$ +$\frac{3}{2}$ =1; x_2=$-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}$ = -2; y_1=1-1=0; y_2=-2-1=-3.

A(1;0), B(-2;-3).

Из чертежа видно, что область D (рисунок 4) рациональнее спроецировать на ось OX и внешний интеграл в правой части брать по *x,* т.к. придется вычислять один двойной интеграл.

$$\oint_C (x^3 - 3y)dx + (5x - y^2)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Находим подынтегральную функцию в двойном интеграле.

Q(x;y)=5x-y^2; $\frac{\partial Q}{\partial x}$=5; P(x;y)=$x^3$-3y; $\frac{\partial P}{\partial y}$= -3;

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$=5-(-3)=8.

$$\oint (x^3 - 3y)dx + (5x - y^2)dy = 8\iint_D dxdy = 8\int_{-2}^{1} dx \int_{x-1}^{1-x^2} dy.$$

Вычисляем двойной интеграл в правой части:

$$\iint_D 8dxdy = 8\int_{-2}^{1} dx \int_{x-1}^{1-x^2} dy = 8\int_{-2}^{1} \left(y \Big|_{x-1}^{1-x^2}\right) dx =$$

$$=8\int_{-2}^{1}(1 - x^2 - x + 1)dx = 8\int_{-2}^{1}(2 - x^2 - x)dx = 8\left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= 8(2-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + 2) = 8\left(8 - 3 - \frac{1}{2}\right) = 8\left(5 - \frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \frac{2}{9} = 36.$$

Ответ: $\oint_C (x^3 - 3y)dx + (5x - y^2)dy = 36.$

Подробнее можно посмотреть (См.[6]п.7.1).

Правила оформления и выполнения контрольных работ

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1 Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета. Кроме красного.
2 В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), названия дисциплины, номер контрольной работы; здесь же следует указать название учебного заведения, дату отсылки работы в университет и адрес студента. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и подпись студента.
3 В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго в соответствии с номером варианта. Контрольные работы, содержащие не все подпункты задач, а также задачи иного варианта не зачитываются.
4 Решение задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в задании, сохраняя номера задач.
5 Перед решением каждой задачи надо полностью написать её условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачи своего варианта, имеют общую формулировку, следует переписать условие задачи, заменив общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.
6 Решение задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия по ходу решения, сделать необходимые чертежи и написать формулы, используемые при решении.
7 После получения прорецензированной работы, как не зачтенной, так и зачтенной, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента. Если рецензент предлагает внести в решение задач те или иные дополнения или исправления и прислать их для повторной проверки, то это следует сделать за короткий срок. В случае незачета работы или отсутствия прямого указания рецензента о том, что студент может ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново. При высылаемых исправлениях должна обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия на нее. Поэтому рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указанием рецензента, при этом написать число и указать, что эта работа над ошибками. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

Список литературы

1 Вержбалович, Т.А. Основы дифференциального исчисления функций одной переменной : методические указания [Текст] / Т.А. Вержбалович, Л.В. Самойлова. – Курган : Изд-во КГУ, 2010.

2 Корнюшева, Т.В. Интегральное исчисление функции действительной переменной: контрольные задания и руководство к решению по курсу математики [Текст] / Т.В. Корнюшева, Л.В. Лугавова. – Курган : Изд-во КГУ, 2012.

3 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] / П.Е. Данко, А.Г. Попов. – М. : Высшая школа, 1980.

4 Руководство и решение задач по высшей математике / под общ. ред. Е.И. Гурского. Минск : Высшая школа, 1989. – Ч.1.

5 Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов [Текст] / Н.С. Пискунов.– М. : Наука,1970.– Ч. 1.

6 Агафонова, В.Н. Высшая математика в задачах. Кратные и криволинейные интегралы : учебное пособие [Текст] / В.Н. Агафонова. – Курган : Изд-во КГУ, 2006.

7 Агафонова, В.Н. Кратные криволинейные интегралы. Контрольные задания [Текст] / В.Н. Агафонова. – Курган : Изд-во КГУ, 2002.

8 Агафонова, В.Н. Дифференциальные уравнения. Контрольные задания [Текст] / В.Н. Агафонова. – Курган : Изд-во КГУ, 2008.

Агафонова Валентина Николаевна

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ

для студентов заочной формы обучения специальностей

151900.62, 220700.62, 280000.62, 221700.62, 150700.62, 222000.62, 190100.62, 190600.62, 140400.62, 190700.62

(бакалавриат)

(1 курс 2 семестр)

Редактор Н.Л. Борисова

Подписано в печать 20.11.15	Формат 60x84/16	Бумага 65 г/м^2
Плоская печать	Усл. печ.л. 2,5	Уч.–изд.л. 2,5
Заказ 281	Тираж 50	Не для продажи

РИЦ Курганского государственного университета.

640669, г. Курган, ул. Советская, 63/4.

Курганский государственный университет.