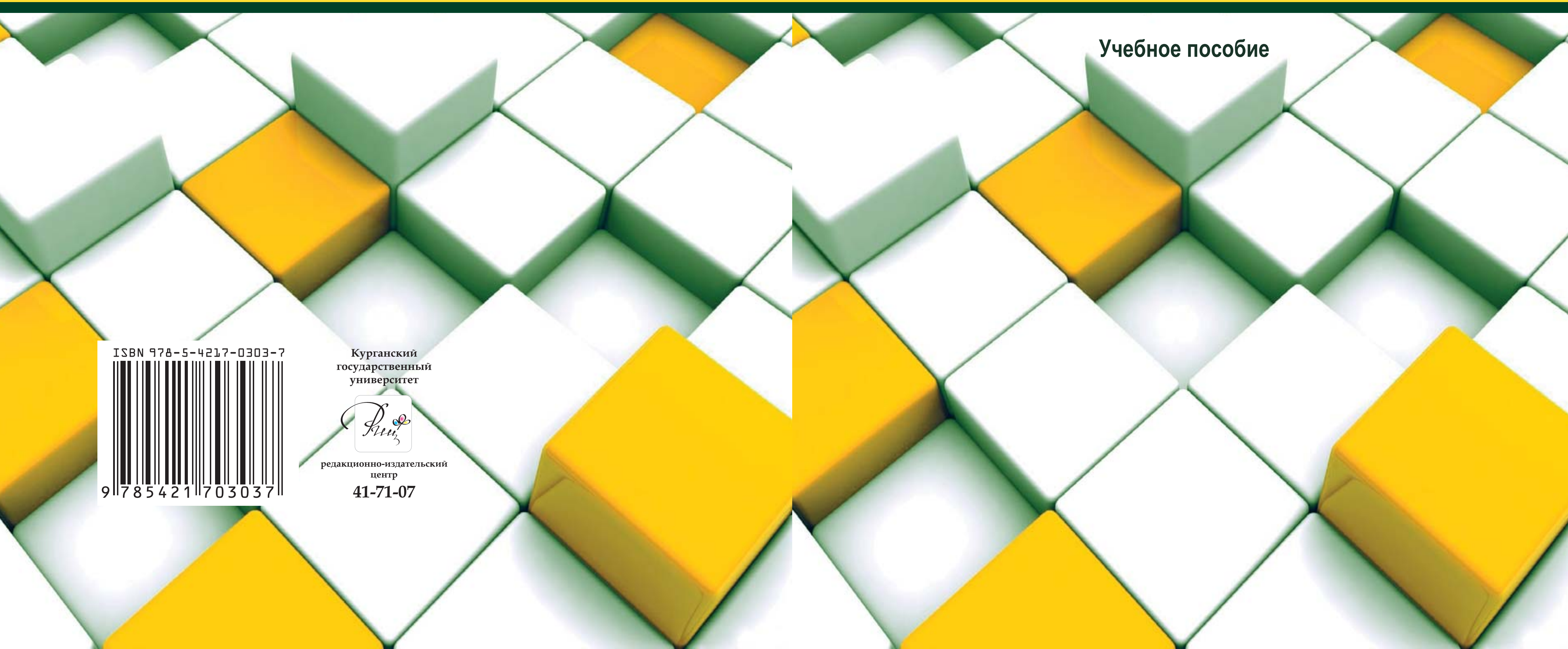
Т.А. Вержбалович, Ю.С. Малышева

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА



Учебное пособие

ISBN 978-5-4217-0303-7

9 785421 703037

Курганский государственный университет

редакционно-издательский центр

41-71-07

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Курганский государственный университет»

Т.А. Вержбалович, Ю.С. Малышева

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Курган 2015

УДК 517.98 (075.8)
ББК 22.162 я73
В 31

Рецензенты

кафедра высшей и прикладной математики Уральского государственного университета путей сообщения, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой Г.А. Тимофеева;
канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой математики и прикладной информатики филиала ОУП ВПО «АТиСО» С.В. Косовских.

Печатается по решению методического совета Курганского государственного университета.

Вержбалович Т. А., Малышева Ю. С.
Элементы функционального анализа: учебное пособие. – Курган : Изд-во Курганского гос. ун-та, 2014. – 65 с.

В учебном пособии раскрываются основные понятия и теоремы теории множеств, теории метрических и топологических пространств. Материал обеих глав сопровождается упражнениями для самоконтроля, к которым даны ответы и пояснения.

Издание необходимо для подготовки инженеров по различным направлениям и дальнейшего изучения математической логики, функционального и гармонического анализа.

Рис. –15, библиограф. –18 назв.

УДК 517.98 (075.8)
ISBN 978-5-4217-0303-7 ББК 22.162 я73

ПРЕДИСЛОВИЕ

Идеи функционального анализа всё чаще применяются в различных областях современной математики. Они позволяют с единых позиций взглянуть на старые классические методы, которые во многих случаях казались громоздкими и искусственными.

Однако использование аппарата функционального анализа для решения конкретных задач обычно вызывает определённые трудности. Как нам представляется, в приобретении необходимых навыков в этом направлении большую пользу может принести решение специально подобранных задач.

В данной работе доступно изложены первоначальные основы теории множеств и метрических пространств, необходимые для подготовки инженеров по различным направлениям и дальнейшего изучения математической логики, функционального и гармонического анализа, предназначенные для читателей со скромной математической подготовкой. В пределах каждой излагаемой темы мы вынуждены быть максимально краткими, и ограничиться лишь выяснением наиболее важных вопросов.

Учебное пособие содержит достаточно много примеров и задач различного уровня сложности, иллюстрирующих теорию. Ко всем упражнениям приведены ответы, а в отдельных случаях подробные указания.

Глава I. Элементы теории множеств

Как математическая дисциплина теория множеств была создана немецким математиком Г. Кантором[1] и впоследствии стала фундаментальным и универсальным языком математики и информатики.

1 Определения и способы задания множеств. Понятие «множество» является в математике одним из первичных, так как оно не содержит иных математических понятий, логически предшествующих ему. Поэтому достаточно дать первоначальную интуитивно ясную трактовку этого понятия. Как всякое первичное определение теории определение множества содержит другие неопределенные понятия, в понимании которых либо не возникает существенных разногласий, либо последние не приводят к принципиально новым следствиям.

По Кантору, МНОЖЕСТВО M есть любое собрание определенных и различных между собой объектов, мыслимое как единое целое. Объединение отдельных объектов в множество и создание соответствующих обобщающих понятий – важный мыслительный процесс, определяющий новый качественный уровень представлений об объектах и способах их изучения.

Объекты, составляющие множество M, называются ЭЛЕМЕНТАМИ множества M. Обычно множества обозначаются прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, …, X, Y, Z (возможно, с индексами), а их элементы – соответствующими строчными буквами: a, b, c, …, x, y, z (возможно, с индексами). Стандартные обозначения некоторых числовых множеств:

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

R – множество действительных (вещественных) чисел;

$\varnothing$ – пустое множество.

---

[1] **Кантор, Георг** (1845-1918), немецкий математик, наиболее известен как создатель теории множеств и теории трансфинитных чисел.

Принадлежность элемента a множеству A обозначается в виде $a \in A$, где $\in$ – знак отношения принадлежности a к A. Если некоторый объект x не является элементом множества A, то это обозначается в виде $x \notin A$. Например, $\pi \notin \mathbf{Q}$.

Следует подчеркнуть, что все элементы множества различны, то есть в нём нет совпадающих элементов.

Множество считается заданным, если относительно любого объекта можно установить, является он элементом этого множества или нет.

Наиболее часто используются следующие способы задания множеств:

1) перечисление список всех элементов множества, заключенных в фигурные скобки. Например:

- {лебедь, рак, щука} или {скрипка, альт, виолончель, контрабас};
- {a} – одноэлементное множество.

2) указание характеристических свойств, которыми должны обладать все элементы множества и только они: $A=\{x \mid P(x)\}$, где $P(x)$ – описание свойств, которыми обладают элементы $x \in A$. Например:

- $\{x \mid x$ – чётное$\}$;
- $\{y \mid y$ – студент КГУ$\}$;
- $\{x \mid x^2+1=0\}$, здесь свойство $P(x)$ – быть решением указанного уравнения;
- в математическом анализе, где множества обычно задаются в виде числовых промежутков, приняты собственные обозначения последних, например: $\{x \mid 1<x \le 2\}=(1;2]$.

3) указание порождающей процедуры – описание способа получения элементов множества (из уже полученных или из других объектов). Например:

- $\{x \mid x=\pi/2+\pi k,\ k \in \mathbf{Z}\}$;
- $\{x \mid x=2^k,\ k \in \mathbf{N}\}$;

- $F=\{f_k| \quad f_k= f_{k-1} +f_{k-2};\ k=3,4,\ldots;\ f_1=1,\ f_2=2\}$ – множество чисел Фибоначчи[2]

$F=\{1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots \}$.

В связи с двумя последними способами задания множеств в математике рассматривают так называемые 1) РАЗРЕШАЮЩИЕ и 2) ПОРОЖДАЮЩИЕ процедуры. Первые позволяют установить, является ли произвольно данный объект элементом множества; вторые – указать все элементы, принадлежащие данному множеству. Одна и та же процедура, вообще говоря, может решать обе задачи или только одну.

2 Конечные и бесконечные множества. Множество называется КОНЕЧНЫМ, если существует некоторое натуральное n, являющееся числом его элементов. Число элементов в конечном множестве А называется МОЩНОСТЬЮ множества А и обозначается $|A|$.

В противном случае бесконечное множество.

Примерами бесконечных множеств являются: **N**, **Q**, **R**, **Z**, и т.д.

Пустое множество будем относить к конечным, при этом $|\varnothing|=0$.

Сравнительное изучение различных множеств приводит к следующим определениям.

Множество А называется ПОДМНОЖЕСТВОМ множества В, если всякий элемент множества А является также и элементом множества В. Определенное таким образом соотношение двух множеств обозначается в виде: $A\subseteq B$, где $\subseteq$ – знак ВКЛЮЧЕНИЯ. При этом иногда говорят, что В содержит или покрывает А.

Например: $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$.

Два множества РАВНЫ в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов, другими словами, если и только если всякий элемент одного множества является и элементом другого. Равенство множеств имеет общепринятое обозначение: А=В. Тогда, напротив, неравенство двух множеств А и В можно обозначить в виде $A\neq B$.

---

[2] **Числа Фибоначчи** – числовая последовательность, первые два элемента которой равны 1, а каждый последующий равен сумме двух предыдущих: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, … Эти числа ввёл в 1202 г. Леонардо Фибоначчи, также известный как Леонардо Пизанский (1170-1250).

Очевидно, что $A=B$, если и только если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Этот вариант определения равенства дает типичный двусторонний метод доказательства равенства двух множеств (сначала «в одну сторону» – $A \subseteq B$, а затем «в другую сторону» – $B \subseteq A$).

Отметим основные и очевидные свойства отношения включения:

1) $A \subseteq A$;

2) если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;

3) $\varnothing \subseteq A$.

Рассмотрим различные подмножества некоторого множества. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется СОБСТВЕННЫМ (ИСТИННЫМ, СТРОГИМ) подмножеством множества B. Это отношение обозначается в виде: $A \subset B$, где $\subset$ – знак СТРОГОГО ВКЛЮЧЕНИЯ. Учитывая отмеченные выше свойства 1) и 2) отношения нестрогого включения, формально можно утверждать, что каждое непустое множество A содержит по крайней мере два различных подмножества- A и $\varnothing$, которые называются НЕСОБСТВЕННЫМИ подмножествами.

В принципе, можно рассматривать все подмножества данного множества A. Множество всех подмножеств множества A называется МНОЖЕСТВОМ-СТЕПЕНЬЮ (или БУЛЕАНОМ) и обозначается в виде P(A) (или B(A)).

3 Взаимно-однозначное соответствие множеств. Счетные и несчетные множества. Наряду с равенством множеств важным инструментом сравнительного изучения множеств является взаимно-однозначное соответствие между множествами.

Два множества можно поставить во ВЗАИМНО-ОДНОЗНАЧНОЕ соответствие, если каждому элементу множества A можно поставить в соответствие один элемент множества B так, чтобы при этом и каждый элемент множества B соответствовал какому-нибудь одному элементу множества A.

Например, стадо из 4 коз и роща из 4 деревьев могут быть поставлены во взаимно-однозначное соответствие, если привязать к каждому дереву по одной козе. При иных попытках (например, привязать всех коз к одному дереву) взаимно-однозначного соответствия не получить.

Множества А и В, между элементами которых можно (в принципе) установить взаимно-однозначное соответствие, называются ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ.

Примеры:

1) $A = \{ a |\ a=n^2,\ n \in \mathbf{N}\} = \{1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots\}$ и **N** – эквивалентны: каждый элемент $n \in \mathbf{N}$, имеет единственный соответствующий элемент $a_n = n^2 \in A$, каждый $a_n \in A$, имеет единственный соответствующий элемент $n=\sqrt{a_n} \in \mathbf{N}$, то есть установлена взаимно-однозначная связь $a_n \leftrightarrow n$ между элементами данных множеств.

2) множество точек отрезков X=[0;1] и Y=[0;2] эквивалентны. Взаимно-однозначная связь элементов $x \leftrightarrow y$ из этих множеств следует из приведенного рисунка 1: y=2x, x=y/2.

3) множество точек интервала $(0;\ \pi)$ эквивалентно **R**. Взаимно-однозначное соответствие элементов этих множеств иллюстрируется на рисунке 2.

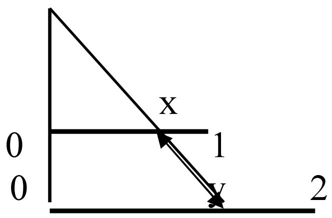


Рисунок 1 – Иллюстрация эквивалентности отрезков для примера 2

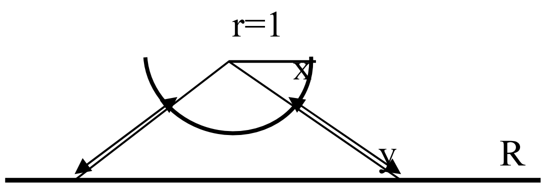


Рисунок 2 – Иллюстрация взаимно-однозначного соответствия элементов интервала $(0;\ \pi)$ и множества R

Таким образом, оказывается, что бесконечные множества могут иметь собственные подмножества, эквивалентные себе. Аналога этому в конечных множествах не существует: КОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО НЕ МОЖЕТ БЫТЬ ЭКВИВАЛЕНТНО СВОЕМУ СТРОГОМУ ПОДМНОЖЕСТВУ.

Эквивалентные конечные множества имеют одинаковые мощности ($|A|=|B|$), то есть РАВНОМОЩНЫ. Очевидное для конечных множеств понятие равномощности может быть обобщено и на случай бесконечных эквивалентных множеств. Тогда пары эквивалентных множеств в приведенных выше примерах 1), 3) равномощны, и для них формально можно записать $|A|=|N|$, $|X|=|Y|$, $|(0;\pi)|=|R|$.Таким образом, в случае бесконечных множеств СОБСТВЕННОЕ ПОДМНОЖЕСТВО МОЖЕТ ОКАЗАТЬСЯ РАВНОМОЩНЫМ ИСХОДНОМУ МНОЖЕСТВУ: $A\subset B$, но $|A|=|B|$. Такого аналога в конечных множествах нет, где из $A\subset B$ обязательно следует $|A|<|B|$ (часть меньше целого).

Множество, эквивалентное **N**, называется СЧЁТНЫМ. Элементы счётного множества можно «пронумеровать» числами 1, 2, 3, … Счётные множества, как и **N**, являются простейшими из бесконечных множеств.

Примеры:

1) множество **Z** всех целых чисел счётно. Взаимно-однозначное соответствие множеств **Z** и **N** может быть установлено следующим образом

N	1	2	3	4	5	…,
Z	0	1	-1	2	-2	…,

при котором нумерация элементов множества **Z** реализуется формулой

$$z_n = \begin{cases} n/2, & \text{если } n - \text{чётно,} \\ -(n-1)/2, & \text{если } n - \text{нечётно.} \end{cases}$$

2) множество $\mathbf{Q}^+$ всех положительных чисел вида p/q, p, q $\in$ **N** счётно. Для доказательства этого утверждения построим таблицу 1.

Таблица 1 – Иллюстрация взаимно-однозначного соответствия положительных рациональных и натуральных чисел

p/q	1	2	3	4	…
1	1/1	1/2	1/3	1/4	…
2	2/1	2/2	2/3	2/4	…
3	3/1	3/2	3/3	3/4	…
4	4/1	4/2	4/3	4/4	…
…	…	…	…	…	…

Очевидно, что таблица 1 содержит все положительные рациональные числа, то есть всё множество $\mathbf{Q}^+$. Нумерацию рациональных чисел, реализующую взаимно-однозначное соответствие множества $\mathbf{Q}^+$ и натурального ряда **N**, осуществим по мере обхода элементов таблицы по специальному маршруту: производим нумерацию элементов в пределах одной рамки, начиная с самой внутренней, содержащей единственный элемент – 1/1, а затем переходим к следующей рамке. При переходе от одной рамки к другой, её окаймляющей, проверяем принадлежность её элементов из окаймления всем предыдущим рамкам, в которых элементы уже занумерованы. Если очередной проверяемый элемент из текущей рамки совпал с каким-либо из занумерованных, то этот (проверяемый) элемент пропускается (то есть не нумеруется и не включается в результирующий список множества $\mathbf{Q}^+$ в полном соответствии с определением множества). Таким образом, получается ряд, содержащий все рациональные числа: 1/1, 2/1, (2/2), 1/2, 3/1, 3/2, (3/3), 2/3, 1/3, 4/1, (4/2), 4/3, (4/4), 3/4, (2/4), 1/4, …, исключая из которого повторно появляющиеся числа (в скобках), получаем искомую нумерацию положительных рациональных чисел:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
Z	1	2	1/2	3	3/2	2/3	1/3	4	4/3	3/4	1/4	…

Поскольку все уже пронумерованные рамки, как и текущая, всегда конечны, изложенная (порождающая) процедура нумерации элементов таблицы на каждом шаге не имеет никаких принципиальных ограничений и, таким образом, устанавливает эквивалентность результирующего множества и натурального ряда.

Возникает естественный вопрос: существуют ли бесконечные множества, не являющиеся счётными, то есть НЕСЧЁТНЫЕ множества, которые невозможно поставить во взаимно-однозначное соответствие с множеством **N** натуральных чисел? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА (Г. Кантор, 1874.) Множество всех действительных чисел интервала (0;1) несчётно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любое число $x \in (0;1)$ представимо в виде конечной или бесконечной десятичной дроби вида

$0,a_1\, a_2\, a_3\ldots$, где $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Предположим противное: множество (0;1) счётно. Тогда все его элементы можно привести во взаимно-однозначное соответствие с **N**:

$1 \leftrightarrow 0{,}a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ldots$

$2 \leftrightarrow 0{,}a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ldots$

$3 \leftrightarrow 0{,}a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ldots$

…

Составим число $0{,}a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ldots$ и преобразуем его по правилу $a_{ii} \to 9-a_{ii} = a'_{ii}$, в результате чего получим число $a=0{,}a'_{11}\ a'_{22}\ a'_{33}\ldots$ Поскольку все $a'_{ii} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, то $a \in (0;1)$. Однако a не принадлежит счетной таблице, поскольку оно отлично от любого содержащегося в ней числа: от первого числа a наверняка отличается цифрой a'_{11}, от второго – цифрой a'_{22} и т.д. Отсюда следует, что таблицы, покрывающей всё множество (0;1), построить нельзя, то есть невозможно занумеровать все числа из интервала (0;1). Таким образом, множество (0;1) несчётно.

СЛЕДСТВИЕ. Поскольку множество (0;1) можно привести во взаимно-однозначное соответствие с любым из интервалов (a;b), то любое множество (a;b) также оказывается несчётным.

Несчётным оказывается и всё множество действительных чисел **R**.

Мощность отрезка $|[0;1]|$ (как и мощность любого отрезка из **R** и самого **R**) называется КОНТИНУУМОМ, а эквивалентные множества такой мощности – КОНТИНУАЛЬНЫМИ.

ЗАМЕЧАНИЕ. Метод доказательства континуальности множества $[0;1]$ называется ДИАГОНАЛЬНЫМ методом Кантора.

Нетрудно доказать следующие утверждения:

1) всякое бесконечное множество имеет счётное подмножество;

2) всякое подмножество счётного множества конечно или счётно.

4 Операции над множествами и диаграммы Эйлера-Венна. Рассматриваемые ниже основные операции над множествами суть методы получения (правила КОМПОЗИЦИИ) новых и более сложных множеств из заданных. Обращение этих правил дает правила ДЕКОМПОЗИЦИИ – методы разложения сложных множеств на более простые, мощный инструмент анализа и изучения сложных множеств.

Пусть даны два множества A и B.

ПРЯМЫМ (ДЕКАРТОВЫМ) произведением множеств A и B называется множество, обозначаемое в виде $A \times B$, всех различных упорядоченных пар (a,b) таких, что $a \in A$, $b \in B$:

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Пример. A={до, ре, ми}, B={бемоль, диез}, $A \times B$= {(до-бемоль), (до-диез), (ре-бемоль), (ре-диез), (ми-бемоль), (ми-диез)}.

Еще раз следует подчеркнуть, что $A \times B \neq B \times A$, то есть порядок следования элементов в записи пары является важным и $(a,b) \neq (b,a)$.

В частном случае, когда декартовы сомножители совпадают: A=B, имеем $A \times A = A^2$.

Пример. R^2 – множество точек плоскости с координатами (x;y), $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$.

ОБОБЩЕНИЕ. $B = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ – декартово произведение n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Элементами множества B являются упорядоченные последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B$, где $a_i \in A_i$ (i=1, 2, .., n) – КОРТЕЖИ длины **n** или «ЭНКИ» (n-ки) или ВЕКТОРЫ размерности n. Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то $B = A^n$.

Пример. R^n – множество точек n-мерного пространства.

ТЕОРЕМА. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – конечные множества, и $|A_1| = m_1$, $|A_2| = m_2$, …, $|A_n| = m_n$. Тогда $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По индукции при n=1 теорема верна: $|A_1| = m_1$. Пусть она верна для $m = k$, то есть $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k| =$

$= m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k = \mu_k$. Множество $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ состоит из μ_k кортежей $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, где $a_i \in A_i$ (i=1, 2, …, k). К каждому из этих кортежей припишем некоторый элемент $a_{k+1} \in A_{k+1}$, тогда получим μ_k кортежей $(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})$. Если же взять другой элемент $a'_{k+1} \in A_{k+1}$ и приписать его к каждому кортежу $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, то получим другой набор, состоящий из μ_k кортежей $(a_1, a_2, \ldots, a_k, a'_{k+1})$. Очевидно, всего различных таких приписываний можно сделать $m_{k+1} = |A_{k+1}|$ раз, каждый раз получая новые наборы по μ_k кортежей. Всего таким образом различных кортежей $(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})$ будет $\mu_k \cdot m_{k+1}$; каждый из этих кортежей – элемент множества $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \times A_{k+1}$, и это множество не содержит никаких других кортежей! Таким образом, $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \times A_{k+1}| = \mu_k \cdot m_{k+1} = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k \cdot m_{k+1}$, ч.т.д.

СЛЕДСТВИЕ: $|A^n| = |A|^n$.

На основе доказанной теоремы может быть доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Конечное множество A мощностью $|A| = n$ имеет 2^n различных подмножеств (включая $\varnothing$ и A). То есть мощность множества-степени $|P(A)| = 2^n = 2^{|A|}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Занумеруем все элементы множества A номерами от 1 до n, то есть A={a_1, a_2, …, a_n}. Некоторое подмножество S множества A опишем последовательностью n нулей и единиц (e_1, e_2, …, e_n)=e по правилу: e_i=1, если $a_i \in$ S; e_i=0, если $a_i \notin$ S. Тогда множество-степень $P(A)$ и множество E всевозможных последовательностей e находятся во взаимнооднозначном соответствии. В частности, множеству A соответствует последовательность n единиц e =(1, 1, …, 1), а пустому множеству $\varnothing$ – последовательность n нулей e =(0, 0, …, 0). Таким образом, вопрос о мощности множества $P(A)$ сводится к определению мощности равномощного ему множества E. Последнее, очевидно, есть декартово произведение n двухэлементных множеств B={0, 1}: E=$B \times \ldots \times B = B^n$, откуда и следует, что $|P(A)| = |E| = |B^n| = |B|^n = 2^n$.

Может быть доказана теорема более общего характера.

ТЕОРЕМА. Прямое произведение конечного числа счётных множеств счётно.

Пример. Множество $\mathbf{N}^2$ счётно.

ОБЪЕДИНЕНИЕМ множеств A и B называется множество, обозначаемое в виде $A \cup B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$.

ПРИМЕРЫ. 1) X={1, 2, 3, 4, 5}, Y={2, 4, 6}, $X \cup Y$={1, 2, 3, 4, 5, 6}; 2) $[1;3] \cup [2;4] = [1;4]$.

Очевидно, согласно определению, $A \cup A$=A.

По индукции определяется объединение большего числа множеств.

ПРИМЕР. 1) $A \cup B \cup C$; 2) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$; 3) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$; 4) $\bigcup_{i \in J} A_i$; 5) $\bigcup_{g \in S} A_g$, где $k \in \mathbf{N}$, J – конечное, а $S \subseteq \mathbf{R}$ – континуальное множество.

Справедливы следующие утверждения:

1) объединение конечного и счётного множества счётно;

2) объединение двух счётных множеств счётно;

3) объединение конечного множества счётных множеств счётно;

4) объединение счётного множества конечных множеств счётно;

5) объединение счётного множества счётных множеств счётно.

Конечное, или счётное множество называется НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ СЧЁТНЫМ. Тогда утверждения 1)-5) могут быть выражены одним предложением: ОБЪЕДИНЕНИЕ НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ СЧЁТНОГО МНОЖЕСТВА НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ СЧЁТНЫХ МНОЖЕСТВ НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ СЧЁТНО.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ множеств A и B называется множество, обозначаемое в виде $A \cap B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B:

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Примеры. 1) 1) $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{2, 4, 6\}$, $X \cap Y=\{2, 4\}$; 2) $\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \varnothing$; 3) $[1;3] \cap (2;4] = (2;3]$.

Очевидно, согласно определению, $A \cap A = A$.

По индукции определяется пересечение произвольной совокупности (семейства) множеств.

Примеры. 1) $A \cap B \cap C$; 2) $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$; 3) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$; 4) $\bigcap_{i \in J} A_i$; 5) $\bigcap_{g \in S} A_g$.

Множества A и B называются НЕПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ, если они не имеют общих элементов: $A \cap B = \varnothing$.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ – попарно непересекающиеся множества: $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$. Образуем множество $V = \bigcup_i A_i$ всех элементов этих множеств. Тогда система множеств A_i называется РАЗБИЕНИЕМ множества V, а множества A_i – КЛАССАМИ РАЗБИЕНИЯ. Всякий элемент $x \in V$ входит в один и только один класс разбиения. Обратная задача – разбиение исходного множества V на непересекающиеся классы – называется задачей КЛАССИФИКАЦИИ МНОЖЕСТВА V. Известна фундаментальная значимость таких задач в любой из областей человеческих знаний.

Основываясь только на определениях операции объединения и пересечения множеств, нетрудно доказать следующее теоретико-множественное соотношение:

$\varnothing \subseteq (A \cap B) \subseteq A \subseteq A \cup B$.

РАЗНОСТЬЮ двух множеств А и В называется множество обозначаемое в виде $A \setminus B$, содержащее все те и только те элементы A, которые не содержатся в B:

$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$.

ПРИМЕРЫ. 1) 1) X={1, 2, 3, 4, 5}, Y={2, 4, 6}, X\Y={1, 3, 5}; 2) {1, 2}\{3, 4}={1, 2};

3) $[1;3] \setminus (2;4] = [1;2]$.

Эта операция строго двухместна.

На основе введённой разностной операции определяется операция СИММЕТРИЧЕСКОЙ РАЗНОСТИ множеств: $A \Delta B = A - B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

ПРИМЕР. Для выше определённых множеств X и Y имеем

$X \Delta Y = X - Y = \{1, 3, 5, 6\}$.

Если в некотором теоретико-множественном рассмотрении участвуют только подмножества некоторого фиксированного множества U, то «самое большое» множество называется УНИВЕРСАЛЬНЫМ множеством (УНИВЕРСУМОМ РАССУЖДЕНИЯ или просто УНИВЕРСУМОМ). Для каждого подмножества $A \subseteq U$ тогда может быть определена операция дополнения.

ДОПОЛНЕНИЕМ множества A называется множество, обозначаемое в виде $\overline{A}$, содержащее все те элементы U, которые не принадлежат A: $\overline{A} = U \setminus A$.

Примеры. В универсуме $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, определённые выше множества X и Y имеют дополнения: $\overline{X} = \{6\}$, $\overline{Y} = \{1, 3, 5\}$.

Очевидно: $\overline{A} \cap A = \varnothing$; $\overline{A} \cup A = U$; $\overline{\overline{A}} = A$.

Если ограничиться рассмотрением множеств в виде точек простых плоских геометрических фигур (кругов, треугольников, прямоугольников, …), то определенные выше теоретико-множественные операции приобретают простой и наглядный смысл (рисунок 3).

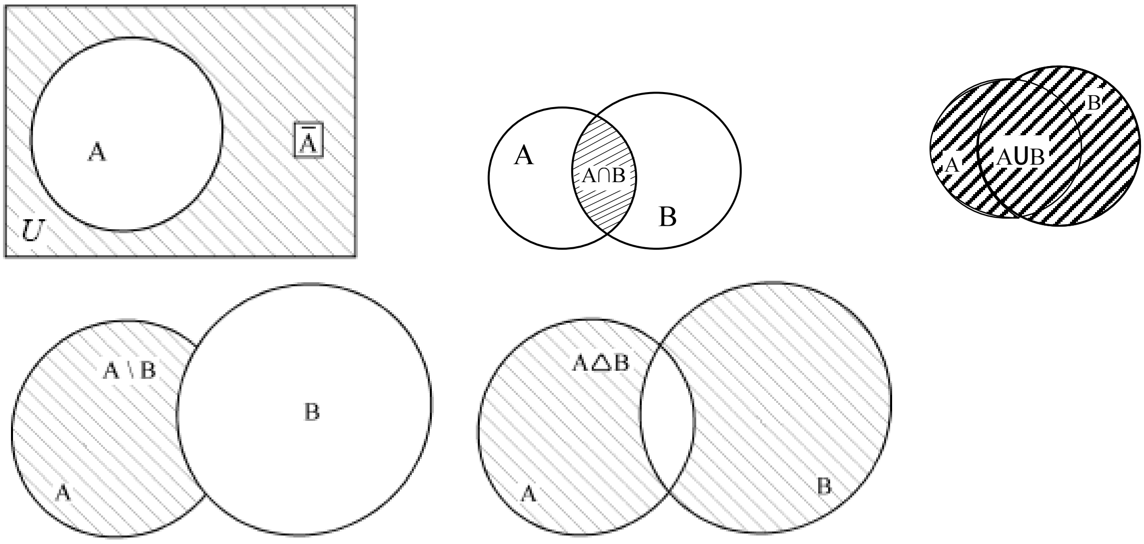


Рисунок 3 – Диаграммы Эйлера-Венна

В этом разделе систематизируются взаимные (относительные) свойства теоретико-множественных операций. Эти свойства представлены в виде тождеств – теоретико-множественных равенств, справедливых для любого универсума рассуждения:

1) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; 1$^{/}$) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

- законы ассоциативности;

2) $A \cup B = B \cup A$; 2$^{/}$) $A \cap B = B \cap A$;

- законы коммутативности;

3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; 3$^{/}$) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

- законы дистрибутивности;

4) $A \cup A = A$; 4$^{/}$) $A \cap A = A$;

- законы идемпотентсти;

5) $A \cup (A \cap B) = A$; 5$^{/}$) $A \cap (A \cup B) = A$;

- законы поглощения;

6) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; 6$^{/}$) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

- законы де Моргана;

7) $A \cup \overline{A} = U$;

$7^{/}$) $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

8) $A \cup U = U$;

$7^{/}$) $A \cap \varnothing = \varnothing$;

9) $A \cup \varnothing = A$;

$9^{/}$) $A \cap U = A$;

10) $\overline{\varnothing} = U$;

$10^{/}$) $\overline{U} = \varnothing$;

11) $\overline{\overline{A}} = A$;

12) если $A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = U$, то $B = \overline{A}$.

Доказательство тождества 3. Рассмотрим некоторый элемент $x \in A \cup (B \cap C)$. Предположим сначала, что $x \in A$. Тогда этот элемент принадлежит и множеству $A \cup B$ и множеству $A \cup C$. Следовательно, он принадлежит и их пересечению: $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Предположим теперь, что $x \in B \cap C$. Тогда x принадлежит и множеству B и множеству C. Тогда x принадлежит и множеству $A \cup B$, и множеству $A \cup C$, а значит и их пересечению: $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Таким образом, любой элемент, содержащийся в левом множестве тождества, содержится также и в правом множестве тождества. Аналогично доказывается и обратное: всякий элемент, содержащийся в правом множестве тождества, содержится также и в левом. Отсюда следует равенство множеств из левой и правой частей доказываемого тождества.

Равенства $1^{/}$-$10^{/}$ двойственны тождествам 1-10, то есть получаются одновременной заменой $\cup \leftrightarrow \cap$ и $\varnothing \leftrightarrow U$. Эта легко доказываемая закономерность носит название ПРИНЦИПА ДВОЙСТВЕННОСТИ алгебры множеств, а именно: для любого истинного утверждения (теоремы), сформулированного в терминах $\varnothing$, U, $\cup$ и $\cap$, двойственное ему предложение также является истинным (теоремой).

Тождества 11 и 12 самодвойственны.

ТЕОРЕМА. Предложения 1) $A \subseteq B$, 2) $A \cap B = A$, 3) $A \cup B = B$ попарно эквивалентны.

Отсюда, в частности, следует, что $\subseteq$ выражается либо через $\cap$, либо через $\cup$. С учётом этих тождеств принцип двойственности может быть расширен и на операции включения: знак $\subseteq$ заменяется на $\supseteq$, а знак $\subset$ - на $\supset$.

5 Соответствия. Рассмотренное выше взаимно-однозначное соответствие между множествами – частный способ сравнительного изучения множеств. Расширим этот инструментарий, ослабив условия, определяющие взаимно-однозначное соответствие между двумя множествами A и B.

Именно: 1) элементу $a \in A$ может соответствовать не один, а несколько элементов множества B, то есть некоторое его подмножество, которое называется ОБРАЗОМ ЭЛЕМЕНТА a и обозначается $J(a)$; если $J(a)=\varnothing$, то элементу $a \in A$ не соответствует ни одного элемента $b \in B$;

2) элементу $b \in B$ также может соответствовать не один, а несколько элементов множества A, то есть подмножество, называемое ПРООБРАЗОМ ЭЛЕМЕНТА b и обозначаемое $R(b)$; в частном случае $R(b)=\varnothing$.

В нижеприведенном иллюстративном примере (рисунок 4) имеем:

$J(a_1)=\{b_1, b_2\}$, $\quad R(b_1)=\{a_1, a_3\}$,

$J(a_2)=\varnothing$, $\quad R(b_2)=\{a_1\}$,

$J(a_3)=\{b_1\}$, $\quad R(b_3)=\varnothing$.

$J(a_4)=\varnothing$,

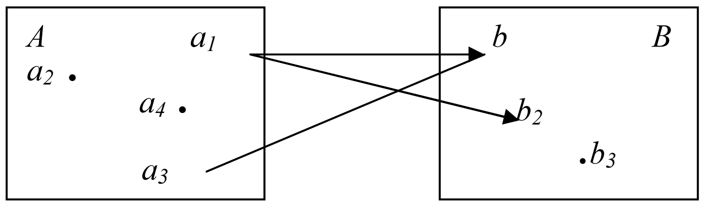


Рисунок 4 – Иллюстрация соответствия

Очевидно, что все пары (a,b), где $a \in A$ и $b \in B$, участвующие в соответствии, являются также элементами множества $A \times B$ и образуют некоторое его подмножество $G \subseteq A \times B$, которое и называется СООТВЕТСТВИЕМ.

В нашем примере $G=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_3,b_1)\} \subseteq A \times B$. Множество A называется областью ОТПРАВЛЕНИЯ соответствия G.

Множество B называется областью ПРИБЫТИЯ соответствия G.

Множество элементов $a \in A$, участвующих в сопоставлениях, называется областью ОПРЕДЕЛЕНИЯ соответствия G и обозначается $Пр_1 G = \bigcup\limits_{b \in B} R(b)$ («проекция» множества G на 1-ю «ось»).

Множество элементов $b \in B$, участвующих в сопоставлениях, называется областью ЗНАЧЕНИЙ соответствия G и обозначается $Пр_2G = \bigcup_{a \in A} J(a))$ («проекция» множества G на 2-ю «ось»).

В нашем примере $Пр_1G = \{a_1, a_3\} \in A$, $Пр_2G = \{b_1, b_2\} \in B$.

Если $C \subseteq Пр_1G$, то множество $J(C) = \{b \mid (a,b) \in G \; и \; a \in C\}$ называется ОБРАЗОМ МНОЖЕСТВА C.

Если $D \subseteq Пр_2G$, то множество $R(D) = \{a \mid (a,b) \in G \; и \; b \in D\}$ называется ПРООБРАЗОМ МНОЖЕСТВА D.

Если $Пр_1G = A$, то соответствие G называется ВСЮДУ (ИЛИ ПОЛНОСТЬЮ) ОПРЕДЕЛЁННЫМ или ТОТАЛЬНЫМ, иначе G называется ЧАСТИЧНЫМ.

Если $Пр_2G = B$, то соответствие G называется СЮРЪЕКТИВНЫМ.

Пусть дано соответствие $G \subseteq A \times B$. Записав каждый кортеж $(a,b) \in G$ в обратном порядке (b,a), получим множество $H \subseteq B \times A$, которое называется ОБРАТНЫМ к G и обозначается $H = G^{-1}$, то есть $(b,a) \in H \subseteq B \times A$ тогда и только тогда, когда $(a,b) \in G$.

В нашем примере $H = G^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_1, a_3), (b_2, a_1)\}$. Графически это означает обращение направления стрелочек соответствия G.

Соответствие $G \subseteq A \times B$ называется ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ (ФУНКЦИЕЙ), если образом любого элемента $a \in Пр_1G$ является единственный элемент $b \in Пр_2G$ («правосторонняя однозначность соответствия»). Функциональное соответствие обозначается в виде $f : A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$ или $f = \{(a,b) \in A \times B \mid \; b = f(a)\}$.

Формально условие правосторонней однозначности может быть выражено следующим образом: если $(a,b) \in f$ и $(a,b') \in f$, то $b = b'$.

$Пр_1G$ – область определения функции f.

$Пр_2G$ – область значений функции f.

Образ $b = f(a)$ некоторого элемента a называется ЗНАЧЕНИЕМ функции f в («точке») a; прообраз a некоторого элемента $b = f(a)$ называется АРГУМЕНТОМ функции f.

Замечание: прообраз некоторого элемента $R(b)$ может содержать более одного элемента. В качестве примера определим играющую важную роль в теории множеств так называемую ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКУЮ функцию множества, обозначаемую в виде $\chi : A \to \{0,1\}$ со значениями $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, если\ x \in A, \\ 0, если\ x \notin A. \end{cases}$

Таким образом, на всех элементах множества A функция χ имеет единичное значение – образ множества A, на всех остальных элементах универсума функция χ имеет нулевое значение – образ множества $A^{/}$.

Если прообраз $R(b)$ каждого элемента $b \in Пр_2 f$ содержит в точности один элемент, то есть $|R(b)| = 1$, то такая функция называется ИНЪЕКТИВНОЙ (левосторонняя однозначность соответствия).

Полностью определённая (тотальная) функция $f : A \to B$ (то есть $Пр_1 f = A$) называется ОТОБРАЖЕНИЕМ A в B. Область значений такой функции $J[A]$ обозначается в виде $f(A)$.

Если $f(A) \subset B$, то $f : A \to B$ называется ОТОБРАЖЕНИЕМ A «в» B.

Если $f(A) = B$, то $f : A \to B$ называется ОТОБРАЖЕНИЕМ A «на» B или СЮРЪЕКТИВНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ.

Если $B = A$, то отображение $f : A \to A$ называется ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ МНОЖЕСТВА A.

Отображение, являющееся сюръективным и инъективным, называется БИЕКТИВНЫМ (или БИЕКЦИЕЙ). Его свойства:

1) $Пр_1 f = A$, так как f – отображение;

2) $Пр_2 f = B$, так как f – сюръекция;

3) $|J(a)| = 1,\ a \in A$, так как f – функция;

4) $|R(b)| = 1,\ b \in B$, так как f – инъекция.

Отсюда следует, что биекция $f : A \to B$ является взаимно-однозначным соответствием множеств A и B.

Термины ИНЪЕКТИВНЫЙ, СЮРЪЕКТИВНЫЙ и БИЕКТИВНЫЙ у нас имеют обычный смысл, то есть означают соответственно «отображение, не склеивающее точки», «отображение на», «взаимно однозначное соответствие».

Если соответствие, обратное к функции $f: A \to B$, является функциональным, (что возможно, если только f инъективна в своей области определения), то она называется функцией, ОБРАТНОЙ к f, и обозначается f^{-1}.

Две функции f и g РАВНЫ, если их области определения совпадают и для любого $a \in A$ выполняется равенство $f(a) = g(a)$.

Функция типа $f: A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \to B$ называется n-МЕСТНОЙ. В этом случае принято считать, что функция имеет n аргументов: $f(a_1, a_2, ... a_n) = b$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, …, $a_n \in A_n$, $b \in B$. Например, $z: R \times R \to R$, где $z = x + y$.

Важным теоретико-множественным понятием является отношение эквивалентности.

Пусть выделено некоторое множество R пар элементов из множества X, то есть подмножество $R \subset X \times X$. Говорят, что R задает на множестве X ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ, и пишут $x \sim y$ при $(x, y) \in R$, если выполнены следующие условия:

1) $x \sim x$ для всех $x \in X$,

2) если $x \sim y$, то $y \sim x$,

3) если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$.

Читатель без труда убедится на простых примерах, что эти три условия независимы.

Отношение эквивалентности разбивает X на непересекающиеся КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ, состоящие из попарно эквивалентных элементов. Например, если $x \sim y$ только при $x = y$, то каждый класс состоит ровно из одного элемента; если, наоборот, все элементы эквивалентны, то получится лишь один класс эквивалентности.

Еще пример: пусть $x \sim y$ для $x, y \in R^1$, если $x - y \in Q$. Тогда классы эквивалентности счетны. Часто бывает полезно выбрать по представителю в каждом классе эквивалентности. Оказывается, что для осуществления этого на первый взгляд совершенно невинного желания нужна специальная аксиома.

АКСИОМА ВЫБОРА. Если дана совокупность непустых попарно непересекающихся множеств, то существует множество, содержащее ровно по одному элементу из каждого из этих множеств.

Эта аксиома не вытекает из основных положений так называемой наивной теории множеств.

6 Композиция функций. Пусть даны две функции $f: A \to B$ и $g: B \to C$. Последовательное применение функций сначала f, а затем к её образу функции g называется КОМПОЗИЦИЕЙ функций f и g и обозначается в виде $h = g \circ f$. Заметим, что для существования композиции, необходимо, чтобы $Пр_2 f \subseteq Пр_1 g$, то есть чтобы область значений функции f входила в область определения функции g.

Более формально: функция $h: A \to C$ называется композицией функций $f: A \to B$ и $g = B \to C$, если для любого $x \in A$ выполняется равенство: $h(x) = g(f(x))$. Это означает, что $g \circ f = \{(x, z) \mid$ для любого $x \in A$ существует $y \in B$ такой, что $(x, y) \in f$ и $(y, z) \in g\}$.

Часто говорят, что h получена ПОДСТАНОВКОЙ f в g. Например, $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, $g \circ f = \sin x^2$, $f \circ g = \sin^2 x$.

Сформулированное определение $h = g \circ f$ проиллюстрировано на рисунке 5.

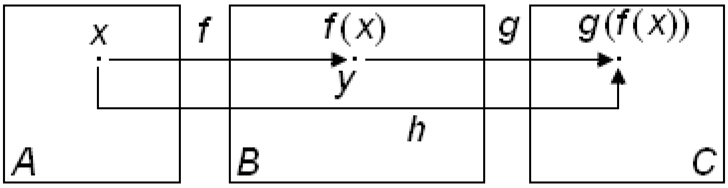


Рисунок 5 – Иллюстрация определения композиции функций

ТЕОРЕМА. Последовательность функциональных композиций ассоциативна: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

ТЕОРЕМА. Если f и g биективны, то $g \circ f$ биективна и $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Для многоместных функций композиция может рассматриваться относительно каждого из аргументов, рассматриваемого как область значений другой функции.

Пусть дана декартова степень n множества $M: M^n$ и каким-либо образом задано подмножество $R \subseteq M^n$. Множество кортежей

$(a_1, a_2, ..., a_n) \in R$, где $a_i \in M\ (i = \overline{1,n})$, называется n-МЕСТНЫМ (n-АРНЫМ) ОТНОШЕНИЕМ на множестве M. Говорят при этом, что элементы $a_1, a_2, ..., a_n$ находятся в отношении R друг с другом. Множество M, из элементов которого строятся кортежи отношения R, называется БАЗОВЫМ (ОСНОВНЫМ).

Для разных значений степени n отношений на M^n выработана своя терминология.

$n = 1$. Одноместное отношение называется УНАРНЫМ либо ПРИЗНАКОМ, либо СВОЙСТВОМ: a обладает свойством R, если $a \in R$ и $R \subseteq M$.

ПРИМЕР. M – множество попугаев, R – подмножество зеленых попугаев.

$n = 2$. Двухместные отношения называются БИНАРНЫМИ и по сути являются частным случаем соответствия $R \subseteq A \times B$ при $B = A$: $R \subseteq A^2$.

ПРИМЕР. На множестве M людей могут быть определены отношения:

1) $R_1 \subseteq M^2$ – x родственник y; 2) $R_2 \subseteq M^2$ – x старше y.

$n = 3$. Трехместные отношения называются ТЕРНАРНЫМИ. Примером тернарного отношения на том же множестве M является отношение $R \subseteq M^3$ – семья из трёх человек: отец – x, мать – y, ребёнок – z.

Определённые на множестве M^n n-арные отношения являются множествами, поэтому к ним применимы любые теоретико-множественные операции- объединение, пересечение и пр. Так, например, отрицание (дополнение) R' отношения R есть множество кортежей $(a_1, a_2, ..., a_n) \in M^n$, не принадлежащих R.

ЗАМЕЧАНИЕ. Переходя к обобщениям, в принципе можно определить отношение и на декартовом произведении несовпадающих сомножителей: $R \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. Так, определенное отношение называется НЕОДНОРОДНЫМ (ГЕТЕРОГЕННЫМ). Тогда обычные отношения $R \subseteq M^n$ на декартовой степени одного и того же множества M называются ОДНОРОДНЫМИ (ГОМОГЕННЫМИ).

Упражнения для самоконтроля (глава I)

1 Сформулируйте понятия: множество, элемент множества.

2 Назовите основные числовые множества.

3 Перечислите способы задания множеств.

4 Сформулируйте понятие конечного множества, мощности множества. Приведите пример бесконечного множества.

5 Сформулируйте понятие подмножества, собственного и несобственного подмножества, булеана.

6 Сформулируйте понятие взаимно-однозначного соответствия, эквивалентных множеств.

7 Сформулируйте понятие декартового произведения двух множеств.

8 Докажите, что любое бесконечное множество содержит некоторое счётное подмножество.

9 Докажите теорему: конечное множество А мощностью $|A| = n$ имеет 2^n различных подмножеств (включая $\varnothing$ и А). То есть, мощность множества-степени $|P(A)| = 2^n = 2^{|A|}$. Проверьте утверждение при $n = 3$.

10 Докажите, что следующие множества конечны или являются счётными:

а) множество рациональных чисел на прямой R;

б) множество попарно непересекающихся интервалов на прямой R;

в) множество интервалов с рациональными концами на прямой R;

г) множество положительных чисел, у которых любая конечная сумма не больше 1.

11 Докажите, что следующие множества имеют мощность континуума:

а) множество всех последовательностей из нулей и единиц;

б) множество всех последовательностей $\{n_i\}$ из натуральных чисел $n_i \in N$;

в) 2^N – система всех подмножеств множества натуральных чисел N.

12 Докажите теорему: прямое произведение конечного числа счётных множеств счётно. Приведите пример, наглядно демонстрирующий справедливость данной теоремы.

13 Справедливо ли утверждение: объединение счётного множества счётных множеств счётно? Если да, то докажите справедливость данного утверждения.

14 Сформулируйте понятие пересечения множеств, разбиения множества, классификации некоторого множества, разности двух множеств, симметрической разности, универсального множества, дополнения множества.

15 Сформулируйте понятие образа, прообраза элемента; образа, прообраза множества.

16 Дайте определения типов отображения (инъективное, сюръективное, биективное).

17 Докажите теорему: последовательность функциональных композиций ассоциативна: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

18 Определить тип заданного отображения и указать образ или прообраз исходного множества:

а) $X = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $y(x) = e^{\sin x}$;

б) $X = (-1;1]$; $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

в) $X = [0;2]$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ если } x > 1, \\ x - 2, \text{ если } x \le 1. \end{cases}$

г) $X = [0;\pi]$, $f(x) = \cos x$;

д) $X = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $f(x) = 2tgx - 1$;

ж) $X = [0;2\pi]$, $f(x): X \to (\cos x; \sin x)$, $Y = ?$;

з) $Y = [3;5]$, $f(x) = |x| - 2$, $X = ?$;

и) $Y = [1;\sqrt{2}]$, $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $X = ?$;

к) $Y = [1;4]$, $y = x^2$, $X = ?$.

19 Даны два множества. Постройте или обоснуйте указанное отображение:

а) даны множества $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Определите тип указанного отображения $f: A \to B$, $f = \{(a; \delta), (c; \beta), (d; \gamma), (b; \alpha), (e; \alpha)\}$.

б) $X = R$, $Y = R$, обоснуйте, что $f(x) = x^2$ не является сюръективным.

в) $X-$ колода карт, $Y-$ множество карточных мастей. $f: X \to Y$ сопоставляет любой карте её масть. Обоснуйте, что f сюръективно и не инъективно.

г) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Обоснуйте, что $f: A \to B$, $f = \{(a, \alpha); (c, \beta); (d, \gamma)\}$ не является биективным.

д) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $f = \{(a; \delta), (b; \beta), (c; \gamma), (d; \alpha)\}$. Построить f^{-1}.

е) $X = R$, $Y = [-1;1]$, $y = \sin x$, обоснуйте сюръективность $y: X \to Y$.

и) $X-$ множество студентов, $Y-$ множество стульев в аудитории. В каких случаях отображение $X \to Y$ будет 1) инъективным;
2) сюръективным; 3) биективным?

20 $X = [-1;1]$, $y = x^3$. Покажите существование обратного отображения.

21 Сколько прообразов имеет точка $(16; 81)$ при отображении $f: (x, y) \to (x^2, y^2)$.

22 Является ли отношение «слова X и Y содержат одинаковое число букв» симметричным бинарным?

23 $V = \{(2;8), (3;6), (5;10), (7;21)\}$. Проверьте бинарное отношение делимости на V.

24 $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Бинарное отношение $P = \{(x, y / x), y \in A, x \le 3\}$ и x делит y без остатка. Покажите, что количество элементов предиката P равно 7.

25 Постройте композицию $f \circ g$ отображения $f, g: R \to R$, если
$$f(x) = x^3,\ g(x) = \begin{cases} x^2, \textit{если } x > 0, \\ x + 1, \textit{если } x \le 0. \end{cases}$$

26 $X = (0;1)$, $Y = (-8;10)$. Построить $f: X \to Y$: 1) сюръективное; 2) инъективное.

27 Для множеств $A=\{2, 5, 3, 1\}$ и $B=\{3, 4, 1, 6\}$ найдите результат выполнения операции $(A\cup B)\setminus(A\Delta B)$.

28 Для множеств $A=\{1, 3, 5, 7\}$ и $B=\{2, 3, 4, 5\}$ найдите результат выполнения операции $(A\cup(A\setminus B))\setminus(B\cup(B\setminus A)$.

29 Покажите, что множества $A=\{1, 2\}$ и $B=\left\{x \mid x^2-3x+2=0\right\}$ равны.

30 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A=\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$, $B=\{2, 3, 4\}$. Найдите:

а) $A\cup B$; б) $A\cap B$; в) $A\setminus B$; г) $\bar{A}$; д) $A\Delta B$.

31 Докажите, что характеристическая функция множества обладает следующими свойствами:

а) $\chi_{A\cap B}=\chi_A\chi_B$;

б) $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B$;

в) $\chi_{A\setminus B}=\chi_A-\chi_A\chi_B$;

г) $\chi_{A\Delta B}=\chi_A+\chi_B-2\chi_A\chi_B$.

32 Докажите, что для произвольных множеств справедливы следующие равенства:

а) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$;

б) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$;

в) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;

г) $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cap D)$.

Ответы и пояснения к упражнениям главы I

13 Доказательство. Выпишем построчно элементы исходных множеств $A_1, A_2, \ldots$, тогда в полученной таблице 2 элемент a_{ij} – это j-й элемент множества A_i.

Таблица 2 – Элементы исходных множеств A1, A2,…

a_{11}	a_{12}	a_{13}	…
a_{21}	a_{22}	a_{23}	…
a_{31}	a_{32}	a_{33}	…
…	…	…	…

Перенумерация табличных элементов, реализующая взаимно-однозначное соответствие натурального ряда **N** с объединением исходных множеств, осуществляется по мере обхода элементов таблицы с помощью той же самой процедуры, которая использовалась для доказательства счётности множества положительных рациональных чисел.

17 Доказательство. Проверим равенства множеств из левой и правой частей.

1) пусть $(x,z)\in(h\circ g)\circ f$. Тогда существует y такой, что $(x,y)\in(g\circ f)$ и $(y,z)\in h$. Из $(x,y)\in(g\circ f)$ следует, что существует u такой, что $(x,u)\in f$ и $(u,y)\in g$. Таким образом, $(x,u)\in f$ и $(u,y)\in g$ и $(y,z)\in h$. Из последних двух соотношений следует, что $(y,z)\in h\circ g$, откуда, учитывая первое соотношение, получаем $(x,z)\in(h\circ g)\circ f$.

2) аналогично доказывается равенство и в обратном направлении.

18 а) заданное отображение биективно, а образом исходного множества $X=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ при отображении монотонно возрастающей функцией $y(x)=e^{\sin x}$ $(y'(x)=\cos x e^{\sin x}>0, \forall x\in X)$ будет интервал $\left(\frac{1}{\ell};\ell\right)=Y$.

б) заданное отображение сюръективно. На промежутке $(-1;1]$ функция $y(x)=\sqrt{1-x^2}$ непрерывна и достигает своего наименьшего и наибольшего значения в точках $x=1$ и $x=0$ соответственно: $y_{наим}=y(1)=0$, $y_{наиб}=y(0)=1$ (рисунок 6). Поэтому образом промежутка $(-1;1]$ при отображении $y(x)=\sqrt{1-x^2}$ будет отрезок $[0;1]=Y$.

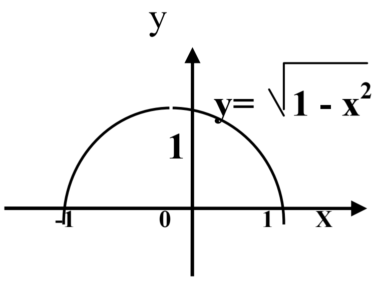


Рисунок 6 – Рисунок к задаче 18 б)

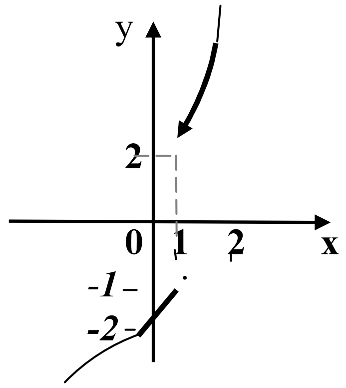


Рисунок 7 – Рисунок к задаче 18 в)

в) заданное отображение биективно. Построим график функции $f(x)=\begin{cases} x^2+1, \text{\textit{если} } x>1, \\ x-2, \text{\textit{если} } x\le 1. \end{cases}$ Образом исходного множества $X=[0;2]$ будет множество $Y=[-2;-1]\cup(2;5]$ (рисунок 7).

г) заданное отображение биективно. Построим график функции $f(x)=\cos x$ на отрезке $[0;\pi]$. Образом исходного множества $X=[0;\pi]$ будет множество $Y=[-1;1]$ (рисунок 8).

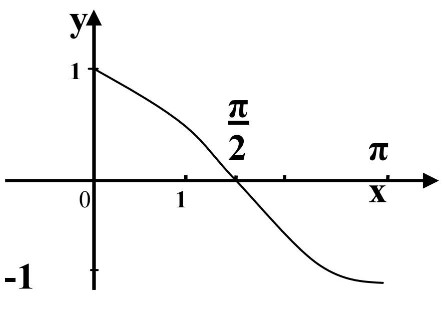


Рисунок 8 – Рисунок к задаче 18 г)

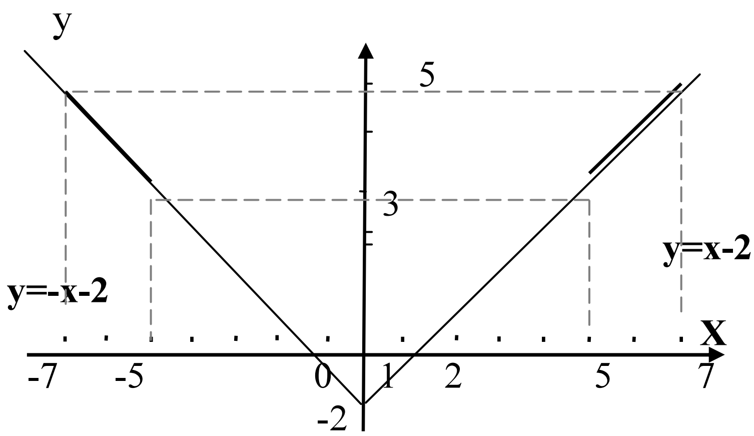


Рисунок 9 – Рисунок к задаче 18 з)

д) заданное отображение биективно. На отрезке $X = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ функция $f(x) = 2tgx - 1$ непрерывна, монотонно возрастает $(f'(x) = \frac{2}{\cos^2 x} > 0, \forall x \in X)$ и достигает своего наименьшего и наибольшего значений в точках $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{4}$ соответственно: $y_{наим} = y(0) = -1$, $y_{наиб} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Поэтому образом отрезка $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ при отображении $f(x) = 2tgx - 1$ будет отрезок $[-1;1] = Y$.

ж) заданное отображение сюръективно. При $X = [0;2\pi]$, $f(x) \sim \begin{cases} u = \cos x, \\ v = \sin x, \ u \in [-1;1] \end{cases}$ и $v \in [-1;1]$, причём по основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Тогда Y представляет собой единичную окружность с центром в начале координат, $u^2 + v^2 = 1$.

з) заданное отображение $X \to Y$ сюръективно. Построим график функции $f(x) = |x| - 2$. Прообразом множества $Y = [3;5]$ при отображении $f(x) = |x| - 2$ являются те точки x, образы которых при данном отображении попадают в отрезок $[3;5]$. В нашем случае это множество $X = [-7;-5] \cup [5;7]$ (рисунок 9).

и) заданное отображение сюръективно. Прообразом множества $[1;\sqrt{2}]$ при отображении $y = \sqrt{x^2 + 1}$ являются те точки x, образы которых попадают в отрезок $[1;\sqrt{2}]$, то есть множество $X = [-1;1]$ (рисунок 10).

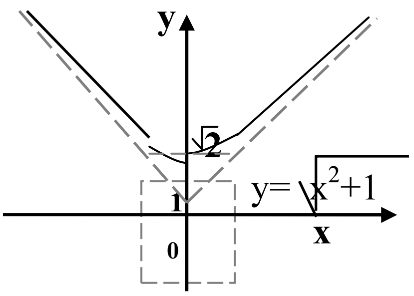


Рисунок 10 – Рисунок к задаче 18 и)

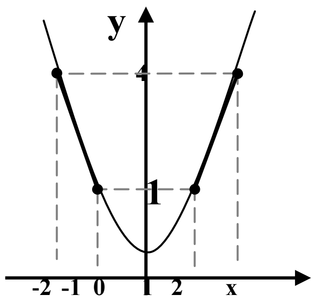


Рисунок 11 – Рисунок к задаче 18 к)

к) заданное отображение сюръективно. Построим график функции $y = x^2$. Прообразом множества $Y = [1;4]$ при отображении $y = x^2$ являются те точки x, которые при данном отображении попадают в отрезок $[1;4]$. В нашем случае это множество $X=[-2;-1]\cup[1;2]$ (рисунок 11).

19 а) сюръективное.

б) $f(x)=x^2$ не является сюръективным, так как, например, для $y=-1$ не существует $x\in R$ такого, что $x^2=-1$.

в) отображение $f:X\to Y$, сопоставляющее любой карте её масть, сюръективно, так как любая карта обладает единственной мастью, но не инъективно, так как несколько карт имеют одинаковую масть.

г) f определено не на всём множестве A, следовательно, не является взаимно однозначным.

д) обратным отображением для данного биективного является: $f^{-1}=\{(\alpha;d),(\beta;b),(\gamma;c),(\delta;a)\}$.

е) отображение $y=\sin x$ сюръективно, так как любому значению $y\in Y$ соответствует $x=(-1)^n\arcsin y+\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}$.

и) 1) отображение $X\to Y$ инъективно в том случае, если каждому стулу в аудитории соответствует один студент, то есть количество стульев в аудитории не меньше количества студентов. 2) сюръективно, если стульев не больше, чем студентов. 3) биективным отображение $X\to Y$ будет в том и только в том случае, если количество стульев в аудитории и количество студентов совпадают.

20 Функция $y=x^3$ имеет обратную функцию, так как она непрерывна и монотонно возрастает ($y'=3x^2>0,\ \forall x\in X$) на $[-1;1]$. Следовательно, $x=\sqrt[3]{y}$ задает обратное отображение на $Y=[-1;1]$.

21 Из соотношений $x^2=16$ и $y^2=81$ получаем, что $x=\pm4$ и $y=\pm9$. Тогда точка $(16;81)$ будет иметь четыре прообраза: $(4;9)$, $(-4;9)$, $(4;-9)$, $(-4;-9)$.

22 Отношение A симметрично, если из того, что xAy, следует yAx, то есть отношение «слова X и Y содержат одинаковое число букв» является симметричным бинарным.

23 Отношение делимости на множестве натуральных чисел – бинарное отношение, которое состоит из пар вида $(x;y)$, где x делит y нацело. Следовательно, бинарное отношение делимости выполнено на V.

24 Решение. Так как множество A состоит из восьми элементов, то декартово произведение $A \times A$ будет содержать $K = 8 \cdot 8 = 64$ парных элемента. Предикат P является подмножеством множества $A \times A$. Нам из этих 64 парных элементов надо выбрать только те, что удовлетворяют условиям нашего предиката, то есть первый элемент пары не должен быть больше трёх, а второй элемент пары должен делиться на первый без остатка. Тогда этот предикат $P = \{(2;2),(2;4),(2;6),(2;8),(3;3),(3;6),(3;9)\}$.

25 $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^6, \text{ если } x > 0, \\ (x+1)^3, \text{ если } x \le 0. \end{cases}$

26 1) если через точку P и $\forall x \in (0;1)$ провести прямую, которая ставит в соответствие этому x точку $y \in (-8;10)$, и, наоборот, если через точку P и $\forall y \in (-8;10)$ провести прямую, которая ставит в соответствие этому y точку $x \in (0;1)$, таким образом, как показано на рисунке 12, то получим биективное, а следовательно, и сюръективное отображение.

2) если через точку P и $\forall x \in (0;1)$ провести прямую, которая ставит в соответствие точку $y \in (-8;9)$, то есть $Y_1 = (-8;9) \subset Y = (-8;10)$, то получим инъективное отображение (рисунок 13).

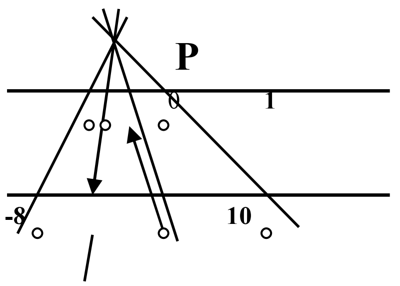


Рисунок 12 – Иллюстрация биективного и сюръективного отображений к задаче 27

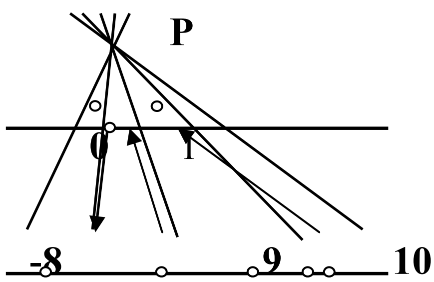


Рисунок 13 – Иллюстрация инъективного отображения к задаче 27

27 Результатом выполнения операции $(A \cup B)$ является множество $C_1 = (A \cup B) = \{2, 5, 3, 1, 4, 6\}$, а результат операции $(A \Delta B)$ выражается множеством $C_2 = (A \Delta B) = \{2, 5, 4, 6\}$. Тогда разность множеств C_1 и C_2 будет множество $C = C_1 \setminus C_2 = \{1, 3\}$.

28 Результатом выполнения операции $(A \cup (A \setminus B))$ является множество A, а результатом операции $(B \cup (B \setminus A)$ – множество B. Тогда $(A \cup (A \setminus B)) \setminus (B \cup (B \setminus A) = A \setminus B = \{1, 7\}$.

29 $A = B$, так как оба множества состоят из одних и тех же элементов $\{1, 2\}$.

30 а) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$; б) $A \cap B = \{2, 3\}$; в) $A \setminus B = \{1, 6, 7, 8\}$;

г) $\bar{A} = \{4, 5, 9, 10\}$; д) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 6, 7, 8\} \cup \{4\} = \{1, 4, 6, 7, 8\}$.

Глава II. Метрические и топологические пространства

1 Метрическое пространство. Одной из основных операций математического анализа является предельный переход. В основе этой операции лежит тот факт, что на числовой прямой определено расстояние от одной точки до другой. Многие фундаментальные факты функционального анализа не связаны с алгебраической природой действительных чисел, а опираются лишь на понятие расстояния. Обобщая представление о числах как о множестве, в котором введено расстояние между элементами, мы приходим к понятию метрического пространства – одному из важнейших понятий современной математики.

МЕТРИЧЕСКИМ ПРОСТРАНСТВОМ называется пара (X,ρ), состоящая из некоторого множества (пространства) X элементов (точек) и расстояния, т. е. однозначной, неотрицательной, действительной функции $\rho(x,y)$, определенной для любых x и y из X и подчиненной следующим трем аксиомам:

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$,
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (аксиома симметрии),
3) $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (неравенство треугольника), $\forall z \in X$.

Приведем примеры некоторых метрических пространств, играющих в анализе весьма важную роль.

1 Положив для элементов произвольного множества

$\rho(x,\ y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \ne y, \end{cases}$ мы получим, очевидно, метрическое пространство.

Его можно назвать пространством изолированных точек. Все три аксиомы очевидно проверяются.

2 Множество действительных чисел с расстоянием $\rho(x,y) = |x - y|$ образует метрическое пространство R^1.

3 Множество комплексных чисел с расстоянием $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| =$

$= |z_1 - z_3 + z_3 - z_2| \le |z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|$ – метрическое пространство.

4 Множество упорядоченных групп (кортежей) из n действительных чисел $x = (x_1, x_2, ... x_n)$ с расстоянием

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2} \qquad (1)$$

называется n-МЕРНЫМ АРИФМЕТИЧЕСКИМ ЕВКЛИДОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ R^n.

Справедливость аксиом 1) и 2) для R^n очевидна. Покажем, что в R^n выполнена и аксиома треугольника.

Пусть $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$, $z=(z_1,z_2,...,z_n)$; тогда аксиома треугольника записывается в виде

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k-x_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k-y_k)^2}\,. \qquad (2)$$

Полагая $y_k-x_k=a_k$, $z_k-y_k=b_k$, получаем $z_k-x_k=a_k+b_k$, а неравенство (2) примет при этом вид

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2}\,. \qquad (3)$$

Но это неравенство сразу следует из известного неравенства Коши[3]-Буняковского[4]:

$$(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k)^2 \le \sum_{k=1}^{n}{a_k}^2\cdot\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2\,. \qquad (4)$$

Действительно, в силу этого неравенства имеем

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2 \le \sum_{k=1}^{n}{a_k}^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2}+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2=$$

$$=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2}\right)^2$$; тем самым неравенство (3), а следовательно и (2) доказаны.

5 Рассмотрим то же самое множество упорядоченных групп из n действительных чисел $x=(x_1,x_2,...x_n)$, но расстояние определим в нём формулой

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|\,. \qquad (5)$$

[3] **Огюсте́н Луи́ Коши́** (1789-1857) – великий французский математик и механик. Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику и многие другие области математики; один из основоположников механики сплошных сред.

[4] **Буняко́вский, Виктор Яковлевич** (1804-1889) – русский математик, внес весомый вклад в развитие теории чисел и теории вероятностей.

Справедливость аксиом 1)-3) здесь очевидна. Обозначим это метрическое пространство символом R_1^n.

6 Возьмем снова то же самое множество, что и в примере 4, и определим расстояние между его элементами формулой

$$\rho_0(x, y) = \max_{1\le k\le n} |y_k - x_k|. \tag{6}$$

Справедливость аксиом 1)-3) очевидна. Это пространство, которое мы обозначим R_0^n, во многих вопросах анализа не менее удобно, чем евклидово пространство R^n.

Последние три примера показывают, что один и тот же запас точек может быть по-разному метризован.

7 Множество C [a, b] всех непрерывных действительных функций,

определенных на сегменте [a, b], с расстоянием

$$\rho(f, g) = \max_{a\le k\le b} |g(t) - f(t)|, \tag{7}$$

также образует метрическое пространство. Аксиомы 1)-3) проверяются непосредственно. Это пространство играет очень важную роль в анализе. Мы будем его обозначать тем же символом C [a, b], что и само множество точек этого пространства.

8 Обозначим через l_2 метрическое пространство, точками которого служат всевозможные последовательности $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ действительных чисел, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$ (сходящиеся знакопостоянные числовые ряды), а расстояние определяется формулой

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2}. \tag{8}$$

Из элементарного неравенства $(x_k \pm y_k)^2 \le 2(x_k^2 + y_k^2)$ следует, что функция $\rho(x, y)$ имеет смысл для всех $x, y \in l_2$, т. е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2$ сходится, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty.$$

Покажем теперь, что функция (8) удовлетворяет аксиомам метрического пространства. Аксиомы 1) и 2) очевидны, а аксиома треугольника принимает здесь вид

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(z_k - x_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(z_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k - x_k)^2}\,. \tag{9}$$

В силу сказанного выше каждый из трех написанных здесь рядов сходится. С другой стороны, при каждом n справедливо неравенство

$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - x_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2}$ (см. пример 5). Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем (9), т.е. неравенство треугольника в l_2.

9 Рассмотрим, как и в примере 7, совокупность всех функций, непрерывных на отрезке [a, b], но расстояние определим иначе, а именно, положим

$$\rho(x,y) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2\,dt\right)^{1/2}. \tag{10}$$

Такое метрическое пространство мы будем обозначать C^2 [a, b] и называть ПРОСТРАНСТВОМ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С КВАДРАТИЧНОЙ МЕТРИКОЙ. Здесь аксиомы 1) и 2) метрического пространства очевидны, а аксиома треугольника непосредственно вытекает из интегральной формы неравенства Коши-Буняковского:

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)dt\right)^2 \le \int_a^b x^2(t)dt \int_a^b y^2(t)dt\,.$$

10 Рассмотрим множество всех ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ действительных чисел. Положив

$$\rho(x,y) = \sup_k |y_k - x_k|\,, \tag{11}$$

мы получим метрическое пространство, которое обозначим m. Справедливость аксиом 1)-3) очевидна.

11 Множество упорядоченных групп (кортежей) из n действительных чисел с расстоянием

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|^p\right)^{1/p}, \tag{12}$$

где p – любое фиксированное число ≥ 1, представляет собой метрическое пространство, которое мы обозначим R_p^n. Справедливость аксиом 1) и 2) здесь опять-таки очевидна. Проверим аксиому 3). Пусть $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$, $z=(z_1,z_2,...,z_n)$ – три точки из R_p^n. Положим $y_k-x_k=a_k$, $z_k-y_k=b_k$, тогда неравенство $\rho_p(x,z)\leq\rho_p(x,y)+\rho_p(y,z)$, справедливость которого мы должны установить, примет вид

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k-b_k|^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}. \tag{13}$$

Это так называемое НЕРАВЕНСТВО МИНКОВСКОГО[5]. При $p=1$ неравенство Минковского очевидно (модуль суммы не превосходит суммы модулей), поэтому будем считать, что $p>1$. При $p<1$ неравенство Минковского не имеет места. Иначе говоря, если бы мы захотели рассматривать пространство R_p^n при $p<1$, то в таком пространстве не была бы выполнена аксиома треугольника.

12 Укажем ещё один интересный пример метрического пространства. Его элементами являются всевозможные последовательности действительных чисел, $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ такие, что $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty$, где $p\geq 1$– некоторое фиксированное число, а расстояние определяется формулой

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k-x_k|^p\right)^{1/p}. \tag{14}$$

Это метрическое пространство мы обозначим l_p.

В силу неравенства Минковского (13) имеем при любом n

[5] **Минковский, Герман** (1864-1909) – немецкий математик, разработавший геометрическую теорию чисел и геометрическую четырёхмерную модель теории относительности.

$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|y_k - x_k\right|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left|y_k\right|^p\right)^{1/p}$. Так как, по предположению, ряды $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k\right|^p$ сходятся, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|y_k - x_k\right|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left|y_k\right|^p\right)^{1/p} < \infty . \tag{15}$$

Таким образом, доказано, что формула (14), определяющая расстояние в l_p, действительно имеет смысл для любых $x, y \in l_p$. Одновременно неравенство (15) показывает, что в l_p выполнена аксиома треугольника. Остальные аксиомы очевидны.

Неограниченное количество дальнейших примеров дает следующий прием. Пусть R = (X, ρ) — метрическое пространство и M – любое подмножество в X. Тогда M с той же функцией ρ(x,y), которую мы считаем теперь определенной для x и y из M, тоже представляет собой метрическое пространство; оно называется подпространством пространства R.

2 Непрерывные отображения метрических пространств. Изометрия. Пусть X и Y– два метрических пространства и f– отображение пространства X в Y. Таким образом, каждому $x \in X$ ставится в соответствие некоторый элемент $y = f(x)$ из Y. Это отображение называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$ таких, что $\rho(x, x_0) < \delta$, выполнено неравенство $\rho_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ (здесь ρ– расстояние в X, а ρ_1– расстояние в Y). Если отображение f непрерывно во всех точках пространства X, то говорят, что f НЕПРЕРЫВНО на X. Если X и Y– числовые множества, то есть f– числовая функция, определенная на некотором подмножестве X числовой оси, то приведенное определение непрерывности отображения превращается в хорошо известное из элементарного анализа определение непрерывности функции.

Аналогично можно определить непрерывную функцию (отображение) f от нескольких переменных $x_1 \in X_1$, …, $x_n \in X_n$ (где X_1, …, X_n – метрические пространства) со значениями в метрическом пространстве Y.

Заметим в этой связи, что само расстояние $\rho(x, y)$, если рассматривать его как функцию переменных x и y из X, непрерывно. Это сразу же следует из неравенства $|\rho(x, y) - \rho(x_0, y_0)| \le \rho(x_0, x) + \rho(y_0, y)$, легко выводимого из неравенства треугольника.

Если отображение $f: X \to Y$ взаимно однозначно, то существует обратное отображение $x = f^{-1}(y)$ пространства Y на пространство X. Если отображение f взаимно однозначно и взаимно непрерывно (то есть f и f^{-1} – непрерывные отображения), то оно называется ГОМЕОМОРФНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ или ГОМЕОМОРФИЗМОМ, а сами пространства X и Y, между которыми можно установить гомеоморфизм, называются ГОМЕОМОРФНЫМИ между собой. Примером гомеоморфных метрических пространств могут служить вся числовая прямая $(-\infty; \infty)$ и интервал, например, интервал $(-1;1)$. В этом случае гомеоморфизм устанавливается формулой $y = \frac{2}{\pi} arctgx$.

Важным частным случаем гомеоморфизма является так называемое изометрическое отображение.

Говорят, что биекция f между метрическими пространствами $R = (X, \rho)$ и $R' = (Y, \rho')$ является ИЗОМЕТРИЕЙ, если $\rho(x_1, x_2) = \rho'(f(x_1), f(x_2))$ для любых $x_1, x_2 \in R$. Пространства R и R', между которыми можно установить изометрическое соответствие, называются ИЗОМЕТРИЧНЫМИ.

Изометрия пространств R и R' означает, что метрические связи между их элементами одни и те же; различной может быть лишь природа их элементов, что с точки зрения теории метрических пространств несущественно. В дальнейшем изометричные между собой пространства мы будем рассматривать просто как тождественные.

3 Определение и примеры топологических пространств. Пусть X – некоторое множество, пространство-носитель. ТОПОЛОГИЕЙ в X называется любая система τ его подмножеств G, удовлетворяющая двум требованиям:

1^0 Само множество X и пустое множество $\varnothing$ принадлежат τ.

2^0 Всякая сумма $\underset{\alpha}{\cup} G_\alpha$ и пересечение $\overset{n}{\underset{k=1}{\cap}} G_k$ любого конечного числа множеств из τ принадлежат τ.

Множество X с заданной в нем топологией τ, то есть пара (X, τ), называется ТОПОЛОГИЧЕСКИМ ПРОСТРАНСТВОМ.

Множества, принадлежащие системе τ, называются ОТКРЫТЫМИ.

Так же, как метрическое пространство есть совокупность множества точек-«носителя» и введенной в этом множестве метрики, топологическое пространство есть совокупность множества точек и введенной в нём топологии. Таким образом, задать топологическое пространство – это значит задать некоторое множество X и задать в нем топологию τ, то есть указать те подмножества, которые считаются в X открытыми.

Ясно, что в одном и том же множестве X можно вводить разные топологии, превращая его тем самым в различные топологические пространства. Топологическое пространство, то есть пару (X, τ), мы будем обозначать одной буквой, например, Т. Элементы топологического пространства мы будем называть ТОЧКАМИ.

Множества Т$\backslash G$, дополнительные к открытым, называются ЗАМКНУТЫМИ множествами топологического пространства Т. Из аксиом 1° и 2° в силу соотношений двойственности (гл. I, стр.6) вытекает, что:

1 Пустое множество $\varnothing$ и всё Т замкнуты.

2 Пересечение любого (конечного или бесконечного) набора и сумма конечного числа замкнутых множеств замкнуты.

На основе этих определений естественно вводятся во всяком топологическом пространстве понятия окрестности, точки прикосновения, замыкания множества и т. д. Именно:

ОКРЕСТНОСТЬЮ ТОЧКИ $x \in T$ называется всякое открытое множество $G \subset T$, содержащее точку x; точка $x \in T$ называется ТОЧКОЙ

ПРИКОСНОВЕНИЯ множества $M \subset T$, если каждая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку из M; x называется ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧКОЙ множества M, если каждая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку из M, отличную от x. Совокупность всех точек прикосновения множества M называется ЗАМЫКАНИЕМ множества M и обозначается символом $[M]$. Можно доказать, что замкнутые множества (определенные нами выше как дополнения открытых), и только они, удовлетворяют условию $[M] = M$. Как и в случае метрического пространства, $[M]$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащее M.

Примеры:

1 Открытые множества во всяком метрическом пространстве удовлетворяют аксиомам 1° и 2° определения топологического пространства. Таким образом, всякое метрическое пространство является и топологическим пространством.

2 Пусть T – произвольное множество. Будем считать открытыми все его подмножества. Аксиомы 1° и 2° при этом, очевидно, выполнены, то есть мы действительно получаем топологическое пространство. В нем все множества одновременно и открыты, и замкнуты, и, значит, каждое из них совпадает со своим замыканием. Такой ТРИВИАЛЬНОЙ топологией обладает, например, метрическое пространство, указанное в предыдущем примере.

3 В качестве другого крайнего случая рассмотрим в произвольном множестве X тривиальную топологию, состоящую только из двух множеств: всего X и пустого множества $\varnothing$. Здесь замыкание каждого непустого множества есть всё X. Такое топологическое пространство можно назвать «пространством СЛИПШИХСЯ точек».

4 Пусть T состоит из двух точек a и b, причем открытыми множествами мы считаем всё T, пустое множество и множество, состоящее из одной точки b. Аксиомы 1° и 2° здесь выполнены. В этом пространстве (которое часто называют СВЯЗНЫМ ДВОЕТОЧИЕМ) замкнуты такие подмножества: всё T, пустое множество и точка a. Замыкание одноточечного множества $\{a\}$ есть всё T.

Самый прямой способ задать топологию в некотором пространстве состоит в том, чтобы непосредственно указать те множества, которые мы считаем открытыми. Набор этих множеств должен удовлетворять требованиям 1° и 2°.

4 Линейные пространства. Понятие линейного пространства является одним из важнейших в современной математике. Множество всех векторов плоскости или трехмерного пространства и, что особенно важно, различные множества функций (функциональные пространства) можно охарактеризовать одними и теми же общими свойствами линейности. Следуя принятому в математике аксиоматическому подходу, выделяют основные из этих свойств в систему аксиом, определяющих общее понятие линейного пространства.

Определение 1. Непустое множество L элементов $x, y, z,...$ называется ЛИНЕЙНЫМ или ВЕКТОРНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ, если оно удовлетворяет условиям:

I Для любых двух элементов $x, y \in L$ однозначно определен третий элемент $z \in L$, называемый их СУММОЙ и обозначаемый $x + y$, причем

1) $x + y = y + x$ (коммутативность),

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность),

3) в L существует такой элемент 0, что $x + 0 = x$ для всех $x \in L$ (существование нуля),

4) для каждого $x \in L$ существует такой элемент $-x$, что $x + (-x) = 0$ (существование противоположного элемента).

II Для любого числа α и любого элемента $x \in L$ определен элемент $\alpha x \in L$ (ПРОИЗВЕДЕНИЕ элемента x на число α), причем

1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,

2) $1 \cdot x = x$,

3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

В зависимости от того, какой запас чисел (все комплексные или только действительные) используется, различают комплексные и действительные линейные пространства). Всюду, где не оговорено противное, наши построения будут верны как для действительных, так и для комплексных пространств.

Заметим, что всякое комплексное линейное пространство можно рассматривать как некоторое действительное пространство, если ограничиться в нем умножением векторов на действительные числа.

Рассмотрим некоторые примеры линейных пространств, предоставив читателю (в виде упражнений) проверить для каждого из них сформулированные выше аксиомы.

1 Прямая линия R^1, то есть совокупность действительных чисел, с обычными арифметическими операциями сложения и умножения, представляет собой линейное пространство.

2 Совокупность всевозможных наборов n (действительных или комплексных) чисел $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, где сложение и умножение на число определяются формулами:

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n),$$

$$\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(\alpha\, x_1,\alpha\, x_2,\ldots,\alpha\, x_n),$$

также является линейным пространством. Оно называется действительным R^n или комплексным C^n АРИФМЕТИЧЕСКИМ ПРОСТРАНСТВОМ.

3 Непрерывные (действительные или комплексные) функции на некотором отрезке $[a;b]$ с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа образуют линейное пространство $C[a;b]$, являющееся одним из важнейших для анализа.

4 Пространство l_2, в котором элементами служат последовательности чисел (действительных или комплексных) $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty, \tag{16}$$

с операциями

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)+(y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n,\ldots),$$

$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (\alpha\, x_1, \alpha\, x_2, ..., \alpha\, x_n, ...),$$

является линейным пространством. Тот факт, что сумма двух последовательностей, удовлетворяющих условию (16), также удовлетворяет этому условию, вытекает из элементарного неравенства $(a_1 + a_2)^2 \le 2a_1^2 + 2a_2^2$.

5 Сходящиеся последовательности $x = (x_1, x_2, ...)$ с покоординатными операциями сложения и умножения на числа образуют линейное пространство. Обозначим его c.

6 Последовательности, сходящиеся к 0, с теми же операциями сложения и умножения, также образуют линейное пространство. Обозначим его c_0.

7 Совокупность m всех ограниченных числовых последовательностей с теми же операциями сложения и умножения на числа, что и в примерах 4-6, тоже представляет собой линейное пространство.

8 Наконец, совокупность R^∞ всевозможных числовых последовательностей с теми же самыми операциями сложения и умножения на числа, что и в примерах 4-7, тоже является линейным пространством.

Поскольку свойства линейного пространства – это свойства операций сложения элементов и умножения их на числа, естественно ввести следующее определение.

Определение 2. Линейные пространства L и L^* называются ИЗОМОРФНЫМИ, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, которое согласовано с операциями в L и L^*.

Это означает, что из $x \leftrightarrow x^*$ и $y \leftrightarrow y^*$; $(x, y \in L, x^*, y^* \in L^*)$ следует

$x + y \leftrightarrow x^* + y^*$ и $\alpha\, x \leftrightarrow \alpha\, x^*$ (α – произвольное число).

Изоморфные пространства можно рассматривать как различные реализации ОДНОГО И ТОГО ЖЕ пространства. Примерами изоморфных линейных пространств могут служить арифметическое n-мерное пространство (действительное или комплексное) и пространство всех многочленов степени $\le n-1$ (соответственно с действительными или комплексными коэффициентами) с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на числа (докажите изоморфность!).

Определение 3. Элементы $x, y, ..., w$ линейного пространства L называются ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫМИ, если существуют такие числа $\alpha, \beta, ..., \lambda,$ не все равные 0, что

$$\alpha\, x + \beta\, y + ... + \lambda w = 0. \qquad (17)$$

В противном случае эти элементы называются ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫМИ. Иначе говоря, элементы $x, y, ..., w$ линейно независимы, если из равенства (17) вытекает, что $\alpha = \beta = ... = \lambda = 0.$

БЕСКОНЕЧНАЯ система элементов $x, y, ...$ пространства L называется ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМОЙ, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Если в пространстве L можно найти n линейно независимых элементов, а любые n + 1 элементов этого пространства линейно зависимы, то говорят, что пространство L имеет РАЗМЕРНОСТЬ n. Если же в L можно указать систему из произвольного конечного числа линейно независимых элементов, то говорят, что пространство L БЕСКОНЕЧНОМЕРНО. БАЗИСОМ в n-мерном пространстве L называется любая система из n линейно независимых элементов. Пространства R^n в действительном случае и C^n в комплексном имеют, как легко проверить, размерность n, оправдывая тем самым свое название.

5 Нормированные пространства. Линейное пространство X над множеством действительных чисел R (комплексных чисел C) называется НОРМИРОВАННЫМ пространством, если каждому $x \in X$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$, называемое НОРМОЙ x, так, что выполнены следующие три аксиомы:

1) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ для любого $x \in X$ и любого действительного (комплексного) числа λ;

3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in X$.

Всякое нормированное пространство становится метрическим пространством, если ввести в нём расстояние $\rho(x,y)=\|x-y\|$.

ОТКРЫТЫМ ШАРОМ с центром в точке $x_0\in X$ и радиусом $r>0$ называется множество $S_r(x_0)=\{x\in X:\|x-x_0\|<r\}$. ЗАМКНУТЫМ ШАРОМ с центром в точке $x_0\in X$ и радиусом $r>0$ называется множество $\bar{S}_r(x_0)=\{x\in X:\|x-x_0\|\le r\}$. СФЕРОЙ с центром в точке $x_0\in X$ и радиусом $r>0$ называется множество $o_r(x_0)=\{x\in X:\|x-x_0\|=r\}$.

Множество $A\subset X$ называется ОГРАНИЧЕННЫМ, если его можно заключить в некоторый шар (открытый или замкнутый) конечного радиуса. ДИАМЕТРОМ множества $A\subset X$ называется число $diam\,A=\sup\limits_{x,y\in A}\|x-y\|$. РАССТОЯНИЕМ ОТ ТОЧКИ $x\in X$ ДО МНОЖЕСТВА $A\subset X$ называется число $\rho(x,A)=\inf\limits_{y\in A}\|x-y\|$. РАССТОЯНИЕМ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ $A,B\subset X$ называется число $\rho(A,B)=\inf\limits_{x\in A,y\in B}\|x-y\|$.

Множество $M\subset X$ называется ОТКРЫТЫМ, если для любого $x_0\in M$ существует $r>0$ такое, что $S_r(x_0)\subset M$. Точка $a\in M$ называется ПРЕДЕЛЬНОЙ точкой множества $M\subset X$, если в любом шаре $S_r(a)$ найдётся точка $x\in M$ $(x\neq a)$. Множество всех предельных точек множества M обозначается $M^{/}$. Множество $M\cup M^{/}$ называется ЗАМЫКАНИЕМ множества M и обозначается $\overline{M}$. Множество $M\subset X$ называется ЗАМКНУТЫМ, если $\overline{M}=M$.

Последовательность $x_n\in X\ (n\in N)$ называется СХОДЯЩЕЙСЯ к элементу $x_0\in X$ (записывают $x_n\to x_0$), если $\|x_n-x_0\|\to 0$ при $n\to\infty$.

Множество $L\subset X$ называется ЛИНЕЙНЫМ МНОГООБРАЗИЕМ, если из $x,y\in L$ следует, что $x+y\in L$ и $\lambda x\in L$ для любого числа λ. Если линейное многообразие является замкнутым в X множеством, то оно называется ПОДПРОСТРАНСТВОМ. АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СУММОЙ множеств A и B пространства X называется множество $A+B$ всевозможных сумм вида $a+b$, где $a\in A$, $b\in B$. Пусть $x_0\in X$ – произвольный элемент, а $L \subset X$ – линейное многообразие. Множество $x_0 + L$ называется АФФИННЫМ МНОГООБРАЗИЕМ. Пусть L, M – подпространства X такие, что любой элемент $x \in X$ единственным образом представим в виде $x = u + v$, где $u \in L$, $v \in M$. В этом случае говорят, что X есть ПРЯМАЯ СУММА L и M, и записывают $X = L \oplus M$.

ОТРЕЗКОМ, соединяющим точки $x, y \in X$, называется множество точек вида $\alpha x + \beta y$, где $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Множество $A \subset X$ называется ВЫПУКЛЫМ, если отрезок, соединяющий любые две точки множества A, целиком лежит в A.

Множество $A \subset X$ называется ВСЮДУ ПЛОТНЫМ в X, если $\overline{A} = X$. Пространство X называется СЕПАРАБЕЛЬНЫМ, если в нём существует счётное всюду плотное множество. Множество $A \subset X$ называется НИГДЕ НЕ ПЛОТНЫМ в X, если в каждом шаре $S \subset X$ содержится другой шар S_1, не содержащий точек A.

Пространство X называется СТРОГО НОРМИРОВАННЫМ, если в нём равенство $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$ возможно только для $y = \lambda x$, где $\lambda > 0$.

Отображение $F : X \to Y$ линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y называется НЕПРЕРЫВНЫМ В ТОЧКЕ $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in S_\delta(x_0)$ $f(x) \in S_\varepsilon(f(x_0))$. Отображение $F : X \to Y$ называется НЕПРЕРЫВНЫМ, если оно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$. Отображение $F : X \to Y$ называется РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫМ, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x_0 \in X$ из $x \in S_\delta(x_0)$ следует $f(x) \in S_\varepsilon(f(x_0))$.

Рассмотрим некоторые примеры нормированных пространств.

1 Прямая линия R^1 становится нормированным пространством, если для всякого числа $x \in R^1$ положить $\|x\| = |x|$.

2 Если в действительном n-мерном пространстве R^n с элементами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ положить

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \,, \tag{18}$$

то все аксиомы нормы будут выполнены.

Формула $\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ определяет в R^n метрику, которую мы в этом пространстве уже рассматривали.

В этом же линейном пространстве можно ввести норму

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \tag{19}$$

или норму

$$\|x\|_0 = \max_{1 \le k \le n} |x_k| \,. \tag{20}$$

Эти нормы определяют в R^n метрики, которые мы рассматривали в примерах 5 и 6 пункта 1 гл. II. Проверка того, что в каждом из этих случаев аксиомы нормы действительно выполнены, не составляет труда.

В комплексном n-мерном пространстве C^n можно ввести норму

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

или любую из норм (19) или (20).

3 В пространстве $C_{[a,b]}$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ определим норму формулой

$$\|f\| = \max_{a \le t \le b} |f(t)| \,. \tag{21}$$

Соответствующее расстояние уже рассматривалось в примере 7 пункта 1 гл. II.

4 Пусть m – пространство ограниченных числовых последовательностей

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

Положим

$$\|x\| = \sup_n |x_n| \,. \tag{22}$$

Условия 1)-3) определения нормы здесь, очевидно, выполнены.

Метрика, которая индуцируется в m этой нормой, совпадает с той, которую мы уже рассматривали (пример 10 пункта 1 гл. II).

6 Евклидовы пространства. Один из хорошо известных способов введения нормы в линейном пространстве – это задание в нем скалярного произведения. Напомним, что СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ в действительном линейном пространстве R называется действительная функция (x, y), определенная для каждой пары элементов $x, y \in R$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $(x, y) = (y, x)$,

2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,

4) $(x, x) \geq 0$, причём $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.

Линейное пространство с фиксированным в нем скалярным произведением называется ЕВКЛИДОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ. В евклидовом пространстве R вводится норма с помощью формулы

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Из свойств 1)- 4) скалярного произведения следует, что все аксиомы нормы при этом выполнены.

Действительно, выполнение аксиом 1) и 3) нормы очевидно, а выполнение аксиомы 2) (неравенство треугольника) вытекает из неравенства КОШИ-БУНЯКОВСКОГО

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \tag{23}$$

которое мы сейчас докажем.

Рассмотрим квадратный трехчлен от действительной переменной λ, неотрицательный при всех значениях λ:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 (x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) = \|x\|^2 \lambda^2 + 2\lambda(x, y) + \|y\|^2.$$

Так как это выражение представляет собой скалярный квадрат некоторого вектора, то всегда $\varphi(\lambda) \geq 0$. Следовательно, дискриминант этого квадратного трехчлена меньше или равен нулю, то есть $4(x, y)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$, что и требовалось доказать.

Неравенство Коши-Буняковского как раз и выражает не что иное, как неположительность дискриминанта этого квадратного трехчлена $\varphi(\lambda)$.

Отметим, что в евклидовом пространстве сумма, произведение на число и скалярное произведение непрерывны, то есть если $x_n \to x$, $y_n \to y$ (в смысле сходимости по норме), $\lambda_n \to \lambda$ (как числовая последовательность), то

$$x_n + y_n \to x + y,$$

$$\lambda_n x_n \to \lambda\, x,$$

$$(x_n, y_n) \to (x, y).$$

Доказательство этих фактов основано на использовании неравенства Коши-Буняковского (4) и предоставляется читателю в качестве упражнения.

Наличие в R скалярного произведения позволяет ввести в этом пространстве не только норму (то есть длину) вектора, но и угол между векторами: именно, угол φ между векторами x и y определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}. \qquad (24)$$

При этом из неравенства Коши-Буняковского (23) вытекает, что выражение, стоящее в (24) справа, по модулю не превосходит 1, и, следовательно, формула (24) действительно для любых ненулевых x и y определяет некоторый угол φ, $0 \le \varphi \le \pi$.

Если $(x, y) = 0$, то из (24) получаем, что $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$; в этом случае векторы x и y называются ОРТОГОНАЛЬНЫМИ.

Система НЕНУЛЕВЫХ векторов $\{x_\alpha\}$ из R называется ОРТОГОНАЛЬНОЙ, если $(x_\alpha, x_\beta) = 0$, при $\alpha \ne \beta$.

Если векторы $\{x_\alpha\}$ ортогональны, то они линейно независимы. В самом деле, пусть $a_1 x_{\alpha 1} + a_2 x_{\alpha 2} + \ldots + a_n x_{\alpha\, n} = 0$;

поскольку $\{x_\alpha\}$ – ортогональная система, имеем

$(x_{\alpha\, i}, a_1 x_{\alpha 1} + \ldots + a_n x_{\alpha\, n}) = a_i (x_{\alpha\, i}, x_{\alpha\, i}) = 0$, но $(x_{\alpha i}, x_{\alpha i}) \neq 0$ и, значит, $a_i = 0$ для всех $i = 1, 2, ..., n$.

Если ортогональная система $\{x_\alpha\}$ ПОЛНА (то есть наименьшее содержащее её замкнутое подпространство есть всё R), то она называется ОРТОГОНАЛЬНЫМ БАЗИСОМ. Если при этом норма каждого элемента равна 1, то система $\{x_\alpha\}$ называется ОРТОГОНАЛЬНЫМ НОРМИРОВАННЫМ БАЗИСОМ. Вообще, если система $\{x_\alpha\}$ (полная или нет) такова, что

$$(x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } \alpha \neq \beta, \\ 1 \text{ } при \text{ } \alpha = \beta, \end{cases}$$

то она называется ОРТОГОНАЛЬНОЙ НОРМИРОВАННОЙ (короче: ОРТОНОРМАЛЬНОЙ) СИСТЕМОЙ. Ясно, что если $\{x_\alpha\}$ – ортогональная система, то $\left\{\dfrac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}\right\}$ – ортогональная нормированная система.

Рассмотрим некоторые примеры евклидовых пространств и ортогональных базисов в них.

1 n-мерное арифметическое пространство R^n, элементами которого служат системы действительных чисел $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, с обычными операциями сложения и умножения и скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (25)$$

Представляет собой хорошо известный пример евклидова пространства. Ортогональный нормированный базис в нём (один из бесконечного множества возможных) образуют векторы

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, ..., 0),$$

$$\ldots$$

$$e_n = (0, 0, 0, ..., 1).$$

2 Пространство l_2 с элементами $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, где $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, и скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \tag{26}$$

есть евклидово пространство. Действительно, сходимость ряда, стоящего в (21) справа, доказана в примере 4 (пункта I главы II). Свойства 1)-4) скалярного произведения проверяются непосредственно. Простейший ортогональный нормированный базис в l_2 образуют векторы

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, 0, ...), \\ e_2 = (0, 1, 0, ...), \\ e_3 = (0, 0, 1, ...), \\ ... \end{cases} \tag{27}$$

Ортогональность и нормированность этой системы ясны. Вместе с тем система (27) полна: пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ – любой вектор из l_2 и $x^{(n)} = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...)$. Тогда $x^{(n)}$ есть линейная комбинация векторов

$e_1, \ldots, e_n$ и $\left\| x^{(n)} - x \right\| \to 0$ при $n \to \infty$.

3 Пространство $C\,[a; b]$, состоящее из непрерывных на $[a; b]$ действительных функций, со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(t) g(t) dt \tag{28}$$

также является евклидовым. Среди различных ортогональных базисов, которые можно указать в нем, важнейшим является тригонометрическая система, состоящая из функций

$$\frac{1}{2}, \quad \cos n\frac{2\pi\, t}{b-a}, \quad \sin n\frac{2\pi\, t}{b-a} \qquad (n = 1, 2, ...). \tag{29}$$

Ортогональность этой системы проверяется непосредственно.

Если рассматриваются непрерывные функции на отрезке длины 2π, например, на $[-\pi; \pi]$, то соответствующая тригонометрическая система есть:

$$1/2, \quad \cos nt, \quad \sin nt \qquad (n = 1, 2, ...).$$

7 Мера. Задача измерения длин, площадей и объемов восходит к глубокой древности. Частичное ее решение, данное математиками античности и формализованное в конце XIX века, приводит к так называемой мере Жордана (которую правильнее называть мерой Пеано[6]-Жордана[7]), определяемой следующим образом. Для упрощения мы обсудим одномерный случай и попытаемся задать длину λ подмножеств отрезка I = [0,1]. Для промежутка J вида (a,b), [a,b), [a,b] или (a,b] полагаем λ (J) $=|b-a|$. Для конечного объединения непересекающихся промежутков $J_1,...,J_n$ полагаем $\lambda(\bigcup_{i=1}^{n} J_i)=\sum_{i=1}^{n} \lambda(J_i)$. Такие множества будем называть элементарными.

Таким образом, понятие меры $\mu(A)$ множества A является естественным обобщением понятий:

1) длины $l(\Delta)$ отрезка Δ,

2) площади S(F) плоской фигуры F,

3) объема V(G) пространственной фигуры G,

4) приращения $\varphi(b)-\varphi(a)$ неубывающей функции $\varphi(t)$ на полуинтервале $[a;b)$,

5) интеграла от неотрицательной функции, взятого по некоторой линейной, плоской или пространственной области, и т. п.

Это понятие возникло в теории функций действительного переменного, а оттуда перешло в теорию вероятностей, теорию динамических систем, функциональный анализ и многие другие области математики.

Например, рассмотрим систему U множеств на плоскости (x,y), каждое из которых определяется одним из неравенств вида

$a \le x \le b$, $a < x \le b$, $a \le x < b$, $a < x < b$

и одним из неравенств вида

$c \le y \le d$, $c < y \le d$, $c \le y < d$, $c < y < d$,

где a, b, c и d – произвольные числа. Множества, принадлежащие этой системе, мы будем называть ПРЯМОУГОЛЬНИКАМИ. Замкнутый прямоугольник, определяемый неравенствами $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, представляет собой прямоугольник в обычном смысле (вместе с

[6] **Джузéппе Пеáно** (1858-1932) – итальянский математик. Один из основателей математической логики и теории множеств. Известен важными результатами в математическом анализе, теории дифференциальных уравнений, геометрии.

[7] **Мари́ Энмóн Ками́ль Жордáн** (1838-1922) – французский математик, известен благодаря своим работам в теории групп, теории функций, а также топологии.

границей), если $a<b$ и $c<d$; отрезок (если $a=b$ и $c<d$ или $a<b$ и $c=d$); точку (при $a=b$, $c=d$); и, наконец, пустое множество (если $a>b$ или $c>d$). Открытый прямоугольник $a<x<b$, $c<y<d$ будет в зависимости от соотношений между a, b, c и d прямоугольником без границы или пустым множеством. Каждый из прямоугольников остальных типов (назовем их полуоткрытыми) представляет собой настоящий прямоугольник без одной, двух или трех сторон, интервал, полуинтервал, либо, наконец, пустое множество.

Класс всех прямоугольников на плоскости обозначим θ.

Для каждого из невырожденных прямоугольников определим его меру в соответствии с известным из элементарной геометрии понятием площади. Именно мера прямоугольника (замкнутого, открытого или полуоткрытого), определяемого числами a, b, c и d равна $(b-a)(d-c)$. Мера пустого множества равна нулю.

Таким образом, любому прямоугольнику $P \subset U$ поставлено в соответствие число $m(P)$ – его мера; при этом выполнены следующие условия:

1) мера $m(P)$ принимает действительные неотрицательные значения;

2) мера $m(P)$ аддитивна, то есть если $P=\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$ и $P_i \cap P_k = \varnothing$ при $i \neq k$, то $m(P)=\sum\limits_{k=1}^{n} m(P_k)$.

Понятие меры с сохранением её основных свойств распространено на класс множеств более широкий, чем конечные соединения прямоугольников со сторонами параллельными осям координат. Решение этой задачи было дано А. Лебегом[8] в начале XX века.

Упражнения для самоконтроля (глава II)

1 Сформулируйте определение метрического пространства. Приведите пример метрического пространства.

2 Дайте понятие непрерывного отображения, изометрии.

[8] **Анри Леон Лебе́г** (1875-1941) – французский математик, известен как автор теории интегрирования, обобщающей обычное определение интеграла на более широкий класс функций.

3 Сформулируйте понятие и приведите пример топологического пространства.

4 Сформулируйте понятие линейного пространства, изоморфных линейных пространств, базиса.

5 Сформулируйте понятие скалярного произведения, евклидова пространства, ортогонального нормированного базиса.

6 Проверьте, что множество действительных чисел с расстоянием $\rho(x,y) = |x - y|$ образует метрическое пространство R^1.

7 Какое классическое неравенство использовано при доказательстве третьей аксиомы в задаче «множество упорядоченных групп (кортежей) из n действительных чисел $x = (x_1, x_2, ... x_n)$ с расстоянием $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2}$ образует метрическое пространство»?

8 Можно ли множество всех ограниченных функций $B(\Omega)$ на непустом множестве Ω считать метрическим пространством с метрикой $\rho(f,g) = \sup_{x\in\Omega}|f(x) - g(x)|$?

9 Проверьте, что множество всех ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ действительных чисел с метрикой $\rho(x, y) = \sup_k |y_k - x_k|$ образует метрическое пространство.

10 Как используется неравенство Минковского в доказательстве того, что множество, состоящее из всевозможных последовательностей действительных чисел $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, таких, что $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p \le \infty$, где $p \ge 1$ – некоторое фиксированное число, а расстояние определяется формулой $\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k - x_k|^p\right)^{1/p}$, образует метрическое пространство?

11 Откуда следует, что любое метрическое пространство является топологическим?

12 Проверьте, что сходящиеся последовательности $x=(x_1,x_2,...)$ с покоординатными операциями сложения и умножения на числа образуют линейное пространство.

13 Проверьте, что последовательности, сходящиеся к 0, с теми же операциями сложения и умножения образуют линейное пространство.

14 Проверьте, что совокупность m всех ограниченных числовых последовательностей с теми же операциями сложения и умножения на числа образуют линейное пространство.

15 Проверьте, что совокупность R^∞ всевозможных числовых последовательностей с теми же самыми операциями сложения и умножения на числа образует линейное пространство.

16 Может ли функция $f(A_1,A_2)=(x_2^2+x_1^2)-(y_2^2+y_1^2)$ служить метрикой пространства R^2?

17 Расстояние между точками $A_1(1;4)$ и $A_2(11;3)$ в метрике $\rho(A_1,A_2)=\max(|x_2-x_1|,|y_2-y_1|)$, где $A_1(x_1;y_1)$ и $A_2(x_2;y_2)$, равно …

18 Расстояние между комплексными числами $z_1=2+3i$ и $z_2=4-2i$ в метрике $\rho(z_1,z_2)=|z_2-z_1|$ равно …

19 Удовлетворяет ли всем трём аксиомам метрического пространства функция $f(x,y)=\dfrac{|y-x|}{1+|y-x|}$, где $x,y\in R$?

20 Удовлетворяет ли всем трём аксиомам метрического пространства функция $f(x,y)=\dfrac{|x-y|}{xy}$, заданная на множестве натуральных чисел?

21 Какой из трёх аксиом метрического пространства не удовлетворяет функция $f(x_1,x_2)=x_2-x_1$, где $x_1,x_2\in R$?

22 Удовлетворяет ли всем трём аксиомам метрического пространства функция $f(x,y)=\begin{cases}0, \text{ если } x=y,\\ 1, \text{ если } x\neq y;\end{cases}$, заданная на множестве целых чисел?

23 Образует ли множество всевозможных последовательностей действительных чисел вида $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$, удовлетворяющих усло-

вию $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$, с расстоянием $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2}$ метрическое пространство?

24 Удовлетворяет ли всем трём аксиомам метрического пространства функция $f(x,y) = \left|2^y - 2^x\right|$, заданная на множестве действительных чисел?

25 Дано множество $\{A = (x;y) : x, y \in R\}$ с метрикой $\rho(A_1, A_2) = \max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)$, где $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$. Найти область, соответствующую неравенству $\rho(O, A) < 1$, где $O(0,0)$ – начало координат.

26 Мера плоского множества, изображенного на рисунке 14, в пространстве R^2 равна …

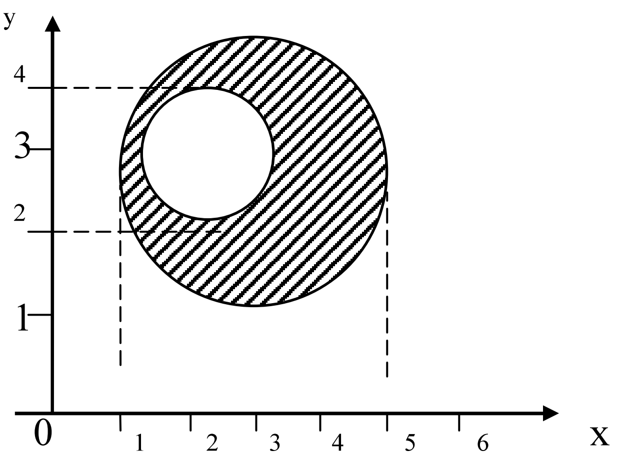


Рисунок 14 – Рисунок к задаче 26

27 Мера плоского множества, $\{(x;y) \in R^2 : x < y < -x^2 + 2\}$ равна…

28 Доказать, что $C_{[0,1]}$ – множество всех непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ имеет мощность континуума.

29 X – нормиронное пространство. Доказать, что алгебраическая сумма двух ограниченных его помножеств – ограниченное множество.

30 Доказать, что множество $A \subset X$ является ограниченным тогда и только тогда, когда $diam\ A < \infty$.

31 Пусть $A \subset X$ – ограниченное множество. Доказать, что $\overline{A}$ – ограниченное множество и $diam\ A = diam\ \overline{A}$.

32 Доказать, что для произвольного множества $A \subset X$ ($X-$ линейное метрическое пространство) имеет место включение $(A^{/})^{/} \subset A^{/}$. Возможно ли здесь строгое включение?

33 Следует ли из $A, B \subset X_1$, $\overline{A} \subset \overline{B}$, что $A \subset B$, если X_1- метрическое пространство?

34 Проверьте, что пространство $C_{[a,b]}$, состоящее из непрерывных на $[a; b]$ действительных функций, может быть евклидовым.

35 Откуда следует, что любое нормированное пространство может быть метрическим?

36 Докажите ортогональность системы $\frac{1}{2}; \cos n\frac{2\pi\, t}{b-a}; \sin n\frac{2\pi\, t}{b-a}$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

Ответы и пояснения к упражнениям главы II

6 Воспользоваться свойством модуля разности двух чисел.

7 Неравенство Коши-Буняковского.

8 Да.

10 Смотри пример 12 на странице 38.

11 Воспользоваться определением окрестности в топологическом пространстве.

16 Нет, так как по определению метрического пространства $\rho(A_1, A_2) \geq 0$ для любой пары точек.

17 $\rho(A_1, A_2) = \max(|11-1|, |3-4|) = \max(10,1) = 10$.

18 $\rho(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| = |4-2i-2-3i| = |2-5i| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$.

19 Проверим выполнение аксиом метрического пространства:

1) $f(x,y) = \dfrac{|y-x|}{1+|y-x|} = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $f(x,y) = \dfrac{|y-x|}{1+|y-x|} = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|} = f(y,x)$;

3) неравенство треугольника: $f(x,y) \leq f(x,z) + f(z,y)$.

Доказательство.

Так как $f(x,y) = \dfrac{|y-x|}{1+|y-x|} = 1 - \dfrac{1}{1+|y-x|}$ и $|y-x| \leq |y-z| + |z-x|$, $\forall\, x, y, z \in R$, то с учётом монотонного возрастания $f(u) = 1 - \dfrac{1}{1+u}$, $u \geq 0$

$\left(f'(u) = \dfrac{1}{(1+u)^2} > 0 \right)$ имеем $f(|y-x|) \leq f(|y-z| + |z-x|) \Rightarrow$

$$\frac{|y-x|}{1+|y-x|} \leq \frac{|y-z|+|z-x|}{1+|y-z|+|z-x|} \leq \frac{|y-z|}{1+|y-z|} + \frac{|z-x|}{1+|z-x|}.$$

20 Проверим выполнение аксиом метрического пространства:

1) $f(x,y) = \dfrac{|x-y|}{xy} = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $f(x,y) = \dfrac{|x-y|}{xy} = \dfrac{|y-x|}{yx} = f(y,x)$;

3) неравенство треугольника $f(x,y) \leq f(x,z) + f(z,y)$ для $\forall x, y, z \in N$:

$$f(x,y)=\frac{|x-y|}{xy}=\left|\frac{x-y}{xy}\right|=\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right|=\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right|=\left|\frac{z-y}{yz}+\frac{x-z}{xz}\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{z-y}{yz}\right|+\left|\frac{x-z}{xz}\right|=\frac{|z-y|}{yz}+\frac{|x-z|}{xz}=f(x,z)+f(z,y).$$

21 Функция $f(x_1,x_2)=x_2-x_1$, где $x_1,x_2\in R$, не удовлетворяет аксиоме симметрии, так как $f(x_1,x_2)=-f(x_2,x_1)$, то есть $x_2-x_1\neq x_1-x_2$.

22 Проверим выполнение аксиом метрического пространства:

1) $f(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$ - по определению.

2) $f(x,y)=f(y,x)=\begin{cases}0, \text{ } если\ x=y,\\ 1, \text{ } если\ x\neq y.\end{cases}$

3) $f(x,y)+f(y,z)=\begin{cases}0, \text{ } если\ x=y=z,\\ 1, \text{ } если\ x\neq y=z\ или\ x=y\neq z,\\ 2, \text{ } если\ x\neq y\quad и\quad y\neq z,\end{cases}$

$$f(x,z)=\begin{cases}0, \text{ } если\ x=z,\\ 1, \text{ } если\ x\neq z;\end{cases}\Rightarrow f(x,y)+f(y,z)\geq f(x,z).$$

23 Да, так как $(x_k\pm y_k)^2\leq 2(x_k^2+y_k^2)$.

24 Да, так как $\left|2^y-2^z+2^z-2^x\right|\leq\left|2^y-2^z\right|+\left|2^z-2^x\right|$.

25 Так как $\max(|x|,|y|)<1$, то $-1<x<1$, $-1<y<1$. Данное множество является внутренностью квадрата с центром симметрии в точке O и стороной, равной 2.

26 Мерой плоского множества в данном случае является площадь заштрихованной части большого круга, определяемая как разность площадей большого и малого кругов. Площадь $S=\pi(R_1^2-R_2^2)=\pi(4-1)=3\cdot\pi$ (ед^2).

27 Мера плоского множества $\{(x;y)\in R^2 : x<y<-x^2+2\}$ равна площади соответствующей фигуры, изображённой на рисунке 15. Вычислим данную площадь с помощью определённого интеграла:

$$S=\int_{-2}^{1}((-x^2+2)-x)dx=4\frac{1}{2}\ (ед^2).$$

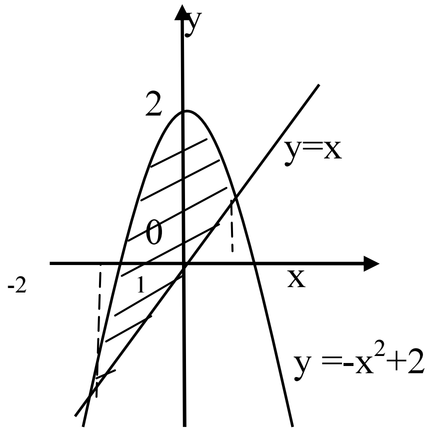


Рисунок 15 – Рисунок к решению задачи 27

32 Нет.

33 Вообще говоря, не следует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – Минск : Вышэйшая школа, 1978. – 205 с.

2 Богачев В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ: Университетский курс. – М.; Ижевск : РХД, 2009. – 724 с.

3 Городецкий В. В., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П. Методы решения задач по функциональному анализу. – Киев : Выща шк., 1990 – 479 с.

4 Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Основы математического анализа. 3-е изд. – М. : Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1998. – Ч.2. – 448 с.

5 Иосида К. Функциональный анализ. – М. : Мир, 1967. – 624 с.

6 Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1988. – 400 с.

7 Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – 7-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 572 с.

8 Кузнецов В. Н. Теоретическая информатика- I. Элементы теории множеств и математической логики : учебное пособие. – Курган : Изд-во КМИ, 1994. – 103 с.

9 Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. – 3-е изд. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 750 с.

10 Люстерник Л. А., Скобелев В. И. Краткий курс функционального анализа : учебное пособие для вузов. – М. : Высшая школа, 1982. – 271 с.

11 Рудин У. Функциональный анализ. – М. : Мир, 1975. – 444 с.

12 Треногин В. А. Функциональный анализ : учебник. – 3-е изд. – ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 488 с.

13 Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М. : Наука, 1984. – 256 с.

14 Федоров В. М. Курс функционального анализа. – СПб. : Лань, 2005. – 352 с.

15 Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу. – М. : МЦНМО, 2004. – 552 с.

16 Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М. : Иностранная литература, 1962. – 830 с.

17 Единый портал интернет-тестирования в сфере образования. URL. http // i-exam.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Вержбалович Тамара Александровна
Малышева Юлия Степановна

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Редактор Н. М. Быкова

Подписано в печать 07.04.15	Формат 60×84 1/16	Бумага 80 г/м^2
Печать цифровая	Усл.печ.л. 4,06	Уч.-изд. л. 4,06
Заказ № 100	Тираж 100	

Редакционно-издательский центр КГУ.
640000, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.