МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра алгебры, геометрии и методики преподавания математики

АЛГЕБРА
(ЧАСТЬ 2)

Материалы для практических занятий и самостоятельной работы
для студентов направлений 01.03.01 и 44.03.01

Курган 2015

Кафедра алгебры, геометрии и методики преподавания математики

Дисциплина: «Алгебра»
(направления 01.03.01 и 44.03.01)

Составитель: доцент О. Н. Шатных.

Утверждены на заседании кафедры «15» декабря 2014г.

Рекомендованы методическим советом университета
«20» декабря 2013 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания составлены в соответствии с программой дисциплины «Алгебра» и предназначены для студентов направления «Математика». Кроме того, брошюра будет полезна студентам направления «Педагогическое образование» профиля «Математическое образование», которые также изучают данный раздел алгебры, но в несколько меньшем объеме.

Разделы «Линейные пространства» и «Евклидовы пространства» изучаются на первом курсе. В данном издании представлены все темы данных разделов, которые выносятся на практические занятия и самостоятельную работу студентов. Для каждой темы указаны вопросы для повторения теоретического материала, приведены образцы решения типовых задач и задачи для решения. По усмотрению преподавателя из раздела «Задачи для решения» отбираются упражнения для решения в аудитории и для самостоятельной работы студентов.

Тема 1. Линейные пространства

Вопросы теории

1 Определение линейного пространства.
2 Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.
3 Свойства линейной зависимости.
4 Определение базиса линейного пространства.
5 Теорема о базисах.
6 Размерность линейного пространства.
7 Координаты вектора в данном базисе.
8 Матрица перехода от одного базиса к другому.
9 Связь координат одного и того же вектора в разных базисах.
10 Изоморфизм линейных пространств.

Образцы решения задач

Задача 1. Показать, что $\boldsymbol{R^2}$ является линейным пространством.

Решение. Для проверки пространства на линейность, нужно проверить выполнимость операций и 8 аксиом определения. Заметим, что $\forall\, a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in \boldsymbol{R^2}$, $\forall\, \alpha \in \boldsymbol{R}$ выполняются следующие условия:

$$a + b = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \in \boldsymbol{R^2},$$

$\alpha a = \alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2) \in \boldsymbol{R^2}$, т.к. $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \alpha a_1, \alpha a_2 \in \boldsymbol{R}$.

1) Покажем, что $a + b = b + a$ для $\forall\, a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \boldsymbol{R}^2$
Так как

$$a_1, a_2, b_1, b_2 \in \boldsymbol{R}$$

То

$$a_1 + b_1 = b_1 + a_1,$$
$$a_2 + b_2 = b_2 + a_2$$

Тогда

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2) = (b_1, b_2) + (a_1, a_2) = b + a.$$

2) Покажем, что $(a + b) + c = a + (b + c)$ для любых $a = (a_1, a_2),\ b = (b_1, b_2),\ c = (c_1, c_2) \in \boldsymbol{R^2}$

$$\begin{aligned}(a + b) + c &= \big((a_1, a_2) + (b_1, b_2)\big) + (c_1, c_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (c_1, c_2) = \\ &= (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2) = (a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2) = \\ &= (a_1, a_2) + \big((b_1, b_2) + (c_1, c_2)\big) = a + (b + c).\end{aligned}$$

3) Покажем, что существует элемент $\boldsymbol{o}$ такой, что для любого элемента $a = (a_1, a_2) \in \boldsymbol{R}^2$ $a + \boldsymbol{o} = a$.

Действительно, $\exists\, \boldsymbol{o} = (0, 0) \in \boldsymbol{R^2}$такой, что для $\forall\, a = (a_1, a_2)$ $a + o =$

$$= (a_1, a_2) + (0,0) = (a_1 + 0, a_2 + 0) = (a_1, a_2) = a.$$

4) Покажем, что для каждого элемента $a = (a_1, a_2) \in \boldsymbol{R}^2$ существует противоположный элемент $-a$, такой, что $a + (-a) = \boldsymbol{o}$.

$\exists\, -a = (-a_1, -a_2) \in \boldsymbol{R^2}$, такой что

$$a + (-a) = (a_1, a_2) + (-a_1, -a_2) = (a_1 - a_1, a_2 - a_2) = (0{,}0) = \boldsymbol{o}.$$

5) Покажем, что $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ для любых $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ и любого $a = (a_1, a_2) \in \boldsymbol{R^2}$.

$$\alpha(\beta a) = \alpha\big(\beta(a_1, a_2)\big) = \alpha(\beta a_1, \beta a_2) = (\alpha\beta a_1, \alpha\beta a_2) = (\alpha\beta)(a_1, a_2) = (\alpha\beta)a.$$

6) Покажем, что $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ для любых $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ и любого $a = (a_1, a_2) \in \boldsymbol{R^2}$.

$$(\alpha + \beta)a = (\alpha + \beta)(a_1, a_2) = \big((\alpha + \beta)a_1, (\alpha + \beta)a_2\big) =$$
$$= (\alpha a_1 + \beta a_1, \alpha a_2 + \beta a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2) + (\beta a_1, \beta a_2) =$$
$$= \alpha(a_1, a_2) + \beta(a_1, a_2) = \alpha a + \beta a.$$

7) Покажем, что $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ для любого $\alpha \in \boldsymbol{R}$ и любых $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \boldsymbol{R}^2$

$$\alpha(a + b) = \alpha(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = \big(\alpha(a_1 + b_1), \alpha(a_2 + b_2)\big) =$$
$$= (\alpha a_1 + \alpha b_1, \alpha a_2 + \alpha b_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2) + (\alpha b_1, \alpha b_2) =$$
$$= \alpha(a_1, a_2) + \alpha(b_1, b_2) = \alpha a + \alpha b.$$

8) Покажем, что $1 \cdot a = a$, для любого $a = (a_1, a_2) \in \boldsymbol{R^2}$.

$$1 \cdot a = 1 \cdot (a_1, a_2) = (1 \cdot a_1, 1 \cdot a_2) = (a_1, a_2) = a.$$

Т.к. все 8 аксиом определения линейного пространства выполняются, то $\boldsymbol{R^2}$ является линейным пространством.

Задача 2. Доказать, что в линейном вещественном пространстве F многочленов степени $\leq$ n система векторов 1, x, $\mathrm{x}^2, \dots, \mathrm{x}^\mathrm{n}$ составляет базис, и найти размерность этого пространства.

Решение. Данная система векторов линейно независима. Действительно, равенство $\alpha_0 + \alpha_1\mathrm{x} + \alpha_1\mathrm{x}^2 + \dots + \alpha_\mathrm{n}\mathrm{x}^\mathrm{n} = 0$, т.к. равенство $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_1 x^2 + {} + \dots + \alpha_n x^n = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n$ справедливо лишь тогда, когда $\alpha_i = 0, \forall i = \overline{0, n}$.

Кроме того, любой элемент $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \in F$, $m \leq n$, линейно выражается через векторы 1, x, $x^2, \dots, x^n$:

$$f(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_m \cdot x^m + 0 \cdot x^{m+1} + \dots + 0 \cdot x^n.$$

Из определения базиса и полученных выше результатов можно сделать вывод, что система векторов $1, \mathrm{x}, \mathrm{x}^2, \dots, \mathrm{x}^\mathrm{n}$ является базисом пространства F.

Так как этот базис состоит из $n + 1$ векторов, то размерность пространства F равна $\mathrm{n} + 1$:

$dim\, F = n + 1.$

Задача 3. Показать, что каждая из нижеприведенных систем векторов:

а) $e_1 = (1, 2, 1)$, б) $e_1 = (3, 1, 4)$,

$e_2 = (2, 3, 3)$, $e_2 = (5, 2, 1)$,

$e_3 = (3, 7, 1)$; $e_3 = (1, 1, -6)$

является базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$.

Решение. $dim\,\boldsymbol{R}^3 = 3$. Следовательно в любом базисе пространства $\boldsymbol{R}^3$ будет три вектора. Каждая из систем состоит из 3 векторов, поэтому достаточно показать, что системы линейно независимы.

Составим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Найдем определители этих матриц:

$$|A| = (1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 7 \cdot 1) - (1 \cdot 3 \cdot 3 + 7 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1) = 1.$$

$$|A'| = (3 \cdot 2 \cdot (-6) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \cdot 4) - (4 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot (-6)) =$$

$$= 4.$$

$|A| \neq 0$ и $|A'| \neq 0$, значит строки каждой матрицы линейно независимы. Это означает, что обе системы векторов линейно независимы, значит каждая из приведенных систем векторов является базисом в $\mathbf{R}^3$.

Задача 4. При каких значениях α система векторов $(0, 1, \alpha)$, $(\alpha, 0, 1)$, $(\alpha, 1, \alpha)$ является базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$?

Решение. Данная система состоит из 3 векторов. Но и $\dim \mathbf{R}^3 = 3$. Следовательно, для того чтобы данная система векторов составляла в $\mathbf{R}^3$ базис, достаточно, чтобы она была линейно независимой, а для этого ее ранг, или ранг соответствующей матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix}$, должен быть равен 3, т.е. определитель $|A| \neq 0$. А так как $|A| = \alpha^2 + \alpha - \alpha^2 = \alpha$, то данная система будет базисом при любых значениях α, кроме 0.

Задача 5. Найти матрицы переходов от базиса $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (2, 3, 3)$, $e_3 = (3, 7, 1)$ к базису $e'_1 = (3, 1, 4)$, $e'_2 = (5, 2, 1)$, $e'_3 = (1, 1, -6)$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно. Найти координаты вектора $a = (-17, -36, -11)$ в каждом из заданных базисов.

Решение. Для нахождения координат $x_1,\ x_2,\ x_3$ вектора а в базисе $e_1,\ e_2,\ e_3$ и матрицы T перехода от базиса $e_1,\ e_2,\ e_3$ к базису $e'_1,\ e'_2,\ e'_3$ составим и решим векторные уравнения:

$$a = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, \qquad (1)$$

$$e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3, \qquad (2)$$

$$e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3, \qquad (3)$$

$$e'_3 = a_{13}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3. \qquad (4)$$

Уравнение (1) дает:

$$(x_1, 2x_2, x_1) + (2x_2, 3x_2, 3x_2) + (3x_3, 7x_3, x_3) = (-17, -36, -11),$$

откуда получается система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -17 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -36 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -11. \end{cases}$$

Аналогично уравнения (2), (3), (4) дадут соответственно следующие системы уравнений с такими же коэффициентами при новых неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{21} + 3a_{31} = 3 \\ 2a_{11} + 3a_{21} + 7a_{31} = 1 \\ a_{11} + 3a_{21} + a_{31} = 4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_{12} + 2a_{22} + 3a_{32} = 5 \\ 2a_{12} + 3a_{22} + 7a_{32} = 2 \\ a_{12} + 3a_{22} + a_{32} = 1; \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_{31} + 2a_{23} + 3a_{33} = 1 \\ 2a_{13} + 3a_{23} + 7a_{33} = 1 \\ a_{13} + 3a_{23} + a_{33} = -6. \end{cases}$$

Поэтому все полученные четыре системы можно решить методом Гаусса одновременно:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & -36 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -11 & 4 & 1 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 1 & -4 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 & -12 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -5 & -9 & -31 & -23 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -9 & -20 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 & -12 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|cccc}1 & 0 & 0 & -1 & -27 & -71 & -41\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 9 & 20 & 9\\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & 12 & 8\end{array}\right).$$

Получаем:

$$a = -1e_1 - 2e_2 - 4e_3,$$

$$e'_1 = -27e_1 + 9e_2 + 4e_3,$$

$$e'_2 = -71e_1 + 20e_2 + 12e_3,$$

$$e'_3 = -41e_1 + 9e_2 + 8e_3.$$

Числа $(-1,-2,-4)$ – это координаты вектора a в базисе $e_1,\ e_2,\ e_3$, а матрицей перехода от базиса $e_1,\ e_2,\ e_3$ к базису $e_1',\ e_2',\ e_3{}'$ будет матрица

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix}-27 & -71 & -41\\ 9 & 20 & 9\\ 4 & 12 & 8\end{pmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы $\boldsymbol{T}$**:** $|\mathrm{T}| = 4$.

Обратная к ней матрица:

$$\boldsymbol{T^{-1}} = \frac{1}{|\boldsymbol{T}|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}52 & 76 & 181\\ -36 & -52 & -126\\ 28 & 40 & 99\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13 & 19 & \frac{181}{4}\\ -9 & -13 & -\frac{63}{2}\\ 7 & 10 & \frac{99}{4}\end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса $e'_1,\ e'_2,\ e'_3$ к базису $e_1,\ e_2,\ e_3$.

Найдем столбец координат вектора a в базисе $e'_1,\ e'_2,\ e'_3$:

$$\begin{pmatrix}x'_1\\ x'_2\\ x'_3\end{pmatrix} = \boldsymbol{T}^{-1} \times \begin{pmatrix}\mathrm{x}_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13 & 19 & \frac{181}{4}\\ -9 & -13 & -\frac{63}{2}\\ 7 & 10 & \frac{99}{4}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\ -2\\ -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-232\\ 161\\ -126\end{pmatrix}.$$

Задачи для решения

1 Доказать, что множество квадратных матриц второго порядка является линейным пространством.

2 Найти все базисы следующих систем векторов:

а) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$;

б) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = 3i$, $b_3 = -4 - 6i$;

в) $c_1 = -1 + 2i$, $c_2 = 1 - 2i$, $c_3 = \frac{1}{2} - i$;

д) $f_1 = 2$, $f_2 = x - 2x^2$, $f_3 = -2x + 4x^2$.

3 Доказать, что в пространстве многочленов ≤ 2 (над $\boldsymbol{R}$) система векторов $f_1 = 2 + 3x - x^2$, $f_2 = -1 + 2x + x^2$, $f_3 = 1$ является базисом.

4 В пространстве $\boldsymbol{R}^4$ систему векторов $a_1 = (1, 2, 3, 4)$, $a_2 = (4, 1, 2, 3)$ дополнить до базиса этого пространства.

5 Доказать, что система векторов $a_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ линейного пространства M_2 квадратных матриц 2-го порядка (над $\boldsymbol{R}$) является линейно независимой. Дополнить ее до базиса этого пространства.

6 При каких значениях параметра α система векторов $(1, 2, -1, 1)$, $(5, 1, 2, 1)$, $(4, -1, \alpha, 0)$, $(3, \alpha, 4, -1)$ является базисом в пространстве $\boldsymbol{R}^4$.

7 Дополнить вектор $2 + 3i$ до базиса линейного пространства $\boldsymbol{C}$ над полем $\boldsymbol{R}$.

8 Доказать, что система векторов $a_1 = (1,1,0)$, $a_2 = (0,1,1)$, $a_3 = (1,0,2)$ составляет базис арифметического линейного пространства $\boldsymbol{R}^3$, и линейно выразить вектор $b = (2, -3, 5)$ через этот базис.

9 Доказать, что при любых значениях α, β, γ система векторов $(1, \alpha, \beta)$, $(0, 1, \gamma)$, $(0, 0, 1)$ является базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$.

10 Найти координаты вектора $z = 8 + 9i$ пространства $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел над полем $\boldsymbol{R}$ в базисах:

а) $\frac{1}{2}, -3i$;

б) $2 - i, 4i$.

11 Найдите координаты вектора $a = (6, 0, -5)$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ в базисах:

а) $(3, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1)$;

б) $(1, -1, 0), (1, 2, 3), (0, 1, -1)$

и сделайте проверку.

12 Найдите координаты вектора $a = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ пространства $\boldsymbol{M_2}$ вещественных квадратных матриц 2-го порядка в базисе $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и сделайте проверку.

13 В пространстве вещественных квадратных матриц 2-го порядка разложите векторы $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ по векторам базиса $e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Убедитесь в том, что в $\boldsymbol{R^4}$система векторов, составленная из координатных строк векторов a_1, a_2, a_3, линейно зависима. Следует ли отсюда, что система векторов a_1, a_2, a_3 также линейно зависима? Если да, почему?

14 Найдите матрицы переходов от базиса $e_1,\ e_2,\ e_3$ пространства $\boldsymbol{R^3}$к базису $e_1',\ e_2',\ e_3'$ и обратно, а также координаты вектора $a = (3, 5, -4)$ в этих базисах, если:

$$e_1 = (1, 0, 0), \qquad e_1' = (1, 1, 0),$$

$$e_2 = (0,1, 0), \qquad e_2' = (0, 1, 1),$$

$$e_3 = (0, 0, 1), \qquad e_3' = (1, 0, 1).$$

15 Пусть $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица перехода от базиса a_1, a_2, a_3 к базису b_1, b_2, b_3. Найдите координаты вектора $a = 3a_1 - a_2 + 2a_3$ во втором базисе и координаты вектора $b = 4b_1 - b_2 + 3b_3$ в первом базисе.

16 Может ли матрица $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ служить матрицей перехода от базиса $e_1 = (1, -1, 0), e_2 = (1, 2, 3), e_3 = (0, 1, -1)$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ к новому базису того же пространства? Если да, то найдите новый базис и координаты вектора $a = (2, 1, 3)$ в этом базисе.

17 Используя свойство сохранения ранга при изоморфном отображении, найдите ранг следующих систем векторов в соответствующих пространствах:

а) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $f_1 = 1 + 2x + x^2 + 2x^3$, $f_2 = -1 + 3x + 4x^2 + 5x^3$, $f_3 = -5 + 2x^2 +$ $+3x^3$.

Тема 2. Подпространства

Вопросы теории

1 Определение подпространства линейного пространства.

2 Критерий подпространства.

3 Линейная оболочка системы векторов.

4 Определение размерности и базиса линейной оболочки системы векторов.

5 Пересечение подпространств.

6 Сумма подпространств. Прямая сумма подпространств.

Образцы решения задач

Задача 1. Доказать, что в пространстве M_2 вещественных квадратных матриц 2-го порядка над полем $\boldsymbol{R}$ подмножество L матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \boldsymbol{R}$ является его подпространством, а система векторов $e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – базисом этого пространства.

Решение. Пусть $x_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ – любые элементы из L. Тогда $x_1 + x_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \in L$ и $\lambda x_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & 0 \\ 0 & \lambda b_1 \end{pmatrix} \in L$.

Следовательно, множество L замкнуто относительно определенных в M_2 операций. Кроме того, любой элемент из L линейно разлагается по векторам e_{11}, e_{22}, так как для любых a и b:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ae_{11} + be_{22}.$$

Поэтому система e_{11}, e_{22} представляет собой базис подпространства L.

Задача 2. В арифметическом пространстве $\mathbf{R}^4$ найти подпространство $\boldsymbol{L}$ решений однородной системы $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$ его размерность и базис.

Решение. Составим матрицу данной системы и преобразуем ее к ступенчатому виду

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система приводится к виду $\begin{cases} x_4 - x_2 - x_3 + 3x_1 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + 4x_1 = 0. \end{cases}$

Придавая свободным переменным x_3 и x_1 значения 1, 0 и 0, 1, находим фундаментальный набор решений т.е. базис $\boldsymbol{L}$: $a_1 = (0, 2, 1, 3)$, $a_2 =$

$= (1, -4, 0, -7)$.

Итак, $\boldsymbol{L} = \{x | x = k_1 a_1 + k_2 a_2, k_1, k_2 \in \boldsymbol{R}\}$, $dim\, \boldsymbol{L} = 2$.

Задача 3. Найти базис и размерность линейного подпространства $L = L(f_1, f_2, f_3)$,натянутого на следующую систему векторов пространства многочленов степени ≤ 2 (над полем $\boldsymbol{R}$):

$$f_1 = 3 + x + 2x^2,\ \ f_2 = -2 + x - \mathrm{x}^2,\ \ f_3 = 1 + 2x + x^2.$$

Решение. По определению линейной оболочки всякий вектор $f(x) \in L$ имеет вид $f(x) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$.

В базисе $1, x, x^2$ пространства многочленов степени ≤ 2 заданные многочлены f_1, f_2, f_3 имеют соответственно координаты $(3, 1, 2), (-2, 1, -1), (1, 2, 1)$. Составим из них матрицу и найдем ее ранг:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $Rg\boldsymbol{A} = 2$, система строк $(3, 1, 2), (-2, 1, -1)$, а значит и система многочленов f_1, f_2 линейно независима. Строка $(1, 2, 1)$ линейно выражается через остальные строки, а потому многочлен f_3 линейно выражается через f_1 и f_2. Следовательно, всякий вектор $f(x)$ из $L(f_1, f_2, f_3)$ может быть линейно выражен через f_1, f_2, и система f_1, f_2 есть базис подпространства $L(f_1, f_2, f_3) = L(f_1, f_2)$. Поэтому его размерность равна 2.

Задача 4. Пусть F – вещественное линейное пространство многочленов степени ≤ 10, L_1 – его подпространство многочленов степени ≤ 3, L_2 – подпространство многочленов степени ≤ 8, содержащих переменную x лишь в четных степенях. Найти размерность подпространств $L_1, L_2, L_1 \cap L_2, L_1 + L_2$ и убедиться в справедливости формулы

$$dim(L_1 + L_2) = dim\, L_1 + dim\, L_2 - dim(L_1 \cap L_2).$$

Решение. Пусть $f_1 = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$ – любой вектор из L_1. Вектор f_1 линейно выражается через векторы системы векторов 1, x, x^2, x^3, которые составляют линейно независимую систему векторов. Следовательно, система 1, x, x^2, x^3 является одним из базисов подпространства L_1, а значит $dim\, L_1 = 4$. Точно так же можно убедиться, что система $1, x^2, x^4, x^6, x^8$ является базисом подпространства L_2, и потому $dim\, L_2 = 5$. Подпространство $L_1 \cap L_2$ состоит лишь из тех многочленов степени ≤ 3, которые содержат переменную

x лишь в четных степенях. Поэтому система $1, x^2$ является одним из базисов подпространства $L_1 \cap L_2$, а значит, $dim\, L_1 \cap L_2 = 2$.

Пусть $f_2 = \mu_0 + \mu_2 x^2 + \mu_4 x^4 + \mu_8 x^8$ – любой вектор из L_2, тогда вектор $f = f_1 + f_2$ принадлежит $L_1 + L_2$, причем

$$f = (\lambda_0 + \mu_0) \cdot 1 + \lambda_1 x + (\lambda_2 + \mu_2) x^2 + \lambda_3 x^3 + \mu_4 x^4 + \mu_6 x^6 + \mu_8 x^8.$$

Сумма $L_1 + L_2$ содержит все векторы линейно независимой системы векторов $1, x, x^2, x^3, x^4, x^6, x^8$ и любой вектор суммы линейно выражается через векторы этой системы, а поэтому данная система является базисом подпространства $L_1 + L_2$, а значит $dim(L_1 + L_2) = 7$. Но $7 = 4 + 5 - 2$, т.е.

$$dim(L_1 + L_2) = dim\, L_1 + dim\, L_2 - dim(L_1 \cap L_2).$$

Задача 4. Подпространства $L_1 = L(a_1, a_2, a_3)$, $L_2 = L(b_1, b_2, b_3)$ натянуты на следующие системы векторов:

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 2, 1), & b_1 &= (2, 3, -1), \\ a_2 &= (1, 1, -1), & b_2 &= (1, 2, -2), \\ a_3 &= (1, 3, 3), & b_3 &= (1, 1, -3). \end{aligned}$$

Найти базис и размерность подпространств $L_1, L_2, L_1 \cap L_2, L_1 + L_2$.

Решение. а) Сначала необходимо найти базис подпространства L_1. Для этого матрицу, составленную из строк a_1, a_2, a_3, необходимо привести к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система векторов a_1, a_2 линейно независима, а вектор a_3 линейно выражается через a_1, a_2. Но тогда по определению линейной оболочки всякий вектор L_1 также выражается через векторы a_1, a_2, которые составляют базис пространства L_1. Поэтому $dimL_1 = 2$ и

$$L_1 = L(a_1, a_2, a_3) = L(a_1, a_2) = \{x | x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{R}\}.$$

Аналогично из преобразований

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

вытекает, что базис L_2 состоит из векторов $b_2, b_3, dim\, L_2 = 2$ и

$$L_2 = \{x | x = \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3, \mu_2, \mu_3 \in \boldsymbol{R}\}.$$

б) Найдем базис и размерность подпространства $L_1 \cap L_2$. По определению пересечения всякий вектор из $L_1 \cap L_2$ имеет вид:

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3.$$

Таким образом

$$(\lambda_1, 2\lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, \lambda_2, -\lambda_2) = (\mu_2, 2\mu_2, 2\mu_2) + (\mu_3, \mu_3, -3\mu_3)$$

или

$$(\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2) = (\mu_2 + \mu_3, 2\mu_2 + \mu_3, 2\mu_2 - 3\mu_3),$$

откуда получается система уравнений для коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \mu_2 + \mu_3, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 2\mu_2 + \mu_3, \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 2\mu_2 - 3\mu_3, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2 - \mu_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu_2 - \mu_3 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\mu_2 + 3\mu_3 = 0. \end{cases}$$

Приведем систему к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2 - \mu_3 = 0, \\ -\lambda_2 + \mu_3 = 0, \\ -\mu_2 + 2\mu_3 = 0. \end{cases}$$

μ_3 можно принять за свободное неизвестное, а $\mu_2 = 2\mu_3$, поэтому всякий вектор $x \in L_1 \cap L_2$ имеет вид

$$x = \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3 = 2\mu_3 b_2 + \mu_3 b_3 = \mu_3(2b_2 + b_3) = \mu_3\big(2 \cdot (2,4,4) + (1,1,-3)\big) = \mu_3(3,5,1),$$

т.е. вектор $(3, 5, 1)$ составляет базис подпространства $L_1 \cap L_2$, поэтому $dim(L_1 \cap L_2) = 1$.

в) По определению суммы подпространств всякий вектор суммы $L_1 + L_2$ имеет вид

$$y = x_1 + x_2,$$

где

$$x_1 \in L_1 = L(a_1, a_2), \;\; x_2 \in L_2 = L(b_2, b_3),$$

и поэтому

$$y = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 b_2 + \alpha_4 b_3,$$

т.е. $L_1 + L_2$ есть линейная оболочка системы векторов a_1, a_2, b_2, b_3. Поэтому чтобы найти базис $L_1 + L_2$, нужно найти базис системы a_1, a_2, b_2, b_3. Составляя и преобразуя матрицу со строками a_1, a_2, b_2, b_3, имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что система векторов a_1, a_2, b_2 является одним из базисов подпространства $L_1 + L_2$, так что $dim(L_1 + L_2) = 3$.

Проверка:

$$dim\, L_1 + dim\, L_2 - dim(L_1 \cap L_2) = 2 + 2 - 1 = 3 = dim(L_1 + L_2).$$

Задачи для решения

1 Выясните, является ли линейным подпространством соответствующего линейного пространства каждое из нижеприведенных множеств векторов

а) множество векторов пространства R^n, компоненты которых целые числа;

б) множество векторов плоскости, исходящих из начала координат, концы которых лежат на данной прямой;

в) множество векторов плоскости, исходящих из начала координат, концы которых лежат на одной из осей координат;

г) множество векторов плоскости, исходящих из начала координат, концы которых лежат во второй четверти;

д) множество векторов пространства вещественных квадратных матриц порядка n над полем R, состоящее из невырожденных матриц;

е) множество векторов пространства вещественных квадратных матриц порядка n над полем R, состоящее из матриц, у которых первая строка нулевая;

ж) множество векторов пространства вещественных квадратных матриц с целочисленными компонентами;

з) множество векторов пространства вещественных квадратных матриц порядка 2 над полем R, состоящее из матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

2 Докажите, что нижеприведенные множества векторов образуют линейные подпространства соответствующих пространств, и найдите их базис.

а) Множество векторов пространства $\boldsymbol{R}^6$, у которых первая и последняя компоненты равны между собой;

б) множество векторов пространства $\boldsymbol{R}^6$ которые имеют вид $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta)$;

в) множество векторов пространства квадратных матриц 2-го порядка над полем $\boldsymbol{R}$, состоящее из матриц вида $\begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}$.

3 Узнайте, принадлежит ли вектор $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ из пространства M_2 вещественных квадратных матриц порядка 2 над полем $\boldsymbol{R}$ линейной оболочке векторов $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4 Найти базис и размерность подпространств, порожденных векторами:

а) $\overrightarrow{a_1} = (2, 1, 1, 0)$, $\overrightarrow{a_2} = (3, 2, -1, -2)$, $\overrightarrow{a_3} = (1, 1, -2, -2)$, $\overrightarrow{a_4} =$

$= (-1, 0, -3, -2)$;

б) $\overrightarrow{a_1} = (1, 2, 1, 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (2, 1, 2, 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1,\ 1,\ -1,\ 1)$;

в) $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\overrightarrow{f_1} = 2x + x^2$, $\overrightarrow{f_2} = -2 + x - x^2$, $\overrightarrow{f_3} = 4 + 3x^2$.

5 В пространстве $\boldsymbol{R}^4$ подпространства L_1, L_2 пораждаются соответственно векторами a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2

$$\overrightarrow{a_1} = (1, 2, 0, 1), \quad \overrightarrow{b_1} = (1, 0, 1, 0),$$

$$\overrightarrow{a_2} = (1, 1, 1, 0), \quad \overrightarrow{b_2} = (1, 3, 0, 1),$$

$$\overrightarrow{a_3} = (3, 5, 1, 2).$$

Найдите базис и размерность подпространств $L_1, L_2, L_1 \cap L_2, L_1 + L_2$.

6 Докажите, что если $L -$ трехмерное линейное пространство, а L_1, L_2 – различные двумерные подпространства, то $L_1 \cap L_2$ – одномерное подпространство и $L = L_1 + L_2$.

7 Докажите, что если размерность суммы двух линейных подпространств на единицу больше размерности их пересечения, то сумма совпадает с одним из этих подпространств, а пересечение с другим.

8 Докажите, что если система векторов $\vec{a}, \vec{b}$ линейно независима, то их линейная оболочка $L(\vec{a}, \vec{b})$ совпадает с прямой суммой $L(\vec{a}) + L(\vec{b})$ линейных оболочек $L(\vec{a})$ и $L(\vec{b})$ векторов $\vec{a}, \vec{b}$.

9 Докажите, что если L_1 и L_2 – различные одномерные подпространства двумерного линейного пространства L, то L является прямой суммой подпространств L_1 и L_2.

Тема 3. Исследование систем уравнений

Вопросы теории

1 Понятие исследования системы линейных уравнений.
2 Критерий совместности системы линейных уравнений.
3 Условие определенности системы линейных уравнений.
4 Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений.

Образцы решения задач

Задача 1. Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

Решение. Запишем матрицу системы и расширенную матрицу системы и приведем их к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 9 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, значит, система совместна. Количество неизвестных также равно 2, $n = r(A) = r(\bar{A}) = 2$. Значит, система совместна и определена, т.е. имеет единственное решение. Запишем систему уравнений соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ \quad 3x_2 = 9. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x_2 = 3$; подставляя это значение в уравнение 1, получаем $x_1 = 2$.

Система совместна и определена; общее решение (2; 3); частное решение (2; 3).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \\ -2x_1 - 2x_3 = 16 \end{cases}$$

Приведем к ступенчатому виду матрицы системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & -4\\ 1 & 2 & -3 & 0\\ -2 & 0 & -2 & 16\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & -4\\ 0 & 1 & -2 & 4\\ 0 & 2 & -4 & 8\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & -4\\ 0 & 1 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Так как $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3 = n,$ то система совместна и не определена (т. е. имеет бесконечно много решений).

Количество базисных переменных равно $r(A) = 2$, количество свободных переменных равно $n - r(A) = 3 - 2 = 1$.

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице $\begin{cases}x_1 + x_2 - x_3 = -4,\\ \quad x_2 - 2x_3 = 4.\end{cases}$

Теперь для наглядности запишем эту систему в другом виде (слева остаются только главные переменные):

$$\begin{cases}x_1 + x_2 = x_3 - 4,\\ \quad x_2 = 2x_3 + 4.\end{cases}$$

Подставляя выражение для x_2 в первое уравнение, получим $x_1 = -x_3 - 8$. Обозначая свободную переменную x_3 через t, получим общее решение системы: $(-t - 8; 2t + 4; t)$. Частное решение системы получим, например, при $t = 0$: $(-8; 4; 0)$.

Т.е. система совместна и не определена; общее решение $\{(-t - 8; 2t + +4; t), t \in \boldsymbol{R}\}$; частное решение $(-8; 4; 0)$.

Задача 3. Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1,\\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9,\\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8,\\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12.\end{cases}$$

Решение. Приведем матрицы системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 2 & 3 & 1\\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9\\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8\\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15\\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15\\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Так как $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 4 = n,$ то система совместна и не определена.

Количество базисных переменных равно $r(A) = 2$, количество свободных переменных равно $n - r(A) = 4 - 2 = 2$. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

Теперь запишем эту систему в другом виде (слева остаются только главные переменные):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 - 2x_3 - 3x_4, \\ 15x_2 = 15 - 15x_3 - 19x_4. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим x_2, через x_3 и x_4: $x_2 = 1 - 3x_3 - \frac{19}{15}x_4$. Подставляя в выражение для x_2 в первое уравнение, получим $x_1 = -1 - \frac{7}{15}x_4$. Обозначим свободные переменные x_3 через t_1, x_4 через t_2. Запишем общее решение системы:

$$\left(-1 - \frac{7}{15}t_2; 1 - t_1 - \frac{19}{15}t_2; t_1; t_2\right).$$

Частное решение системы получим, например, при $t_1 = 1, t_2 = 0$ $(-1; 0;\ -1; 0)$.

Система совместна и не определена; общее решение

$$\left\{\left(-1 - \frac{7}{15}t_2; 1 - t_1 - \frac{19}{15}t_2; t_1; t_2\right), t \in \boldsymbol{R}\right\}.$$

Частное решение $(-1; 0;\ -1; 0)$.

Задача 4. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right).$$

Так как $r(A) = 2 \neq 3 = r(\bar{A})$, то система несовместна (не имеет решений).

Задание. 5 Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от параметра λ. В случае, когда система совместна, найти общее и одно частное решение $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 8, \\ 4x_1 - 2x_2 = \lambda. \end{cases}$

Решение. Приведем к ступенчатому виду матрицы системы:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 8 \\ 4 & -2 & \lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda - 16 \end{array}\right).$$

Запишем полученную матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ранг $r(A) = 1$.

a) При $\lambda \neq 16$ получим расширенную матрицу системы

$$\bar{A} = \left(\begin{matrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 8 \\ \lambda - 16 \end{matrix}\right).$$

Ранг $r(\bar{A}) = 2$. Таким образом, $r(A) = 1 \neq 2 = r(\bar{A})$ – система несовместна.

b) При $\lambda = 16$ получим расширенную матрицу системы

$$\bar{A} = \left(\begin{matrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 8 \\ 0 \end{matrix}\right).$$

Ранг $r(\bar{A}) = 1$. Значит, $r(A) = r(\bar{A}) = 1 < 2 = n$, система совместна и неопределена. Полученной расширенной матрице системы соответствует уравнение

$$2x_1 - x_2 = 8.$$

Обозначая свободную переменную $x_1 = t$, получим общее решение системы: $(t; 2t - 8)$.

Частное решение системы получим, например, при $t = 0$: $(0; -8)$.

Таким образом, при $\lambda \neq 16$ система несовместна; при $\lambda = 16$ система совместна и не определена, общее решение $\{(t; 2t - 8), t \in \boldsymbol{R}\}$. Частное решение $(0; -8)$.

Задача 6. Найти размерность и базис векторного пространства решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем матрицу этой линейной системы и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 6 & -4 & 4 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Получим систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

Неизвестные x_2 и x_4 являются свободными; придадим им значения $x_2 = 3$ и $x_4 = 0$, а затем, выразим через них базисные неизвестные

$$\begin{cases} 3x_1 - 6 + 5x_3 = 0 \\ 6x_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x_1 = 6 \\ x_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\overline{\boldsymbol{e_1}}$	2	3	0	0

Таким образом, получим первый вектор базиса в пространстве решений. Положив $x_2 = 0$ и $x_4 = 6$, аналогично найдем второй вектор из базиса пространства решений

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_3 = 0 \\ 6x_3 + 30 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x_1 = 25 \\ x_3 = -5 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = \dfrac{25}{3} \\ x_3 = -5 \end{cases}.$$

(умножив полученный вектор на 3, мы сделали все его координаты целыми).

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\overline{\boldsymbol{e_2}}$	25	0	-15	18

Таким образом, пространство решений рассматриваемой линейной системы является двумерным, и векторы $(2, 3, 0, 0), (25, 0, -15, 18)$ образуют базис в пространстве её решений.

Задачи для решения

1 Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решения:

1) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} x - \sqrt{3}y = 1, \\ \sqrt{3}x - 3y = \sqrt{3}, \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}x + y = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} 45x_1 - 28x_2 + 34x_3 - 52x_4 = 9, \\ 36x_1 - 23x_2 + 29x_3 - 43x_4 = 3, \\ 35x_1 - 21x_2 + 28x_3 - 45x_4 = 16, \\ 47x_1 - 32x_2 + 36x_3 - 48x_4 = -17, \\ 27x_1 - 19x_2 + 22x_3 - 35x_4 = 6. \end{cases}$$

7) $$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$$

2 Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от параметра λ. В случае, когда система совместна, найти общее и одно частное решение:

1) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ \lambda x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 4. \end{cases}$$

3 Найти размерность и базис векторного пространства решений однородной системы линейных уравнений:

1) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0. \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

7) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

8) $$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

9) $$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

10) $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 - x_4 = 0' \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

11) $$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

12) $$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ -5x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ -4x_1 + 14x_2 - 8x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 + 10x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

13) $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ -9x_1 - 4x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

14) $$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ -5x_1 + 11x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Тема 4. Евклидовы пространства

Вопросы теории

1 Определение скалярного произведения.
2 Определение евклидова пространства.
3 Свойства скалярного произведения.
4 Длина (норма) вектора.
5 Угол между векторами.
6 Понятие ортогональных векторов.
7 Понятие ортогонального базиса.
8 Понятие ортонормированного базиса.

Образцы решения задач

Задача 1. Доказать, что любое $n-$ мерное вещественное векторное пространство можно превратить в евклидово пространство.

Решение. Надо показать, что в любом конечном пространстве L над полем $\boldsymbol{R}$ можно определить скалярное произведение. Пусть $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ $-$любой базис пространства $L, \vec{x}, \vec{y}$ – любые векторы из L, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ – их координаты в базисе:

$$\vec{x} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{e_n},$$
$$\vec{y} = \beta_1 \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \overrightarrow{e_2} + \dots + \beta_n \overrightarrow{e_n},$$

где $\alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{R}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Положим $(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n$ (1)

и покажем, что при таком определении все свойства скалярного произведения векторов будут выполнены.

1) Имеем:

$$(\vec{x}, \vec{x}) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2.$$

Поэтому в силу свойства поля $R(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$.Кроме того, $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ лишь тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, т.е. когда $\vec{x} = \vec{0}$.

2) Из коммутативности умножения в $\boldsymbol{R}$ вытекает, что

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\alpha_i = (\vec{y}, \vec{x}).$$

3) Поскольку вектор $k\vec{y}$ имеет в базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ координаты $k\beta_1, k\beta_2, \dots, k\beta_n$, то по свойству дистрибутивности умножения относительно сложения в поле $\boldsymbol{R}$

$$(\vec{x}, k\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(k\beta_i) = k\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i = k(\vec{x}, \vec{y}).$$

4) Пусть вектор $\vec{z}$имеет в базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$координаты $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Тогда вектор $\vec{y} + \vec{z}$имеет координаты $\beta_1 + \gamma_1, \beta_2 + \gamma_2, \dots, \beta_n + \gamma_n$. Пользуясь свойством дистрибутивности умножения относительно сложения в поле $\boldsymbol{R}$, получим:

$$(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\beta_i + \gamma_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\gamma_i = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z}).$$

Полученные результаты означают, что формула (1) определяет в L скалярное произведение векторов и поэтому L с заданным формулой (1) скалярным произведением является евклидовым пространством.

Задача 2. Доказать, что в n-мерном пространстве F многочленов степени $\leq n - 1$с действительными коэффициентами скалярное произведение двух векторов можно определить формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx, \tag{2}$$

где a и b– фиксированные действительные числа, $a < b$.

Решение. Используя свойства определённого интеграла и формулу (2), получим:

1) $(f,f)=\int_a^b f^2(x)dx \geq 0$, и $(f,f)=0$, тогда и только тогда, когда $f=0+0\cdot x+\cdots+0\cdot x^{n-1}$, т. е. $f=0$;

2) $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b g(x)f(x)dx=(g,f)$;

3) $(f,kg)=\int_a^b f(kg)dx=k\int_a^b fgdx=k(f,g)$;

4) $(f,f_1+f_2)=\int_a^b f(f_1+f_2)dx=\int_a^b ff_1dx+\int_a^b ff_2dx=(f,f_1)+$ $+(f,f_2)$.

Полученные результаты означают, что формула (2) определяет в F скалярное произведение.

Задача 3. Доказать, что в любом n-мерном евклидовом пространстве справедлива теорема косинусов.

Решение. Пусть векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ обозначают соответствующие вершины A,B,C некоторого треугольника, тогда по определению длины вектора получим:

$$|AB|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right)},$$

$$|AC|=|\vec{a}-\vec{c}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{c},\vec{a}-\vec{c})},$$

$$|BC|=\left|\vec{b}-\vec{c}\right|=\sqrt{\left(\vec{b}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\right)}.$$

Обозначая через α величину угла между векторами $\vec{b}-\vec{a}$ и $\vec{c}-\vec{a}$, имеем по определению:

$$cos\alpha=\frac{(\vec{b}-\vec{a},\ \ \vec{c}-\vec{a})}{|AB|\cdot|AC|}.$$

Применяя свойства скалярного произведения, найдем, что:

$$|AB|^2+|AC|^2-2\cdot|AB|^2\cdot|AC|^2\cdot cos\,\alpha=$$
$$=\left(\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right)+(\vec{a}-\vec{c},\vec{a}-\vec{c})-2\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\frac{\left(\vec{b}-\vec{c},\vec{c}-\vec{a}\right)}{|AB|\cdot|AC|}=$$
$$=(\vec{a},\vec{a})-2\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{b},\vec{b}\right)+(\vec{a},\vec{a})-2(\vec{a},\vec{c})+(\vec{c},\vec{c})-2\left(\vec{b},\vec{c}\right)$$
$$=+2(\vec{a},\vec{c})+2\left(\vec{a},\vec{b}\right)-2(\vec{a},\vec{a})=\left(\vec{b},\vec{b}\right)-2\left(\vec{b},\vec{c}\right)+(\vec{c},\vec{c})=$$
$$=\left(\vec{b}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\right)=|BC|^2.$$

Итак,

$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot cos\,\alpha$, что и следовало доказать.

Задача 4. Исследовать на ортогональность векторы $\vec{a}_1 = (2, 1, -4, 2)$ и $\vec{a}_2 = (4, 8, 2, -4)$, заданные своими координатами в некотором ортонормированном базисе пространства $\boldsymbol{R^4}$, а затем нормировать эти векторы.

Решение. Так как векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ заданы координатами в ортонормированном базисе, то:

$$(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 8 + (-4) \cdot 2 + 2 \cdot (-4) = 0,$$

а поэтому векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ ортогональны и составляют линейно независимую систему.

Нормируя $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, получаем векторы:

$$\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\sqrt{(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}} = \frac{\vec{a}_1}{\sqrt{4 + 1 + 16 + 4}} = \frac{1}{5} a_1 = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right),$$

$$\vec{b}_2 = \frac{\vec{a}_2}{\sqrt{(\vec{a}_2, \vec{a}_2)}} = \frac{\vec{a}_2}{\sqrt{16 + 64 + 4 + 16}} = \frac{1}{10} \vec{a}_2 = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right).$$

Задача 5. Методом ортогонализации построить ортонормированный базис подпространства L_1, натянутого на следующую систему векторов пространства $\boldsymbol{R^4}$**:**

$$\vec{a}_1 = (1, 0, 0, -1), \vec{a}_2 = (2, 1, 1, 0), \vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1), \vec{a}_4 = (1, 2, 3, 4),$$

$$\vec{a}_5 = (0, 1, 2, 3),$$

заданных своими координатами в некотором ортонормированном базисе.

Решение. Найдем базис подпространства $L_1 = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. ранг данный системы векторов равен 3 и система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ линейно независима. Следовательно, система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ составляет базис L_1.

2) Ортогонализируем найденный базис. Положим $\vec{a}_1 = \vec{b}_1$. Второй вектор $\vec{b}_2$ получим по формуле:

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{(\vec{a}_2, \vec{b}_1)}{(\vec{b}_1, \vec{b}_1)} \overrightarrow{b_1}.$$

Имеем:

$$\left(\vec{a}_1, \vec{b}_1\right) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 2,$$

$$\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2\right) = 1^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2,$$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - 1 \cdot \vec{b}_1 = (1, 1, 1, 1).$$

Третий вектор $\vec{b}_3$ получается по формуле:

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_4 - \left(\frac{\vec{a}_4, \vec{b}_1}{\vec{b}_1, \vec{b}_1}\right)\vec{b}_1 - \frac{\left(\vec{a}_4, \vec{b}_2\right)}{\left(\vec{b}_2, \vec{b}_2\right)}\vec{b}_2,$$

откуда

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_4 + \frac{3}{2}\vec{b}_1 - \frac{5}{2}\vec{b}_2 = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0).$$

Следовательно, система $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ является искомым базисом.

3) Нормируем найденный ортогональный базис:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\sqrt{\overrightarrow{(b_1}, \vec{b}_1)}} = \frac{\vec{b}_1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{\sqrt{\left(\vec{b}_2, \vec{b}_2\right)}} = \frac{\vec{b}_2}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{b}_3}{\sqrt{\left(\vec{b}_3, \vec{b}_3\right)}} = \sqrt{2}\vec{b}_3 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Ортонормированным базисом подпространства L_1 является система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Задача 6. В евклидовом пространстве многочленов степени ≤ 2 над $\boldsymbol{R}$ со скалярным произведением, задаваемым равенством

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx,$$

ортогонализировать базис $f_1(x) = 1, \mathrm{f}_2(x) = x, f_3(x) = x^2$.

Решение. Строим по данному базису новый базис $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$. За первый вектор принимаем $\varphi_1(x) = f_1(x)$, т.е. $\varphi_1(x) = 1$. Второй вектор $\varphi_2(x)$ ищем в виде

$$\varphi_2(x) = f_2(x) + \alpha\varphi_1(x) = x + \alpha \cdot 1,$$

где

$$\alpha = -\frac{(f_2,\varphi_2)}{(\varphi_1,\varphi_1)} = -\frac{\int_0^1 x\cdot 1\cdot dx}{\int_0^1 1\cdot 1\cdot dx} = -\frac{\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\varphi_2(x) = x - \frac{1}{2}\cdot 1 = x - \frac{1}{2}$.

Третий вектор $\varphi_3(x)$ находится в виде:

$$\varphi_3(x) = f_3(x) + \mu_1\varphi_1(x) + \mu_2\varphi_2(x),$$

$$\mu_1 = -\frac{(f_3,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)} = -\frac{1}{3},$$

$$\mu_2 = -\frac{(f_3,\varphi_3)}{(\varphi_2,\varphi_2)} = -1.$$

Таким образом, вектор $\varphi_3(x) = x^2 - \frac{1}{3}\cdot 1 - 1\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}$.

Следовательно, искомый базис состоит из векторов:

$$1, \qquad x - \frac{1}{2}, \qquad x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Задача 7. Используя процесс ортогонализации Грама – Шмидта, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов:

$$\overline{a_1} = (-1,1,-1,1), \qquad \overline{a_2} = (0,5,-1,2), \qquad \overline{a_3} = (5,5,3,-1), \qquad \overline{a_4} = (1,4,0,1).$$

С помощью процесса ортогонализации построим ортогональную систему векторов $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}, \overline{b_4}$. Если она будет содержать нулевые векторы, то их нужно вычеркнуть. Останется ортогональная система ненулевых векторов. Это и будет искомым базисом.

Первый вектор: $\overline{b_1} = \overline{a_1} = (-1,1,-1,1)$.

Второй вектор имеет вид: $\overline{b_2} = \overline{a_2} - \alpha\overline{b_1}$, где $\alpha = \frac{(\overline{a_2},\overline{b_1})}{(\overline{b_1},\overline{b_1})}$;

$$\left(\overline{a_2},\overline{b_1}\right) = 0\cdot(-1) + 5\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 1 = 8;$$

$$\left(\overline{b_1},\overline{b_1}\right) = (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 4; \qquad \alpha = \frac{\left(\overline{a_2},\overline{b_1}\right)}{\left(\overline{b_1},\overline{b_1}\right)} = \frac{8}{4} = 2.$$

Тогда $\overline{b_2} = \overline{a_2} - 2\overline{b_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Третий вектор имеет вид: $\overline{b_3} = \overline{a_3} - \alpha_1\overline{b_1} - \alpha_2\overline{b_2}$, где $\alpha_1 = \frac{(\overline{a_3},\overline{b_1})}{(\overline{b_1},\overline{b_1})}$,

$$\alpha_2 = \frac{(\overline{a_3},\overline{b_2})}{(\overline{b_2},\overline{b_2})}.$$

$$\left(\overline{a_3}, \overline{b_1}\right) = 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -4;$$

$$\left(\overline{a_3}, \overline{b_2}\right) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 28;$$

$$\left(\overline{b_2}, \overline{b_2}\right) = 2^2 + 3^2 + 1^2 = 14;$$

$$\alpha_1 = \frac{(\overline{a_3}, \overline{b_1})}{(\overline{b_1}, \overline{b_1})} = \frac{-4}{4} = -1; \qquad \alpha_2 = \frac{(\overline{a_3}, \overline{b_2})}{(\overline{b_2}, \overline{b_2})} = \frac{28}{14} = 2.$$

Тогда $\overline{b_3} = \overline{a_3} + \overline{b_1} - 2\overline{b_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Вектор $\overline{b_3}$ оказался нулевым, значит, в искомый базис он не входит.

Четвертый вектор: $\overline{b_4} = \overline{a_4} - \alpha_1\overline{b_1} - \alpha_2\overline{b_2} - \alpha_3\overline{b_3}$, где $\alpha_1 = \frac{(\overline{a_4}, \overline{b_1})}{(\overline{b_1}, \overline{b_1})}$,

$$\alpha_2 = \frac{\left(\overline{a_4}, \overline{b_2}\right)}{\left(\overline{b_2}, \overline{b_2}\right)},$$

$\alpha_3 -$ произвольное число.

$$\left(\overline{a_4}, \overline{b_1}\right) = 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 4;$$

$$\left(\overline{a_4}, \overline{b_2}\right) = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 14;$$

$$\alpha_1 = \frac{\left(\overline{a_4}, \overline{b_1}\right)}{\left(\overline{b_1}, \overline{b_1}\right)} = \frac{4}{4} = 1, \qquad \alpha_2 = \frac{\left(\overline{a_4}, \overline{b_2}\right)}{\left(\overline{b_2}, \overline{b_2}\right)} = \frac{14}{14} = 1.$$

Тогда

$\overline{b_4} = \overline{a_4} - \overline{b_1} - \overline{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} -$ нулевой вектор.

Значит, система векторов $\overline{b_1} = (-1,1,-1,1)$, $\overline{b_2} = (2,3,1,0)$ образует ортогональный базис пространства.

Задачи для решения

1 Выяснить, можно ли в n-мерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R^n}$ задать скалярное произведение $(\vec{x}, \vec{y})$с помощью формулы

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + 3\alpha_3\beta_3 + \cdots + n\alpha_n\beta_n,$$

где $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \vec{y} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

2 Можно ли в любом n-мерном вещественном пространстве задать скалярное произведение формулой

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot \beta_{n-1},$$

если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n$– координаты векторов $\overrightarrow{x}$ и $\vec{y}$ в некотором фиксированном базисе?

3 Положим $\|v\| = (v; v)$. Доказать, что $\|u + v\| = \|u\| + \|v\| + 2(u, v)$.

4 Если у двух векторов конечномерного евклидова пространства совпадают скалярные произведения со всеми векторами пространства, то они равны. Докажите утверждение.

5 Доказать, что из определения скалярного произведения вытекают следующие его свойства:

а) $(\vec{x}, \vec{0}) = 0$;

б) $(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}, y) = (\overrightarrow{x_1}, \vec{y}) - (\overrightarrow{x_2}, \vec{y})$.

6 Найти длины арифметических векторов:

$$\vec{a} = (3, 2, 1, 1, 1), \qquad \vec{b} = (-5, 0, \sqrt{3}, -2\sqrt{3})$$

и расстояние между точками:

$$x = (5, 7, 5, 7, 2), \qquad y = (6, 4, 4, 4, 6).$$

7 Определите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = (2, 1, 3, 2), \quad \vec{b} = (1, 2, -2, 1)$;

б) $\vec{a} = (4, 0, 2, 0, 4), \quad \vec{b} = (3, 3, 3, 3, 0)$.

8 Определить длины сторон и внутренние углы треугольника, вершины которого A, B, C заданы соответственно векторами:

а) $\vec{a} = (0, 2, 1), \quad \vec{b} = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \vec{c} = (1, 2, 0)$;

б) $\vec{a} = (3, -1, 3, -1), \quad \vec{b} = (4, 0, 2, 0), \quad \vec{c} = (3, 1, 3, 1)$.

9 Показать, что в любом евклидовом пространстве для всякого вектора $\vec{x}$ и всякого действительного α выполняется равенство:

$$|\alpha \vec{x}| = |\alpha| \cdot |\vec{x}|.$$

10 Доказать, что в любом n-мерном евклидовом пространстве справедливы теоремы:

а) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

б) квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его ребер, выходящих из одной вершины.

11 Доказать, что для любых векторов $\overrightarrow{a}$ и $\vec{b}$ евклидова пространства имеет место равенство:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=2\cdot\left(|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2\right).$$

12 Доказать, что если $\vec{a}$ и $\overrightarrow{b}$ – такие векторы евклидова пространства, для которых $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|$, то

$$\left(\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\right)=0.$$

13 Доказать, что если $\vec{a},\overrightarrow{b}$ – векторы какого-либо евклидова пространства, причем $(a,b)=0$, то

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2.$$

14 Написать неравенство Коши – Буняковского для векторов $f(x)$ и $g(x)$ пространства F многочленов степени $\leq n-1$над полем $\boldsymbol{R}$, если скалярное произведение в пространстве Fзадано:

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

15 Доказать, что для любых векторов $\vec{x},\vec{y}$ справедливо неравенство:

$$|\vec{x}+\vec{y}|\leq|\vec{x}|+|\vec{y}|.$$

16 Доказать неравенства:

а) $|\vec{x}|-|\vec{y}|\leq|\vec{x}-\vec{y}|$;

б) $|\vec{x}|-|\vec{y}|\leq|\vec{x}+\vec{y}|$,

где $\vec{x},\overrightarrow{y}$ – любые векторы евклидова пространства.

17 Ортогонализируйте нижеприведенные системы векторов, заданных своими координатами в некотором ортонормированном базисе:

а) (3, 2, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 3);
б) (1, 1, - 1, -2), (4, 1, -2, 3), (3, 4, -1, 2).
Убедитесь в попарной ортогональности найденных векторов непосредственно.

18 Ортогональную систему векторов $\overline{a_1} = (1, -2, 2, -3)$, $\overline{a_2} = (2, -3, 2, 4)$ евклидова пространства $\boldsymbol{R^4}$ дополнить до ортогонального базиса этого пространства.

19 Проверить, что векторы системы

$$\vec{a}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \vec{a}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

евклидова пространства $\boldsymbol{R^4}$ ортогональны и нормированы. Дополнить данную систему до ортонормированного базиса этого пространства.

20 В евклидовом пространстве $\boldsymbol{R^4}$ для пространства L решений системы уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ -6x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 4x_4 = 0, \end{cases}$$

построить ортогональный базис.

21 Найти ортонормированную фундаментальную систему решений для системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

22 Построить ортонормированный базис подпространства, натянутого на следующие системы векторов:

а) $\vec{a}_1 = (1, 2, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (1, 3, 0, 1)$;
б) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, -1, 1, 4)$, $\vec{a}_3 = (1, 3, 1, 3)$, $\vec{a}_4 = (1, 2, 0, 1)$.

23 Используя процесс ортогонализации Грама – Шмидта, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов:

а) $\overline{a_1} = (-1,1,-1,1)$, $\overline{a_2} = (0,5,-1,2)$, $\overline{a_3} = (5,5,3,-1)$, $\overline{a_4} = (1,4,0,1)$;

б) $\overline{\mathrm{a}_1} = (1,-1,2,1)$, $\overline{\mathrm{a}_2} = (2,-1,1,2)$, $\overline{\mathrm{a}_3} = (0,-1,3,0)$, $\overline{\mathrm{a}_4} = (2,4,-3,1)$;

в) $\overline{\mathrm{a}_1} = (0,-1,1,2)$, $\overline{\mathrm{a}_2} = (2,-1,3,4)$, $\overline{\mathrm{a}_3} = (4,3,1,-2)$, $\overline{\mathrm{a}_4} = (2,0,2,2)$;

г) $\overline{\mathrm{a}_1} = (2,3,2,2)$, $\overline{\mathrm{a}_2} = (5,4,6,4)$, $\overline{\mathrm{a}_3} = (0,-7,2,-2)$, $\overline{\mathrm{a}_4} = (3,1,4,2)$.

Список литературы

1 Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3-х книгах. Кн. 2: Линейная алгебра. М. : МЦНМО, 2009.
2 Курош А. Г. Курс высшей алгебры. 17-е изд. СПб. : Лань, 2008.
3 Окунев Л. Я. Высшая алгебра. 3-е изд. СПб. : Лань, 2009.
4 Окунев Л. Я. Сборник задач по высшей алгебре. 2-е изд. СПб. : Лань, 2009.
5 Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Задачи по высшей алгебре. 17-е изд. СПб. : Лань, 2008.
6 Нечаев В. А. Задачник-практикум по алгебре. М. : Просвещение, 1983.

Шатных Олеся Николаевна

АЛГЕБРА

(ЧАСТЬ 2)

Материалы для практических занятий
и самостоятельной работы
для студентов направлений 01.03.01 и 44.03.01

Редактор Е. А. Могутова

Подписано к печати	Формат бумаги 60х84 1/16	Бумага тип. № 1
Печать цифровая	Усл. печ. л. 2,25	Уч.- изд.л. 2,25
Заказ	Тираж 25	Не для продажи

РИЦ Курганского государственного университета.
640000,г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.