В.Д. Лугавова, Л.В. Лугавова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Курганский государственный университет»

В.Д. Лугавова, Л.В. Лугавова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Курган 2013

УДК 514.7(08)
ББК 22.151я7
Л83

Р е ц е н з е н т ы

кафедра высшей математики Югорского государственного университета (зав.каф. д-р физ.-мат. наук, проф. **С.Г. Пятков**)

кафедра математики Курганской государственной сельскохозяйственной академии (канд. физ.-мат. наук, доц. **Г.А. Московченко**)

Печатается по решению методического совета Курганского государственного университета.

Л 83 Лугавова В.Д., Лугавова Л.В. Дифференциальная геометрия: учебное пособие. Курган: Изд-во Курганского гос. ун-та, 2013. 68 с.

В учебном пособии излагаются основы дифференциальной геометрии - теория кривых и поверхностей. Пособие включает в себя теоретические сведения, а также примеры, иллюстрирующие основные понятия и положения. В пособие включены типовые задачи с подробными решениями и пояснениями, а также задачи и упражнения для самостоятельной работы.

Пособие предназначено для студентов технических специальностей и направлений подготовки в высших учебных заведениях.

Рис. - 21. Библиогр. 7 назв.

ISBN 978-5-4217-0220-7 УДК 514.7(08)

ББК 22.151я7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 Линии в евклидовом пространстве

Возникновение дифференциальной геометрии относится к первой половине XVIII века и связано с именами Л. Эйлера и Г. Монжа. Ее ведущие разделы: теория кривых и теория поверхностей – интенсивно развивались и обобщались в работах К. Гаусса и других математиков. Характерным для дифференциальной геометрии является то, что она изучает свойства кривых и поверхностей «в малом», то есть свойства достаточно малых кусков кривых и поверхностей. Дифференциальная геометрия в значительной степени опирается на теоремы, модели и приемы математического анализа, отсюда происходит и ее название. Существование исследуемого геометрического объекта здесь связано, как правило, с условиями непрерывности, дифференцируемости или интегрируемости некоторой функции.

1.1 Элементарная, простая, общая кривая

Прежде чем ввести понятие элементарной кривой рассмотрим вспомогательные понятия и определения.

Пусть в евклидовом пространстве E_3 введена прямоугольная система координат. Возьмем произвольное подмножество $G \subset E_3$. Рассмотрим отображение $f : G \to E_3$.

О п р е д е л е н и е. Отображение f множества G в E_3 называется взаимно однозначным отображением (или вложением), если образы различных точек при этом отображении различны.

Если f – вложение, то на множестве $f(G)$ – образе множества G при отображении f – можно ввести отображение, обратное к отображению f. Для этого произвольной точке $K \in f(G)$ сопоставим точку $M \in G$ такую, что $f(M) = K$. Легко видеть, что точка M, обладающая этим свойством (т.е. $f(M) = K$), единственна. Отображение, обратное к отображению f, обозначается символом f^{-1}.

О п р е д е л е н и е. Отображение f называется непрерывным в точке $M_0 \in G$, если $\lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ M \in G, M \neq M_0}} f(M) = f(M_0)$.

О п р е д е л е н и е. Отображение f называется непрерывным на множестве G, если оно непрерывно во всех точках множества G.

О п р е д е л е н и е. Отображение $f: G \to E_3$ называется топологическим отображением или гомеоморфизмом, если f – вложение и отображения f, f^{-1} непрерывны.

Если f – гомеоморфизм, то множества G и $f(G)$ называются гомеоморфными.

О п р е д е л е н и е. Элементарной кривой γ называется образ открытого отрезка прямой при топологическом отображении его в пространство E_3.

З а м е ч а н и е. Элементарную кривую можно представить как объект, полученный в результате непрерывной деформации открытого отрезка прямой.

П р и м е р 1. Полуокружность без концов есть элементарная кривая.

Действительно, построим прямую параллельную диаметру полуокружности (рисунок 1). Рассмотрим проектирование точек полуокружности на прямую. Обозначим это взаимно однозначное отображение f. Отображение $f^{-1} = g$ переводит открытый отрезок (AB) в заданную полуокружность. Легко заметить, что g – непрерывно (так как достаточно близкие точки открытого отрезка (AB) переходят в достаточно близкие точки полуокружности). Аналогично, отображение $g^{-1} = f$ является непрерывным. Значит, g – гомеоморфизм.

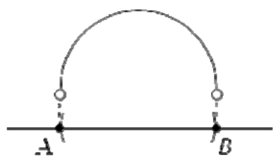


Рисунок 1 - Элементарная кривая

З а м е ч а н и е. Окружность не является элементарной кривой (доказать самостоятельно).

В дальнейшем нам потребуются следующие определения.

О п р е д е л е н и е. Открытым шаром (в пространстве E_3) с центром в точке M_0 и радиусом $r > 0$ называется множество точек M, отстоящих от точки M_0 на расстоянии меньшем, чем r.

Обозначается такой шар символом $B(M_0, r)$. Таким образом,

$$B(M_0, r) = \{M \in E_3 : |M_0M| < r\}.$$

О п р е д е л е н и е. Множество $A \subset E_3$ называется открытым в пространстве E_3, если с каждой своей точкой оно содержит и некоторый открытый шар, содержащий эту точку.

О п р е д е л е н и е. Окрестностью точки M в пространстве E_3 называется любое открытое множество, содержащее эту точку.

О п р е д е л е н и е. Множество F из E_3 называется связным, если не существует двух открытых множеств G_1 и G_2, которые разбивали бы множество F на две непустые части F_1 и F_2, одна из которых принадлежала бы только G_1, а другая - только G_2.

О п р е д е л е н и е. Множество γ точек пространства E_3 называется простой кривой, если это множество обладает свойствами: γ – связно и для каждой точки M кривой γ найдется окрестность $U(M)$ точки M такая, что часть кривой γ, лежащая в этой окрестности, является элементарной кривой.

П р и м е р 2. Окружность – простая кривая.

Действительно, первое свойство определения простой кривой проверяется легко. Для проверки второго свойства достаточно окружить произвольную точку окружности достаточно малым открытым шаром (рисунок 2): часть окружности, лежащая в этом шаре, является дугой без концов. А дуга без концов является элементарной кривой (см. предыдущий пример).

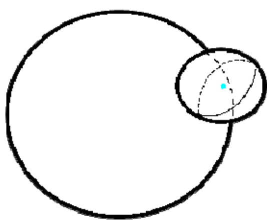


Рисунок 2 – Простая кривая

Без доказательства отметим, что всякая простая кривая гомеоморфна либо открытому отрезку (в этом случае она является и элементарной кривой), либо окружности.

О п р е д е л е н и е. Отображение $f: G \to E_3$ называется локально топологическим, если для любой точки M из G существует окрестность $U(M)$ этой точки, в которой отображение f является топологическим.

О п р е д е л е н и е. Множество γ точек пространства E_3 называется общей кривой, если это множество есть образ простой кривой при локально топологическом отображении ее в пространстве.

П р и м е р 3. Символ бесконечности ∞ – пример общей, но не простой кривой.

Все рассмотренные выше кривые обладают одним свойством: в достаточно малой окрестности каждой своей точки они являются элементарными. А поскольку дифференциальная геометрия изучает локальные свойства кривых, то везде в дальнейшем будем предполагать, что рассматриваемые кривые элементарны.

1.2 Регулярные кривые. Способы аналитического задания кривой

Рассмотрим произвольную элементарную кривую γ. По определению γ является образом открытого отрезка I прямой. Возьмем произвольную точку $M \in \gamma$. Пусть она является образом точки $t \in I$ и пусть M имеет координаты x, y, z (рисунок 3). Так как M – образ точки t, то и ее координаты – суть некоторые функции параметра t:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in I. \qquad (1)$$

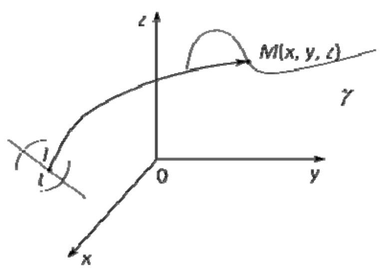


Рисунок 3 - К уравнению кривой в параметрической форме

Система (1) определяет уравнение кривой γ в параметрической форме.

О п р е д е л е н и е. Кривая γ называется регулярной кривой класса C^k ($k \geq 1, k$ – целое), если существует параметрическое задание (1) кривой γ, в котором функции $x(t), y(t), z(t)$ имеют непрерывные производные до k-го порядка включительно и $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 > 0$ в каждой точке $t \in I$. Кривые класса C^1 называются гладкими кривыми.

Пусть дана элементарная кривая γ. Любому $t \in I$ поставлена в соответствие точка $M \in \gamma$, то есть вектор $\overline{OM} = \bar{r}(t)$. Пусть $\bar{r}$ – радиус-вектор произвольной точки на кривой γ. Тогда $\bar{r} = \bar{r}(t)$ – векторное уравнение кривой γ.

Рассмотрим другие способы задания кривой.

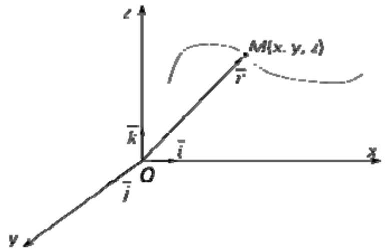


Рисунок 4 – К векторному уравнению кривой

Пусть кривая γ задана параметрическими уравнениями (1). Любая точка $M(x, y, z)$ этой кривой может быть также определена радиус–вектором $\bar{r}$ (рисунок 4). В силу уравнений (1) кривой γ имеем

$$\bar{r} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k} \qquad (2)$$

или коротко $\bar{r} = \bar{r}(t)$, где $\bar{r} = (x(t), y(t), z(t))$.

Уравнение (2) называется векторным уравнением кривой γ.

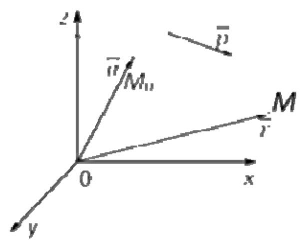


Рисунок 5 – Прямая, заданная вектором и точкой

П р и м е р 4. Найдем векторное уравнение прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\bar{p}$.

Обозначим $\overline{OM_0} = \bar{a}(x_0 y_0 z_0)$. Пусть $\bar{r}$ – радиус–вектор произвольной точки M прямой l (рисунок 5). Вектор $\bar{r} - \bar{a}$ коллинеарен вектору $\bar{p}$ и, следовательно, $\bar{r} - \bar{a} = t\bar{p}$ при некотором t. Итак, $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{p}$ – векторное уравнение l.

Остановимся еще на одном способе задания кривой, называемым неявным заданием кривой. Сначала ограничимся плоскими кривыми.

О п р е д е л е н и е. Кривая γ называется плоской, если существует плоскость, которой принадлежат все точки кривой.

Примеры плоской кривой - прямая, окружность, эллипс и т.д. Без ограничения общности будем предполагать, что плоские кривые лежат в плоскости xOy.

Говорят, что плоская кривая γ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, если координаты ее точек удовлетворяют этому уравнению. Очевидно, что не любое уравнение $F(x, y) = 0$ задает некоторую кривую. Например: $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Тем не менее справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Обозначим через Γ множество точек плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. Пусть функция $F(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до k–го порядка включительно и пусть $M_0 \in \Gamma$. Тогда, если в этой точке выполнено неравенство $(F_x')^2 + (F_y')^2 > 0$, то найдется ее окрестность $U(M_0)$ такая, что все принадлежащие ей точки кривой (т.е. множество $U(M_0) \cap \Gamma$) образуют элементарную, регулярную кривую класса C^k.

Аналогичная теорема имеет место и для пространственных кривых.

Т е о р е м а 2. Пусть $\varphi(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$ – регулярные функции и пусть D - множество точек пространства, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0, \\ \psi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Пусть (x_0, y_0, z_0) - такая точка из D, что ранг матрицы $\begin{pmatrix} \varphi_x' & \varphi_y' & \varphi_z' \\ \psi_x' & \psi_y' & \psi_z' \end{pmatrix}$ в этой точке равен 2. Тогда у этой точки найдётся такая окрестность, что часть множества D, лежащая в этой окрестности, является регулярной элементарной кривой.

1.3 Элементы векторного анализа

До сих пор мы рассматривали скалярные функции скалярного аргумента, т.е. функции, определенные на некотором подмножестве R, со значениями во множестве R. Обобщением таких функций являются векторные функции скалярного аргумента, которые возникают во многих приложениях физики, математики.

О п р е д е л е н и е. Пусть V – множество точек на прямой, плоскости или в пространстве. Говорят, что на множестве V задана вектор–функция, если каждой его точке M сопоставлен вектор $\bar{f}(M)$.

Если V – множество точек на прямой, то вектор–функция $\bar{f}$, заданная на V, является вектор-функцией одного скалярного аргумента: $\bar{f} = \bar{f}(t)$.

Правила действий над векторами позволяют ввести операции над вектор-функциями: операции сложения, вычитания, умножения вектор–функции на число, скалярного и векторного умножения. Аналогично на вектор-функцию переносятся многие понятия и теоремы для скалярных функций скалярного аргумента (предел, непрерывность, производная).

Определение. Векторная функция $\bar{f}(t)$ имеет пределом вектор $\bar{a}$ при $t \to t_0$, если $\lim\limits_{t \to t_0} \left| \bar{f}(t) - \bar{a} \right| = 0$. Обозначение: $\lim\limits_{t \to t_0} \bar{f}(t) = \bar{a}$.

Определение. Векторная функция $\bar{f}(t)$ непрерывна в точке t_0, если $\lim\limits_{t \to t_0} \left| \bar{f}(t) - \bar{f}(t_0) \right| = 0$.

Для вектор-функций имеют место теоремы о пределах, аналогичные теоремам о пределах для скалярных функций.

Теорема 3. Если $\lim\limits_{t \to t_0} \bar{f}(t) = \bar{a}$ и $\lim\limits_{t \to t_0} \bar{g}(t) = \bar{b}$, $\lim\limits_{t \to t_0} \lambda(t) = \lambda$, то

1) $\lim\limits_{t \to t_0} \left(\bar{f}(t) \pm \bar{g}(t) \right) = \bar{a} \pm \bar{b}$, 2) $\lim\limits_{t \to t_0} \bar{f}(t) \cdot \bar{g}(t) = \bar{a} \cdot \bar{b}$,

3) $\lim\limits_{t \to t_0} \bar{f}(t) \times \bar{g}(t) = \bar{a} \times \bar{b}$, 4) $\lim\limits_{t \to t_0} \lambda(t) \cdot \bar{f}(t) = \lambda \cdot \bar{a}$.

Следствие. Если $\bar{f}(t)$, $\bar{g}(t)$, $\lambda(t)$ – функции, непрерывные в точке t_0, тогда в точке t_0 непрерывны функции $\bar{f}(t) \pm \bar{g}(t)$, $\bar{f}(t) \cdot \bar{g}(t)$, $\bar{f}(t) \times \bar{g}(t)$, $\lambda(t) \bar{f}(t)$.

Для векторной функции, аналогично скалярной функции, вводится понятие производной. Пусть дана векторная функция $\bar{f}(t)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\bar{f}(t_0 + h) - \bar{f}(t_0)}{h}$, то этот предел называют производной вектор-функции $\bar{f}(t)$ в точке t_0 и обозначают $\bar{f}'(t_0)$.

Имеет место следующая

Теорема 4. Если функции $\bar{f}(t)$, $\bar{g}(t)$, $\lambda(t)$ дифференцируемы в точке t_0, то функции $\bar{f}(t) \pm \bar{g}(t)$, $\bar{f}(t) \cdot \bar{g}(t)$, $\bar{f}(t) \times \bar{g}(t)$, $\lambda(t) \bar{f}(t)$ дифференцируемы в точке t_0 и имеют место равенства:

$$\left(\lambda \bar{f} \right)' = \lambda' \bar{f} + \lambda \bar{f}', \quad \left(\bar{f} \cdot \bar{g} \right)' = \bar{f}' \cdot \bar{g} + \bar{f} \cdot \bar{g}',$$

$$\left(\bar{f} \pm \bar{g} \right)' = \bar{f}' \pm \bar{g}', \quad \left(\bar{f} \times \bar{g} \right)' = \bar{f}' \times \bar{g} + \bar{f} \times \bar{g}'.$$

Большинство рассматриваемых нами функций будут иметь три координаты, т.е. $\bar{r}(t)=x(t)\bar{i}+y(t)\bar{j}+z(t)\bar{k}$, где $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ – единичные направляющие векторы положительных полуосей (орты). Аналогично векторам вектор-функцию скалярного аргумента можно задать в виде: $\bar{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$. Найдем выражение производной вектор–функции $\bar{r}(t)=x(t)\bar{i}+y(t)\bar{j}+z(t)\bar{k}$ через производные ее координат $x(t),y(t),z(t)$. Запишем приращение вектор–функции $\bar{r}(t)$ в точке t_0

$$\bar{r}(t_0+\Delta t)-\bar{r}(t_0)=(x(t_0+\Delta t)-x(t_0))\bar{i}+(y(t_0+\Delta t)-y(t_0))\bar{j}+$$
$$+(z(t_0+\Delta t)-z(t_0))\bar{k}.$$

Тогда $\bar{r}'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\bar{r}(t_0+\Delta t)-\bar{r}(t_0)}{\Delta t}=$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}\bar{i}+\frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t}\bar{j}+\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}\bar{k}\right)=$$
$$=x'(t_0)\bar{i}+y'(t_0)\bar{j}+z'(t_0)\bar{k}$$

при условии, что производные $x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)$ существуют. Таким образом, если $\bar{r}(t)=x(t)\bar{i}+y(t)\bar{j}+z(t)\bar{k}$, то $\bar{r}'(t)=x'(t)\bar{i}+y'(t)\bar{j}+z'(t)\bar{k}$ – выражение производной вектор–функции через ее координаты.

Пример 5. Найти производные от вектор–функций:

а) $\bar{r}(t)=ctgt\cdot\bar{i}+arctgt\cdot\bar{j}$, б) $\bar{r}(t)=e^{-t}\cdot\bar{i}+2t\cdot\bar{j}+\ln t\cdot\bar{k}$.

Решение

Т.к. $\bar{r}'(t)=x'(t)\bar{i}+y'(t)\bar{j}+z'(t)\bar{k}$, то

а) $\bar{r}'(t)=\dfrac{-1}{\sin^2 t}\bar{i}+\dfrac{1}{1+t^2}\bar{j}$; б) $\bar{r}'(t)=-e^{-t}\bar{i}+2\bar{j}+\dfrac{\bar{k}}{t}$.

Определение. Производная вектор–функции $\bar{f}'(t)$ называется второй производной функции $\bar{f}(t)$ и обозначается $\bar{f}''(t)$. Аналогично определяется третья производная $\bar{f}'''(t)=\left(\bar{f}''(t)\right)'$ и т.д.

Определение. Вектор-функция, имеющая непрерывные производные до k–го порядка включительно на некотором интервале, называется k раз дифференцируемой вектор-функцией на этом интервале.

Пусть $\bar{r}(t)$ – вектор-функция, заданная на интервале $I=(a,b)$: $\bar{r}(t)=x(t)\bar{i}+\ y(t)\bar{j}+z(t)\bar{k}$. Тогда если функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывны или дифференцируемы, то вектор-функция $\bar{r}(t)$ соответственно непрерывна или дифференцируема.

Справедливо и обратное утверждение: если вектор–функция $\bar{r}(t)=x(t)\bar{i}+y(t)\bar{j}+z(t)\bar{k}$ непрерывна или дифференцируема, то функции $x(t), y(t), z(t)$ – соответственно непрерывны или дифференцируемы.

Как и для скалярных функций, для векторных функций имеет место аналог формулы Тейлора. Пусть функция $\bar{f}(t)$ регулярная в точке t_0 и в некоторой её окрестности, тогда

$$\bar{f}(t_0+h)=\bar{f}(t_0)+\frac{h}{1!}\bar{f}^{\,/}(t_0)+\frac{h^2}{2!}\bar{f}^{\,//}(t_0)+\ldots+\frac{h^n}{n!}\left(\bar{f}^{\,(n)}(t_0)+\bar{\varepsilon}(t_0,h)\right),$$

где $\bar{\varepsilon}(t_0,h)$ – бесконечно малая вектор-функция при $h\to 0$ ($\lim\limits_{h\to 0}\bar{\varepsilon}(t_0,h)=\bar{0}$).

1.4 Касательная к кривой. Теорема о касательной гладкой кривой

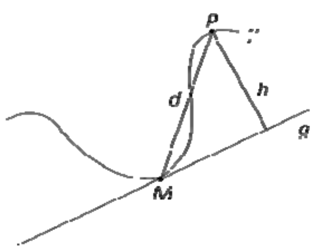


Рисунок 6 – Касательная к кривой

Пусть γ – кривая, M – точка на ней $(M\in\gamma)$ и g – прямая, проходящая через точку M (рисунок 6). Возьмем на кривой γ точку P, отличную от M. Обозначим расстояние от точки P до прямой g через h и расстояние между точками P и M через $d=|PM|$.

О п р е д е л е н и е. Прямая g называется касательной к кривой γ в точке M, если $\lim\limits_{P\to M}\frac{h}{d}=0$ при $P\to M$ по кривой γ.

Т е о р е м а 5. Гладкая кривая γ имеет в каждой точке касательную и притом единственную. Если $\bar{r}=\bar{r}(t)$ – векторное уравнение кривой

γ, то касательная к кривой γ в точке M, соответствующей значению параметра t_0, имеет направление вектора $\bar{r}^{/}(t_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведём доказательство в два этапа. На первом докажем, что если касательная существует, то она единственная. На втором этапе докажем существование касательной. Предположим, что касательная g в точке M, соответствующей значению параметра t_0, существует. Обозначим через $\bar{\tau}$ единичный направляющий вектор касательной g. Рассмотрим радиус–векторы точек M, P: $\overline{OM} = \bar{r}(t_0)$, $\overline{OP} = \bar{r}(t_0 + \Delta t)$ (рисунок 7). Так как $\overline{MP} = \overline{OP} - \overline{OM}$, то для расстояния d от точки P до точки M выполнено $d = \left|\overline{MP}\right| = \left|\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)\right|$.

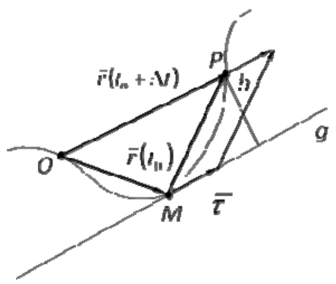


Рисунок 7 – Направление касательной к кривой

Для нахождения расстояния h от точки P до касательной g рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах $\overline{MP}$ и $\bar{\tau}$. Из определения векторного произведения векторов вытекает, что площадь этого параллелограмма равна $S = \left|\overline{MP} \times \bar{\tau}\right|$. С другой стороны, $S = |\bar{\tau}| \cdot h = h$. Следовательно,

$$h = \left|\overline{MP} \times \bar{\tau}\right| = \left|\left(\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)\right) \times \bar{\tau}\right|.$$

По определению касательной $\lim\limits_{P \to M} \dfrac{h}{d} = 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\left(\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)\right) \times \bar{\tau}\right|}{\left|\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)\right|} = 0.$$

Деля числитель и знаменатель дроби в левой части последнего равенства на $|\Delta t|$, получим

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\left(\dfrac{\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t}\right) \times \bar{\tau}\right|}{\left|\dfrac{\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t}\right|} = \frac{\left|\bar{r}^{/}(t_0) \times \bar{\tau}\right|}{\left|\bar{r}^{/}(t_0)\right|} = 0.$$

Следовательно, $\bar{r}^{/}(t_0) \times \bar{\tau} = \bar{0}$. Так как по определению гладкой кривой выполнено неравенство $\left(x^{/}(t_0)\right)^2 + \left(y^{/}(t_0)\right)^2 + \left(z^{/}(t_0)\right)^2 > 0$ и, следовательно, $\bar{r}^{/}(t_0) \neq \bar{0}$, то равенство $\bar{r}^{/}(t_0) \times \bar{\tau} = \bar{0}$ возможно только тогда, когда вектор $\bar{\tau}$ имеет направление вектора $\bar{r}^{/}(t_0)$. Таким образом, если касательная существует, то она имеет направление вектора $\bar{r}^{/}(t_0)$ и, следовательно, единственна.

Докажем теперь, используя первый этап, что касательная всегда существует. Проведем через точку M прямую с направляющим вектором $\bar{\tau} = \dfrac{\bar{r}^{/}(t_0)}{\left|\bar{r}^{/}(t_0)\right|}$. Тогда выполняется

$$\frac{h}{d} = \frac{\left|\left(\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)\right) \times \dfrac{\bar{r}^{/}(t_0)}{\left|\bar{r}^{/}(t_0)\right|}\right|}{\left|\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)\right|} \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \frac{\left|\bar{r}^{/}(t_0) \times \bar{r}^{/}(t_0)\right|}{\left|\bar{r}^{/}(t_0)\right|^2} = \frac{0}{\left|\bar{r}^{/}(t_0)\right|^2} = 0 .$$

Теорема доказана.

Зная направление касательной, нетрудно составить её уравнение. Рассмотрим следующие случаи.

1 Пусть кривая γ задана векторным уравнением $\bar{r} = \bar{r}(t)$ и точка $P(t_0) \in \gamma$. В силу теоремы 5 касательная к кривой γ в точке P имеет направляющий вектор $\bar{r}^{/}(t_0)$. Отсюда

$$\bar{r} = \bar{r}(t_0) + \lambda \bar{r}^{/}(t_0)$$

- уравнение касательной к кривой в векторной форме.

2 Пусть кривая γ задана в параметрической форме $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$

Запишем уравнение касательной кривой в точке $M(t_0) \in \gamma$. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) с направляющим вектором $\bar{p}(p_1, p_2, p_3)$, имеет вид: $\dfrac{x - x_0}{p_1} = \dfrac{y - y_0}{p_2} = \dfrac{z - z_0}{p_3}$. Тогда уравнение касательной имеет вид:

$$\frac{x - x(t_0)}{x^{/}(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y^{/}(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z^{/}(t_0)}.$$

3 Пусть кривая γ задана с помощью системы уравнений $\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0,\\ \psi(x,y,z)=0.\end{cases}$

Запишем уравнение касательной к кривой γ в точке $P(x_0,y_0,z_0)$, в предположении, что ранг матрицы $\begin{pmatrix}\varphi_x^{/} & \varphi_y^{/} & \varphi_z^{/}\\ \psi_x^{/} & \psi_y^{/} & \psi_z^{/}\end{pmatrix}$ в этой точке равен двум и φ,ψ – регулярные функции. По теореме 2 существует окрестность точки P, в которой γ – регулярная кривая. Тогда кривая γ в этой окрестности допускает параметризацию.

Пусть $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t)\end{cases}$ – параметризация кривой γ в этой окрестности и пусть точка P отвечает параметру t. Получим систему равенств $\begin{cases}\varphi(x(t),y(t),z(t))=0,\\ \psi(x(t),y(t),z(t))=0.\end{cases}$

Продифференцируем эти равенства по переменной t:

$$\begin{cases}\varphi_x^{/}\cdot x_t^{/}+\varphi_y^{/}\cdot y_t^{/}+\varphi_z^{/}\cdot z_t^{/}=0,\\ \psi_x^{/}\cdot x_t^{/}+\psi_y^{/}\cdot y_t^{/}+\psi_z^{/}\cdot z_t^{/}=0.\end{cases} \tag{3}$$

Введём обозначения $\overline{\varphi}^{/}=(\varphi_x^{/},\varphi_y^{/},\varphi_z^{/})$, $\overline{\psi}^{/}=(\psi_x^{/},\psi_y^{/},\psi_z^{/})$, $\overline{r}^{/}=(x_t^{/};y_t^{/};z_t^{/})$. Тогда система (3) примет вид $\begin{cases}\overline{\varphi}^{/}\cdot\overline{r}^{/}=0,\\ \overline{\psi}^{/}\cdot\overline{r}^{/}=0.\end{cases}$ Так как γ регулярная кривая, то в выбранной окрестности $\overline{r}^{/}\neq\overline{0}$. Кроме того, ранг матрицы $\begin{pmatrix}\varphi_x^{/} & \varphi_y^{/} & \varphi_z^{/}\\ \psi_x^{/} & \psi_y^{/} & \psi_z^{/}\end{pmatrix}$ равен 2. Поэтому $\overline{\varphi}^{/}\neq\overline{0}$, $\overline{\psi}^{/}\neq\overline{0}$. Отсюда и из системы (3) вытекает, что $\overline{\varphi}^{/}\perp\overline{r}^{/}$ и $\overline{\psi}^{/}\perp\overline{r}^{/}$. Это показывает, что $\left(\overline{\varphi}^{/}\times\overline{\psi}^{/}\right)\parallel\overline{r}^{/}$. Значит, $\overline{r}^{/}=\lambda\left(\overline{\varphi}^{/}\times\overline{\psi}^{/}\right)$ при некотором значении $\lambda\neq0$. Итак,

$$\bar{r}' = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z \end{vmatrix} = \lambda \cdot \left(\begin{vmatrix} \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_y & \psi'_z \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} \varphi'_z & \varphi'_x \\ \psi'_z & \psi'_x \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{vmatrix} \bar{k} \right),$$

то есть вектор $\bar{r}'$ коллинеарен вектору $\left(\begin{vmatrix} \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_y & \psi'_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \varphi'_z & \varphi'_x \\ \psi'_z & \psi'_x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{vmatrix} \right)$. Таким образом, уравнение касательной имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_y & \psi'_z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \varphi'_z & \varphi'_x \\ \psi'_z & \psi'_x \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{vmatrix}}$$

(все частные производные функций φ и ψ берутся в точке $P(x_0, y_0, z_0)$).

4 Рассмотрим случай, когда кривая γ задана неявно с помощью уравнения $\varphi(x, y) = 0$. Нетрудно видеть, что неявное задание плоской кривой эквивалентно ее заданию с помощью системы уравнений $\begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$ Тогда, используя случай 3 при $\psi = z$, имеем следующее уравнение касательной к кривой γ в точке $P(x_0, y_0)$:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \varphi'_y(x_0, y_0) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) \\ 1 & 0 \end{vmatrix}},$$

или что то же самое

$$\frac{x - x_0}{\varphi'_y(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-\varphi'_x(x_0, y_0)}.$$

Таким образом, уравнение касательной к плоской кривой γ в случае неявного задания имеет вид

$$\frac{x - x_0}{\varphi'_y(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-\varphi'_x(x_0, y_0)}$$

или

$$(x - x_0) \cdot \varphi'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) \cdot \varphi'_y(x_0, y_0) = 0.$$

П р и м е р 6. Составить уравнение касательной к кривой γ, заданной векторным уравнением $\bar{r} = \left(3t + t^2; t^3; t + 2\right)$, в точке P, отвечающей параметру $t_0 = 2$.

Р е ш е н и е

Так как $\bar{r}' = \left(3 + 2t, 3t^2, 1\right)$ и $\bar{r}(t_0) = (10, 8, 4)$, $\bar{r}'(t_0) = (7, 12, 1)$, то (см. случай 1) уравнение касательной следующее: $\dfrac{x-10}{7} = \dfrac{y-8}{12} = z - 4$.

П р и м е р 7. Составить уравнение касательной к кривой γ, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 3t - 3\cos t, \\ y = 3t + 3\sin t, \\ z = 4t \end{cases}$$

в точке, отвечающей параметру $t_0 = 0$.

Р е ш е н и е

Несложно проверить, что

$x(t_0) = -3,\ y(t_0) = 0,\ z(t_0) = 0;\ x'(t) = 3 + 3\sin t,\ y'(t) = 3 + 3\cos t,\ z'(t) = 4;$

$x'(t_0) = 3,\ y'(t_0) = 6,\ z'(t_0) = 4.$

Поэтому (см. случай 2) уравнение касательной имеет вид $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z}{4}$.

П р и м е р 8. Составить уравнение касательной в точке $P(2, 1, 1)$ кривой, заданной системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 - 4y + 2z = 7, \\ 2x + 3y - 6z = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е

Обозначим

$\varphi(x, y, z) = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 2z - 7,\ \ \psi(x, y, z) = 2x + 3y - 6z - 1.$

Точка $P \in \gamma$, так как $\varphi(P) = 0$ и $\psi(P) = 0$. Поскольку, как нетрудно видеть,

$\varphi'_x = 2x + 2,\ \varphi'_x(P) = 6,\ \varphi'_y = 2y - 4,\ \varphi'_y(P) = -2;\ \varphi'_z = 2;\ \psi'_x = 2;\ \psi'_y = 3;\ \psi'_z = -6,$

то уравнение касательной (см. случай 3)

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}\varphi_y' & \varphi_z' \\ \psi_y' & \psi_z'\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}\varphi_z' & \varphi_x' \\ \psi_z' & \psi_x'\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}\varphi_x' & \varphi_y' \\ \psi_x' & \psi_y'\end{vmatrix}},$$

применительно к нашим данным примет вид

$$\frac{x-2}{\begin{vmatrix}-2 & 2 \\ 3 & -6\end{vmatrix}}=\frac{y-1}{\begin{vmatrix}2 & 6 \\ -6 & 2\end{vmatrix}}=\frac{z-1}{\begin{vmatrix}6 & -2 \\ 2 & 3\end{vmatrix}}$$

или $\frac{x-2}{6}=\frac{y-1}{40}=\frac{z-1}{22}$.

П р и м е р 9. Составить уравнение касательной к эллипсу $x^2+2x+4y^2+4y=0$ в точке $O(0;0)$.

Р е ш е н и е

Эллипс – плоская кривая. Обозначим $\varphi(x,y)=x^2+2x+4y^2+4y$, так что $\varphi_x'=2x+2,\ \varphi_x'(0)=2;\ \varphi_y'=8y+4,\ \varphi_y'(0)=4.$ Уравнение касательной (см. случай 4) $\frac{x-x_0}{\varphi_y'}=\frac{y-y_0}{-\varphi_x'}$ в наших условиях примет вид $\frac{x}{4}=\frac{y}{-2}$ или $2y+x=0$.

2 ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КРИВОЙ

2.1 Соприкасающаяся плоскость кривой

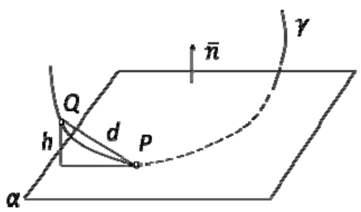


Рисунок 8 – Соприкасающаяся плоскость кривой

Рассмотрим кривую γ и точку $P\in\gamma$. Через P проведём плоскость α. На кривой γ возьмём точку $Q,\ Q\neq P$. Через h и d обозначим расстояние от точки Q до α и точки P соответственно (рисунок 8).

О п р е д е л е н и е. Плоскость α называется соприкасающейся плоскостью к кривой γ в точке P, если $\lim\limits_{Q\to P}\frac{h}{d^2}=0$.

Имеет место следующая

Т е о р е м а 6. Регулярная (по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемая) кривая γ в каждой точке имеет соприкасающуюся плоскость. При этом соприкасающаяся плоскость либо единственная, либо любая плоскость, содержащая касательную к кривой γ, является соприкасающейся плоскостью. Если $\bar{r} = \bar{r}(t)$ – векторное уравнение кривой γ, то соприкасающаяся плоскость в точке $P(t_0)$ параллельна векторам $\bar{r}'(t_0)$ и $\bar{r}''(t_0)$.

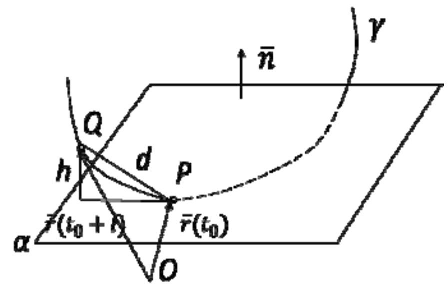


Рисунок 9 – Направление соприкасающейся плоскости

Д о к а з а т е л ь с т в о

1 Предположим, что соприкасающаяся плоскость в точке $P(t_0)$ существует. Пусть $Q(t_0 + l)$ – произвольная точка кривой γ. Определим значения d и h. Очевидно, что $d = |\overline{PQ}| = |\overline{OQ} - \overline{OP}| = |\bar{r}(t_0 + l) - \bar{r}(t_0)|$. Обозначим через $\bar{n}$ единичный вектор нормали соприкасающейся плоскости α (рисунок 9). Учитывая, что $h = |pr_{\bar{n}}\, \overline{PQ}| = |\overline{PQ} \cdot \bar{n}|$ и $|\bar{n}| = 1$, получим $h = |(\bar{r}(t_0 + l) - \bar{r}(t_0))\bar{n}|$. Из формулы Тейлора для векторной функции $\bar{r}(t)$ имеем два разложения:

$$\bar{r}(t_0 + l) = \bar{r}(t_0) + l\bar{r}'(t_0) + \frac{l^2}{2!}\left(\bar{r}''(t_0) + \bar{\varepsilon}_1(t_0, l)\right),$$

$$\bar{r}(t_0 + l) = \bar{r}(t_0) + l\left(\bar{r}'(t_0) + \bar{\varepsilon}_2(t_0, l)\right).$$

Используем эти разложения для нахождения $\frac{h}{d^2}$:

$$\frac{h}{d^2} = \frac{|(\bar{r}(t_0 + l) - \bar{r}(t_0)) \cdot \bar{n}|}{|\bar{r}(t_0 + l) - \bar{r}(t_0)|^2} = \frac{\left|\left(l\bar{r}'(t_0) + \frac{l^2}{2!}\left(\bar{r}''(t_0) + \bar{\varepsilon}_1(t_0, l)\right)\right) \cdot \bar{n}\right|}{\left|l\left(\bar{r}'(t_0) + \bar{\varepsilon}_2(t_0, l)\right)\right|^2} =$$

$$= \frac{\left|\frac{\bar{r}'(t_0) \cdot \bar{n}}{l} + \frac{\bar{r}''(t_0) \cdot \bar{n}}{2} + \frac{\bar{\varepsilon}_1(t_0, l) \cdot \bar{n}}{2}\right|}{\left|\bar{r}'(t_0) + \bar{\varepsilon}_2(t_0, l)\right|^2}.$$

Отсюда в силу того, что $\lim\limits_{l\to 0}\frac{h}{d^2}=0, \lim\limits_{l\to 0}\bar{\varepsilon}_1(t_0,l)=\bar{0}, \lim\limits_{l\to 0}\bar{\varepsilon}_2(t_0,l)=\bar{0}$, и в силу неравенства $\left|\bar{r}'(t_0)\right|\neq 0$, вытекающего из регулярности кривой γ, следуют равенства $\bar{r}'(t_0)\cdot\bar{n}=0$ и $\bar{r}''(t_0)\cdot\bar{n}=0$. Это означает, что если соприкасающаяся плоскость существует, то она параллельна векторам $\bar{r}'(t_0)$ и $\bar{r}''(t_0)$. Соприкасающаяся плоскость будет единственной, если вектора $\bar{r}'(t_0)$ и $\bar{r}''(t_0)$ не параллельны. Если векторы $\bar{r}'(t_0)$ и $\bar{r}''(t_0)$ параллельны (или $\bar{r}''(t_0)=\bar{0}$), то любая плоскость, проведенная через касательную к кривой, будет соприкасающейся плоскостью.

2 Докажем существование соприкасающейся плоскости. Для этого через точку $P(t_0)$ проведём плоскость α, параллельную векторам $\bar{r}'(t_0)$ и $\bar{r}''(t_0)$ (при этом считается, что нулевой вектор параллелен любой плоскости). Тогда $\bar{r}'(t_0)\cdot\bar{n}=0$ и $\bar{r}''(t_0)\cdot\bar{n}=0$, где $\bar{n}$ – единичный вектор нормали плоскости α. Используя для отношения $\frac{h}{d^2}$ выражение из первой части доказательства теоремы и равенства $\bar{r}'(t_0)\cdot\bar{n}=0$ и $\bar{r}''(t_0)\cdot\bar{n}=0$, получим

$$\lim_{l\to 0}\frac{h}{d^2}=\lim_{l\to 0}\frac{\left|\frac{\bar{\varepsilon}_1(t_0,l)\cdot\bar{n}}{2}\right|}{\left|\bar{r}'(t_0)+\bar{\varepsilon}_2(t_0,l)\right|^2}=0.$$

Это означает, что α – соприкасающаяся плоскость. Теорема доказана.

Составим уравнение соприкасающейся плоскости. Пусть $\bar{r}=\bar{r}(t)$ – векторное уравнение кривой γ и точка $P(t_0)\in\gamma$. Пусть также $\bar{r}'(t_0)$ и $\bar{r}''(t_0)$ – не параллельны. Пусть $\bar{p}$ – радиус-вектор произвольной точки соприкасающейся плоскости. Тогда векторы $\bar{p}-\bar{r}(t_0), \bar{r}'(t_0), \bar{r}''(t_0)$ – компланарны. Это означает, что их смешанное произведение равно нулю. Отсюда векторное уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид $\left((\bar{p}-\bar{r}(t_0))\cdot\left(\bar{r}'(t_0)\times\bar{r}''(t_0)\right)\right)=0$.

Если кривая γ задана параметрическими уравнениями $x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),$ то векторное уравнение соприкасающейся плоскости можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x(t_0) & y-y(t_0) & z-z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Каждая прямая, проходящая через точку P кривой перпендикулярно касательной кривой в этой точке, называется нормалью кривой в точке P. Среди этих нормалей в случае, когда соприкасающаяся плоскость единственная, выделяют две: главную нормаль – нормаль, лежащую в соприкасающейся плоскости, и бинормаль – нормаль, перпендикулярную соприкасающейся плоскости.

Пусть $\bar{r} = \bar{r}(t)$ – векторное уравнение кривой γ и точка $P(t_0) \in \gamma$, в которой соприкасающаяся плоскость единственная. Тогда можно определить направляющие векторы бинормали и главной нормали. Пусть $\bar{a}_1$ – направляющий вектор бинормали, $\bar{a}_2$ – главной нормали. Из определения бинормали и главной нормали вытекает, что можно положить

$$\bar{a}_1 = \bar{r}'(t_0) \times \bar{r}''(t_0) \text{ и } \bar{a}_2 = \left(\bar{r}'(t_0) \times \bar{r}''(t_0)\right) \times \bar{r}'(t_0) = \bar{a}_1 \times \bar{r}'(t_0).$$

П р и м е р 10. Составить уравнение соприкасающейся плоскости к винтовой линии $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ z = 4t + \pi$ в точке, отвечающей параметру $t_0 = \pi$. В случае единственности соприкасающейся плоскости, составить уравнение главной нормали и бинормали кривой в этой точке.

Р е ш е н и е

По условию $\bar{r} = (3\cos t, 3\sin t, 4t + \pi)$ - векторное уравнение винтовой линии.

Тогда

$$\bar{r}(t) = (3\cos t, 3\sin t, 4t + \pi),\ \bar{r}'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 4),\ \bar{r}''(t) = (-3\cos t, -3\sin t, 0).$$

Отсюда

$$\bar{r}(t_0) = (-3, 0, 5\pi),\ \bar{r}'(t_0) = (0, -3, 4),\ \bar{r}''(t_0) = (3, 0, 0)$$

и уравнение соприкасающейся плоскости примет вид

$$\begin{vmatrix} x+3 & y & z-5\pi \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или, после раскрытия определителя, $4y + 3z - 15\pi = 0$.

Найдем направляющие векторы бинормали и главной нормали:

$$\bar{a}_1 = \bar{r}'(t_0)\times \bar{r}''(t_0) = (0, 12, 9), \quad \bar{a}_2 = \bar{a}_1 \times \bar{r}'(t_0) = (75, 0, 0).$$

Таким образом, уравнение бинормали:

$$\frac{x+3}{0} = \frac{y}{12} = \frac{z-5\pi}{9},$$

уравнение главной нормали:

$$\frac{x+3}{75} = \frac{y}{0} = \frac{z-5\pi}{0}.$$

2.2 Длина дуги кривой. Естественная параметризация кривой

Рассмотрим элементарную кривую γ, которая является образом некоторого открытого отрезка (a,b) при топологическом отображении f.

Отрезком кривой γ назовем ее часть, являющуюся образом (при отображении f) замкнутого отрезка, лежащего внутри (a,b). Обозначим через $\tilde{\gamma}(c \le t \le d)$ отрезок кривой γ, являющийся образом замкнутого отрезка $[c,d]$.

Разобьем отрезок $[c,d]$ на части точками $c = t_0 < t_1 < ... < t_n = d$. Отметим на

$\tilde{\gamma}(c \le t \le d)$ точки $M_0, M_1, \dots, M_n$, отвечающие этому разбиению, и построим ломаную линию $M_0 M_1 \dots M_n$, вписанную в отрезок $\tilde{\gamma}$.

О п р е д е л е н и е. Длиной отрезка $\tilde{\gamma}(c \le t \le d)$ кривой γ назовем предел длин ломаных $M_0 M_1 \dots M_n$ при неограниченном уменьшении наибольшей из длин частей разбиения отрезка $[c,d]$, если этот предел существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[c,d]$ на части.

Справедлива следующая

Т е о р е м а 7. Любой отрезок гладкой кривой имеет определённую длину. Если $\bar{r} = \bar{r}(t)$ – векторное уравнение кривой γ, то длина отрезка $\tilde{\gamma}(c \le t \le d)$ равна $\int\limits_c^d |\bar{r}'(t)| dt$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

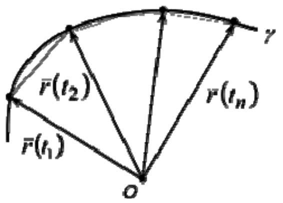


Рисунок 10 – Длина ломаной

Рассмотрим ломаную, вписанную в отрезок $\tilde{\gamma}\,(c \le t \le d)$, вершины которой отвечают точкам $t_0, t_1, ..., t_n$ отрезка $[c, d]$. Длина этой ломаной равна сумме $\sum\limits_{i=1}^{n} \left|\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})\right|$ (рисунок 10). Преобразуем эту сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})\right| = \int_c^d \left|\bar{r}^{\prime}(t)\right| dt + \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\bar{r}^{\prime}(t_i)\right|(t_i - t_{i-1}) - \int_c^d \left|\bar{r}^{\prime}(t)\right| dt \right) +$$

$$+ \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left|\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})\right| - \sum_{i=1}^{n} \left|\bar{r}^{\prime}(t_i)\right|(t_i - t_{i-1}) \right\}.$$

Из определения интеграла вытекает, что слагаемое, стоящее в круглых скобках последнего равенства, стремится к нулю при $\max\limits_{i=\overline{1,n}}(t_i - t_{i-1}) \to 0$.

Слагаемое в фигурных скобках равно разности $\sum\limits_{i=1}^{n} \left| \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{r}^{\prime}(t) dt \right| - \sum\limits_{i=1}^{n} \left| \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{r}^{\prime}(t_i) dt \right|$, которая по абсолютной величине не превосходит величины $\sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \left|\bar{r}^{\prime}(t) - \bar{r}^{\prime}(t_i)\right| dt$. Действительно, в силу неравенства треугольника $\left|\bar{a} + \bar{b}\right| \le \left|\bar{a}\right| + \left|\bar{b}\right|$ и вытекающих из него неравенств $\left|\left|\bar{a}\right| - \left|\bar{b}\right|\right| \le \left|\bar{a} - \bar{b}\right|$ и $\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} \bar{a}(t) dt\right| \le \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left|\bar{a}(t)\right| dt$ имеем

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \left|\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})\right| - \sum_{i=1}^{n} \left|\bar{r}^{\prime}(t_i)\right|(t_i - t_{i-1}) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\left|\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})\right| - \left|\bar{r}^{\prime}(t_i)\right|(t_i - t_{i-1}) \right) \right| \le$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \left(\left|\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})\right| - \left|\bar{r}^{\prime}(t_i)\right|(t_i - t_{i-1}) \right) \right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1}) - \bar{r}^{\prime}(t_i)(t_i - t_{i-1})\right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{r}^{\prime}(t) dt - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{r}^{\prime}(t_i) dt \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\bar{r}^{\prime}(t) - \bar{r}^{\prime}(t_i)\right) dt \right| \le \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|\bar{r}^{\prime}(t) - \bar{r}^{\prime}(t_i)\right| dt.$$

Так как $\bar{r}^{\prime}(t)$ – непрерывная, а значит, и равномерно непрерывная на $[c, d]$ функция, то $\left|\bar{r}^{\prime}(t) - \bar{r}^{\prime}(t_i)\right| = \varepsilon(\delta)$, где $\varepsilon(\delta) \to 0$ при условии, что

$\delta = \max\limits_{i=1,n}(t_i - t_{i-1}) \to 0$. Таким образом, слагаемое, стоящее в фигурных скобках, есть бесконечно малая величина при $\max\limits_{i=1,n}(t_i - t_{i-1}) \to 0$.

Итак, мы доказали, что длина ломаной $\sum\limits_{i=1}^{n} \left| \bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1}) \right|$ сходится к интегралу $\int\limits_{c}^{d} \left| \bar{r}^{/}(t) \right| dt$ при $\max\limits_{i=1,n}(t_i - t_{i-1}) \to 0$. Теорема доказана.

Естественная параметризация кривой

Рассмотрим кривую γ: $\bar{r} = \bar{r}(t)$ $t \in (a,b)$. Зафиксируем некоторое $t_0 \in (a,b)$. Обозначим через $s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \left| \bar{r}^{/}(y) \right| dy$. Геометрический смысл $s(t)$: $s(t)$ при $t \ge t_0$ выражает длину отрезка $\tilde{\gamma}(t_0 \le h \le t)$ кривой γ, при $t \le t_0$ величина $(-1)s(t)$ выражает длину отрезка $\tilde{\gamma}(t \le h \le t_0)$. Функция $s(t)$ – монотонно возрастает, так как $s^{/}(t) = \left| \bar{r}^{/}(t) \right| > 0$. Таким образом, функцию $s(t)$ можно рассматривать в качестве параметра на кривой. Такой параметр называется натуральным. Параметризация кривой $\bar{r} = \bar{r}(s)$ с помощью натурального параметра s называется естественной параметризацией.

В случае естественной параметризации $\bar{r} = \bar{r}(s)$ выполняется $\left| \bar{r}^{/}(s) \right| = 1$. Действительно:

$$\bar{r}^{/}(s) = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \bar{r}_t^{/} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \bar{r}_t^{/} \cdot \frac{1}{\left| \bar{r}_t^{/} \right|} = \frac{\bar{r}_t^{/}}{\left| \bar{r}_t^{/} \right|}.$$

Отсюда $\left| \bar{r}^{/}(s) \right| = 1$.

Приведем формулы для длины отрезка регулярной кривой для различных случаев задания кривой. Для удобства обозначим длину отрезка $\tilde{\gamma}(c \le t \le d)$ кривой γ через $l(c,d)$.

1 Кривая задана уравнениями $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Тогда

$$l(t_1,t_2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left| \bar{r}^{/}(t) \right| dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x^{/}(t)\right)^2 + \left(y^{/}(t)\right)^2 + \left(z^{/}(t)\right)^2} dt.$$

2 Кривая задана уравнениями $y = y(x), z = z(x)$. Такое задание эквивалентно заданию кривой уравнениями $x = t,\ y = y(t),\ z = z(t)$. Поэтому в силу предыдущей формулы для длины отрезка кривой получим

$$l(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2 + \left(z'(x)\right)^2}\, dx.$$

П р и м е р 11. Найти длину отрезка $\tilde{\gamma}(0 \le t \le \pi/2)$ дуги астроиды $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$.

Р е ш е н и е

$$l(0, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \left|\bar{r}'(t)\right| dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{36\cos^4 t \sin^2 t + 36\sin^4 t \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 6\int_0^{\pi/2} \cos t \sin t\, dt = 6\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = 3.$$

2.3 Кривизна кривой. Кручение кривой

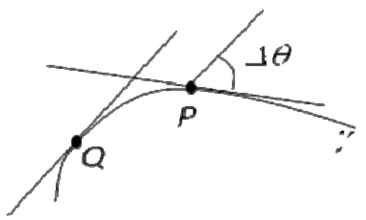


Рисунок 11 – Кривизна кривой

Пусть P – произвольная точка регулярной кривой γ, Q – точка, близкая к точке P $(Q \in \gamma)$. Обозначим через $\Delta\theta$ угол между касательными к кривой в точках P и Q, через $|\Delta s|$ – длину дуги отрезка PQ кривой (рисунок 11).

О п р е д е л е н и е. Предел $\lim\limits_{Q \to P} \dfrac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$, если он существует, будем называть кривизной кривой γ в точке P и обозначать символом k_1.

Имеет место следующая

Т е о р е м а 8. Регулярная (дважды непрерывно дифференцируемая) кривая в каждой своей точке P имеет определённую кривизну k_1. Если $\bar{r} = \bar{r}(s)$ - её естественная параметризация и точка P отвечает параметру s_0, то $k_1 = \left|\bar{r}''(s_0)\right|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть точкам P и Q кривой γ соответствуют значения параметра s_0 и $s_0+\Delta s$. Единичные векторы касательных в точках P и Q обозначим $\bar\tau(s_0)$ и $\bar\tau(s_0+\Delta s)$. Тогда угол $\Delta\theta$ равен углу между векторами $\bar\tau(s_0)$ и $\bar\tau(s_0+\Delta s)$ (рисунок 12). Так как векторы $\bar\tau(s_0)$ и $\bar\tau(s_0+\Delta s)$ единичные, то $\left|\bar\tau(s_0+\Delta s)-\bar\tau(s_0)\right| = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2}$.

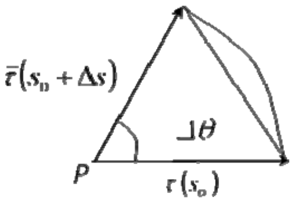


Рисунок 12 – Угол между векторами

Отсюда

$$\frac{\left|\bar\tau(s_0+\Delta s)-\bar\tau(s_0)\right|}{|\Delta s|} = \frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|} = \frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\cdot\frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}.$$

В силу естественной параметризации кривой γ выполняется $\bar\tau(s_0)=\bar r^{/}(s_0)$ и $\bar\tau(s_0+\Delta s)=\bar r^{/}(s_0+\Delta s)$. Следовательно,

$$\frac{\left|\bar r^{/}(s_0+\Delta s)-\bar r^{/}(s_0)\right|}{|\Delta s|} = \frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\cdot\frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}.$$

Переходя к пределу при $|\Delta s|\to 0$ в левой и правой части этого равенства, получим $\left|\bar r^{//}(s_0)\right| = k_1$, так как $\Delta\theta\to 0$ при $|\Delta s|\to 0$. Теорема доказана.

Найдём выражение кривизны кривой k_1 в случае произвольной параметризации кривой. Пусть $\bar r=\bar r(t)$ – векторное уравнение кривой γ. Вспоминая, что $s(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\left|\bar r^{/}(y)\right|dy$ и, следовательно, $\frac{ds}{dt}=\left|\bar r^{/}(t)\right|=\sqrt{\bar r^{/2}(t)}$, мы из равенств $\bar r^{/}=\frac{d\bar r}{dt}=\frac{d\bar r}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$ получим $\frac{d\bar r}{ds}=\frac{\bar r^{/}}{\sqrt{\left(\bar r^{/}\right)^2}}$.

Продифференцируем последнее равенство по переменной t. Получим

$$\frac{d^2\bar r}{ds^2}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{\bar r^{//}\sqrt{\left(\bar r^{/}\right)^2}-\bar r^{/}\cdot\frac{\left(\bar r^{/}\cdot\bar r^{//}\right)}{\sqrt{\left(\bar r^{/}\right)^2}}}{\left(\bar r^{/}\right)^2} = \frac{\bar r^{//}}{\sqrt{\left(\bar r^{/}\right)^2}}-\frac{\bar r^{/}\cdot\left(\bar r^{/}\cdot\bar r^{//}\right)}{\left(\sqrt{\left(\bar r^{/}\right)^2}\right)^3}.$$

Возведём в квадрат последнее равенство:

$$\left(\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right)^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{\left(\overline{r}^{//}\right)^2}{\left(\overline{r}^{/}\right)^2}-\frac{2\left(\overline{r}^{/}\cdot\overline{r}^{//}\right)^2}{\left(\left(\overline{r}^{/}\right)^2\right)^2}+\frac{\left(\overline{r}^{/}\right)^2\cdot\left(\overline{r}^{/}\cdot\overline{r}^{//}\right)^2}{\left(\left(\overline{r}^{/}\right)^2\right)^3}=\frac{\left(\overline{r}^{//}\right)^2\left(\overline{r}^{/}\right)^2-\left(\overline{r}^{/}\cdot\overline{r}^{//}\right)^2}{\left(\left(\overline{r}^{/}\right)^2\right)^2}.$$

Отсюда, в силу равенства $\frac{ds}{dt}=\sqrt{\overline{r}^{/2}(t)}$, получим

$$\left(\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right)^2=\frac{\left(\overline{r}^{//}\right)^2\left(\overline{r}^{/}\right)^2-\left(\overline{r}^{/}\cdot\overline{r}^{//}\right)^2}{\left(\left(\overline{r}^{/}\right)^2\right)^3}.$$

Поскольку для произвольных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ выполняется $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\varphi,\ |\overline{a}\times\overline{b}|=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\sin\varphi$, а следовательно, и $\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)^2+|\overline{a}\times\overline{b}|^2=|\overline{a}|^2|\overline{b}|^2$, то $k_1^2=\frac{\left|\overline{r}^{/}\times\overline{r}^{//}\right|^2}{\left(\overline{r}^{/2}\right)^3}$. После извлечения из обеих частей последнего равенства квадратного корня получим

$$k_1=\frac{\left|\overline{r}^{/}\times\overline{r}^{//}\right|}{\left|\overline{r}^{/}\right|^3}.$$

Получили формулу для вычисления кривизны кривой в случае произвольной параметризации. Из этой формулы, в частности, вытекает, что кривизна плоской кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=x(t),\quad y=y(t)$, может быть вычислена по формуле

$$k_1=\frac{\left|x^{/}y^{//}-x^{//}y^{/}\right|}{\left(\left(x^{/}\right)^2+\left(y^{/}\right)^2\right)^{3/2}},$$

а кривизна плоской кривой, заданной уравнением $y=y(x)$, – по формуле

$$k_1=\frac{\left|y^{//}\right|}{\left(1+\left(y^{/}\right)^2\right)^{3/2}}.$$

Пользуясь этими формулами, несложно показать, что в каждой точке окружности радиуса R кривизна равна R^{-1}, а в каждой точке прямой кривизна равна нулю. Справедливо и следующее: если в каждой точке плоской кривой кривизна равна некоторой положительной константе a, то эта кривая – дуга окружности радиуса a^{-1}, а если в каждой точке кривой кривизна равна нулю, то эта кривая является либо прямой, либо открытым отрезком прямой.

Обратимся вновь к естественной параметризации $\bar{r} = \bar{r}(s)$ кривой γ.

Пусть в некоторой точке $P(s_0)$ кривой γ кривизна k_1 отлична от нуля. Рассмотрим вектор $\bar{\nu} = \frac{1}{k_1}\bar{r}^{//}(s_0)$. Вектор $\bar{\nu}$ обладает следующими свойствами: $|\bar{\nu}| = 1$, $\bar{\nu} \perp \bar{\tau}$, $\bar{\nu}$ параллелен соприкасающейся плоскости. Первое и третье свойства вытекают из теорем 8 и 6 соответственно. Для доказательства второго свойства воспользуемся очевидным равенством $\bar{\tau}^2 = 1$ ($\bar{\tau}$ - единичный вектор касательной к кривой в точке P). Дифференцируя это равенство, получим $\bar{\tau} \cdot \bar{\tau}^{/} = 0$ или (так как $\bar{\tau}^{/} = \bar{r}^{//} = k_1\bar{\nu}$) равенство $\bar{\tau} \cdot \bar{\nu} k_1 = 0$. Последнее и доказывает второе свойство.

Из свойств вектора $\bar{\nu}$ следует, что $\bar{\nu}$ – единичный вектор главной нормали кривой в точке P. Не составляет труда заметить, что $\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu}$ – единичный вектор бинормали кривой в точке P.

Кручение кривой

Пусть P – произвольная точка кривой γ и Q – точка кривой, близкая к P. Угол между соприкасающимися плоскостями кривой в точках P и Q обозначим $\Delta\theta$, $|\Delta s|$ – длина отрезка PQ кривой γ (рисунок 13).

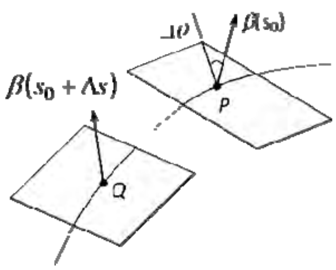


Рисунок 13 – Абсолютное кручение

О п р е д е л е н и е. Под абсолютным кручением $|k_2|$ кривой γ в точке P понимают предел $\lim\limits_{Q \to P} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$.

Т е о р е м а 9. Регулярная (трижды непрерывно дифференцируемая) кривая γ в каждой точке, где кривизна отлична от нуля, имеет вполне определённое абсолютное кручение $|k_2|$. Если $\bar{r} = \bar{r}(s)$ – её естественная параметризация, то

$$|k_2| = \frac{\left|\bar{r}_s^{/}, \bar{r}_s^{//}, \bar{r}_s^{///}\right|}{k_1^2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть в точке $P(s_0)$ кривизна отлична от нуля. По непрерывности кривизна отлична от нуля и в некоторых точках кривой, близких к точке P. Пусть Q – одна из таких точек. В любой точке кривой, где кривизна отлична от нуля, векторы $\bar{r}^{/}(s)$ и $\bar{r}^{//}(s)$ отличны от нуля и не параллельны. Поэтому в точках P и Q существуют вполне определённые соприкасающиеся плоскости. Пусть $\bar{\beta}(s_0)$ и $\bar{\beta}(s_0+\Delta s)$ - единичные векторы бинормалей в точках P и Q соответственно. Тогда $\Delta\theta$ есть угол между векторами $\bar{\beta}(s_0)$ и $\bar{\beta}(s_0+\Delta s)$. Так как векторы $\bar{\beta}(s_0)$ и $\bar{\beta}(s_0+\Delta s)$ единичные и образуют угол $\Delta\theta$, то справедливо следующее равенство:

$$\frac{\left|\bar{\beta}(s_0+\Delta s)-\bar{\beta}(s_0)\right|}{|\Delta s|}=\frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|}=\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\cdot\frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}.$$

Переходя в крайних членах этого равенства к пределу при $|\Delta s|\to 0$, получим $\left|\bar{\beta}^{/}(s_0)\right|=|k_2|$, поскольку $\Delta\theta\to 0$ при $|\Delta s|\to 0$.

Рассмотрим свойства вектора $\bar{\beta}^{/}$.

1 $\bar{\beta}^{/}\perp\bar{\beta}$. Действительно, дифференцируя равенство $\bar{\beta}^2=1$, получим $2\bar{\beta}\cdot\bar{\beta}^{/}=0$. Следовательно, $\bar{\beta}^{/}\perp\bar{\beta}$.

2 $\bar{\beta}^{/}\perp\bar{\tau}$. Действительно, так как $\bar{\beta}=\bar{\tau}\times\bar{\nu}$, то

$$\bar{\beta}^{/}=(\tau\times\nu)^{/}=\bar{\tau}^{/}\times\bar{\nu}+\bar{\tau}\times\bar{\nu}^{/}.$$

Поскольку $\bar{\nu}\|\bar{r}^{//}$ и $\bar{r}^{//}=\bar{\tau}^{/}$, то $\bar{\beta}^{/}=\bar{\tau}\times\bar{\nu}^{/}$. Следовательно, $\bar{\beta}^{/}\perp\bar{\tau}$.

Из этих свойств вытекает, что $\bar{\beta}^{/}\|\bar{\nu}$, а так как $\bar{\nu}$ - единичный вектор, то и

$$|k_2|=\left|\bar{\beta}^{/}\right|=\left|\left(\bar{\beta}^{/}\cdot\bar{\nu}\right)\right|.$$

Отсюда, так как $\bar{\nu}=\dfrac{\bar{r}^{//}}{k_1}$ и $\bar{\beta}=\dfrac{\bar{r}^{/}\times\bar{r}^{//}}{k_1}$, получим

$$|k_2|=\left|\bar{\beta}^{/}\cdot\bar{\nu}\right|=\frac{\left|\left(\bar{r}^{/},\bar{r}^{//},\bar{r}^{///}\right)\right|}{k_1^2}.$$

Теорема доказана.

Определим кручение кривой. Из параллельности векторов $\bar{\beta}'$ и $\bar{\nu}$ следует, что при движении по кривой в сторону возрастающих s соприкасающаяся плоскость поворачивается около касательной кривой.

Кручение кривой будем брать со знаком +, если вращение соприкасающейся плоскости происходит в направлении от $\bar{\beta}$ к $\bar{\nu}$ и со знаком –, если вращение происходит от $\bar{\nu}$ к $\bar{\beta}$. Определив так кручение кривой, получим $k_2 = \bar{\beta}' \cdot \bar{\nu}$ или что то же самое

$$k_2 = -\frac{\left(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}'''\right)}{k_1^2}.$$

Найдём выражение кручения кривой k_2 в случае произвольной параметризации кривой. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(t)$ – векторное уравнение кривой γ. Выражая производные $\frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \frac{d^3\bar{r}}{ds^3}$, входящие в формулу для k_2, а также используя ранее найденное представление для k_1 в случае произвольной параметризации, несложно получить формулу

$$k_2 = -\frac{\left(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}'''\right)}{\left(\bar{r}' \times \bar{r}''\right)^2},$$

выражающую кручение k_2 в случае произвольной регулярной параметризации $\bar{r} = \bar{r}(t)$ кривой γ.

П р и м е р 12. Определим кривизну и кручение винтовой линии $x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\ \ z = bt,\ \ a > 0$ в произвольной точке t.

Р е ш е н и е

Так как

$\bar{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b),\ \ \bar{r}''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0),\ \ \bar{r}'''(t) = (a\sin t, -a\cos t, 0)$, то

$$\bar{r}'^2(t) = a^2 + b^2, \quad \bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= ab\sin t\,\bar{i} - ab\cos t\,\bar{j} + a^2\bar{k}, \quad \left|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\right|^2 = a^2\left(a^2 + b^2\right).$$

Также

$$\left(\bar{r}^{/}(t),\bar{r}^{//}(t),\bar{r}^{///}(t)\right)=\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}=ba^2.$$

Отсюда получаем

$$k_1(t)=\frac{\left|\bar{r}^{/}(t)\times\bar{r}^{//}(t)\right|}{\left|\bar{r}^{/}(t)\right|^3}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}=\frac{a}{\left(a^2+b^2\right)},$$

$$k_2(t)=-\frac{\left(\bar{r}^{/}(t),\bar{r}^{//}(t),\bar{r}^{///}(t)\right)}{\left(\bar{r}^{/}(t)\times\bar{r}^{//}(t)\right)^2}=\frac{-ba^2}{a^2\left(a^2+b^2\right)}=\frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Таким образом, кривизна и кручение у винтовой линии постоянны.

Найдём все кривые, у которых в каждой точке кручение равно нулю. Имеем $k_2=\bar{\beta}^{/}\cdot\bar{v}$. Поскольку $\bar{\beta}^{/}\bar{\tau}=0$ и $\bar{\beta}^{/}\bar{\beta}=0$, то $\bar{\beta}^{/}=\bar{0}$ и, следовательно, $\bar{\beta}=\bar{\beta}_0$ – постоянный вектор. Так как $\bar{\tau}\perp\bar{\beta}$, то и $\bar{r}^{/}\bar{\beta}_0=0$. Интегрируя обе части последнего равенства по промежутку $[s_0,s]$, получим $\left(\bar{r}(s)-\bar{r}(s_0)\right)\bar{\beta}_0=0$, т.е. все отрезки, соединяющие различные точки кривой, лежат в одной плоскости. А это значит, что и вся кривая лежит в этой плоскости.

Обратное так же верно: у плоской кривой кручение в каждой точке равно нулю.

2.4 Формулы Френе. Натуральные уравнения кривой

Пусть s - натуральный параметр и $\bar{r}=\bar{r}(s)$ – естественная параметризация кривой. Производные векторов $\bar{\tau}(s),\bar{v}(s),\bar{\beta}(s)$ выражаются через эти же векторы и значения кривизны $k_1(s)$ и кручения $k_2(s)$ кривой по формулам Френе:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}^{/} &= \qquad k_1\bar{v}, \\ \bar{v}^{/} &= -k_1\bar{\tau} \qquad -k_2\bar{\beta}, \\ \bar{\beta}^{/} &= \qquad k_2\bar{v}. \end{aligned}$$

Первая формула вытекает из определения вектора $\bar{v}$: $\bar{v}=\dfrac{1}{k_1}\bar{r}^{//}(s_0)$, а также из равенства $\bar{\tau}=\bar{r}^{/}$. Для установления третьей формулы Френе напомним, что $\bar{\beta}' \| \bar{\nu}$, а $k_2 = \bar{\beta}' \cdot \bar{\nu}$. Для получения второй формулы продифференцируем равенство $\bar{\nu} = \bar{\beta} \times \bar{\tau}$:

$$\bar{\nu}' = \left(\bar{\beta} \times \bar{\tau}\right)' = \bar{\beta}' \times \bar{\tau} + \bar{\beta} \times \bar{\tau}' = k_2 \bar{\nu} \times \bar{\tau} + k_1 \bar{\beta} \times \bar{\nu} = -(k_1 \bar{\tau} + k_2 \bar{\beta}).$$

Кривизна $k_1(s)$ и кручение $k_2(s)$ описывают кривую в некотором смысле единственным образом.

Имеет место следующая

Т е о р е м а 10. Пусть $k_1(s) > 0$ и $k_2(s)$ - любые регулярные функции. Тогда существует единственная, с точностью до положения в пространстве, кривая, для которой $k_1(s)$, $k_2(s)$ являются соответственно кривизной и кручением в точке, отвечающей дуге s.

Оставляя теорему без доказательства, отметим только, что оно основано на рассмотрении формул Френе, как системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $\bar{\tau}(s), \bar{\nu}(s), \bar{\beta}(s)$.

О п р е д е л е н и е. Систему равенств

$$k_1 = k_1(s),\ k_2 = k_2(s)$$

называют натуральными уравнениями кривой.

Согласно предыдущей теореме кривая определяется натуральными уравнениями однозначно с точностью до положения в пространстве.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1 Найдите функцию $\rho = \rho(\varphi)$, зная, что это уравнение в полярных координатах на плоскости определяет прямую линию.

Ответ: $\rho = \dfrac{c}{a\cos\varphi + b\sin\varphi}$.

2 Найдите кривую, задаваемую уравнением $\bar{r} = \bar{r}(t),\ -\infty < t < \infty,$ если $\bar{r}''(t) = \bar{a}$, где $\bar{a}$ - постоянный ненулевой вектор.

Ответ: $\bar{r} = \bar{a}\dfrac{t^2}{2} + \bar{c}_1 t + \bar{c}_2.$

3 Написать уравнение касательной к линии:

$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), z = 4a\sin\dfrac{t}{2}$ в точке $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $\dfrac{x-a\cdot\dfrac{\pi}{2}+a}{a}=\dfrac{y-a}{a}=\dfrac{z-2\sqrt{2}a}{\sqrt{2}a}.$

4 Составить уравнение касательной в точке $(0,0,1)$ к кривой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2=x \end{cases}.$$

Ответ: $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{0}.$

5 Дана плоская кривая $x^2+y^2+2x-3y=1$. Написать уравнение касательной к кривой в точке $(1,1)$.

Ответ: $4x-y-3=0$

6 Дана кривая $x=a\cos t, y=a\sin t, z=ct; a,\ c>0$. Написать уравнение касательной и соприкасающейся плоскости к кривой в точке $M\left(\pi/2\right)$.

Ответ: $\dfrac{x}{-a}=\dfrac{y-a}{0}=\dfrac{z-\dfrac{c\pi}{2}}{c};\ \ cx+az-\dfrac{ca\pi}{2}=0.$

7 Дана кривая γ, заданная уравнением

$x=e^t\cdot\cos^{100}(t),\ y=\sin^{100}t\cdot\cos^2(t),\ \ z=1.$

Написать уравнение соприкасающейся плоскости в точке $M\left(\sqrt{e}\right)$.

Ответ: $z=1$.

8 Составить уравнение бинормали и главной нормали линии

$\bar{r}=\left(\dfrac{t^4}{4},\dfrac{t^3}{3},\dfrac{t^2}{2}\right)$

в точке $t=1$.

Ответ: $\dfrac{x-\frac{1}{4}}{-1}=\dfrac{y-\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-1},\qquad \dfrac{x-\frac{1}{4}}{3}=\dfrac{y-\frac{1}{3}}{0}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-3}$

9 Составить уравнение касательной, соприкасающейся плоскости, бинормали, главной нормали линии $x=a\cos t, y=b\sin t, z=e^t$ в точке $t=0$.

Ответ: уравнение касательной: $\dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y}{b}=z-1$; уравнение соприкасающейся плоскости: $bx-ay+abz-2ab=0$; уравнение бинормали: $\dfrac{x-a}{b}=\dfrac{y}{-a}=\dfrac{z-1}{ab}$; уравнение главной нормали $\dfrac{x-a}{-a-ab^2}=\dfrac{y}{-b}=\dfrac{z-1}{b^2}.$

10 Дана кривая, заданная уравнением: $x = R\cos t, y = R\sin t, z = 1$. Найти длину отрезка MN кривой, если $M(0), N(\pi)$.

Ответ: πR.

11 Найти длину дуги винтовой линии $\bar{r} = (3a\cos t, 3a\sin t, 4at)$ от точки ее пересечения с плоскостью xOy до произвольной точки $M(t)$.

Ответ: $5at$.

12 Найти кривизну линии $\bar{r} = (2t, \ln t, t^2)$.

Ответ: $\dfrac{2t}{(1+2t^2)^2}$.

13 Докажите, что если кривая в R^2 задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, то ее кривизна вычисляется по формуле $k_1 = \dfrac{\left|\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''\right|}{\left(\rho^2 + (\rho')^2\right)^{3/2}}$.

Указание: перейти к параметрическим уравнениям кривой: $x = \rho(\varphi)\cos\varphi, y = \rho(\varphi)\sin\varphi$.

14 Найдите кривизну кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

Ответ: $k_1 = \dfrac{3}{4a|\cos(\varphi/2)|}$.

15 Найти кривизну и кручение кривой $x = ct, y = c\sqrt{2}\ln t, z = \dfrac{c}{t}$.

Ответ: $k_1 = -k_2 = \dfrac{\sqrt{2}t^2}{c(t^2+1)^2}$.

16 Найдите кривизну и кручение конической винтовой линии $x = t\cos t, y = t\sin t, z = at$ в начале координат.

Ответ: $k_1 = \dfrac{2}{1+a^2}$, $k_2 = -\dfrac{3a}{2(a^2+1)}$.

17 Найти кривизну и кручение линии $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3$.

Ответ: $k_1 = -\ k_2 = \dfrac{1}{3(t^2+1)^2}$.

3 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

3.1 Общее понятие поверхности. Элементарная, простая, общая поверхность

Определение. Элементарной областью на плоскости называется часть плоскости, гомеоморфную открытому кругу плоскости.

Пусть γ – простая замкнутая кривая на плоскости. Известна теорема Жордана о том, что простая замкнутая кривая разбивает плоскость на две области и является границей для каждой из этих областей. Одна из этих областей конечна, другая – бесконечна. Оказывается, что конечная часть гомеоморфна кругу. Таким образом, внутренность любого многоугольника это элементарная область.

Определение. Множество Φ точек пространства называется элементарной поверхностью, если Φ является образом элементарной области на плоскости при топологическом отображении ее в пространство.

Пример 13. Полусфера без окаймляющей ее окружности – элементарная поверхность.

Действительно. Рассмотрим плоскость, параллельную плоскости, содержащей окаймляющую окружность. Пусть g – проектирование точек сферы на выбранную плоскость. При этом отображении полусфера без границ перейдет в круг без границы. Не составляет труда заметить, что $f = g^{-1}$ – топологическое отображение.

Определение. Множество Φ точек пространства называется простой поверхностью, если множество Φ связно и каждая точка из Φ имеет пространственную окрестность такую, что часть множества Φ, содержащаяся в этой окрестности, является элементарной поверхностью.

Пример 14. Сфера – простая поверхность.

Определение. Множество Φ точек пространства называется общей поверхностью, если оно является образом простой поверхности при локально топологическом отображении ее в пространство.

Из определения общей и простой поверхностей следует, что у каждой точки рассматриваемой поверхности существует пространственная окрестность такая, что часть поверхности, содержащаяся в этой окрестности, является элементарной поверхностью.

Таким образом, при изучении локальных характеристик поверхности можно всегда предполагать, что данная поверхность является элементарной.

3.2 Регулярные поверхности. Способы задания поверхности

Рассмотрим некоторую элементарную поверхность Φ, которая является образом некоторой элементарной области G. Введем на плоскости, содержащей G, систему координат Ouv и введем прямоугольную декартовую систему координат $Oxyz$ в пространстве.

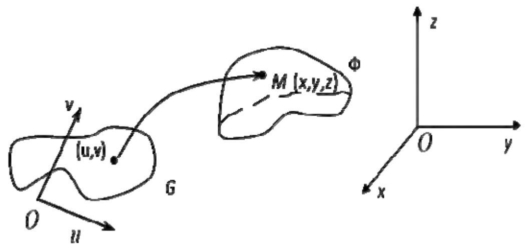


Рисунок 14 – Параметрические уравнения поверхности

Рассмотрим произвольную точку $M\,(x, y, z)$ поверхности Φ. Точка M, как точка поверхности Φ, является образом некоторой точки $(u,v)\in G$ (рисунок 14). Таким образом, текущие координаты точек поверхности являются функциями переменных u,v:

$$\begin{cases} x = f_1(u,v) \\ y = f_2(u,v) \\ z = f_3(u,v) \end{cases}, \qquad (u,v)\in G. \tag{4}$$

Система (4) называется уравнениями поверхности Φ в параметрической форме, u и v- криволинейными координатами на поверхности. Систему (4) можно переписать в эквивалентной форме

$$\bar{r} = f_1(u,v)\bar{i} + f_2(u,v)\bar{j} + f_3(u,v)\bar{k},\ (u,v)\in G,$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орты полуосей Ox, Oy, Oz, $\bar{r}$ – радиус-вектор точки M.

Уравнение вида $\bar{r} = \bar{r}(u,v), (u,v)\in G$ называется уравнением поверхности Φ в векторной форме.

О п р е д е л е н и е. Регулярной (k раз непрерывно дифференцируемой) поверхностью называется поверхность, допускающая параметризацию вида (4), где $f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v)$ – регулярные (k раз непрерывно дифференцируемые) функции переменных u и v и ранг матрицы

$\begin{pmatrix} (f_1)'_u & (f_2)'_u & (f_3)'_u \\ (f_1)'_v & (f_2)'_v & (f_3)'_v \end{pmatrix}$ равен 2 в каждой точке поверхности (т.е. для всех $(u,v)\in G$). При $k=1$ поверхность называется гладкой.

З а м е ч а н и е. В случае задания поверхности векторным уравнением $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$, последнее равенство эквивалентно условию $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \neq \bar{0}$.

Мы будем говорить, что поверхность Φ задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, выражая этим только то, что координаты точек поверхности удовлетворяют данному уравнению. При этом могут существовать точки пространства, удовлетворяющие данному уравнению и не принадлежащие поверхности Φ.

Т е о р е м а 11. Пусть $F(x,y,z)$ - регулярная функция переменных x,y,z. Пусть Φ – множество точек пространства, удовлетворяющих уравнению $F(x,y,z)=0$, и точка $M(x_0,y_0,z_0)\in\Phi$, в которой $(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2\neq 0$. Тогда у точки $M(x_0,y_0,z_0)$ есть окрестность такая, что все точки множества Φ, принадлежащие этой окрестности, образуют регулярную элементарную поверхность.

3.3 Касательная плоскость поверхности

Рассмотрим некоторую поверхность Φ и точку $P\in\Phi$. Через точку P проведем плоскость α. Пусть $Q\in\Phi, Q\neq P$. Через h и d обозначим расстояния от точки Q до плоскости α и точки P соответственно (рисунок 15).

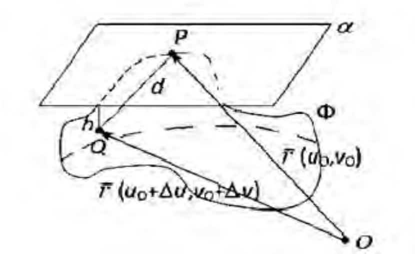


Рисунок 15 – Касательная плоскость поверхности

О п р е д е л е н и е. Плоскость α называется касательной плоскостью поверхности Φ в точке P, если $\lim\limits_{Q\to P}\dfrac{h}{d}=0$.

Т е о р е м а 12. Гладкая поверхность в каждой точке имеет вполне определенную касательную плоскость. Если $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$ – векторное уравнение поверхности, то касательная плоскость к поверхности в точке $P(u_0,v_0)$ параллельна векторам $\bar{r}'_u(u_0,v_0), \bar{r}'_v(u_0,v_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Доказательство проведем в 2 этапа:

1 Предположим, что касательная плоскость в точке $P(u_0,v_0)$ существует. Рассмотрим точку $Q(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)\in\Phi$. Пусть $\overline{n}$ – единичный вектор нормали касательной плоскости. Тогда $d=\left|\overline{r}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)-\overline{r}(u_0,v_0)\right|$, а также $h=\left|\left(\overline{r}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)-\overline{r}(u_0,v_0)\right)\cdot\overline{n}\right|$. Отсюда и из определения касательной плоскости вытекает

$$\frac{h}{d}=\frac{\left|\left(\overline{r}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)-\overline{r}(u_0,v_0)\right)\cdot\overline{n}\right|}{\left|\overline{r}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)-\overline{r}(u_0,v_0)\right|}\to 0 \text{ при } \Delta u\to 0,\ \Delta v\to 0.$$

Так как $\Delta u\to 0$ и $\Delta v\to 0$ независимо друг от друга, то, положив $\Delta v=0$, при $\Delta u\to 0$ получим

$$\frac{h}{d}=\frac{\left|\dfrac{\overline{r}(u_0+\Delta u, v_0)-\overline{r}(u_0,v_0)}{\Delta u}\cdot\overline{n}\right|}{\left|\dfrac{\overline{r}(u_0+\Delta u, v_0)-\overline{r}(u_0,v_0)}{\Delta u}\right|}\to\frac{\left|\overline{r}_u'(u_0,v_0)\cdot\overline{n}\right|}{\left|\overline{r}_u'(u_0,v_0)\right|}.$$

Следовательно,

$$\lim_{Q\to P}\frac{h}{d}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\left|\overline{r}_u'(u_0,v_0)\cdot\overline{n}\right|}{\left|\overline{r}_u'(u_0,v_0)\right|}=0\cdot$$

В силу регулярности поверхности $\overline{r}_u'\neq\overline{0}$, значит, $\overline{r}_u'(u_0,v_0)\cdot\overline{n}=0$.

Это показывает, что $\overline{r}_u'\perp\overline{n}$.

Аналогично доказывается, что $\overline{r}_v'\perp\overline{n}$. Таким образом, если касательная плоскость существует, то она параллельна векторам $\overline{r}_u', \overline{r}_v'$ и, значит, единственна (поскольку, в силу регулярности поверхности Φ, векторы $\overline{r}_u'$ и $\overline{r}_v'$ неколлинеарные).

2 Докажем существование касательной плоскости. Для этого через точку $P(u_0,v_0)$ проведем плоскость α, параллельную векторам $\overline{r}_u'(u_0,v_0)$ и $\overline{r}_v'(u_0,v_0)$. Пусть $\overline{n}$ – единичный вектор нормали плоскости α. Тогда

$$\frac{h}{d}=\frac{\left|\left(\overline{r}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)-\overline{r}(u_0,v_0)\right)\cdot\overline{n}\right|}{\left|\overline{r}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)-\overline{r}(u_0,v_0)\right|}\to 0.$$

По формуле Тейлора для вектор–функции двух аргументов

$$\bar r(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)-\bar r(u_0,v_0)=\bar r_u^{/}(u_0,v_0)\cdot\Delta u+\bar r_v^{/}(u_0,v_0)\cdot\Delta v+$$
$$+\bar\varepsilon\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}\ ,$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}}\bar\varepsilon=\bar 0$. Используя это разложение, получим

$$\frac{h}{d}=\frac{\left|\left(\bar r_u^{/}\cdot\bar n\right)\cdot\Delta u+\left(\bar r_v^{/}\cdot\bar n\right)\cdot\Delta v+\left(\bar\varepsilon\cdot\bar n\right)\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}\right|}{\left|\bar r_u^{/}\cdot\Delta u+\bar r_v^{/}\cdot\Delta v+\bar\varepsilon\cdot\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}\right|}=$$
$$=\frac{\left|\bar\varepsilon\cdot\bar n\right|}{\left|\bar r_u^{/}\cdot\dfrac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+\bar r_v^{/}\cdot\dfrac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+\bar\varepsilon\right|}$$

(так как $\bar r_u^{/}\perp\bar n$ и $\bar r_v^{/}\perp\bar n$).

Для доказательства того, что $\lim\limits_{Q\to P}\dfrac{h}{d}=0$, достаточно показать, что

$$\left|\bar r_u^{/}\cdot\frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+\bar r_v^{/}\cdot\frac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\right|\ge c>0\ .$$

Докажем это неравенство. Так как

$$\left(\frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\right)^2=1,$$

то выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\left|\frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\right|\ge\frac{1}{\sqrt2}\ \text{или}\ \left|\frac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\right|\ge\frac{1}{\sqrt2}.$$

Пусть $\left|\dfrac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\right|\ge\dfrac{1}{\sqrt2}$. Пусть вектор $\bar e_1$ такой, что $\bar r_v^{/}\perp\bar e_1, \left|\bar e_1\right|=1$ и $\bar e_1$ не ортогонален $\bar r_u^{/}$; обозначим через φ угол между векторами $\bar e_1$ и $\bar r_u^{/}$ $(\cos\varphi\ne 0)$. Тогда выполняется

$$\left|\bar r_u^{/}\cdot\frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+\bar r_v^{/}\cdot\frac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\right|\ge\left|\left(\bar r_u^{/}\cdot\frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+\bar r_v^{/}\cdot\frac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\right)\cdot\bar e_1\right|=$$
$$\left|\left(\bar r_u^{/}\cdot\bar e_1\right)\cdot\frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\right|\ge\left|\bar r_u^{/}\right|\cdot\left|\cos\varphi\right|\cdot\frac{1}{\sqrt2}=c_1>0\ .$$

Аналогично, если $\left|\frac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, то выберем вектор $\bar{e}_2$ такой, что $\bar{r}_u^{/} \perp \bar{e}_2$, $|\bar{e}_2| = 1$ и $\bar{e}_2$ не ортогонален $\bar{r}_v^{/}$. Обозначая через ϕ угол между векторами $\bar{e}_2$ и $\bar{r}_v^{/}$ $(\cos\phi \neq 0)$, имеем

$$\left|\bar{r}_u^{/} \cdot \frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}} + \bar{r}_v^{/} \cdot \frac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\right| \geq \left|\bar{r}_v^{/}\right| \cdot |\cos\phi| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = c_2 > 0 \cdot$$

Отсюда

$$\left|\bar{r}_u^{/} \cdot \frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}} + \bar{r}_v^{/} \cdot \frac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\right| \geq \min\{c_1, c_2\} = c > 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{Q \to P} \frac{h}{d} = 0$. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е. Нормалью поверхности Φ в точке P называется прямая, проходящая через точку P перпендикулярно касательной плоскости в этой точке.

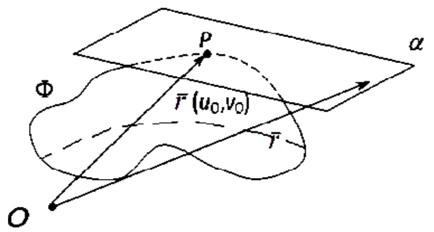


Рисунок 16 – К уравнению касательной плоскости

Выведем уравнение касательной плоскости для различных случаев задания поверхности.

1 Пусть поверхность Φ задана векторным уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ и $P(u_0,v_0) \in \Phi$. Пусть $\bar{r}$ - радиус-вектор текущей точки касательной плоскости α (рисунок 16). В силу доказанной теоремы 12 векторы $\bar{r} - \bar{r}(u_0,v_0)$, $\bar{r}_u^{/}(u_0,v_0)$, $\bar{r}_v^{/}(u_0,v_0)$ компланарны. Следовательно,

$$\left(\bar{r} - \bar{r}(u_0,v_0), \bar{r}_u^{/}(u_0,v_0), \bar{r}_v^{/}(u_0,v_0)\right) = 0 \; . \tag{5}$$

(5) – векторное уравнение касательной плоскости.

2 Пусть поверхность Φ задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in G. \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Используя (5), получим уравнение касательной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0,v_0) & y - y(u_0,v_0) & z - z(u_0,v_0) \\ x_u^{/}(u_0,v_0) & y_u^{/}(u_0,v_0) & z_u^{/}(u_0,v_0) \\ x_v^{/}(u_0,v_0) & y_v^{/}(u_0,v_0) & z_v^{/}(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение нормали при этом способе задания поверхности:

$$\frac{x-x(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} y_u'(u_0,v_0) & z_u'(u_0,v_0) \\ y_v'(u_0,v_0) & z_v'(u_0,v_0)\end{vmatrix}}=\frac{y-y(u_0,v_0)}{-\begin{vmatrix} x_u'(u_0,v_0) & z_u'(u_0,v_0) \\ x_v'(u_0,v_0) & z_v'(u_0,v_0)\end{vmatrix}}=\frac{z-z(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} x_u'(u_0,v_0) & y_u'(u_0,v_0) \\ x_v'(u_0,v_0) & y_v'(u_0,v_0)\end{vmatrix}}.$$

3 Пусть поверхность Ф задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$ и удовлетворяет теореме 11 о неявном задании поверхности. Поскольку в некоторой окрестности точки P поверхность Ф является элементарной, то в этой окрестности существует некоторая параметризация этой поверхности: $x=x(u,v),\ \ y=y(u,v),\ \ z=z(u,v)$. Подставляя вместо $x,\ y,\ z$ в уравнение поверхности $x(u,v),\ \ y(u,v),\ \ z(u,v)$, получим относительно u,v тождество

$$F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=0.$$

Дифференцируя это тождество сначала по u, а затем по v, получим:

$$\begin{cases} F_x'\cdot x_u'+F_y'\cdot y_u'+F_z'\cdot z_u'=0 \\ F_x'\cdot x_v'+F_y'\cdot y_v'+F_z'\cdot z_v'=0. \end{cases} \tag{6}$$

Обозначая $\overline{F}'=(F_x',F_y',F_z'),\overline{r}_u'=(x_u',y_u',z_u'),\overline{r}_v'=(x_v',y_v',z_v')$, запишем систему (6) в виде

$$\begin{cases} \overline{F}'\cdot\overline{r}_u'=0 \\ \overline{F}'\cdot\overline{r}_v'=0. \end{cases}$$

Так как $\overline{F}'\neq\overline{0}$ и $\overline{F}'\perp\overline{r}_u',\overline{F}'\perp\overline{r}_v'$, то $\overline{F}'$ – вектор нормали касательной плоскости. Поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид

$$F_x'(P)\cdot(x-x_0)+F_y'(P)\cdot(y-y_0)+F_z'(P)\cdot(z-z_0)=0,$$

а уравнение нормали –

$$\frac{x-x_0}{F_x'(P)}=\frac{y-y_0}{F_y'(P)}=\frac{z-z_0}{F_z'(P)}.$$

П р и м е р 15. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x=u^2,y=v,z=u-v^2$ в точке $M(4,1,1)$.

Р е ш е н и е

Запишем векторное уравнение поверхности: $\overline{r}=(u^2,v,u-v^2)$.

Найдем $\overline{r}_u',\ \overline{r}_v'$. Имеем $\overline{r}_u'=(2u,0,1),\ \overline{r}_v'=(0,1,-2v)$. Найдем криволинейные координаты (u_0,v_0) точки M как решение системы уравнений

$$\begin{cases} u^2 = 4 \\ v = 1 \\ u - v^2 = 1. \end{cases}$$

Имеем $u_0 = 2, v_0 = 1$. Тогда

$\bar{r}_u^{/}(u_0, v_0) = (4{,}0{,}1),\ \bar{r}_v^{/}(u_0, v_0) = (0{,}1{,}-2),\ \bar{r}(u_0, v_0) = (4{,}1{,}1).$

Для составления касательной плоскости в точке (u_0, v_0) поверхности используем уравнение в параметрической форме:

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ x_u^{/}(u_0, v_0) & y_u^{/}(u_0, v_0) & z_u^{/}(u_0, v_0) \\ x_v^{/}(u_0, v_0) & y_v^{/}(u_0, v_0) & z_v^{/}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } \begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z-1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель в левой части последнего равенства, получим уравнение касательной плоскости

$$x - 8y - 4z + 8 = 0.$$

Так как вектор нормали $\bar{n}(1,-8,-4)$ касательной плоскости является направляющим вектором нормали в точке $M(4{,}1{,}1)$, то уравнение нормали имеет вид

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-4}.$$

П р и м е р 16. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к эллипсоиду $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ в точке $P(1{,}1,\sqrt{2})$.

Р е ш е н и е

Поверхность задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$. Так как $F_x^{/}(P) = 2x\big|_P = 2,\ F_y^{/}(P) = 2y\big|_P = 2,$

$F_z^{/}(P) = 2z\big|_P = 2\sqrt{2}$, то уравнение касательной плоскости в точке P имеет вид $2(x-1) + 2(y-1) + 2\sqrt{2}(z - \sqrt{2}) = 0$ или

$$x + y + \sqrt{2}z - 4 = 0.$$

Уравнение нормали $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ или

$$x - 1 = y - 1 = \frac{z - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

4 ИЗУЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПОМОЩЬЮ ПЕРВОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

4.1 Первая квадратичная форма поверхности

Пусть Φ – гладкая поверхность, $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ – ее векторное уравнение и $\bar{r}_u' \times \bar{r}_v' \neq \bar{0}$.

О п р е д е л е н и е. Первой квадратичной формой φ_1 поверхности Φ, заданной уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, называется выражение $\varphi_1 = d\bar{r}^2$.

Первая квадратичная форма φ_1 является положительно определенной, поскольку она принимает только неотрицательные значения и обращается в нуль только при $du = dv = 0$. Действительно, если $d\bar{r}^2 = 0$, то и $d\bar{r} = \bar{r}_u' du + \bar{r}_v' dv = \bar{0}$. Последнее, в силу неравенства $\bar{r}_u' \times \bar{r}_v' \neq \bar{0}$, возможно только при условии $du = dv = 0$. Запишем выражение для первой квадратичной формы φ_1 подробно. Так как $d\bar{r} = \bar{r}_u' du + \bar{r}_v' dv$, то

$$\varphi_1 = d\bar{r}^2 = \left(\bar{r}_u'\right)^2 du^2 + 2\bar{r}_u' \cdot \bar{r}_v' du dv + \left(\bar{r}_v'\right)^2 dv^2 .$$

Для коэффициентов первой квадратичной формы принято использовать следующие обозначения: $E = \left(\bar{r}_u'\right)^2$, $F = \bar{r}_u' \cdot \bar{r}_v'$, $G = \left(\bar{r}_v'\right)^2$. Таким образом,

$$\varphi_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 .$$

Отметим, что коэффициенты E, F, G не зависят от du, dv, но зависят от u, v.

П р и м е р 17. Найти первую квадратичную форму плоскости, проходящей через точку P и параллельно векторам $\bar{a}, \bar{b}$.

Р е ш е н и е

Пусть $\bar{r}_0$ – радиус вектор точки P. Тогда уравнение плоскости примет вид: $\bar{r} = \bar{r}_0 + u \cdot \bar{a} + v \cdot \bar{b}$. Отсюда

$$\bar{r}_u' = \bar{a},\ \bar{r}_v' = \bar{b},\ E = |\bar{a}|^2,\ F = \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\varphi,\ G = |\bar{b}|^2,$$

где φ - угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Таким образом,

$$\varphi_1 = |\bar{a}|^2 du^2 + 2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi du dv + |\bar{b}|^2 dv^2.$$

З а м е ч а н и е. Первая квадратичная форма зависит от способа параметризации поверхности. Действительно, если в предыдущем примере положить $\bar{a} = \bar{i}$ и $\bar{b} = \bar{j}$, то $\varphi_1 = du^2 + dv^2$.

П р и м е р 18. Найти первую квадратичную форму сферы радиуса R.

Р е ш е н и е

Параметрические уравнения сферы радиуса R с центром в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ имеют следующий вид:

$$x = x_0 + R\cos u\cos v,\ \ y = y_0 + R\sin u\cos v,\ \ z = z_0 + R\sin v,$$

где $0 \le u \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$.

Отсюда имеем

$\bar{r}_u' = (-R\sin u\cos v, R\cos u\cos v, 0)$,

$\bar{r}_v' = (-R\cos u\sin v, -R\sin u\sin v, R\cos v)$,

$E = R^2\cos^2 v,\ F = 0,\ G = R^2.$

Таким образом,

$$\varphi_1 = R^2\cos^2 v du^2 + R^2 dv^2.$$

С помощью первой квадратичной формы поверхности можно вычислять длины кривых на поверхности, углы между кривыми и площади областей на поверхности.

4.2 Длина кривой на поверхности

Рассмотрим поверхность Φ и некоторую кривую γ, лежащую на Φ. Пусть точка $M_0 \in \gamma$. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(u,v),\ (u,v) \in D$ – некоторая параметризация поверхности Φ в окрестности точки M_0 и $\bar{r}(u_0, v_0)$ - радиус-вектор M_0. Пусть $\tilde{\gamma}$ - кривая в области D, являющаяся прообразом γ при отображении и пусть $u = u(t), v = v(t)$ - ее уравнение. Тогда $\bar{r} = \bar{r}(t)$, где $\bar{r}(t) = \bar{r}(u(t), v(t))$, является параметризацией кривой γ в окрестности ее точки M_0. Равенства $u = u(t), v = v(t)$ будем называть внутренними уравнениями кривой γ, лежащей на поверхности Φ. Отметим при этом, что внутренние уравнения кривой без указания уравнения поверхности, на которой лежит кривая, не имеют смысла. Отметим также, что если $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$- регулярная параметризация поверхности Φ в окрестности точки M_0, отвечающей точке (u_0,v_0), а $u=u(t), v=v(t)$ - регулярная параметризация $\tilde{\gamma}$ в окрестности точки (u_0,v_0), то $\bar{r}=\bar{r}(t)$, где $\bar{r}(t)=\bar{r}(u(t),v(t))$, является регулярной параметризацией кривой γ в окрестности точки M_0.

Обратимся к нахождению длины кривой γ, лежащей на поверхности Φ. Пусть $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$ – регулярная параметризация поверхности Φ, а $u=u(t),\quad v=v(t)$ - внутренние уравнения регулярной кривой γ. Найдем длину дуги кривой γ с концами в точках $M_0(t_0)$ и $M_1(t_1)$. Имеем

$$l(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\left|\bar{r}'(t)\right|dt=\int_{t_0}^{t_1}\left|\bar{r}'(u(t),v(t))\right|dt=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(\bar{r}'(u(t),v(t))\right)^2}\,dt=$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(\bar{r}_u'\cdot u'(t)+\bar{r}_v'\cdot v'(t)\right)^2}\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E\left(u'(t)\right)^2+2Fu'(t)v'(t)+G\left(v'(t)\right)^2}\,dt. \qquad (7)$$

П р и м е р 19. Дана поверхность $\bar{r}=(u\cos v,u\sin v,hv)$ (геликоид). Найти

а) длину линии $u=a$ между точками $P_1(a,v_1),P_2(a,v_2)$ $(v_1<v_2)$,

б) длину линии $v=\ln\left(u+\sqrt{u^2+h^2}\right)$ между точками ее пересечения с линиями $u=0,\ u=2$.

Р е ш е н и е

Так как $\bar{r}_u'=(\cos v,\sin v,0),\quad \bar{r}_v'=(-u\sin v,u\cos v,h)$, то коэффициенты первой квадратичной формы имеют вид

$E=(\bar{r}_u')^2=1,\ F=\bar{r}_u'\bar{r}_v'=0,\quad G=(\bar{r}_v')^2=u^2+h^2$. Отсюда

а) записывая внутренние уравнения кривой $u=a$ в виде $u=a$, $v=t$, $v_1\le t\le v_2$, в силу формулы (7) получим

$$l(v_1,v_2)=\int_{v_1}^{v_2}\sqrt{E\left(u'(t)\right)^2+2Fu'(t)v'(t)+G\left(v'(t)\right)^2}\,dt=\int_{v_1}^{v_2}\sqrt{a^2+h^2}\,dt=$$

$= \sqrt{a^2 + h^2}(v_2 - v_1);$

б) запишем внутренние уравнения кривой: $u = t,\ v = \ln\left(t + \sqrt{t^2 + h^2}\right)$, $0 \le t \le 2$. Тогда $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 + h^2}}$, и в силу формулы (7) получим

$l(0,2) = \int\limits_0^2 \sqrt{2}dt = 2\sqrt{2}$.

4.3 Угол между кривыми на поверхности

Введём понятие направления на поверхности.

О п р е д е л е н и е. Направлением $(du : dv)$ на поверхности Φ, заданной уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, называется направление вектора $d\bar{r} = \bar{r}_u^{/} du + \bar{r}_v^{/} dv$.

О п р е д е л е н и е. Углом между направлениями $(du : dv)$, $(\delta u : \delta v)$ называется угол между векторами $d\bar{r} = \bar{r}_u^{/} du + \bar{r}_v^{/} dv$, $\delta\bar{r} = \bar{r}_u^{/} \delta u + \bar{r}_v^{/} \delta v$.

Найдём выражение угла между направлениями $(du : dv)$, $(\delta u : \delta v)$. Так как

$$d\bar{r} \cdot \delta\bar{r} = |d\bar{r}| \cdot |\delta\bar{r}| \cos\theta,$$

$$d\bar{r}^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,\ \delta\bar{r}^2 = E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2,$$

$$d\bar{r} \cdot \delta\bar{r} = \left(\bar{r}_u^{/} du + \bar{r}_v^{/} dv\right)\left(\bar{r}_u^{/} \delta u + \bar{r}_v^{/} \delta v\right) = Edu\delta u + F\left(du\delta v + dv\delta u\right) + Gdv\delta v,$$

то

$$\cos\theta = \frac{Edu\delta u + F\left(du\delta v + dv\delta u\right) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}. \qquad (8)$$

Говорят, что кривая γ на поверхности Φ, заданной уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, в точке (u, v) имеет направление $(du : dv)$, если вектор $d\bar{r} = \bar{r}_u^{/} du + \bar{r}_v^{/} dv$ есть направляющий вектор касательной кривой γ в этой точке.

Отметим, что кривая на поверхности, заданная внутренними уравнениями $u = u(t),\ v = v(t)$, в точке $(u(t), v(t))$ имеет направление $(u'(t) : v'(t))$.

О п р е д е л е н и е. Углом между кривыми на поверхности в их общей точке M называется угол между их направлениями в этой точке.

Таким образом, угол между кривыми на поверхности – это угол между касательными к кривым, и следовательно, он не зависит ни от параметризации поверхности, ни от параметризации кривых.

Координатными линиями на поверхности называются линии, заданные внутренними уравнениями $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$. Эти линии имеют направления $(0 : dv)$ и $(\delta u : 0)$ соответственно.

Найдём выражение для угла между координатными линиями. По формуле (8) получим

$$\cos\theta = \frac{F dv \delta u}{\sqrt{G dv^2}\sqrt{E \delta u^2}} = \frac{F}{\sqrt{GE}}.$$

Отсюда следует, что координатные линии ортогональны тогда и только тогда, когда $F = 0$.

П р и м е р 20. Вычислить угол между кривыми γ_1 : $\ln u - v = 0$ и γ_2 : $u + v = 1$ на поверхности $\bar{r} = \bar{r}(u, v, u^2 + 3uv + v^2)$.

Р е ш е н и е

Нетрудно видеть, что кривые γ_1, γ_2 пересекаются в единственной точке $(u_0, v_0) = (1, 0)$. Найдем коэффициенты первой квадратичной формы поверхности:

$$\bar{r}_u' = (1, 0, 2u + 3v),\ \bar{r}_v' = (0, 1, 3u + 2v),$$

$$E = 1 + (2u + 3v)^2,\ F = (2u + 3v)(3u + 2v),\ G = 1 + (3u + 2v)^2.$$

Для нахождения угла между кривыми нам необходимо знать значения этой формы в точке (u_0, v_0): $E = 5,\ F = 6,\ G = 10$. Вдоль линии γ_1: $v = \ln u,\ dv = \frac{1}{u} du$. Вдоль линии γ_2: $v = 1 - u,\ \delta v = -\delta u$. Для нахождения угла θ между линиями γ_1, γ_2 воспользуемся формулой (8):

$$\cos\theta = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}} =$$

$$= \frac{5du\delta u + 6(-du\delta u + du\delta u) - 10du\delta u}{\sqrt{5du^2 + 12du^2 + 10du^2}\sqrt{5\delta u^2 - 12\delta u^2 + 10\delta v^2}} = \frac{-5}{9}.$$

П р и м е р 21. Показать, что на геликоиде $x = au\cos v,\ y = au\sin v,\ z = bv$ координатная сеть ортогональна.

Р е ш е н и е

Для доказательства ортогональности сети достаточно показать, что $F = 0$. Так как $\bar{r}_u^{/}(a\cos v, a\sin v, 0)$, $\bar{r}_v^{/}(-au\sin v, au\cos v, b)$, то $F = \left(\bar{r}_u^{/} \cdot \bar{r}_v^{/}\right) = 0$.

4.4 Площадь поверхности

Рассмотрим гладкую поверхность $\varPhi$, заданную уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$, и на ней область D, ограниченную конечным числом кусочно-гладких кривых. Разобьем D координатными линиями на клетки. Рассмотрим одну из них – криволинейный четырехугольник $M_1M_2M_3M_4$ (рисунок 17):

$$M_1(u;v),\ M_2(u + \Delta u;v),\ M_3(u + \Delta u;v + \Delta v),\ M_4(u;v + \Delta v).$$

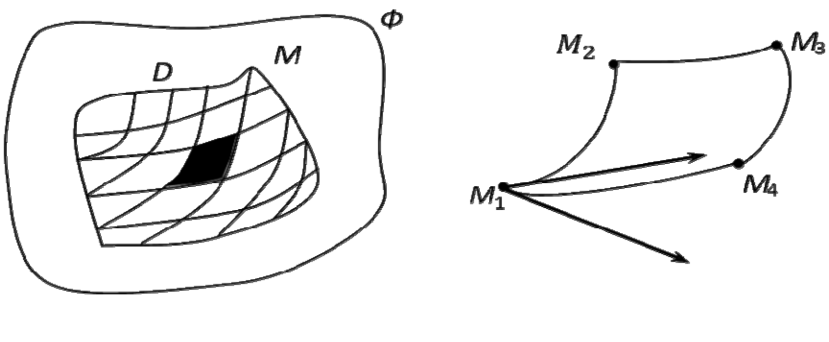


Рисунок 17 – К определению площади поверхности

При переходе из точки M_1 в точку M_2 параметр u получает приращение Δu, радиус-вектор получает приращение $\bar{r}(u + \Delta u;\ v) - \bar{r}(u;\ v) = \overline{M_1M_2}$. При переходе из точки M_1 в точку M_4 параметр v получает приращение Δv, радиус-вектор получает приращение $\bar{r}(u; v+\Delta v)-\bar{r}(u; v)=\overline{M_1M_4}$.

Заменим приращение радиус-векторов соответствующими дифференциалами $\bar{r}_u^{/}\Delta u$ и $\bar{r}_v^{/}\Delta v$. Рассмотрим прямолинейный параллелограмм, натянутый на векторы $\bar{r}_u^{/}\Delta u$ и $\bar{r}_v^{/}\Delta v$.

Этот параллелограмм мало отличается от соответствующего криволинейного четырехугольника $M_1M_2M_3M_4$, причём это отличие тем меньше, чем меньше размеры последнего. Обозначим через $\Delta\sigma$ площадь прямолинейного параллелограмма: $\Delta\sigma=\left|\bar{r}_u^{/}\Delta u\times\bar{r}_v^{/}\Delta v\right|=\left|\bar{r}_u^{/}\times\bar{r}_v^{/}\right|\Delta u\Delta v$. Из курса векторной алгебры известно, что $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{\bar{a}^2\cdot\bar{b}^2-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)^2}$. Тогда

$$\Delta\sigma=\sqrt{\left(\bar{r}_u^{/}\right)^2\cdot\left(\bar{r}_v^{/}\right)^2-\left(\bar{r}_u^{/}\bar{r}_v^{/}\right)^2}\,\Delta u\Delta v=\sqrt{EG-F^2}\,\Delta u\Delta v\ .$$

Надстраивая с помощью описанной процедуры над каждой клеткой разбиения области D прямоугольный параллелограмм, рассмотрим сумму площадей этих параллелограммов $\sum\Delta\sigma$. Естественно определить площадь S_D области D как предел указанных сумм при неограниченном уменьшении клеток разбиения. При условии непрерывности производных $\bar{r}_u^{/}$ и $\bar{r}_v^{/}$ этот предел существует:

$$S_D=\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}}\sum\Delta\sigma=\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}}\sum\sqrt{EG-F^2}\,\Delta u\Delta v=\iint_{\tilde{D}}\sqrt{EG-F^2}\,dudv\,,$$

где $\tilde{D}$ - область плоскости uv, соответствующая области D. Итак,

$$S_D=\iint_{\tilde{D}}\sqrt{EG-F^2}\,dudv. \tag{9}$$

Рассмотрим случай, когда поверхность Φ представляет график функции $z=z(x,y)$. В качестве параметров u и v возьмём x и y соответственно. Тогда векторное уравнение поверхности имеет вид $\bar{r}=\left(x; y; z(x,y)\right)$ и $\bar{r}_x^{/}=\left(1;0;z_x^{/}\right)$, $\bar{r}_y^{/}=\left(0;1;z_y^{/}\right)$. Отсюда

$$E = 1 + \left(z_x^/\right)^2, \ F = z_x^/ z_y^/, \ G = 1 + \left(z_y^/\right)^2, \ EG - F^2 = 1 + \left(z_x^/\right)^2 + \left(z_y^/\right)^2.$$

Следовательно, площадь области D, расположенной на поверхности Φ, в силу (9) равна

$$S_D = \iint\limits_{\tilde{D}} \sqrt{1 + \left(z_x^/\right)^2 + \left(z_y^/\right)^2}\, dxdy,$$

где $\tilde{D}$- область плоскости xy, соответствующая области D.

П р и м е р 22. Найти площадь четырехугольника D, расположенного на геликоиде $\bar{r} = (u\cos v, u\sin v, v)$ и ограниченного кривыми $u = 0, \ u = 1, \ v = 0, \ v = 1.$

Р е ш е н и е

Коэффициенты первой квадратичной формы геликоида имеют вид (см. пример 19): $E = (\bar{r}_u^/)^2 = 1, \ F = \bar{r}_u^/ \bar{r}_v^/ = 0, \ G = (\bar{r}_v^/)^2 = u^2 + 1$. Тогда в силу формулы (9) получим

$$S_D = \iint\limits_{\tilde{D}} \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \int\limits_0^1 du \int\limits_0^1 \sqrt{u^2 + 1}\, dv = \int\limits_0^1 \sqrt{u^2 + 1}\, du =$$

$$= \left(\frac{u}{2}\sqrt{u^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + 1}\right| \right)\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

Таким образом, зная первую квадратичную форму поверхности, можно решать следующие задачи:

1) вычисление длины дуги гладкой линии, лежащей на поверхности;

2) вычисление угла между гладкими кривыми, лежащими на поверхности, в их общей точке;

3) вычисление площади области, ограниченной конечным числом кусочно-гладких кривых на поверхности.

5 ИЗУЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПОМОЩЬЮ ВТОРОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

5.1 Вторая квадратичная форма поверхности

Пусть Φ – регулярная поверхность, $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$ – какая-нибудь ее регулярная параметризация, $\bar{n}=\bar{n}(u,v)$ – единичный вектор нормали поверхности в точке $P(u,v)$.

Второй квадратичной формой поверхности называется квадратичная форма

$$\varphi_2=-d\bar{r}\cdot d\bar{n}\,.$$

Преобразуем выражение для второй квадратичной формы. Так как $d\bar{r}\cdot\bar{n}=0$, то и $d(d\bar{r}\cdot\bar{n})=0$, т.е. $d^2\bar{r}\cdot\bar{n}+d\bar{r}\cdot d\bar{n}=0$. Отсюда $\varphi_2=-d\bar{r}\cdot d\bar{n}=d^2\bar{r}\cdot\bar{n}$ и, следовательно,

$$\varphi_2=\left(\bar{r}''_{uu}(du)^2+2\bar{r}''_{uv}dudv+\bar{r}''_{vv}(dv)^2\right)\cdot\bar{n}=$$
$$\left(\bar{r}''_{uu}\cdot\bar{n}\right)du^2+2\left(\bar{r}''_{uv}\cdot\bar{n}\right)dudv+\left(\bar{r}''_{vv}\cdot\bar{n}\right)dv^2=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2,$$

где $L=\left(\bar{r}''_{uu}\cdot\bar{n}\right)$, $M=\left(\bar{r}''_{uv}\cdot\bar{n}\right)$, $N=\left(\bar{r}''_{vv}\cdot\bar{n}\right)$.

Так как $\bar{n}$ – единичный вектор нормали поверхности, то $\bar{n}\perp\bar{r}'_u$ и $\bar{n}\perp\bar{r}'_v$ (касательная плоскость параллельна векторам $\bar{r}'_u,\bar{r}'_v$). Следовательно, можно положить $\bar{n}=\dfrac{\bar{r}'_u\times\bar{r}'_v}{\left|\bar{r}'_u\times\bar{r}'_v\right|}$ и тогда (поскольку $\left|\bar{r}'_u\times\bar{r}'_v\right|=\sqrt{EG-F^2}$)

$$L=\left(\bar{r}''_{uu}\cdot\bar{n}\right)=\frac{\left(\bar{r}''_{uu}\bar{r}'_u\bar{r}'_v\right)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{\begin{vmatrix} x''_{uu} & y''_{uu} & z''_{uu}\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}},\quad M=\left(\bar{r}''_{uv}\cdot\bar{n}\right)=\frac{\left(\bar{r}''_{uv}\bar{r}'_u\bar{r}'_v\right)}{\sqrt{EG-F^2}}=$$
$$=\frac{\begin{vmatrix} x''_{uv} & y''_{uv} & z''_{uv}\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}},\quad N=\left(\bar{r}''_{vv}\cdot\bar{n}\right)=\frac{\left(\bar{r}''_{vv}\bar{r}'_u\bar{r}'_v\right)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{\begin{vmatrix} x''_{vv} & y''_{vv} & z''_{vv}\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

П р и м е р 23. Найти вторую квадратичную форму геликоида $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=bv.$

Р е ш е н и е

Имеем

$\bar{r} = (u\cos v, u\sin v, bv),\ \bar{r}_u^{/} = (\cos v, \sin v, 0),\ \bar{r}_v^{/} = (-u\sin v, u\cos v, b),$

$\bar{r}_{uu}^{//} = (0,0,0),\ \bar{r}_{uv}^{//} = (-\sin v, \cos v, 0),\ \bar{r}_{vv}^{//} = (-u\cos v, -u\sin v, 0).$

Отсюда $E = 1,\ F = 0,\ G = u^2 + b^2$ и $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + b^2}$. Далее

$$L = \frac{\left(\bar{r}_{uu}^{//}\bar{r}_u^{/}\bar{r}_v^{/}\right)}{\sqrt{EG - F^2}} = 0,\ M = \frac{\left(\bar{r}_{uv}^{//}\bar{r}_u^{/}\bar{r}_v^{/}\right)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} -\sin v & \cos v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & b \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2 + b^2}} = \frac{-b}{\sqrt{u^2 + b^2}},$$

$$N = \frac{\left(\bar{r}_{vv}^{//}\bar{r}_u^{/}\bar{r}_v^{/}\right)}{\sqrt{EG - F^2}} = 0.$$

Окончательно имеем

$$\varphi_2 = -\frac{2b}{\sqrt{u^2 + b^2}}dudv.$$

5.2 *Кривизна кривой на поверхности*

Рассмотрим регулярную поверхность Φ, заданную уравнением: $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$. Пусть γ – регулярная кривая, лежащая на поверхности и проходящая через точку $P(u, v)$. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(s)$ – естественная параметризация γ. Рассмотрим скалярное произведение $\left(\bar{r}_{ss}^{//} \cdot \bar{n}\right)$. Напомним, что вектор $\bar{r}_{ss}^{//}$ направлен по главной нормали кривой, а по величине равен кривизне кривой (см. теорему 8): $\left|\bar{r}_{ss}^{//}\right| = k_1$. Отсюда вытекает, что

$$\left(\bar{r}_{ss}^{//} \cdot \bar{n}\right) = k_1 \cos\theta, \qquad (10)$$

где θ – угол между векторами $\bar{r}_{ss}^{//}$ и $\bar{n}$, т.е. между главной нормалью кривой и нормалью к поверхности. Но

$$\left(\bar{r}_{ss}^{//} \cdot \bar{n}\right) = \left(\bar{r}_u^{/} \cdot u_s^{/} + \bar{r}_v^{/} \cdot v_s^{/}\right)_s^{/}\bar{n} =$$

$$= \left(\left(\bar{r}_u^{/}\right)_s^{/} \cdot u_s^{/} + \bar{r}_u^{/} \cdot u_{ss}^{//} + \left(\bar{r}_v^{/}\right)_s^{/} \cdot v_s^{/} + \bar{r}_v^{/} v_{ss}^{//}\right)\bar{n} =$$

$$= \left[\left(\bar{r}_{uu}^{//} \cdot u_s^{/} + \bar{r}_{uv}^{//} \cdot v_s^{/}\right) \cdot u_s^{/} + \bar{r}_u^{/} \cdot u_{ss}^{//} + \left(\bar{r}_{vu}^{//} \cdot u_s^{/} + \bar{r}_{vv}^{//} \cdot v_s^{/}\right) \cdot v_s^{/} + \bar{r}_v^{/} \cdot v_{ss}^{//}\right]\bar{n} =$$

$$= \left[\bar{r}_{uu}^{//} \cdot \left(u_s^{/}\right)^2 + 2\bar{r}_{uv}^{//} \cdot u_s^{/} \cdot v_s^{/} + \bar{r}_{vv}^{//} \cdot \left(v_s^{/}\right)^2 + \bar{r}_u^{/} \cdot u_{ss}^{//} + \bar{r}_v^{/} \cdot v_{ss}^{//}\right]\bar{n} =$$

$= ($т.к. $\bar{n} \perp \bar{r}_u^{/}$ и $\bar{n} \perp \bar{r}_v^{/}$ $) =$

$$=\left(\bar r''_{uu}\cdot\bar n\right)\frac{(du)^2}{(ds)^2}+2\left(\bar r''_{uv}\cdot\bar n\right)\frac{du}{ds}\cdot\frac{dv}{ds}+\left(\bar r''_{vv}\cdot\bar n\right)\frac{(dv)^2}{(ds)^2}=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{(ds)^2}.$$

Так как в точке $P(u,v)$ кривой γ

$$(ds)^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$

то окончательно получим

$$\left(\bar r''_{ss}\cdot\bar n\right)=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}=\frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Таким образом, формула (10) примет вид

$$k_1\cos\theta=\frac{\varphi_2}{\varphi_1}. \qquad (11)$$

Правая часть этого равенства зависит только от направления $(du:dv)$ кривой в точке $P(u,v)$ (поскольку все функции E,F,G,L,M,N вычислены в точке $P(u,v)$). Таким образом, $k_1\cos\theta=k_0=const$ в точке $P(u,v)$ для всех кривых γ, проходящих через эту точку и имеющих в ней одно и то же направление (т.е. одну и ту же касательную). Равенство

$$k_1\cos\theta=k_0=const \qquad (12)$$

составляет содержание теоремы Менье.

Величина k_0 называется нормальной кривизной поверхности в данном направлении $(du:dv)$. С точностью до знака она равна кривизне кривой, которая получается в сечении поверхности с плоскостью, перпендикулярной касательной плоскости и содержащей направление $(du:dv)$.

5.3 Индикатриса Дюпена. Главные направления и главные кривизны

Рассмотрим вновь регулярную поверхность Φ, заданную уравнением $\bar r=\bar r(u,v)$ и точку $P(u,v)$ на ней. Построим в точке P касательную плоскость поверхности Φ и отложим в этой плоскости от точки P в каждом направлении $(du:dv)$ отрезок длины $\left|\frac{1}{k}\right|^{\frac{1}{2}}$, где k - нормальная кривизна поверхности в точке $P(u,v)$ в этом направлении. Линия, образованная концами этих отложенных отрезков, называется индикатрисой кривизны (или индикатрисой Дюпена) поверхности Φ в точке P. Свойство этой кривой согласно построению следующее: квадрат любого ее радиус-вектора дает величину, обратную кривизне того нормального сечения, для которого взятый радиус-вектор является вектором касательной.

Исследуем индикатрису Дюпена. Для этого на касательной плоскости поверхности в точке P введем декартову систему координат, приняв точку P за начало координат, а векторы $\bar{r}_u^{/}$ и $\bar{r}_v^{/}$ - за базисные векторы осей координат. Пусть x, y - координаты точки индикатрисы Дюпена, отвечающей направлению $(du : dv)$. Тогда

$$x\bar{r}_u^{\ /} + y\bar{r}_v^{\ /} = \left|\frac{1}{k}\right|^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{r}_u^{\ /}du + \bar{r}_v^{\ /}dv}{\left|\bar{r}_u^{\ /}du + \bar{r}_v^{\ /}dv\right|}.$$

Возведем последнее равенство в квадрат: поскольку $x : y = du : dv$, то получим

$$Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = \frac{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}{\left|Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2\right|} = \frac{Ex^2 + 2Fxy + Gy^2}{\left|Lx^2 + 2Mxy + Ny^2\right|}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\left|Lx^2 + 2Mxy + Ny^2\right| = 1.$$

Получили уравнение индикатрисы Дюпена. Из этого уравнения видно, что индикатриса Дюпена представляет: эллипс – в эллиптической точке $(LN - M^2 > 0)$, пару сопряженных гипербол - в гиперболической точке $(LN - M^2 < 0)$, пару параллельных прямых - в параболической точке $(LN - M^2 = 0,\ L^2 + N^2 \neq 0)$.

О п р е д е л е н и е. Направление $(du : dv)$ на поверхности называется главным направлением, если нормальная кривизна поверхности в этом направлении достигает экстремального значения.

О п р е д е л е н и е. Экстремальные значения нормальных кривизн называют главными кривизнами (и обозначают k_1 и k_2).

Пусть $(x : y)$ - произвольное направление в точке P поверхности Φ, $k = k(x, y)$ - нормальная кривизна поверхности в точке P в этом направлении. Тогда

$$k(x, y) = \frac{Lx^2 + 2Mxy + Ny^2}{Ex^2 + 2Fxy + Gy^2}. \tag{13}$$

Положим $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$, получим

$$k = k(\varphi) = \frac{L\cos^2\varphi + 2M\cos\varphi\sin\varphi + N\sin^2\varphi}{E\cos^2\varphi + 2F\cos\varphi\sin\varphi + G\sin^2\varphi}.$$

Функция $k = k(\varphi)$ непрерывна и $k(0) = k(2\pi)$. Поэтому на отрезке $[0,2\pi]$ она либо постоянна, либо имеет хотя бы один максимум и хотя бы один минимум.

Для нахождения главных направлений и главных кривизн запишем соотношение (13) в виде

$$(L - kE)x^2 + 2(M - kF)xy + (N - kG)y^2 = 0 \qquad (14)$$

и продифференцируем это равенство по x. Учитывая, что производная нормальной кривизны в главном направлении равна нулю, получим

$$(L - kE)x + (M - kF)y = 0\,. \qquad (15)$$

Аналогично дифференцируя (14) по y, имеем

$$(M - kF)x + (N - kG)y = 0 \qquad (16)$$

Рассматривая соотношения (15), (16) как систему уравнений относительно неизвестных x, y и учитывая, что эта система имеем ненулевые решения, заключаем, что

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель в этом равенстве, получим следующее уравнение для кривизн главных направлений:

$$(EG - F^2)k^2 - (EN + LG - 2MF)k + LN - M^2 = 0. \qquad (17)$$

О п р е д е л е н и е. Линия на поверхности называется линией кривизны, если ее направление в каждой точке является главным направлением.

Для того чтобы направление $(du : dv)$ было главным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения (см. (15) и (16)):

$$(L - kE)du + (M - kF)dv = 0,$$
$$(M - kF)du + (N - kG)dv = 0,$$

где k - кривизна нормального сечения поверхности в направлении $(du : dv)$.

Исключая из последних соотношений k, получим:

$$(LF - ME)du^2 + (LG - NE)dudv + (MG - NF)dv^2 = 0$$

или что то же самое

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \qquad (18)$$

Итак, соотношение (18) дает необходимое и достаточное условие того, чтобы направление $(du:dv)$ было главным направлением. Соотношение (18) можно также рассматривать как дифференциальное уравнение линии кривизны.

Отметим, что в каждой точке регулярной поверхности может быть либо два главных направления, либо любое направление является главным. В первом случае главные направления совпадают с направлениями осей индикатрисы Дюпена. Во втором случае рассматриваемая точка поверхности является либо точкой уплощения (нормальная кривизна в этой точке в любом направлении равна нулю), либо шаровой точкой (индикатриса Дюпена в такой точке представляет собой окружность). Во втором случае, в уравнении (18), выполняющемся тождественно, либо $L = M = N = 0$ (точка уплощения), либо коэффициенты первой квадратичной формы E, F, G соответственно пропорциональны коэффициентам второй квадратичной формы L, M, N (шаровая точка).

5.4 Гауссова и средняя кривизны

Пусть k_1 и k_2 - главные кривизны регулярной поверхности в точке $P(u,v)$.

О п р е д е л е н и е. Полусумма главных кривизн называется средней кривизной поверхности и обозначается $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$. Произведение главных кривизн называется полной или гауссовой кривизной и обозначается $K = k_1 \cdot k_2$.

Поскольку главные кривизны удовлетворяют уравнению (17), то в силу теоремы Виета

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{EN + LG - 2MF}{EG - F^2}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Рассмотрим гауссову кривизну K поверхности. Знаменатель $EG - F^2$ всегда положителен, т.к. это дискриминант первой квадратичной формы. Поэтому знак K определяется знаком дискриминанта второй квадратичной формы $LN - M^2$. Поэтому

$K>0$ в эллиптических точках,

$K<0$ в гиперболических точках,

$K=0$ в параболических точках и в точках уплощения.

П р и м е р 24. Найти главные кривизны поверхности $x=u,\ y=v,\ z=u^2+v^2$ в точке $P(1{,}1)$.

Р е ш е н и е

Имеем

$$\bar r=\left(u,v,u^2+v^2\right),\ \bar r_u'=(1{,}0{,}2u),\ \bar r_v'=(0{,}1{,}2v),$$

$$\bar r_{uu}''=(0{,}0{,}2),\quad \bar r_{uv}''=(0{,}0{,}0),\quad \bar r_{vv}''=(0{,}0{,}2).$$

В точке $P(1{,}1)$ коэффициенты квадратичных форм равны

$$E=\left(\bar r_u'\right)^2=5,\ F=\bar r_u'\bar r_v'=4,\ G=\left(\bar r_v'\right)^2=5,\ L=\frac{\left(\bar r_{uu}''\bar r_u'\bar r_v'\right)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}0&0&2\\1&0&2\\0&1&2\end{vmatrix}=\frac{2}{3},$$

$$M=\frac{\left(\bar r_{uv}'',\bar r_u',\bar r_v'\right)}{\sqrt{EG-F^2}}=0,\ N=\frac{\left(\bar r_{vv}'',\bar r_u',\bar r_v'\right)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}0&0&2\\1&0&2\\0&1&2\end{vmatrix}=\frac{2}{3}.$$

Тогда $k_1\cdot k_2=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=\dfrac{4}{81},\ k_1+k_2=\dfrac{LG+EN-2MF}{EG-F^2}=\dfrac{20}{27}.$

Отсюда по теореме Виета k_1 и k_2 – корни уравнения $k^2-\dfrac{20}{27}k+\dfrac{4}{81}=0.$

Решая это уравнение, получим $k_1=\dfrac{2}{3},\ k_2=\dfrac{2}{27}.$

5.5 Примеры поверхностей постоянной гауссовой кривизны

Поверхностями постоянной гауссовой кривизны называются поверхности, во всех точках которых полная кривизна K постоянна. Простейшим примером поверхности постоянной полной кривизны является плоскость, поскольку во всех точках плоскости выполнено $K=0$. Рассмотрим более сложные примеры поверхностей постоянной полной кривизны. Эти примеры будут построены с помощью поверхностей вращения. Поверхностью вращения будем называть поверхность, которая образуется при вращении плоской кривой около прямой (оси вращения), лежащей в плоскости кривой. Линии пересечения поверхности с плоскостями, содержащими ось вращения, называются меридианами поверхности вращения, а линии пересечения с плоскостями, перпендикулярными оси вращения, называются параллелями. Зададим прямоугольную систему $Oxyz$. На плоскости xOz рассмотрим кривую γ, заданную уравнениями

$$x=\varphi(u),\ \mathrm{z}=\psi(u),\ u_1\le u\le u_2.$$

Найдем уравнение поверхности, полученной при вращении γ вокруг оси Oz. Точка $(\varphi(u),0,\psi(u))$ кривой γ при повороте кривой на угол v переходит в точку $(\varphi(u)\cos v,\varphi(u)\sin v,\psi(u))$. Отсюда уравнение поверхности вращения имеет вид

$$\bar{r}=(\varphi(u)\cos v,\varphi(u)\sin v,\psi(u)),\ \ u_1\le u\le u_2,\ \ 0\le v\le 2\pi.$$

Отметим, что линии $v=const$ являются меридианами, а линии $u=const$ -параллелями построенной поверхности вращения.

Найдем первую и вторую квадратичные формы поверхности. Для этого найдем координаты частных производных вектор-функции $\bar{r}$:

$$\bar{r}_u^{/}=\left(\varphi^{/}\cos v,\varphi^{/}\sin v,\psi^{/}\right),\bar{r}_v^{/}=\left(-\varphi\sin v,\varphi\cos v,0\right),\ \bar{r}_{uu}^{//}=\left(\varphi^{//}\cos v,\varphi^{//}\sin v,\psi^{//}\right),$$

$$\bar{r}_{uv}^{//}=\left(-\varphi^{/}\sin v,\varphi^{/}\cos v,0\right),\ \ \bar{r}_{vv}^{//}=\left(-\varphi\cos v,-\varphi\sin v,0\right).$$

Отсюда

$$E=\varphi^{/^2}+\psi^{/^2},\ F=0,\ G=\varphi^2,\ \sqrt{EG-F^2}=\sqrt{EG}=\sqrt{\varphi^{/^2}+\psi^{/^2}}\,|\varphi|,$$

а также

$$L=\frac{\left(\bar{r}_{uu}^{//}\bar{r}_u^{/}\bar{r}_v^{/}\right)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{\begin{vmatrix}\varphi^{//}\cos v & \varphi^{//}\sin v & \psi^{//}\\ \varphi^{/}\cos v & \varphi^{/}\sin v & \psi^{/}\\ -\varphi\sin v & \varphi\cos v & 0\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{\varphi\left(\psi^{//}\varphi^{/}-\psi^{/}\varphi^{//}\right)}{\sqrt{\varphi^{/^2}+\psi^{/^2}}\,|\varphi|},$$

$$M=\frac{\left(\bar{r}_{uv}^{//}\bar{r}_u^{/}\bar{r}_v^{/}\right)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{\begin{vmatrix}-\varphi^{/}\sin v & \varphi^{/}\cos v & 0\\ \varphi^{/}\cos v & \varphi^{/}\sin v & \psi^{/}\\ -\varphi\sin v & \varphi\cos v & 0\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}=0,$$

$$N=\frac{\left(\bar{r}_{vv}^{//}\bar{r}_u^{/}\bar{r}_v^{/}\right)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{\begin{vmatrix}-\varphi\cos v & -\varphi\sin v & 0\\ \varphi^{/}\cos v & \varphi^{/}\sin v & \psi^{/}\\ -\varphi\sin v & \varphi\cos v & 0\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{\varphi^2\psi^{/}}{\sqrt{\varphi^{/^2}+\psi^{/^2}}\,|\varphi|}.$$

Таким образом, первая и вторая квадратичные формы поверхности вращения соответственно равны

$$\varphi_1=\left(\varphi^{/^2}+\psi^{/^2}\right)du^2+\varphi^2dv^2,$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi\left(\psi^{//}\varphi^{/} - \psi^{/}\varphi^{//}\right)}{\sqrt{\varphi^{/^2} + \psi^{/^2}}\,|\varphi|} du^2 + \frac{\varphi^2\psi^{/}}{\sqrt{\varphi^{/^2} + \psi^{/^2}}\,|\varphi|} dv^2.$$

Гауссова кривизна K поверхности вращения равна

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\left(\psi^{//}\varphi^{/} - \psi^{/}\varphi^{//}\right)\psi^{/}}{\left(\varphi^{/^2} + \psi^{/^2}\right)^2 \varphi}. \qquad (19)$$

Пусть кривая γ задана уравнениями $x = u,\ \mathrm{z} = \psi(u).$ Тогда, в силу формулы (19), полная кривизна поверхности, полученной при вращении γ вокруг оси Oz, равна

$$K = \frac{\psi^{//}\psi^{/}}{\left(1 + \psi^{/^2}\right)^2 u}. \qquad (20)$$

Найдем функцию $\psi(u),$ удовлетворяющую (19) при постоянном значении $K.$ Умножая обе части (20) на u и интегрируя полученное равенство, имеем:

$$Ku^2 + C = -\left(1 + \psi^{/^2}\right)^{-1}. \qquad (21)$$

Рассмотрим два случая: $K > 0$ и $K < 0.$

Пусть $K > 0$. Положим в (21) $C = -1$ и разрешим полученное уравнение относительно $\psi^{/}$:

$$\psi^{/} = \pm\frac{\sqrt{K}u}{\sqrt{1 - Ku^2}}.$$

Интегрируя последнее равенство, получим $\psi = \pm\sqrt{\frac{1}{K} - u^2}$. Положим $K = \frac{1}{a^2},\ a > 0.$ Тогда $\psi = \pm\sqrt{a^2 - u^2}$ - уравнение полуокружности радиуса $a.$

Таким образом, найденная нами поверхность получается вращением полуокружности $x = u,\ \mathrm{z} = \pm\sqrt{a^2 - u^2},\ 0 \le u \le a$ вокруг оси Oz и является сферой радиуса $a.$

Пусть $K < 0$. Положим в (21) $C = 0$ и разрешим полученное уравнение относительно $\psi^{/}$:

$$\psi^{/} = \pm\frac{1}{\sqrt{-K}} u^{-1}\left(1 + Ku^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Интегрируя последнее равенство, получим:

$$\psi = \pm\frac{1}{\sqrt{-K}}\int u^{-1}\left(1+Ku^2\right)^{\frac{1}{2}}du = \left\|\begin{matrix}1+Ku^2=t^2\\ Kudu=tdt\end{matrix}\right\| = \pm\frac{1}{\sqrt{-K}}\int\frac{t^2}{t^2-1}dt =$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{-K}}\left(t-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{-K}}\left(\sqrt{1+Ku^2}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+Ku^2}}{\sqrt{-K}u}\right|\right).$$

Положим $K=-a^{-2},\ a>0.$ Тогда

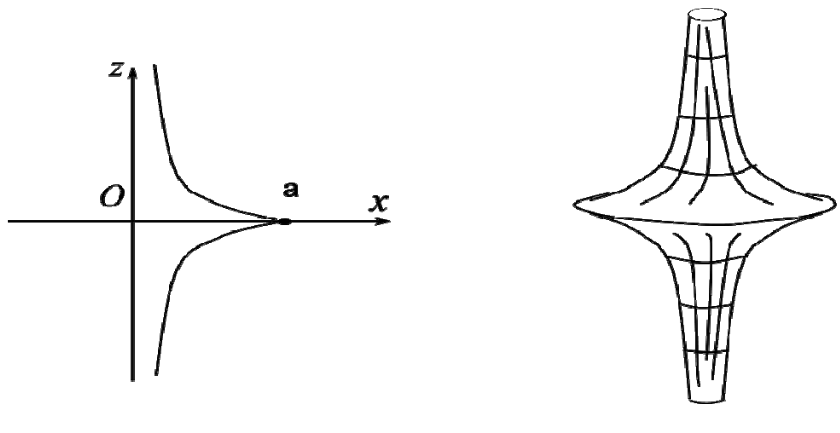
$$\psi = \pm\left(\sqrt{a^2-u^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right).$$

Полученная кривая

$$x=u,\ z=\pm\left(\sqrt{a^2-u^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right)$$

называется трактрисой. Отличительной ее особенностью является то, что отрезок касательной от точки касания до оси Oz постоянен и равен a.

Поверхность, получаемая вращением трактрисы вокруг оси Oz, называется псевдосферой. Следующие рисунки дают представление о трактрисе и псевдосфере (рисунок 18):



(а) (б)

Рисунок 18 – Трактриса (а) и псевдосфера (б)

В заключение отметим, что важным свойством гауссовой кривизны K является то, что она не изменяется при изгибании поверхности (т.е. при непрерывной ее деформации, сохраняющей длины кривых на поверхности). Отсюда, в частности, следует, что на плоскость (в каждой точке которой $K=0$) можно наложить только поверхность, в каждой точке которой $K=0$. Поэтому, например, нельзя изготовить карту Земли, сохранив расстояния.

6 Внутренняя геометрия поверхностей

Внутренней геометрией поверхности называют раздел геометрии, изучающий те свойства поверхности, которые определяются только длинами, лежащих на ней кривых.

По отношению к регулярным поверхностям можно сказать, что их внутренняя геометрия изучает свойства поверхностей и фигур на них, определяемые первой квадратичной формой.

Объектами внутренней геометрии являются длины кривых на поверхности, углы между кривыми, площади областей. Гауссова кривизна поверхности также является объектом внутренней геометрии. Это вытекает из следующей теоремы.

Т е о р е м а (Г а у с с а). Полная кривизна K поверхности в точке может быть выражена через коэффициенты первой квадратной формы поверхности и их производные в этой точке.

Рассмотрим некоторые другие объекты внутренней геометрии.

6.1 Геодезическая кривизна. Геодезические линии на поверхности

Пусть Φ - произвольная регулярная поверхность и γ - регулярная кривая, лежащая на поверхности Φ. Пусть P - произвольная точка кривой γ. Проведем к поверхности Φ в точке P касательную плоскость α и обозначим через $\tilde{\gamma}$ проекцию кривой γ на плоскость α (рисунок19).

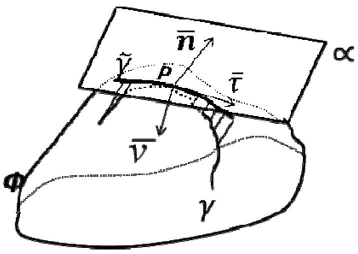


Рисунок 19 – Геодезическая кривизна кривой

О п р е д е л е н и е. Геодезической кривизной кривой γ в точке P называется кривизна ее проекции $\tilde{\gamma}$ в точке P.

Придадим геодезической кривизне знак, считая ее положительной (отрицательной), если при прохождении точки P вращение касательной к кривой $\tilde{\gamma}$ с направлением нормали к поверхности образует правый (левый) винт.

Для нахождения геодезической кривизны проведем через кривую γ цилиндрическую поверхность G, образующие которой перпендикулярны касательной плоскости α. Из построения ясно, что $\gamma, \tilde{\gamma} \in G$. Понятно также, что кривые γ и $\tilde{\gamma}$ имеют в точке P общую касательную прямую. Так как плоскость α перпендикулярна образующим поверхности G, то α содержит вектор нормали поверхности G в точке P и следовательно является нормальной плоскостью к G в точке P. Таким образом, кривые γ и $\tilde{\gamma}$ лежат на поверхности G, имеют в точке P общую касательную, причем $\tilde{\gamma}$ является нормальным сечением поверхности G в точке P. Поэтому, в силу теоремы Менье, кривизны χ и k соответственно кривых $\tilde{\gamma}$ и γ в точке γ связаны соотношением

$$|\chi| = |k\cos\theta|,$$

где θ - угол между главными нормалями этих кривых.

Пусть $\bar{r} = \bar{r}(s)$ - естественная параметризация кривой γ; $\bar{\tau}, \bar{\nu}$ - единичные векторы соответственно касательной и главной нормали кривой γ в точке P; $\bar{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности Φ в точке P. Кривая $\tilde{\gamma}$ лежит в плоскости α, поэтому $\bar{\tau}\times\bar{n}$ - единичный вектор главной нормали кривой $\tilde{\gamma}$ в точке P. Отсюда, в силу равенства $\bar{\nu} = \frac{1}{k}\bar{r}_{ss}^{//}$, получим

$$|\chi| = |k\cos\theta| = |k\bar{\nu}(\bar{\tau}\times\bar{n})| = |(\bar{r}_{ss}^{//}, \bar{r}_s^{/}, \bar{n})|. \qquad (22)$$

Найдем выражение для геодезической кривизны в случае произвольной параметризации $\bar{r} = \bar{r}(t)$ кривой γ. Из равенств

$$\bar{r}_s^{/} = \bar{r}_t^{/} t_s^{/} = \bar{r}_t^{/} \frac{1}{|\bar{r}_t^{/}|},$$

$$\bar{r}_{ss}^{//} = r_{tt}^{//} \frac{1}{|\bar{r}_t^{/}|^2} + \bar{r}_t^{/}\left(\frac{1}{|\bar{r}_t^{/}|}\right)_s^{/}$$

и равенства (22) следует

$$|\chi| = \frac{|(\bar{r}_{tt}^{//}, \bar{r}_t^{/}, \bar{n})|}{|\bar{r}_t^{/}|^3}. \qquad (23)$$

О п р е д е л е н и е. Геодезической линией регулярной поверхности Φ называется регулярная линия на поверхности Φ, геодезическая кривизна которой равна нулю в каждой ее точке.

Выполняется следующее свойство геодезических линий:

1) линия γ является геодезической в том и только в том случае, если в каждой ее точке, где кривизна отлична от нуля, главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности в этой точке.

Действительно, поскольку $\bar{r}_{ss}^{//} = k\bar{v}$ и $\bar{n} \perp \bar{r}_s^{/}, \bar{v} \perp \bar{r}_s^{/},$, то в силу (22) равенство $\chi = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\bar{v} \parallel \bar{n}$ при $k \neq 0$.

Без доказательства отметим еще два свойства геодезических линий:

2) через каждую точку P поверхности по каждому направлению проходит геодезическая линия и притом единственная;

3) если P_1, P_2 - достаточно близкие точки поверхности, то наикратчайшая их соединяющая линия является геодезической линией.

Из определения геодезической линии следует, что прямые линии на плоскости являются геодезическими линиями. Из второго свойства следует, что других геодезических линий на плоскости не существует.

П р и м е р 25. Покажем, что геодезическими линиями на сфере являются только большие окружности.

Действительно, в каждой точке P такой окружности главная нормаль проходит через центр окружности, а следовательно, и через центр O сферы. Но радиус сферы OP перпендикулярен касательной плоскости к сфере в точке P. Поэтому окружности большого радиуса на сфере являются геодезическими линиями. Далее, поскольку через каждую точку сферы по любому направлению можно провести большую окружность, то из второго свойства вытекает, что геодезическими линиями на сфере являются только большие окружности.

З а м е ч а н и е. Отметим, что обращение третьего свойства геодезических линий не всегда верно: дуга геодезической линии, соединяющая две точки поверхности, не всегда является кратчайшей. Это может происходить всегда, когда геодезическая линия, соединяющая две точки, не единственная.

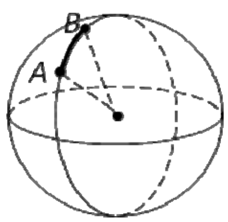


Рисунок 20 – Геодезические линии на сфере

Например, две точки сферы, не лежащие на концах одного диаметра, можно соединить двумя геодезическими линиями, одна из которой является кратчайшей из всех дуг, соединяющих эти точки (рисунок 20).

Второе и третье свойства геодезических линий позволяют заключить, что геодезические линии на поверхности являются аналогом прямых линий на плоскости. А поэтому при помощи геодезических линий на поверхности можно определить треугольник и другие фигуры. При этом в зависимости от свойств поверхности, мы, естественно, будем получать различные геометрии.

6.2 Теорема Гаусса-Бонне

Рассмотрим на регулярной поверхности Φ некоторую гомеоморфную кругу область G, ограниченную гладкими кривыми $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ внутренние углы, образуемые этими кривыми в общих концах (напомним, что угол между кривыми определяется как угол между касательными к этим кривым в их общей точке); через χ обозначим геодезическую кривизну в произвольной точке границы области G (рисунок 21). Справедлива следующая

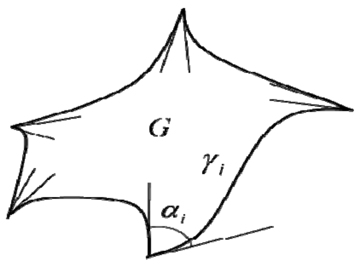


Рисунок 21 – К теореме Гаусса - Бонне

Т е о р е м а (Г а у с с а – Б о н н е).

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\gamma_i}\chi ds + \sum_{i=1}^{n}(\pi-\alpha_i) + \iint_G K d\sigma = 2\pi,$$

где K - гауссова кривизна в точке поверхности, $d\sigma$ - элемент площади поверхности.

Рассмотрим случай, когда граница области G состоит из трех геодезических линий. Такая область называется геодезическим треугольником. В этом случае в силе предыдущей теоремы получим

$$\sum_{i=1}^{3}(\pi-\alpha_i) + \iint_G K d\sigma = 2\pi.$$

Из этого равенства следует, что

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = \pi + \iint_G K d\sigma. \qquad (24)$$

Заслуживает особого внимания случай, когда рассматриваемая поверхность имеет постоянную полную кривизну, то есть $K = const$. Рассмотрим следствия из равенства (24) для таких поверхностей.

Пусть Φ - плоскость. Так как во всех точках плоскости гауссова кривизна K равна нулю, а геодезические на плоскости являются прямыми, то сумма углов любого треугольника равна π.

Пусть Φ - сфера радиуса R. Так как в точках сферы гауссова кривизна K равна $\frac{1}{R^2}$, а геодезическими линиями на сфере являются окружности больших радиусов, то сумма углов сферического треугольника равна $\pi+\frac{1}{R^2}S(G)$. Заметим, что эта сумма превосходит π и зависит от площади треугольника.

Пусть Φ - псевдосфера, гауссова кривизна K которой равна $-\frac{1}{a^2}$. Из формулы (24) вытекает, что сумма углов геодезического треугольника псевдосферы меньше π и зависит от площади этого треугольника. Отсюда вытекает, что на псевдосфере можно интерпретировать объекты геометрии Лобачевского.

З а м е ч а н и е. Оказывается, что интерпретировать плоскость Лобачевского мы можем только на малых кусках псевдосферы: на всей поверхности псевдосферы ее внутренняя геометрия не совпадает с внутренней геометрией Лобачевского. Объясняется это тем, что трактриса не является гладкой кривой (существует ребро возврата). Более того, как доказал Гильберт, плоскость Лобачевского нельзя в целом изобразить в трехмерном евклидовом пространстве.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1 Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x=u,\ y=u^2-2uv,\ z=u^3-3u^2v$ в точке $M(1,3,4)$.

Ответ: $6x+3y-2z-7=0$ - уравнение касательной плоскости, $\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-4}{-2}$ - уравнение нормали.

2 Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ в точке $M(1,0,0)$.

Ответ: $2x-z-2=0$ – уравнение касательной плоскости, $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-1}$ - уравнение нормали к поверхности.

3 Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+y^2+z^2=169$ в точке $M(3,4,12)$.

Ответ: $3x+4y+12z-169=0$ - уравнение касательной плоскости, $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12}$ - уравнение нормали.

4 К поверхности $xyz = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x + y + z - 5 = 0$.

Ответ: $x + y + z - 3 = 0$.

5 Показать, что все касательные плоскости поверхности $z = x\varphi(y/x)$ проходят через начало координат.

Указание: воспользоваться уравнением касательной плоскости к поверхности, заданной неявно.

6 Найти первую квадратичную форму поверхности вращения

$x = a\cos u \cdot \cos v,\ y = a\cos u \cdot \sin v,\ z = c\sin u$ (эллипсоид вращения).

Ответ: $\varphi_1 = (a^2\sin^2 u + c^2)\cdot du^2 + a^2\cos^2 u \cdot dv^2$.

7 На поверхности с первой квадратичной формой $ds^2 = du^2 + dv^2$ найти длину дуги линии $v = u$ между точками $M_1(1{,}1)$ и $M_2(2{,}2)$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

8 Дана поверхность $x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2,\ z = uv$ $(|u| + |v| \neq 0)$. Требуется

1) найти первую квадратичную форму поверхности,

2) вычислить длину дуги линии $v = au$ между точками ее пересечения с линиями $u = 1,\ u = 2$,

3) найти угол между линиями $v = u + 1,\ v = 3 - u$ поверхности.

Ответ: 1) $\varphi_1 = (8u^2 + v^2)\cdot du^2 + 2uv \cdot dudv + (8v^2 + u^2)\cdot dv^2$;

2) $3\sqrt{2 + a^2 + 2a^4}$; 3) $\cos\theta = \dfrac{-3}{\sqrt{41}}$.

9 Показать, что площади областей на параболоидах $z = \dfrac{a}{2}\left(x^2 + y^2\right)$, $z = axy$, проектирующиеся на одну и ту же область плоскости xOy, равны.

Указание: сравнить дискриминанты первых квадратичных форм данных поверхностей.

10 Вычислить главные кривизны поверхности $z = xy$ в точке $M(1{,}1{,}1)$.

Ответ: $k_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{9},\ k_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

11 Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $M(1{,}1{,}2)$.

Ответ: $K = \dfrac{4}{81},\ H = \dfrac{10}{27}$.

Список литературы

1 Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1969.
2 Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия. М.: Просвещение, 1975. Ч.2.
3 Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. М.: Просвещение, 1987. Ч.2.
4 Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: Первое знакомство. М.: Изд-во МГУ, 1990.
5 Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. М.: Физматгиз, 1958.
6 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1970. Ч.1.
7 Кованцов Н.И., Зражевская Г.М., Кочаровский В.Г. и др. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ: сборник задач. Киев: «Выща школа», 1989.

СОДЕРЖАНИЕ

Дифференциальная геометрия 3
1 Линии в евклидовом пространстве 3
1.1 Элементарная, простая, общая кривая 3
1.2 Регулярные кривые. Способы аналитического задания кривой 6
1.3 Элементы векторного анализа 8
1.4 Касательная к кривой. Теорема о касательной гладкой кривой 11
2 Локальные свойства кривой 17
2.1 Соприкасающаяся плоскость кривой 17
2.2 Длина дуги кривой. Естественная параметризация кривой 21
2.3 Кривизна кривой. Кручение кривой 24
2.4 Формулы Френе. Натуральные уравнения кривой 30
Задачи и упражнения для самостоятельной работы 31
3 Элементы теории поверхностей 34
3.1 Общее понятие поверхности. Элементарная, простая, общая поверхность 34
3.2 Регулярные поверхности. Способы задания поверхности 35
3.3 Касательная плоскость поверхности 36
4 Изучение поверхности с помощью первой квадратичной формы 42
4.1 Первая квадратичная форма поверхности 42
4.2 Длина кривой на поверхности 43
4.3 Угол между кривыми на поверхности 45
4.4 Площадь поверхности 47
5 Изучение поверхности с помощью второй квадратичной формы 50
5.1 Вторая квадратичная форма поверхности 50
5.2 Кривизна кривой на поверхности 51
5.3 Индикатриса Дюпена. Главные направления и главные кривизны 52
5.4 Гауссова и средняя кривизны 55
5.5 Примеры поверхностей постоянной гауссовой кривизны 56
6 Внутренняя геометрия поверхностей 60
6.1 Геодезическая кривизна. Геодезические линии на поверхности 60
6.2 Теорема Гаусса-Бонне 63
Задачи и упражнения для самостоятельной работы 64
Список литературы 66

Лугавова Валентина Дмитриевна

Лугавова Лидия Вячеславовна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Редактор О.Г. Арефьева

Подписано в печать 30.10.13	Формат 60x84 1/16	Бумага тип. №1
Печать цифровая	Усл. печ.л. 4,25	Уч.-изд.л. 4,25
Заказ 177	Тираж 100	Цена свободная

Редакционно-издательский центр КГУ.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет.