*МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ*
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Курганский государственный университет

Кафедра «Математический анализ»

# ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ДОСТИЖЕНИЙ ПО РАЗДЕЛУ «ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ»

Методические указания
для студентов I курса
специальностей 010101.65 и 050201.65

Курган 2014

Кафедра: «Математический анализ»

Дисциплина: «Математический анализ»
(специальности 010101.65, 050201.65).

Составил: доцент, канд. пед. наук А.Е. Мухин.

Составлены на основании ГОС ВПО для специальностей 010101, 050201 «Математика» (2000 г.).

Утверждены на заседании кафедры «09» сентября 2014 г.
Рекомендованы методическим советом университета «20» декабря 2013 г.

Математический анализ является одним из основных курсов в учебном плане специальностей 010101.65 «Математика» и 050201.65 «Математика с дополнительной специальностью Информатика» на факультете математики и информационных технологий

«Введение в анализ» – это фундамент, на котором строится курс математического анализа и который является базой для изучения других математических дисциплин, включенных в учебный план указанных специальностей.

Основные понятия, изучаемые во «Введении в анализ»:

- множество;
- действительное число;
- функция;
- предел;
- непрерывность.

Ниже перечислены знания, необходимые для успешного усвоения материала при изучении базовых понятий курса.

## Множество

Понятие множества, обозначение множеств; понятие элемента множества и обозначение элементов; принадлежность и непринадлежность элемента множеству, обозначение этого факта; способы задания множеств; конечные и бесконечные множества; пустое множество, подмножество данного множества, обозначение включения одного множества в другое; равенство множеств; операции над множествами: объединение, пересечение, разность, дополнение, произведение. Диаграммы Эйлера – Венна. Дополнение одного множества до другого. Принцип двойственности де Моргана. Формула включений и исключений.

## Действительное число

Рациональные числа и операции над ними; необходимость расширения множества рациональных чисел; действительные числа: аксиоматика; свойство непрерывности действительных чисел по Кантору; изображение действительного числа в виде бесконечной десятичной дроби; числовая прямая; виды промежутков на прямой; окрестность точки на прямой; верхние и нижние границы (грани) множеств на прямой; характеристическое свойство граней; существование граней, единственность граней. Модуль действительного числа и его свойства.

## Функция

Понятие функции (отображения), область определения и множество значений, обозначения их; способы задания функций; композиция функций; обратная функция; сужение функции; операции над функциями; классификация функций по аналитическим выражениям: целые рациональные, дробно-рациональные, иррациональные, алгебраические, трансцендентные; классификация функций по их свойствам: монотонные, ограниченные, четные, нечетные, периодические. Методы построения графиков функций: сдвиг, деформация, $|f(x)|$, $f(|x|)$; последовательность как частный случай функции и ее свойства. Рекуррентный способ задания последовательности: арифметическая и геометрическая прогрессии.

## Предел

Предел последовательности, геометрический смысл предела последовательности; свойства сходящихся последовательностей: бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства; теоремы об арифметических свойствах пределов последовательностей; понятие подпоследовательности, теорема о ее пределе, теорема Больцано – Вейерштрасса.

Предел функции в точке: определения на языке «последовательностей» и «ε-δ», их эквивалентность; односторонние пределы и их связь с пределом функции в точке; бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства; арифметические свойства пределов функций; замечательные пределы; раскрытие неопределенностей.

## Непрерывность

Определение непрерывности функции в точке и на множестве; свойства функций, непрерывных в точке; арифметические операции над непрерывными функциями; непрерывность композиции функций; свойства функций, непрерывных на отрезке: теоремы Больцано – Коши и Вейерштрасса, их применения.

Для проверки качества усвоения теории по каждой теме раздела используются предлагаемые тесты потому, что именно через умения наиболее полно выявляются взаимосвязи между понятиями, между свойствами объектов, описываемых с помощью основных понятий. Наиболее успешное выполнение тестов на всех уровнях возможно, если студент знает по каждой теме раздела: 1) основные понятия: определения, обозначения, геометрическую и физическую интерпретации, способы задания (I уровень); 2) операции, которые можно осуществить над основными понятиями; свойства основных понятий, выраженные в теоремах (II уровень); 3) методы и способы, используемые при проведении доказательств теорем, выражающих свойства основных понятий (III уровень); 4) применение основных понятий для решения задач, возникающих при рассмотрении теоретических и практических вопросов (IV уровень).

Умения, необходимые для успешного усвоения материала при изучении базовых понятий курса.

## Множество

Приводить примеры множеств; определять, принадлежит ли элемент множеству или не принадлежит; задать множество перечислением элементов и с помощью характеристического свойства; определять, является ли множество конечным или бесконечным; находить объединение, пересечение, дополнение одного множества до другого, декартово произведение множеств; определять включение одного множества в другое и равенство множеств; применять формулу включений и исключений для решения задач; изображать множества и операции над ними с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

## Действительное число

Определять, является ли число рациональным или иррациональным; изображать рациональные и иррациональные числа на прямой; выполнять операции над действительными числами; изображать действительные числа в виде бесконечных десятичных дробей; доказывать теорему: не существует рационального числа, квадрат которого равен двум; доказывать теорему Кантора о стягивающейся системе отрезков; строить окрестности конечной точки и символов: $+\infty$; $-\infty$; $\infty$; определять границы и грани множеств; доказывать теорему о существовании и единственности граней; доказывать свойства модуля действительного числа; применять свойства модуля при решении уравнений и неравенств, при построении графиков функций.

Функция

Определять, является ли соответствие между множествами функцией или нет; находить область определения и множество значений функции, задать функцию аналитически, таблично, графически, словесно; составить из данных функций композицию и расписать композиции на составляющие функции; по аналитическому выражению определять класс функций и строить примеры функций по их принадлежности к тому или иному классу; исследовать функции на монотонность, ограниченность, периодичность, четность, нечетность; использовать методы построения графиков заданных функций; конструировать последовательности по их свойствам; исследовать последовательности на монотонность и ограниченность; переходить от одного способа задания последовательностей к другому; находить общий член и сумму первых n членов арифметической и геометрической прогрессий; сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Предел

Записать определение предела последовательности на «языке $\varepsilon$-$n_\varepsilon$»; нахождение $n_\varepsilon$ по заданному $\varepsilon>0$; доказывать свойства последовательностей, имеющих конечный предел; приводить примеры бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей; доказывать свойства бесконечно малых последовательностей; доказывать арифметические свойства пределов последовательностей; доказывать теорему о пределе подпоследовательности сходящейся последовательности; раскрывать основные виды неопределенностей; переходить от одного способа записи предела функции в точке к другому; наглядно изображать наличие у функции предела в конечной точке, на бесконечности; наличие бесконечного предела; формулировать определение предела функции в точке по Гейне и по Коши; доказывать их эквивалентность; доказывать теорему о связи односторонних пределов и предела функции в точке; доказывать свойства функций, имеющих конечный предел в точке; приводить примеры бесконечно малых и бесконечно больших функций; доказывать свойства бесконечно малых функций; доказывать арифметические свойства пределов функций; раскрывать основные виды неопределенностей; доказывать замечательные пределы и следствия из них.

Непрерывность

Формулировать определения непрерывности в точке на «языке пределов», на «языке последовательностей», на «языке $\varepsilon$-$\delta$», на «языке приращений», на «языке окрестностей»; определять является ли функция в данной точке непрерывной или нет; определять вид разрыва функции, исследовать поведение функции в окрестности исследуемой точки; применять теоремы о непрерывных функциях для определения непрерывности функции в точке и на множестве; доказывать теоремы об арифметических свойствах непрерывных функций; о непрерывности сложной функции; о свойствах функций, непрерывных в точке; доказывать теоремы Вейерштрасса и Больцано – Коши, применять их при решении задач, при нахождении приближенного значения выделенного корня уравнения.

Исходя из знаний и умений, необходимых студенту для успешного усвоения материала при изучении базовых понятий курса, составлена система тестов достижений по введению в анализ.

Весь материал раздела «Введение в анализ» разбит на восемь тем, по каждой из которых составлены тесты четырех уровней.

I Множества и операции над ними.

II Действительные числа.

III Функция: основные понятия и классификации.

IV Построение графиков функций.

V Предел последовательности.

VI Предел функции.

VII Непрерывность функции в точке.

VIII Непрерывность функции на отрезке.

Для характеристики тестов разного уровня использована классификация, данная в разработках М.Б. Шашкиной, Л.В. Шкериной, Р.А. Майера и других преподавателей Красноярского государственного педагогического университета.

В тестах I уровня требуется выбрать из данных ответов правильный (не обязательно один!) или классифицировать предлагаемые объекты по определенным группам. Они позволяют проверить усвоение темы на уровне узнавания ее основных понятий и свойств.

Тесты II уровня содержат задачи, которые предназначены для проверки качества усвоения базовых знаний и умений по теме: знание формулировок и доказательства теорем; умение применять теорему в стандартной ситуации и т.п.

В тестах III уровня задания усложняются за счет нестандартности ситуаций, в которых требуется применять изучаемую теорию. При решении заданий этого уровня необходимо использовать некоторые эвристические приемы.

Тесты IV уровня требуют некоторого исследования, применения усвоенных знаний и умений в субъективно новой для студентов ситуации.

Преподаватель может использовать предлагаемые тесты для организации дифференцированного обучения по теме или для контроля и диагностики качества усвоения материала.

Тесты I уровня служат для подготовки студента к выполнению тестов II и III уровня, так как в них акцент сделан на основных понятиях темы, без чего дальнейшее усвоение материала невозможно.

Тесты II и III уровня содержат задачи и упражнения на выявление качества усвоения основного содержания каждой темы; по степени трудности задания II уровня примерно одинаковы, поэтому каждое из них можно оценить одним числом баллов (3 балла), по степени трудности задания III уровня также примерно одинаковы (число баллов за каждую задачу 4).

Если студент набирает при выполнении заданий II уровня 70% от числа баллов за все задания, то ему выставляется оценка «удовлетворительно», если от 80% до 90%, то выставляется оценка «хорошо».

Если при выполнении заданий III уровня студент набирает 70% от числа баллов за все задания, то ему выставляется оценка «хорошо», если более 80% − «отлично».

Задания IV уровня могут быть использованы для работы со студентами, проявляющими интерес к занятиям по математическому анализу, для подготовки к математическим олимпиадам и т.д.

Л.В. Шкерина, И.И. Тузикова, Г.А. Кацман из Красноярского государственного педагогического университета показали, что главным показателем самостоятельности студентов является присутствие в ней функции контроля за достижением поставленной цели.

Концепция познавательной деятельности П.И. Пидкасистого к основным компонентам самостоятельности студентов относит:

– умение в структуре учебной ситуации выбрать цель, увидеть задачу;

– умение подобрать, определить и применить адекватные способы действий, которые ведут к решению задачи;

– умение применять усвоенные знания и навыки в процессе практической реализации решения задачи.

Разработанные тесты достижений в изучении раздела «Введение в анализ» охватывают и помогают студенту пройти последовательно через уровни самостоятельности в познавательной деятельности от самого низкого до самого высокого.

Характеристика уровней самостоятельности познавательной деятельности дана Л.В. Шкериной, И.И. Тузиковой, Г.А. Кацман.

I уровень: студенту нужно провести решение по предложенной схеме, объяснить причины логического следования одного пункта решения из другого, применить усвоенные знания и навыки в процессе практической реализации решения задачи, т.е. осуществить контроль за правильностью выбранного метода и решения задачи;

II уровень: студенту нужно определить те действия, с помощью которых задача может быть решена указанным методом с учетом данных преподавателем рекомендаций;

III уровень: студент в соответствии с указанным методом должен выбрать действия и те известные факты, которые позволяют данным методом решить задачу, при этом расширяются возможности в применении изученного материала или в выборе метода решения;

IV уровень: студенту нужно выбрать метод решения и действия, с помощью которых, используя материал, можно решить задачу;

V уровень: студенту в условиях учебной ситуации самому нужно составить (сформулировать) задачу, найти пути ее решения и осуществить их.

# I Множества и операции над ними

## I уровень

1 Выберите из данного набора множеств конечные и бесконечные множества:

а) $M = \{1, 2, 3, ...n\}$;

б) $\boldsymbol{N}$;

в) $K = \{x \in R : x \geq -1\}$;

г) $\mathbf{Z}$;

д) $P = \left\{x \in R : 2 \leq x \leq 2\frac{1}{2}\right\}$;

е) $L = \{x \in R : x^2 + x + 1 = 0\}$;

ж) $\boldsymbol{Q}_{[0;1]}$;

з) $T = \{a, b, c, d, e\}$;

и) $\boldsymbol{R}_{(2;3)}$;

к) $B = \left\{\frac{n}{n+1}, n \in N, n = 1,2,3\right\}$.

2 Выберите из данного набора утверждений истинные:

а) $2\frac{1}{2} \in M = \{1,2,3,...n\}$;

б) $1000000 \in \boldsymbol{N}$;

в) $-2 \in K = \{x \in R : x \geq -1\}$;

г) $-1000 \notin \mathbf{Z}$;

д) $2{,}1 \in P = \left\{x \in R : 2 \leq x \leq 2\frac{1}{2}\right\}$;

е) $-\frac{1}{2} \notin L = \{x \in R : x^2 + x + 1 = 0\}$;

ж) $0{,}3333... \in \boldsymbol{Q}_{[0;1]}$;

з) $e \in T = \{a, b, c, d, e\}$;

и) $\sqrt{5} \in \boldsymbol{R}_{(2;3)}$;

к) $\frac{4}{5} \in B = \left\{\frac{n}{n+1}, n \in N, n = 1,2,3\right\}$.

3 В предложенных парах множеств укажите ту, в которой одно множество является подмножеством другого:

а) $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{d, c, e, b, a\}$;

б) $A = (a; b)$; $B = [a; b]$;

в) $A = \{x \in R : x^2 - 5x + 4 = 0\}$; $B = [1;4]$;

г) $A = \{x = 6n, n \in N\}$; $B = [x = 3n, n \in N]$;

д) А – множество треугольников на плоскости, В – множество остроугольных треугольников;

е) А – множество функций; В – множество тригонометрических функций.

4 Даны множества: $A = [1;6]$, $B = (1;8)$, $D = [0;7)$. Из предложенных множеств выберите множества, являющиеся объединением А и В, пересечением А и В и

разностью A и B, дополнением множества A до D и дополнением множества B до D, декартово произведение множеств A и B.

а) $\{1\}$;

б) $(1;\ 6]$;

в) $(6;\ 8)$;

г) $[1;\ 8)$;

д) $[0;\ 1)\cup(6;\ 7)$;

е) $\left\{(x,y)\in R^2 : \begin{cases} 1\le x\le 6 \\ 1<y<8 \end{cases}\right\}$;

ж) $[1;6)$;

з) $[6;8]$.

II уровень

1 Найдите:

а) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n};b-\frac{1}{n}\right]$;

б) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n};b+\frac{1}{n}\right)$;

в) $A\bigcap B, A\bigcup B$ и $A\setminus B$, если A – множество студентов данной группы, B – множество студентов-отличников всего факультета;

г) $A\bigcup B$ и $A\bigcap B$ если A – множество успевающих студентов группы, а B – множество студентов– отличников этой же группы;

д) $A\bigcap B$, если A – множество всех прямоугольных треугольников, B – множество всех равнобедренных треугольников;

е) $A\bigcap B$, если A = $\mathbf{Q}_{[1;5]}$, B = $\mathbf{R}_{[1;5]}$.

2 Докажите, что

а) $A\bigcap B\subseteq A\subseteq A\bigcup B$;

б) $A=B$, если $A=\{x\in R : x^2-7x+6=0\}$, $B=\{1;6\}$;

в) докажите, что множество всех корней многочлена $\psi(x)=f(x)\cdot\varphi(x)$ есть объединение корней многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$;

г) пересечение множеств действительных корней многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ с действительными коэффициентами совпадает с множеством всех действительных корней многочлена $\psi(x)=f^2(x)+\varphi^2(x)$;

д) $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$;

е) $A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$;

ж) $A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\setminus C$;

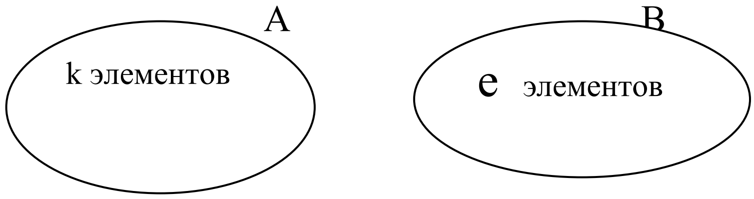
з) если $A=C_M B$, то $B=C_M A$.

3 Найдите:

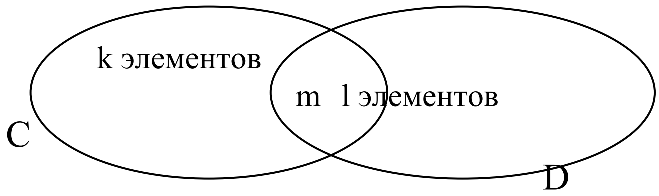
а) $n(A)$, $n(B)$, $n(A\bigcap B)$, $n(A\bigcup B)$, если $A=\{1,3,5,7,9\}$, $B=\{2,4,6,8\}$

б) $n(C)$, $n(D)$, $n(C \cap D)$, $n(C \cup D)$, если $C = \{3,6,9,12,15\}$, $D = \{2,4,6,8,10,12\}$;

в) $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cap B)$, $n(A \cup B)$, если




г) $n(C)$, $n(D)$, $n(C \cap D)$, $n(C \cup D)$, если




д) Сделайте вывод о числе элементов в объединении множеств и запишите формулы включений и исключений для двух множеств;

е) Найдите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если A – множество значений функции $f(x) = signx = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0, \end{cases}$, B – множество корней уравнения $x(x-1)(x+2) = 0$.

## III уровень

1 Истолкуйте геометрически декартово произведение $X \times Y \times Z$, если $X = \{x \in R : -1 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \in R : 0 \le y \le 3\}$, $Z = \{z \in R : -2 \le z \le -1\}$.

2 Определите, сколько учеников посещают математический и физический факультатив, если в классе 35 учащихся, из них 20 посещают математический факультатив, 11 – физический, 10 учащихся не посещают ни одного из этих факультативов.

3 Все участники туристической поездки владеют по крайней мере одним иностранным языком, причем 6 из них владеют английским языком, 6 – немецким, 7 – французским, 4 – английским и немецким, 3 – немецким и французским, 2 – французским и английским. Один турист владеет всеми тремя указанными языками. Других туристов в группе нет. Выясните, сколько туристов владеют только английским языком, только французским; сколько всего туристов в группе.

4 В течение 30 дней сентября было 12 дождливых дней, 8 ветреных, 4 холодных, 5 дождливых и ветреных, 3 дождливых и холодных, 2 ветреных и холодных, а один день был и дождливым, и ветреным, и холодным. Определите, в

течение скольких дней сентября стояла хорошая погода. Изобразите это на диаграмме Эйлера − Венна.

IV уровень

1 Приведите примеры конечных и бесконечных множеств.
2 Приведите примеры множеств, заданных перечислением элементов, и примеры множеств, заданных с помощью характеристического свойства.
3 Приведите примеры множеств, пересечение которых не пусто, и найдите число элементов в их объединении.
4 Обобщите формулу включений и исключений на случай четырех множеств.
5 Составьте задачу по данным таблицы 1 и решите ее.

Таблица 1 – Исходные данные

| $n(A)$ | $n(N)$ | $n(F)$ | $n(A\cap N)$ | $n(A\cap F)$ | $n(F\cap N)$ | $n(A\cap N\cap F)$ | $n(X)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 28 | 30 | 42 | 8 | 10 | 5 | 3 | 20 |

6 Если A – множество точек окружности, B – множество точек отрезка, то что собой представляет $A\times B$?

## II Действительные числа

I уровень

1 Из данного набора чисел выберите рациональные и иррациональные:
а) 4,131131113111131…;
б) 23,132787878…;
в) 0,375517517517…;
г) 0,1001000100001…;
д) 5,756535;
е) 345,28753;
ж) 5,3(28);
з) 12,434454443444454….

2 Укажите, какие из приведенных утверждений истинны, а какие – нет:
а) $2,(4)\in I$;
б) $\frac{3}{7}\in \mathbf{Q}$;
в) $5{,}1111\in \mathbf{R}$;
г) $\sqrt{7}\in I$;
д) $\sqrt{9}\in \mathbf{Q}$;
е) $\lg\frac{1}{10}\in \mathbf{Q}$;
ж) $\cos 60^\circ \in I$;
з) $-6.2\in \mathbf{Z}$.

3 Изобразите на координатной прямой точки, соответствующие числам:
а) 0,8(3);

б) $\sqrt{6.25}$;

в) $\sqrt{49}$;

г) $\frac{5}{7}$;

д) $-\sqrt{0.25}$

е) $\sqrt{2}$;

ж) $\sqrt{3}$;

з) $\sqrt{5}$;

и) $\sqrt{7}$.

4 Из данного набора множеств выберите ограниченные сверху, ограниченные снизу, ограниченные, неограниченные:

а) множество рациональных чисел $\frac{p}{q}$: $0 < p < q$;

б) множество рациональных чисел $\frac{p}{q}$: $0 < q < p$;

в) множество десятичных приближений $\sqrt{3}$ по недостатку;

г) множество десятичных приближений $\sqrt{3}$ по избытку;

д) множество $P = \left\{ \frac{n}{2n^3 + 1}, n \in N \right\}$;

е) множество $K = \left\{ \frac{(-1)^n + 1}{n}, n \in N \right\}$;

ж) множество периметров правильных $2^{n+1}$-угольников, вписанных в окружность радиуса r;

з) множество периметров правильных $3 \cdot 2^{n-1}$-угольников, описанных около окружности радиуса r;

и) множество объемов многогранников, вписанных в сферу радиуса R.

5 Определите, окрестностью какой точки и какого радиуса является интервал:

а) (–1; 3);

б) (1; 3);

в) (–1,2; –0,8);

г) (0,1; 0,3);

д) (2,1; 2,3);

е) (–0,1; 0,1);

ж) (4,75; 5,25);

з) (1,09; 1,11).

## II уровень

1 Найдите десятичные приближения дроби $\frac{3}{19}$ по недостатку и по избытку с точностью до 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001. Расположите их и саму дробь $\frac{3}{19}$ в порядке возрастания.

2 Обратите действительное число 0,3(2) в обыкновенную дробь.

3 Докажите, что не существует рационального числа r: $r^2 + 3r + 1 = 0$.

4 Докажите, что множество $P = \left\{ \frac{n^2}{n+1}, n \in N \right\}$ ограничено снизу и не является ограниченным сверху. Укажите его точную нижнюю границу.

5 Докажите, что $|x| = |-x|$ для любого $x \in R$.

6 Докажите теорему Кантора о стягивающихся отрезках.

## III уровень

1 Решите уравнения:

а) $3x^2 + x - 5 = 0$;

б) $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$;

в) $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$;

г) $5^x + 7^x = 12$;

д) $(1.25)^{1-\log_2^2 x} = (0.64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}$

и укажите, рациональны или иррациональны корни каждого из них.

2 Укажите, какие из чисел, приведенных в перечне, могут оказаться рациональными, если $\alpha$ и $\beta$ – иррациональные числа, а r – рациональное число:

а) $\alpha + \beta$;

б) $\sqrt{\alpha}$;

в) $\sqrt{r}$;

г) $\alpha \cdot \beta$;

д) $\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}$;

е) $\sqrt{r + \sqrt{\alpha}}$.

3 Запишите, используя обозначение окрестности точки в виде интервала, утверждение:

а) расстояние между точками x и − 2 меньше 0,9;

б) расстояние между точками x и 0,1 меньше $\frac{2}{5}$;

в) расстояние между точками x и 1 меньше $\frac{\delta}{4}$;

г) расстояние между точками x и $-\frac{1}{2}$ меньше $0{,}1\,\varepsilon$.

4 Запишите, используя неравенство со знаком модуля, окрестности точек:

а) 2,1 радиуса 0,2;
б) 2,3 радиуса 0,01;
в) $-0,2$ радиуса 1;
г) 0 радиуса $\frac{2}{5}$;
д) 2 радиуса $\varepsilon$;
е) $-1$ радиуса $\frac{\delta}{2}$.

5 Решите уравнения:
а) $|2x+3| = x^2$;
б) $|\cos x| - \cos x - 3 = 0$;
в) $\left|x^2 - 5x + 6\right| = -\left(x^2 - 5x + 6\right)$.

6 Решите неравенства:
а) $\left|\frac{x}{x+1}\right| > \frac{x}{x+1}$;
б) $|x+2| + |x-2| \geq 12$;
в) $\frac{x^2 - |x| - 12}{x-3} > 1$.

<u>IV уровень</u>

1 Докажите, что числа:
а) sin 10°;
б) cos 20°;
в) tg 1°.
являются иррациональными.

2 Докажите, что между любыми различными действительными числами найдутся как рациональные, так и иррациональные числа.

3 Упростите выражения:
а) $\sqrt{(a-2)^2}$ при а < 2:
б) $\sqrt{4 - 4x + x^2}$ при x < 2;
в) $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$ при x > 3.

4 Решите неравенство: $|x-2| + |x+3| + |2x-1| < 10$.

## III Функция: основные понятия и классификации

<u>I уровень</u>

1 Из предложенного набора соответствий между элементами двух множеств выберите соответствия, являющиеся функциями и не являющиеся функциями:
а) X – множество всех треугольников на плоскости, У – множество всех окружностей, f: каждому треугольнику х ставится в соответствие вписанная в него окружность у;

б) X – множество точек верхней полуокружности $x^2 + y^2 = 4$, Y – множество точек диаметра, на который полуокружность опирается, $f_1$: каждой точке М (x, y) полуокружности ставится в соответствие ее ортогональная проекция на диаметр;

в) Y – множество выпуклых четырехугольников на плоскости, T – множество точек этой плоскости, g : четырехугольнику ставится в соответствие точка пересечения его диагоналей.

г) O – множество окружностей на плоскости, K – множество касательных к окружностям, g: каждой окружности сопоставляется касательная;

д) П – множество параллелограммов на плоскости; R – множество действительных чисел, $g_1$: каждому параллелограмму сопоставляется его площадь;

е) h: выпуклому четырехугольнику на плоскости сопоставляется центр окружности, не пересекающейся с его сторонами;

ж) $h_1$: выпуклому четырехугольнику сопоставляется центр описанной около него окружности;

з) $h_2$: выпуклому четырехугольнику сопоставляется центр вписанной в него окружности;

и) $h_3$: каждому треугольнику сопоставляется центр описанной около него окружности;

к) $l_1$: каждому натуральному числу n ставится в соответствие число $n^2$;

л) $l_2$: каждому натуральному числу n ставится в соответствие число 5;

м) $l_3$: каждому натуральному числу n ставится в соответствие число $\frac{1}{n}$.

2 Дана функция $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$. Найдите:

а) $f(a+4)$;

б) $f(a)+4$;

в) $4f(a)+1$;

г) $f(a^2+1)$;

д) $f^2(a)+1)$;

е) $f(a+3b)$;

ж) $f(a)+3f(b)$;

з) $f(n) = \frac{5n+2}{4+n}$, найдите $f(3)$.

3 Найдите $D(f)$:

а) $f(x) = \frac{[x]}{x+1}$;

б) $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt[4]{x+1}$;

в) $f(x) = \frac{\lg 3x}{(x-3)\lg(x-1)}$;

г) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$;

д) $f(x)=\sqrt{\sin x-\dfrac{1}{2}}$.

4 Найдите *E(f):*

*а)* $f(x)=1-x^2$*;*

*б)* $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$*;*

*в)* $f(x)=\lg(1-x)$*;*

*г)* $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x$*;*

*д)* $f(x)=2^{x-1}$.

5 Для следующих пар функций найдите композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ :

а) $f(x)=2x$, $g(x)=x+1$;

б) $f(x)=x+2$, $g(x)=x+3$;

в) $f(x)=|x|$, $g(x)=1-x$;

г) $f(x)=\lg x$, $g(x)=\sqrt{x}$;

д) $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+1}$, $g(x)=\lg x$;

е) $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sqrt[3]{x}$.

6 Из предложенного набора функций выберите функции, имеющие обратную, и функции, не имеющие обратной:

а) $f(x)=\dfrac{1}{2}x-3$;

б) $f(x)=|x-2|$;

в) $f(x)=\begin{cases}-2x, x\le 0,\\ 1-x, x>0;\end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases}x, x\le 0,\\ 3x, x>0;\end{cases}$

д) $f(x)=\dfrac{4-x}{3+x}, x\ne 3$;

е) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}, x\ne 2$.

7 Выберите из предложенных функций:

а) четные и нечетные;

б) монотонные;

в) периодические;

г) ограниченные;

если $f(x)=x^2-2;\ g(x)=\dfrac{|x|}{x};\ h(x)=\sqrt{x};$

$$f_1(x)=\frac{(x-1)x^2}{x-1};\ f_2(x)=\cos^3 x;\ f_3(x)=\sin(x+1);$$

$$g_1(x)=tgx;\ g_2(x)=[x];\ g_3(x)=\{x\};$$

$$h_1(x)=\frac{1}{x^2-4}, x\in[-1;1];\ f(n)=\frac{1}{n+3}.$$

8 Из представленного набора функций выберите:

а) целые рациональные;

б) дробно-рациональные;

в) иррациональные;

г) алгебраические;

д) трансцендентные, если

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2-4};\ g(x)=3x^2-8x+1;\ h(x)=\frac{\sqrt{x+1}+1}{1-\sqrt{x+2}};$$

$$f_1(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2};\ f_2(x)=\log_3(x+2);\ f_3(x)=tg2x.$$

## II уровень

1 Докажите, что функции тождественны, если:

а) $f(x)=|2-x|+|x+1|$,

$$\varphi(x)=\begin{cases}-2x+1, x\le -1\\ 3, -1<x\le 2\\ 2x-1, x>2;\end{cases}$$

б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, x\ne 0,\\ 0, x=0,\end{cases}$

$\varphi(x)=signx;$

в) $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+|x|\right),$

$$\varphi(x)=\begin{cases}x, x\ge 0,\\ 0, x<0;\end{cases}$$

г) $f(x)=|\sin x|$,

$$\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\bigcup\limits_{k\in Z}[2\pi k;\pi+2\pi k],\\ -\sin x, & x\in\bigcup\limits_{k\in Z}(-\pi+2\pi k;2\pi k).\end{cases}$$

2 Докажите, что каждую функцию, определенную на множестве, симметричном относительно начала координат, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

3 Докажите, что если функция f(x) возрастает на множестве X, то –f(x) убывает на нем.

4 Докажите, что функция $f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)^2$ не является периодической.

5 Докажите, что функция $f(x) = \{x\}$, $x \in (0;1)$ является ограниченной, и укажите $\inf\limits_{(0,1)} f(x)$, $\sup\limits_{(0,1)} f(x)$.

6 Докажите, что функция f(x), являющаяся периодической, не имеет обратной.

7 Исследуйте на монотонность и ограниченность функцию $f(n) = \dfrac{n^2+5}{2n^2+1}$.

<u>III уровень</u>

1 В квадрате ABCD со стороной a проведена прямая, параллельная диагонали BD. Установите зависимость между площадью отсекаемой при этом фигуры и расстоянием x от прямой до вершины A квадрата. Укажите область определения построенной функции.

2 Докажите, что функция $f(x) = c_1 \cdot 2^x + c_2 \cdot 4^x$ при любых постоянных $c_1$ и $c_2$ удовлетворяет соотношению:

$$f(x+2) - 6f(x+1) + 8f(x) = 0.$$

3 Покажите, что данное уравнение не имеет решений:

$$\lg(x-3) - \lg(1-x) = 1.$$

4 Задайте аналитически функцию, областью определения которой является множество $M = (1;2) \cup (2;+\infty)$.

5 Найдите D(f), если $f(x) = \lg(\cos \log_3 x)$.

6 Найдите функцию, обратную функции $f(x) = 3x + \sqrt{x+2}, x \geq -2$.

7 Докажите, что если $f(x)$ и $x = \varphi(t)$ – нечетные, то $f(\varphi(t))$ – четная.

8 Может ли четная функция в своей области определения быть убывающей?

9 Пусть $|f(x)|$ – периодическая функция. Следует ли отсюда, что $f(x)$ – периодическая?

10 Продолжите периодически на всю числовую прямую с периодом T=2 функцию $f(x) = x^2 + x + 1,\ 0 \leq x \leq 2$.

11 Продолжите функцию

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, \dfrac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases},$$

нечетным образом на $(-\pi;0]$.

## IV уровень

1 Приведите примеры из курсов математики и физики, иллюстрирующие функциональную зависимость переменных. Выразите одну переменную через другую и обратно. Выясните, при каких значениях одной переменной определена другая.

2 Постройте график функции $f(x) = x^2 - 2x$ и с его помощью найдите:

а) промежутки, на которых $f(x) \geq 0$;

б) промежутки, на которых $f(x) < 0$;

в) при каких значениях x f(x) убывает;

г) при каких значениях x f(x) возрастает;

д) при каких значениях x f(x) принимает наименьшее значение;

е) f(4);

ж) x, если f(x) = 3;

з) сколько действительных корней имеют уравнения:

$x^2 - 2x - 4 = 0$; $x^2 - 2x + 1 = 0$; $x^2 - 2x + 4 = 0^2$.

3 Приведите примеры функций, удовлетворяющих уравнению:

а) $f(xy) = f(x) + f(y)$;

б) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$;

в) $f(x + y) = \dfrac{f(x) + f(y)}{1 - f(x) \cdot f(y)}$.

4 Найдите $f \circ g$ и $g \circ f$, если

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leq 2, \\ 2, & |x| > 2. \end{cases}$$

5 Задайте графически несколько обратимых функций (с различным поведением), определенных на [1; 2], и с множеством значений:

а) [1; 2]; б) $[0; +\infty)$.

6 Постройте сужение функции f(x) = sin x, x $\in$ R:

а) на $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

б) на $\left[2\pi; \dfrac{5}{2}\pi\right]$;

в) на $\left\{0; \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3}{2}\pi\right\}$.

Являются ли эти сужения обратимыми функциями?

7 Приведите примеры, показывающие, что функция, являющаяся разностью двух возрастающих функций:

а) является возрастающей;

б) является убывающей;

в) не является монотонной.

8 Функция f(x) = tg x, $x \in \bigcup\limits_{k \in Z} \left( -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ возрастает на каждом интервале, входящем в область определения функции. Является ли она возрастающей на всей области определения?

9 Приведите примеры:

а) целой рациональной функции;
б) дробно-рациональной;
в) иррациональной;
г) алгебраической;
д) трансцендентной;

укажите для каждой из них область определения и множество значений.

## IV Построение графиков функций

I уровень

1 Постройте графики функций:

*а)* $f(x) = 4\text{-}x^2$ ;
*б)* $f(x) = (x - 2)^3$;
*в)* $f(x) = 3 \sin x$;
*г)* $f(x) = \cos 2x$;
*д)* $f(x) = tg\, x$;
*е)* $f(x) = 2^{x+1}$;
*ж)* $f(x) = \lg (x - 1)$;
*з)* $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;
*и)* $f(x) = \frac{1}{x+4}$;
*к)* $f(x) = ctg\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;
*л)* $f(x) = -3^x$;
*м)* $f(n) = (-1)^n + 1$;
*н)* $f(n) = 2n - 1$.

II уровень

1 Докажите, что график четной функции симметричен относительно оси OY.

2 Докажите, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

3 Докажите, что график функции –f(x) симметричен графику функции f(x) относительно оси OX.

4 Докажите, что график функции f(–x) симметричен относительно оси OУ графику функции f(x).

5 Покажите, как получается график функции |f(x)| из графика функции f(x).

6 Покажите, как получается график функции f(|x|) из графика функции f(x).

7 Определите последовательность построения графика функции Af(kx+b)+B из графика функции f(x).

## III уровень

1 Постройте графики функций:

а) $f(x)=\begin{cases}1{,}5x+3, x<0,\\ 3-2x, x\ge 0;\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}2^x, x\le 0,\\ 3\lg x, x>0;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}-\sin x, -\pi\le x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ \sin x, \dfrac{-\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x, \dfrac{-\pi}{2}\le x\le \pi;\end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases}0, x\le -1,\\ x^2-x-2, -1<x\le 2,\\ x, x>2;\end{cases}$

д) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, -3\le x<-1,\\ x^3, -1\le x\le 1,\\ \dfrac{1}{x-1}, 1<x\le 3;\end{cases}$

е) $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}} x, 0<x<3,\\ \log_2(x-2), x\ge 3;\end{cases}$

ж) $f(x)=\dfrac{x-2}{x-11};$

з) $f(x)=-2\cos(3x-\dfrac{\pi}{4}).$

## III уровень

1 Постройте графики функций:

а) f(x) = $\left|\dfrac{x-1}{3x+1}\right|;$

б) f(x) = $\left|\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\right|;$

в) f(x) = $\left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}-4\right|;$

г) f(x) = $2^{|1-x|}-3;$

д) f(x) = $|\log_2(1-x)-2|;$

е) f(x) = $|\sin x| + |\cos x|$;

ж) f(x) = $|\sin x - |\sin x||$;

з) f(x) = $\left|\cos(1-3x) - \frac{1}{2}\right|$;

и) f(x) = $\left|9 \cdot 3^{|x-1|} - 1\right|$;

к) f(x) = $\operatorname{tg}\left(\left|x - \frac{\pi}{3}\right|\right)$.

## V Предел последовательности

I уровень

1 Из предложенного набора последовательностей выберите последовательности, имеющие конечные пределы:

а) $(x_n)$, $x_n = 1 + \frac{1}{n}$;

б) $(y_n)$, $y_n = 2 - \frac{1}{n^2}$;

в) $(z_n)$, $z_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n^3}$;

г) $(a_n)$, $a_n = \frac{2n^2}{n+1}$;

д) $(b_n)$, $b_n = (-1)^{n+1}$;

е) $(c_n)$, $c_n = \frac{2n+5}{1-3n}$;

ж) $(d_n)$, $d_n = \frac{(-1)^n + 1}{n^2}$;

з) 1, 0, $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{3}$, 0, … , $\frac{1}{n}$, 0, …

2 Из предложенного набора последовательностей выберите бесконечно малые последовательности:

а) $(x_n), x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$;

б) $(y_n), y_n = \frac{1}{n}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}$;

в) $(z_n), z_n = (-1)^n \cdot n$;

г) $(a_n), a_n = q^n, |q| < 1$;

д) $(b_n), b_n = \lg\lg n$;

е) $(c_n), c_n = 2^{\sqrt{n}}$;

ж) $(d_n), d_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sin(\sqrt{\pi}\cdot\frac{\pi}{2})$;

з) $(f_n), f_n = \frac{2n+1}{n^2}$;

и) $(p_n), p_n = \frac{3n+2}{3n-1}$.

3 Укажите номер того члена последовательности, начиная с которого:

а) все члены последовательности $(x_n)$, $x_n = \frac{5n+3}{2n}$, удовлетворяют условию $|x_n - 2{,}5| < 0{,}01$;

б) все члены последовательности $(y_n)$, $y_n = \frac{3n-2}{n}$, отстоят от точки 3 на расстоянии, меньшем 0,1;

в) все члены последовательности $(z_n)$, $z_n = \frac{2n+3}{n}$ принадлежат окрестности точки 2 радиуса 0,01;

г) все члены последовательности $(t_n)$, $t_n = \frac{3n-6}{2n}$, принадлежат окрестности точки 1,5 радиуса 0,1;

д) все члены последовательности $(t_n)$, $t_n = \frac{3n-6}{2n}$, принадлежат окрестности точки $\frac{3}{2}$ радиуса 0,01.

4 Установите, какие из приведенных утверждений истинны:

а) если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет конечный предел;

б) если последовательность не монотонна, то она не имеет предела;

в) если последовательность имеет предел, то она монотонна и ограничена;

г) если последовательность не ограничена, то она не имеет предела;

д) если последовательность не имеет предела, то она не монотонна и не ограничена;

е) если последовательность имеет предел, то она монотонна;

ж) сходимость последовательности является достаточным условием её ограниченности;

з) монотонность последовательности является необходимым условием её сходимости.

## II уровень

1 Докажите единственность предела последовательности.
2 Докажите, что подпоследовательность сходящейся последовательности имеет тот же предел, что и сама последовательность.
3 В некоторой окрестности точки 3 обнаружено бесконечное число членов последовательности ($x_n$). Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$?
4 Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-7}{n} = 5$.
5 Докажите, что последовательность ($y_n$), $y_n = \frac{2n^2+1}{n^2}$, имеет конечный предел.
6 Докажите, что произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность является бесконечно малой последовательностью.
7 Докажите теорему о пределе промежуточной последовательности.
8 Докажите теорему о пределе частного двух сходящихся последовательностей.

## III уровень

1 Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+7}{1-4n} \neq 2.$
2 Дана последовательность ($x_n$). Известно, что для любого

$\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, существует N, такое, что для всех n > N выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon.$ Следует ли из этого, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?
3 Известно, что у последовательности ($x_n$) есть подпоследовательность, сходящаяся к числу $a$. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?

Приведите примеры.
4 Приведите примеры последовательностей, удовлетворяющих условиям:
а) $(x_n)$ возрастает и сходится к 1;
б) $(y_n)$ убывает и сходится к 3;
в) ($z_n$) сходится к 2 и содержит бесконечное число членов, больших 2, и бесконечное число членов, меньших 2;
г) $(t_n)$ сходится к 0 и содержит бесконечное число членов, равных 0, и бесконечное число членов, отличных от 0.
5 Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{4}{3}, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = -1.$ Найдите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n);$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n);$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}(2x_n+3y_n)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3x_n}{0{,}1\cdot y_n}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^2\cdot y_n)$.

## IV уровень

1 Вычислите пределы последовательностей:

а) $(x_n), x_n=\frac{n-1}{2n-1}\cdot\frac{2n+1}{4n+1}\cdot\frac{n^2-3n+1}{5n+1}$;

б) $(x_n),\ y_n=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}}$;

в) $(z_n), z_n=\frac{1}{n^2}(1+2+3+...+n)$;

г) $(t_n), t_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$;

д) $(s_n), s_n=\log_2(1-\frac{1}{4})+\log_2(1-\frac{1}{9})+\log_2(1-\frac{1}{16})+...+\log_2(1-\frac{1}{(n+1)^2})$;

е) $(p_n), p_n=\sqrt{2n^2+5n-1}-\sqrt{2n^2-18n+5}$;

ж) $(l_n), l_n=\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}$;

з) $(m_n), m_n=\left(\frac{1+n^2}{2+n^2}\right)^{n2+1}$.

2 Вычислите предел последовательности, если известно, что он существует:

а) $x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}, n\ge 1$;

б) $x_1=\sqrt{3}, x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}, n\ge 1$;

в) $x_1=1, x_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot x_n, n\ge 1$;

г) $x_1=\frac{1}{2}, x_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{x_n^2}{2}, n\ge 1$

3 Найдите ошибку в вычислении:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}(2n+1)=0\cdot\lim_{n\to\infty}(2n+1)=0\ .$$

4 Приведите примеры последовательностей, удовлетворяющих условиям:

а) $(x_n)$ ограничена и расходится;

б) $(y_n)$ убывает и расходится;

в) $(z_n)$ сходится и ограничена;

г) $(t_n)$ сходится и не ограничена;

д) $(c_n)$ возрастает, ограничена и расходится;

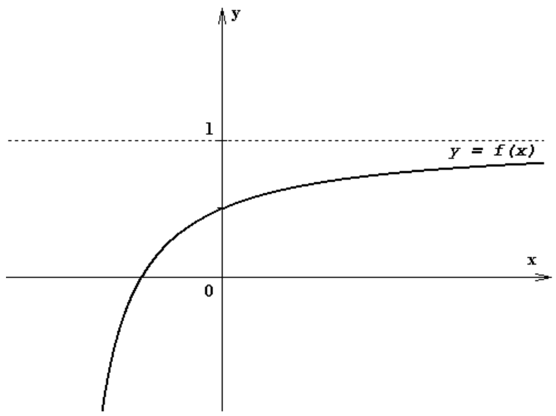
е) $(p_n)$ сходится к числу -1, а все её члены, начиная с некоторого, положительны.

## IV Предел функции в точке и на бесконечности.

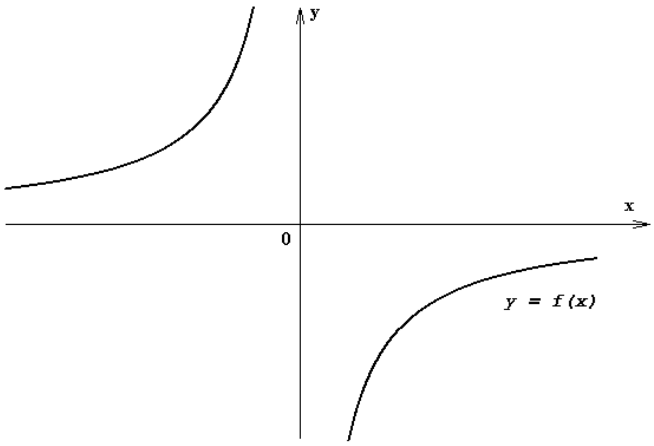
I уровень

1 Из предложенных графически заданных функций выберите те, которые имеют предел при указанном стремлении $x$:

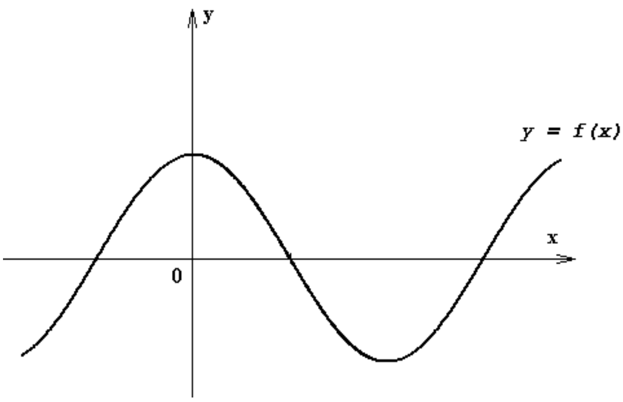
а) $x \to +\infty$



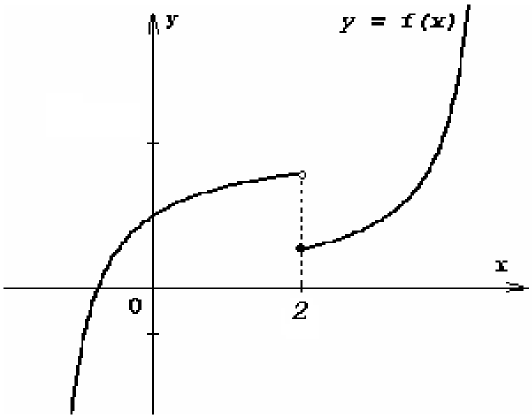

б) $x \to \infty$



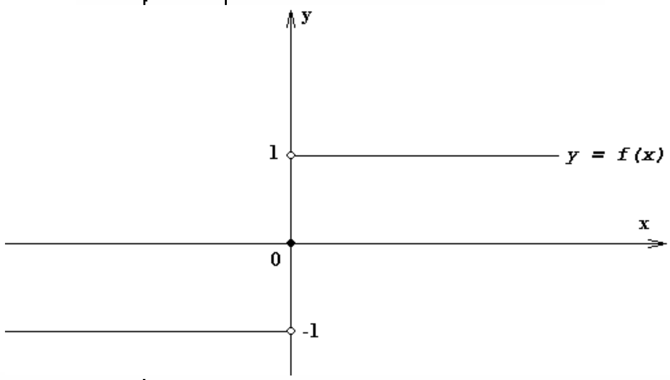

в) $x \to -\infty$



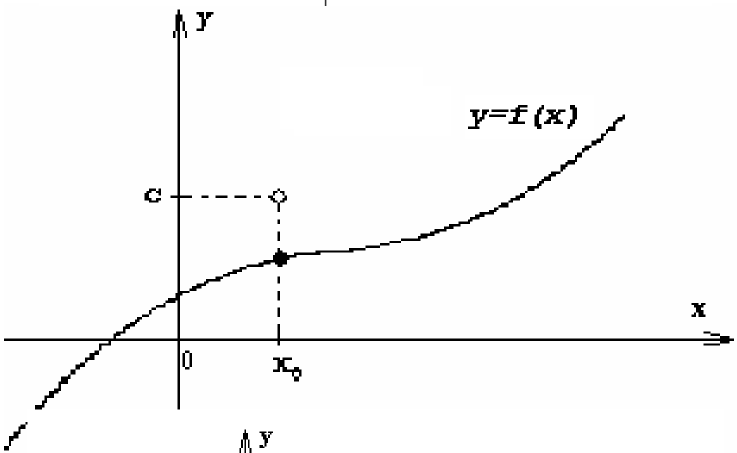
г) $x \to 2$



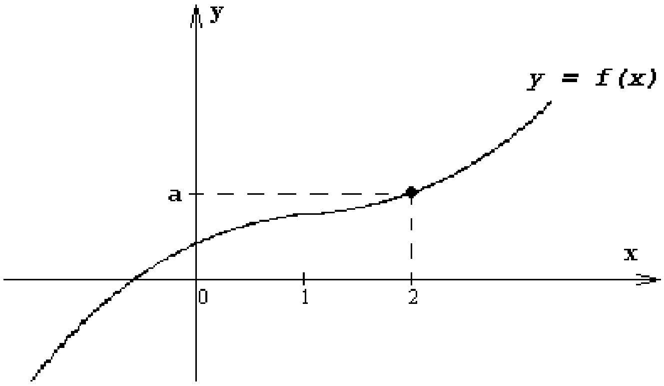

д) $x \to 0$




е) $x \to x_0$




ж) $x \to 2$




2 Из предложенных функций выберите бесконечно малые функции при указанном стремлении x:

а) f(x) = $\frac{x}{x^2+1}$, $x \to +\infty$;

б) f(x) = $2^{-x}$, $x \to -\infty$;

в) f(x) = $\log_2 x, x \to 0+$;

г) f(x) = $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}, x \to +\infty$;

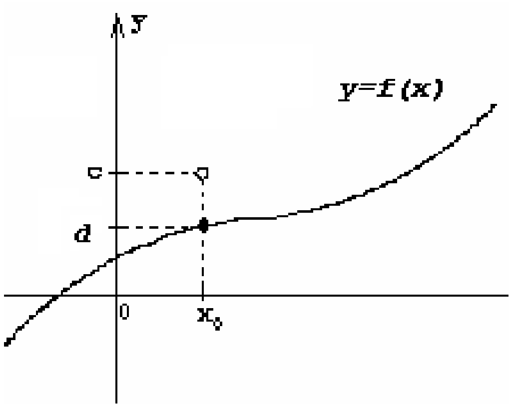
д) f(x) = $(x-2)^5, x \to 2$;

е) f(x) = $\dfrac{1}{x-2}, x \to 2$;

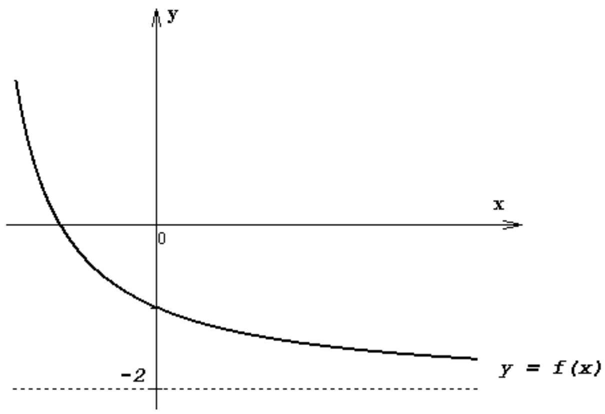
ж) f(x) = $3^x, x \to -\infty$.

3 Для предложенных рисунков запишите соответствующие предельные соотношения:

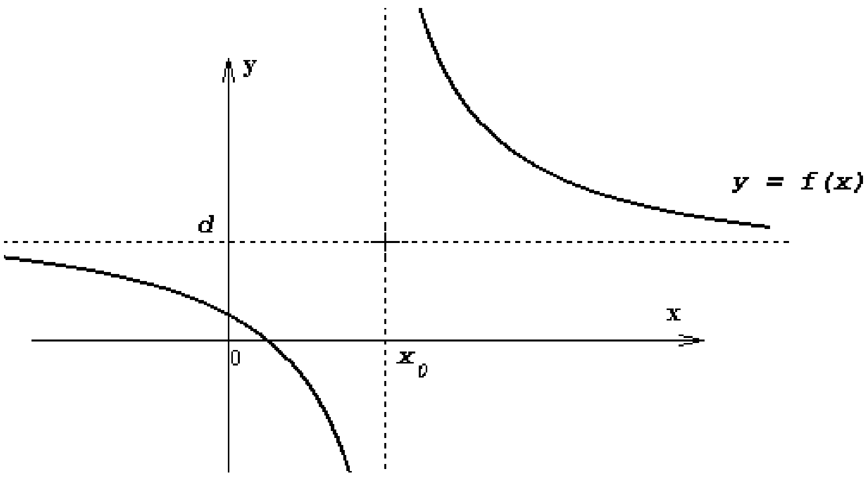
а)



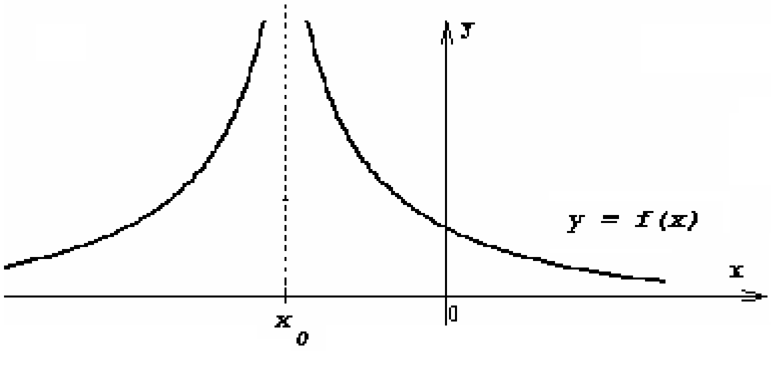

б)



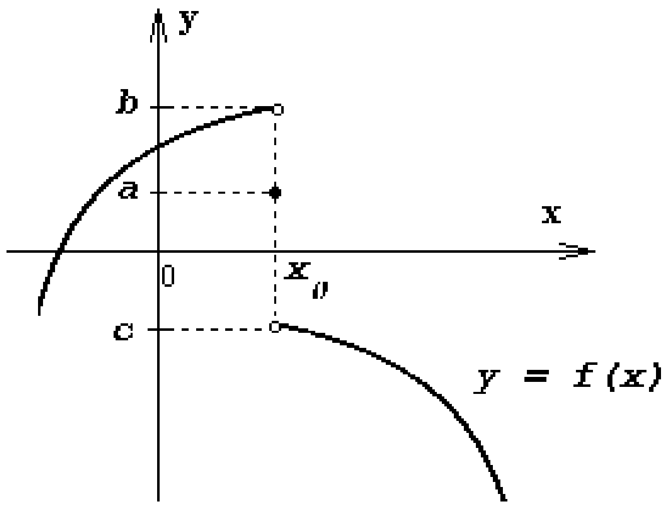

в)



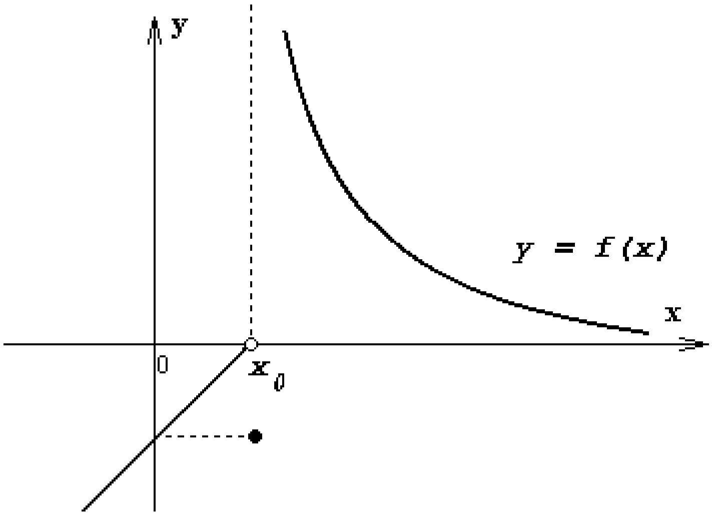

г)



д)




е)




4 Для каждого предельного соотношения постройте соответствующее графическое изображение:

а) $\lim\limits_{x\to -2} \mathrm{f(x)} = +\infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 2-} \mathrm{f(x)} = 2;\ \lim\limits_{x\to 2+} \mathrm{f(x)} = 4;\ \mathrm{f(2)} = 5;$

в) $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{f(x)} = -1;$

г) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 5;\ \ f(3) = -1;$

д) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} f(x) = \infty;$

е) $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = +\infty;\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 0,\ f(1) = 0;$

ж) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -\infty;\ \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = +\infty,\ f(0) = 1.$

<u>II уровень</u>

1 Приведите геометрическую иллюстрацию и точное определение утверждения на языке «ε-$\delta$»:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1;$

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2};$

в) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty;$

г) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \infty;$

д) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{2};$

е) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = -2.$

2 Запишите утверждение в предельной форме:

а) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists M > 0:\ \forall x(x \in D(f), |x| > M \Rightarrow (|f(x)| < \varepsilon);$

б) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x(x \in D(f), 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon);$

в) $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0: \forall x(x \in D(f), x < -M \Rightarrow f(x) > \varepsilon);$

г) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x(x \in D(f), 0 < |x| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon);$

д) $\forall M > 0\ \exists \delta > 0: \forall x(x \in D(f), 0 < |x+1| < \delta \Rightarrow f(x) < -M);$

е) $\forall M > 0\ \exists \delta > 0: \forall x(x \in D(f), -\delta < x < 0 \Rightarrow f(x) < -M).$

3 Докажите эквивалентность определений предела функции в точке по Гейне (на языке последовательностей) и по Коши (на языке «$\varepsilon - \delta$»).

4 Докажите равенство, используя определение предела функции:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{2x} = \frac{3}{2};$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1;$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2};$

г) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \frac{9x^2-1}{x+\frac{1}{3}} = -6;$

д) $\lim\limits_{x\to -5} \frac{x^2+2x-15}{x+5} = -8.$

5 Выясните, существует ли предел функции в указанных точках:

а) $f(x) = \begin{cases} -1, x < -2, \\ x, -2 \le x < 0, \\ 1 + x^2, x \ge 0, x = -2, x = 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} -5x, x < 1, \\ -5, 1 \le x < 2, \\ 0, x \ge 2, x = 1, x = 2; \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}1-x^2, x<0,\\ 1, 0<x<1,\\ 2x, x\geq 1, x=0, x=1;\end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases}2x+1, x<-\dfrac{1}{2},\\ 2, x=-\dfrac{1}{2},\\ x+\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2},\\ -1, x\geq\dfrac{1}{2}, x=-\dfrac{1}{2}, x=\dfrac{1}{2};\end{cases}$

д) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, x<0,\\ 3, x=0,\\ x-1, x>0, x<\dfrac{1}{3};\\ 1+x^2, x\geq 0, x=-2, x=0.\end{cases}$

6 Докажите свойства функций, имеющих конечный предел в точке.

7 Найдите:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}(4f(x)-2g(x));$

б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}(3f(x)+g(x))^3;$

в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{2g(x)+3f(x)}{g(x)-f^2(x)};$

г) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}+f^2(x)\right);$

д) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{f(x)}{g^2(x)+1};$

если $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}f(x)=\dfrac{1}{3};$ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}g(x)=-3.$

8 Докажите теорему о предельном переходе в неравенстве.

III уровень

1 Приведите пример функции, имеющей при $x\to+\infty$ своим пределом:

а) 1;

б) –1;

в) 0;

г) $\sqrt{5}$;

д) $+\infty$.

2 Приведите пример функции, обладающей свойствами:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-1$, и функция убывает на всей числовой прямой;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, при $x\to+\infty$ функция предела не имеет, $E(f)=[-1;\ 1]$

г) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, $f(x)<1$ для всех $x$;

д) $f(1)=2$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)=3$;

е) $f(2)$ не существует, $\lim\limits_{x\to2} f(x)=3$.

3 Докажите, что никакое число $b$ не является пределом функции:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x}, x\to0+$;

б) $f(x)=4+x^2, x\to+\infty$;

в) $f(x)=\dfrac{2}{1+x}, x\to-1+$;

г) $f(x)=\dfrac{8}{\sqrt[3]{x}}, x\to0-$;

д) $f(x)=\dfrac{2+x}{x-1}, x\to1+$;

е) $f(x)=\dfrac{2+x}{x-1}, x\to1-$.

4 Имеется участок земли в форме прямоугольника со сторонами длины 15 и <u>*a*</u>. С какой точностью нужно измерить длину <u>*a*</u> стороны прямоугольника, чтобы вычислить с точностью до $10^{-2}$ его: а) периметр; б) площадь?

5 Укажите наибольшее $\delta>0$, при котором для всех точек $x\neq-2$ из $\delta-$окрестности точки –2 выполняется неравенство $\left|f(x)-(-4)\right|<\varepsilon$ для $\varepsilon$=0,1; 0,01; 0,001, если: а) $f(x)=3x+2$; б) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$.

6 Докажите, что не существует:

а) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, если $f(x)=\begin{cases}1, x>0,\\ -1, x<0;\end{cases}$

б) $\lim\limits_{x\to1}[x]$;

в) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$, если $f(x)=\begin{cases}x+3, x>2,\\ x-5, x<2;\end{cases}$

г) $\lim\limits_{x\to 2} f(x),\quad f(x)=\{x\};$

д) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, если $f(x)=\begin{cases} -x^2, x<0, \\ 1, x=0, \\ x^2+2, x>0. \end{cases}$

7 Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-3}{x^2-1};$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1};$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{2x-1}{2x+1}\right);$

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right);$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5\sin 8x-6\cos 7x}{x^2+1};$

е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+5x+6};$

ж) $\lim\limits_{x\to 1}(4x-3)^{\frac{x+1}{x+2}};$

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{3x^2-2}\right)^{x^2}.$

## IV уровень

1 Можно ли из данного предложения сделать вывод, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$:

а) для любого $\varepsilon>0$ существует $0<\delta<1$ такое, что для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$;

б) для любого $\varepsilon>\dfrac{1}{2}$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$;

в) для любого $0<\varepsilon<1$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$;

г) для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=2\varepsilon$ такое, что для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-b|<3\varepsilon$?

2 Докажите первый замечательный предел и его следствия.

3 Докажите второй замечательный предел и его следствия.

4 Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^7+5x^6+4x^3}{x^7+2x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-4x+6}{x^2-5x+4}-\dfrac{x-4}{3x^2-9x+6}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x^2-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 5x-\sin 7x}$;

е) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\sin x\cdot\cos a-\sin 2a}{x-a}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \pm}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$;

з) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{x}{1-x}}$;

и) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+5}\right)^{x+1}$.

5 Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{tg(2\pi(x+\frac{1}{2}))}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{arctg(x^2-2x)}{\sin 3\pi x}$;

д) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x-1}}{\ln\sin x}$;

е) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sin\left(e^{\sqrt[3]{1-x^2}}-e^{\sqrt[3]{x+2}}\right)}{arctg(x+3)}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$;

з) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

и) $\lim\limits_{x\to 3}\left(2-\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{1}{\sin \pi x}}$;

к) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$.

## VII Непрерывность функции в точке

I уровень

1 Из предложенных функций выберите те, которые являются непрерывными на всей числовой прямой:

а) $f(x)=x+1$;

б) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$;

в) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, x\neq 1,\\ 3, x=1;\end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, x\neq 1,\\ 2, x=1;\end{cases}$

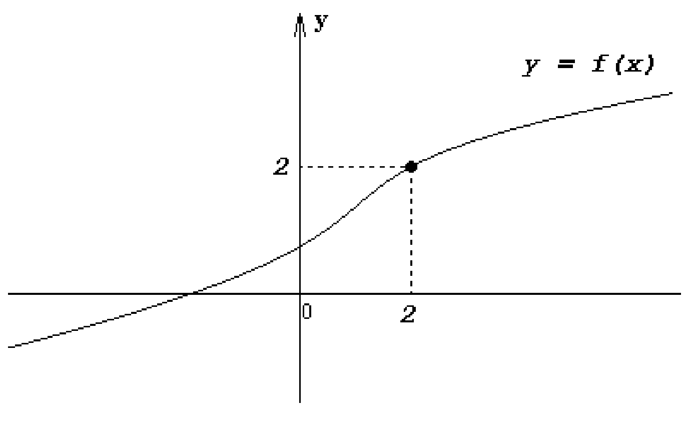
д) $f(x)=\dfrac{1}{x}$;

е) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$;

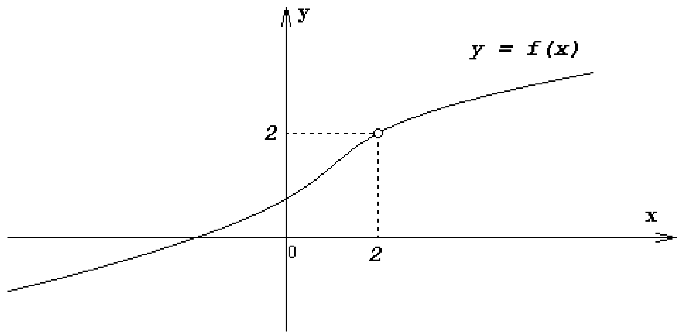
ж) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, x\neq 0,\\ 0, x=0.\end{cases}$

2 Из предложенных графиков функций выберите те, на которых функция не является непрерывной:

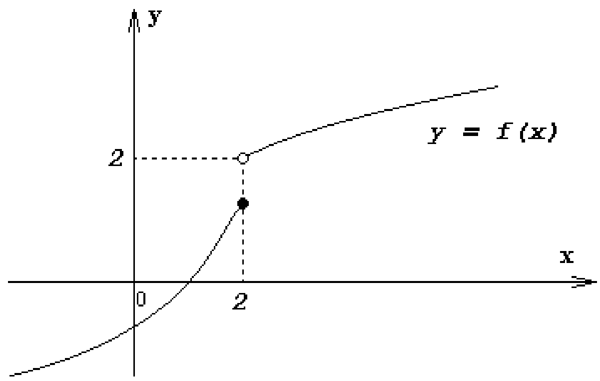
а)



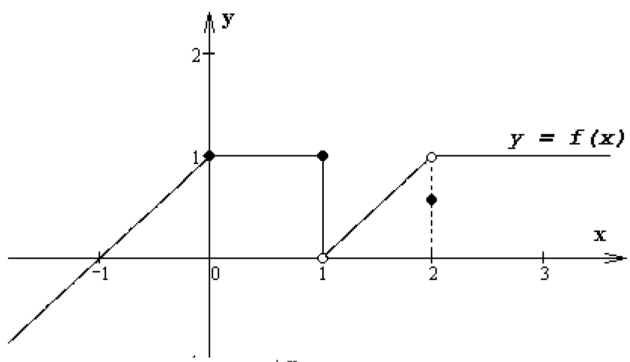
б)



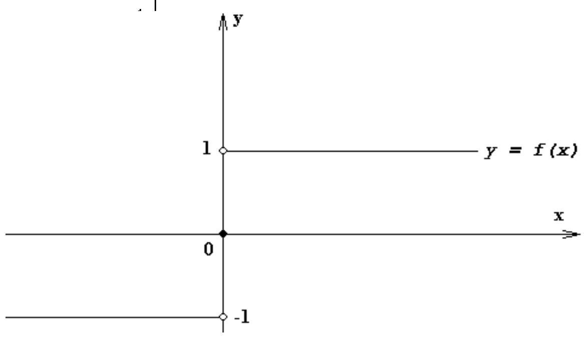

в)



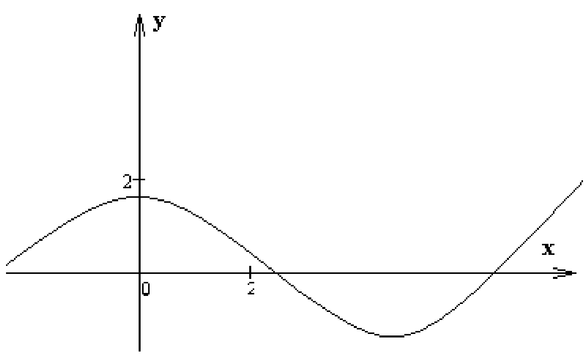

г)




д)




е)



3 Можно ли утверждать, что если функция определена в точке, то она в ней является непрерывной? Приведите примеры.

4 Можно ли утверждать, что если функция в точке имеет конечный предел, то она непрерывна в этой точке? Приведите примеры.

5 Можно ли утверждать, что если функция непрерывна в точке, то она в ней определена и имеет конечный предел? Приведите примеры.

<u>II уровень</u>

1 Докажите непрерывность функции в точке $x_0 = 2$, используя определения непрерывности функции в точке на языке последовательностей, на языке «$\varepsilon - \delta$», на языке пределов, на языке приращений, если $f(x) = 3x^2 + 16$.

2 Докажите непрерывность целой рациональной и дробно-рациональной функций в областях определения.

3 Докажите, что следующие функции являются непрерывными на всей числовой прямой:

а) $f(x) = \cos 3x$;

б) $f(x) = \sin^3 2e + e^{3x}(x^2 - x - 2)$;

в) $f(x) = 3^{\frac{1}{1+x^2}}$;

г) $f(x) = \ln(x^2 + 4) \cdot 3^{-\cos^2 x}$.

4 Докажите свойства функций, непрерывных в точке.

5 Докажите непрерывность композиции непрерывных функций.

6 Сформулируйте правило нахождения предела функции в точке, в которой она является непрерывной, и вычислите:

а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2}{4}$;

б) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 2}{x^2 + 2}$;

в) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5x^3 - 3x}{x^4 + 3x^3 + x + 5}$;

г) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt{6x}}{\sin \pi x}$.

## III уровень

1 Функция $f$ разрывна в точке $x_0$. Можно ли утверждать, что $f^2$ разрывна в точке $x_0$? Приведите примеры.

2 Дана функция $f(x)=\begin{cases} x+2, x\le 1, \\ 5-bx^2, x>1. \end{cases}$

Можно ли подобрать такое значение $b$, чтобы $f$ была непрерывна на всей области определения?

3 Выясните, с какой точностью $\delta>0$ надо знать приближенное значение числа $a$, чтобы определить значение $f(a)$ с точностью до 0,01; до $\varepsilon$ , $\varepsilon>0$:

а) $f(x)=7-5x$;

б) $f(x)=\dfrac{x+4}{8}$;

в) $f(x)=kx+b$;

г) $f(x)=|3x-4|$;

д) $f(x)=x^2, a=3, a=-2$;

е) $f(x)=x^3, a=2$.

4 Требуется отлить металлический куб объёмом 1000 см$^3$. Какой точности приближения длины его рёбер к 10 см достаточно, чтобы точность приближения его объёма к 1000 см$^3$ была бы равна 10 см$^3$, 1 см$^3$, $\varepsilon$ см$^3$? Возможно ли теоретическое решение такой задачи для любой наперёд заданной точности приближения объёма куба к 1000 см$^3$?

5 Найдите и исследуйте точки разрыва функции:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$;

б) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, 0\le x<1, \\ x^2+1, x\ge 1; \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} x, x\le 0, \\ 1-x, 0<x\le 1, \\ \dfrac{1}{1-x}, x>1; \end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} x^2, x<0, \\ 1, x=0, \\ tgx+1, x>0; \end{cases}$

д) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1}, x\neq 1,\\ 4, x=1;\end{cases}$

е) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1}, x\neq 1,\\ 0, x=1;\end{cases}$

ж) $f(x)=e^{\frac{1}{x+3}}$.

## IV уровень

1 Сформулируйте отрицание определения непрерывности в точке на языке «$\varepsilon-\delta$» и докажите, используя его, что функция разрывна в указанной точке:

а) $f(x)=\begin{cases}x-1, x\leq 4,\\ \dfrac{x}{4}, x>4, x_0=4;\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}-2x^2, x\leq 1,\\ x-1, x>1, x_0=1;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}2+x^3, x\leq 1,\\ 3x-2, x>1, x_0=1;\end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases}2^x, x\leq 0,\\ x, x>0, x_0=0;\end{cases}$

д) $f(x)=\begin{cases}\sin x-1, x\leq 0,\\ 1-\cos x, x>0, x_0=0.\end{cases}$

2 Исследуйте функцию на непрерывность, непрерывность слева и справа. Определите род точек разрыва и устраните их, где это возможно. Постройте график:

а) $f(x)=\begin{cases}x, x<-2,\\ 0, -2\leq x<1,\\ x^2-1, 1<x\leq 2,\\ \dfrac{1}{x-2}, x>2;\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}1, x\leq 0,\\ \lg x, 0<x<1,\\ x-1, 1<x<2,\\ -x, x\geq 2;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} 2x, x<0, \\ tgx, 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x, \dfrac{\pi}{2}\le x\le 2, \\ 3, x\ge\pi; \end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} x, x\le 0, \\ \ln x, 0<x<1, \\ 1-x, 1<x<3, \\ \sin x, x\ge 3. \end{cases}$

3 Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\arcsin\dfrac{x+2}{2}}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{e^{\sin^2 6x}-e^{\sin^2 3x}}{\log_3\cos 6x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}\right)^{\frac{1}{2-2x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{6x}\right)^{\frac{x}{x+2}}$.

## VIII Свойства функций, непрерывных на отрезке

I уровень

1 Докажите теорему об ограниченности функции, непрерывной на отрезке.

2 Докажите теорему о достижении функцией, непрерывной на отрезке, своих точной нижней и точной верхней границ.

3 Докажите теорему об обращении в нуль функции, непрерывной на отрезке.

4 Докажите теорему о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке.

II уровень

1 Можно ли утверждать, что функция, определенная во всех точках отрезка, ограничена на нём? Приведите примеры.

2 Верно ли утверждение: если функция определена во всех точках отрезка и ограничена на нём, то она достигает на нём наименьшего и наибольшего значений? Приведите примеры.

3 Истинно ли утверждение: если функция определена на отрезке и на концах его принимает значения разных знаков, то в некоторой внутренней точке его она будет принимать значение, равное нулю? Приведите примеры.

4 Докажите, что если функция непрерывна на отрезке и принимает значение, равное нулю лишь в единственной точке этого отрезка, то она может не принимать на нём значений разных знаков.

5 Можно ли утверждать, что если функция определена на отрезке, и множество её значений есть отрезок, то она непрерывна на нём?

III уровень

1 Приведите пример функции, которая является непрерывной и отображает отрезок на всю числовую прямую.

2 Приведите пример функции, которая является непрерывной и переводит отрезок в интервал.

3 Приведите пример функции, которая является непрерывной и отображает отрезок на объединение двух непересекающихся отрезков.

4 Выясните, принимает ли функция

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+1,-1\le x<0,\\ 0, x=0,\\ x^2-1, x>0, x\le 1\end{cases}$$

наименьшее и наибольшее значения на отрезке [–1: 1].

5 Для функции:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4, 0\le x<2,\\ (x-4)^2+6, 2\le x\le 4\end{cases}$$

$f(0)=-4$, $f(2)=10$, $f(4)=6$. Установите, существует ли значение $c$, такое, что $f(c)=1$, $f(c)=7$.

6 Для функции

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x-24}$$

$f(5)=-\frac{4}{9}$, $f(7)=\frac{2}{5}$. Следует ли отсюда существование такого $c$, что $5<c<7$ и $f(c)=0$?

7 Докажите, что каждое алгебраическое уравнение нечётной степени имеет по крайней мере один действительный корень.

8 Докажите, что каждый многочлен чётной степени принимает наименьшее или наибольшее значения. Какой вывод можно сделать о коэффициенте при старшем члене этого многочлена, если многочлен принимает наибольшее значение?

## IV уровень

1 Докажите, что для приведённых функций существуют непрерывные обратные функции:

а) $f(x) = 2x + 1, x \in R;$

б) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}, x \in [0;+\infty];$

в) $f(x) = x^2, x \in R;$

г) $f(x) = \sin 2x, x \in [-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}];$

д) $f(x) = 4x + x^3, x \in R.$

2 Решите неравенство методом интервалов:

а) $\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x+3)^2(x-1)} > 0;$

б) $(x^2 - 1)(x^3 - 1)(x^4 - 1) \geq 0;$

в) $x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0;$

г) $(x-1)^2(x-2)^2(x-3) < 0.$

3 Установите, имеют ли приводимые уравнения на указанных промежутках хотя бы одно решение:

а) $\sin x - x + 1 = 0, x \in [0;\pi];$

б) $x^3 + 3x + 1 = 0, x \in [-1;0];$

в) $x^5 - 6x^2 + 3x - 7 = 0, x \in [0;2];$

г) $3\sin^3 x - 5\sin x + 1 = 0, x \in [0;\dfrac{0}{\pi}];$

д) $8^x - 3 \cdot 2^x - 16 = 0, x \in [0;2].$

4 Найдите с точностью до 0,01 корень уравнения на указанном промежутке:

а) $x^3 - 3x + 1 = 0, x \in [1;2];$

б) $x^5 - x - 0{,}2 = 0, x \in [1;1{,}1];$

в) $2 - x - \lg x = 0, x \in [1{,}6;1{,}8];$

г) $x^3 - 6x + 3 = 0, x \in [2;3].$

## Список литературы

1 Виленкин Н. Я., Мордкович А. Г. Математический анализ: Введение в анализ. М. : Просвещение, 1983.

2 Маранц П. С. Введение в математический анализ. Свердловск, 1978.

3 Метельский Н. В. Дидактика математики. Минск, 1982.

4 Мордкович А. Г., Мухин А. Е. Сборник задач по введению в анализ и дифференциальному исчислению функций одной переменной. М. : Просвещение, 1985.

5 Пидкасистый П. И. Самостоятельная познавательная деятельность школьников в обучении. М. : Педагогика, 1980.

6 Шашкина М.Б. Педагогические тесты достижений по теме: «Дифференциальное исчисление функций одной переменной». Красноярск, 1997.

7 Шкерина Л. В. Сборник задач по введению в математический анализ. Красноярск, 1992.

8 Шкерина Л. В., Тузикова И. И., Кацман Т. А. Об уровнях самостоятельности познавательной деятельности студентов и их диагностике. Профессионально-педагогическая направленность математической подготовки учителя в педвузе. Красноярск, 1990. С. 20-27.

Мухин Александр Ефимович

**ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ДОСТИЖЕНИЙ**
**ПО РАЗДЕЛУ «ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ»**

Методические указания
для студентов I курса
Специальностей 010101.65 и 050201.65

Редактор Е.А. Могутова

| | | |
|---|---|---|
| Подписано в печать 27.01.15 | Формат 60x84 1/16 | Бумага 65 г/м$^2$ |
| Печать цифровая | Усл.-печ. л. 2,75 | Уч.изд. л. 2,75 |
| Заказ 5 | Тираж 25 | Не для продажи |

РИЦ Курганского государственного университета.
640000, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.