МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра «Математический анализ»

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

$$f(x) = 0$$

Методические указания
к выполнению лабораторных работ
по дисциплине «Численные методы»
для студентов направлений 010100.62, 050100.62, 050202.62

Курган 2014

Кафедра: «Математический анализ»
Дисциплина: «Численные методы»
(направления 010100.62, 050100.62, 050202.62).
Составили: канд. пед. наук, доц. Т.Н. Михащенко.
Утверждены на заседании кафедры «9» сентября 2014 г.
Рекомендованы методическим советом университета «20» декабря 2013 г.

Методы приближенного решения уравнения с одной переменной f(x)=0

Данные методические указания содержат теоретический и практический материал для проведения лабораторных работ по теме «Приближенное решение уравнений с одной переменной». Методические указания содержат восемь методов решения трансцендентных уравнений, среди которых есть графические и аналитические методы численного решения уравнений.

Большинство приближенных методов решения уравнений являются способами уточнения корней, для их применения необходимо знание примерного значения корня – его первого приближения, для поиска которого применяется *графический метод*. *Аналитические методы* предполагают, что известен некоторый интервал [a; b], на котором лежит искомый корень уравнения – интервал изоляции корня уравнения. К аналитическим методам решения можно отнести метод половинного деления и его разновидности, метод хорд и касательных, комбинированный метод, метод итераций и другие.

Лабораторная работа по теме «Приближенное решение уравнений с одной переменной»

Задание. Найти один из корней уравнения тремя различными методами:

1) методом деления отрезка пополам или его модификациями (методом Фибоначчи, методом «золотого сечения», методом рандомизации и др.);
2) методом хорд и касательных;
3) методом простой итерации (с точностью до 10^{-5}).

Ход работы

1 Отделить корень на отрезке [a; b], проверить его единственность.

2 Реализовать один из методов деления отрезка в заданном отношении (использовать ЭВМ или калькулятор).

3 Сделать проверку точности найденного решения подстановкой его в исходное уравнение.

Вычислительный бланк для метода деления отрезка пополам или его модификаций имеет вид таблицы 1.

Таблица 1 – Вычислительный бланк метода деления отрезка пополам

№	f(a)	a	b	f(b)	c=(a+b)/2	f(c)
1						
2						

Индивидуальные варианты

1) $3x-5\ln x=5$, 2) $\lg 2x-\frac{1}{x}=0$, 3) $\frac{1}{x}=-\sin 2x$, 4) $tgx-3x+4=0$,

5) $\sin x + \ln x = 0$,   6) $\cos x + \ln x = 0$,   7) $lgx = 5 - 2x$,   8) $\lg x - \frac{1}{x^2} = 0$,

9) $\frac{2}{x} = 2 + e^x$,   10) $\frac{1}{x} = \sin x$,   11) $\cos x + \frac{1}{2}\ln x = 0$,   12) $e^{-x} + x^2 - 2 = 0$,

13) $\frac{2}{x} = 1 + e^x$,   14) $\ln x + x^2 = 2$,   15) $\sin 2x - \ln x = 0$, 16) $e^x - 2(x-1)^2 = 0$,

17) $ctg1,05x - x^2 = 0$, 18) $4\cos x + 0,3x = 0$, 19) $5\sin 2x = \sqrt{1-x}$,   20) $2^{-x} = 10 - 0,5x^2$.

Краткие теоретические сведения

Интервал [a; b] является *интервалом изоляции корня*, если его можно считать настолько малым, что на нем лежит точно один корень уравнения. Выбор этого интервала производится на основании свойства непрерывных функций: *если функция y=f(x) непрерывна на отрезке* [a; b] *и на концах отрезка принимает значения разных знаков (f(a)f(b) < 0), то между точками a и b есть хотя бы один корень уравнения f(x)= 0. Корень уравнения будет единственным, если производная f'(x) существует и сохраняет постоянный знак внутри* [a; b] (рисунок 1).

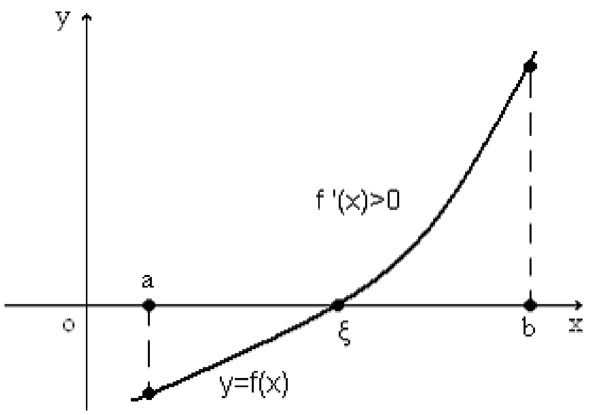

Рисунок 1 – Интервал изоляции корня уравнения

Графическое отделение корня в случае достаточно сложного выражения y=f(x) можно производить следующим образом. Допустим, что уравнение f(x)=0 можно представить в виде $f_1(x) = f_2(x)$. Строим графики функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$; абсциссы точек пересечения построенных кривых будут являться корнями уравнения f(x)=0.

Например, найдем корни уравнения x–sin x–1 = 0. Запишем уравнение в виде x–1=sin x. Построим графики функций y=sin x и y=x–1 (рисунок 2). Точка пересечения этих линий имеет абсциссу x ≈ 1,9, это и есть первое приближение корня уравнения.

Задача отыскания корней уравнений может считаться практически решенной, если удалось определить корни с нужной степенью точности и указать пределы возможной погрешности.

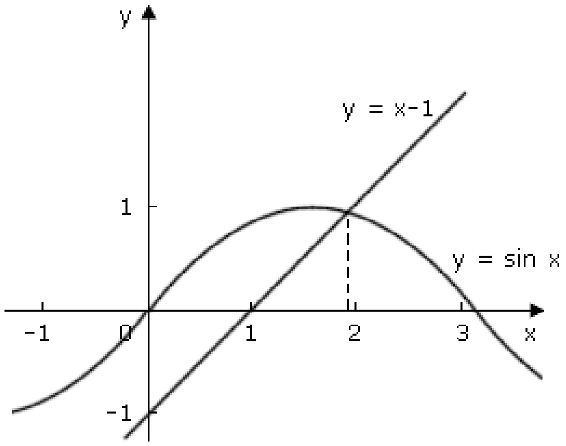

Рисунок 2 – Корень уравнения x–sin x–1 = 0

Рассмотрим первую группу методов решения уравнения f(x)=0 – методы деления отрезка в данном отношении.

1 Метод половинного деления

Одним из самых простых численных методов решения уравнений является метод половинного деления. Пусть для уравнения $f(x) = 0$ найден интервал изоляции корня – отрезок [a; b]. Для уточнения искомого корня отрезок [a; b] делим пополам и из двух, полученных в результате этого деления отрезков выбираем тот, для которого выполняются условия существования и единственности корня (на концах отрезка функция принимает значения разных знаков). Середину отрезка находим по формуле $x_i=(a+b)/2$, i=1,…n, и продолжаем данный процесс пока не достигнем необходимой точности (рисунок 3).

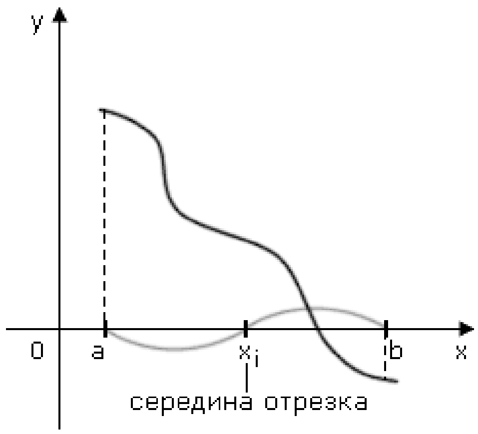

Рисунок 3 – Графическая иллюстрация метода половинного деления

Рассмотрим применение метода половинного деления на примере решения уравнения $x^3+x^2–1 = 0$ на отрезке [0; 1].

Найдем интервал изоляции корня уравнения: $x^3+x^2–1=0$. Для этого представим уравнение в виде: $x^3 =1–x^2$, значит $y=x^3$ и $y=1–x^2$. Построим приближенно графики данных функций (рисунок 4). Точка пересечения графиков двух функций, а значит, и корень уравнения находится на отрезке [0; 1]. Проверим аналитические условия: $f(0)=0^3+0^2–1=–1<0$, $f(1)= 1^3 +1^2–1=1>0$, и $f'(x)=3x^2+2x>0$

на отрезке [0; 1]. Таким образом, мы определили интервал изоляции корня, для нахождения которого достаточно применить любой из аналитических методов численного решения уравнений.

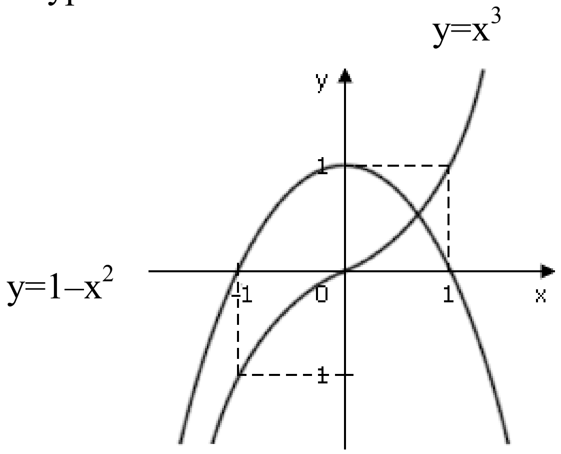

Рисунок 4 – Корень уравнения $x^3+x^2-1=0$

Разделим интервал изоляции пополам – это точка x=0,5. Получим два подотрезка – [0; 0,5] и [0,5; 1]. Вычислим значения функции на концах отрезков, $f(0)= -1<0$, $f(0{,}5)=0{,}5^3+0{,}5^2-1=0{,}125+0{,}25-1= -0{,}625< 0$, $f(1)=1^3+1^2-1=1+1-$ $-1=1>0$, т.е. на концах отрезка [0,5; 1] функция имеет значения разных знаков, следовательно, корень уравнения принадлежит отрезку [0,5; 1]. Выбираем этот отрезок для дальнейшего рассмотрения. Повторяем метод половинного деления уже для нового отрезка. Середина отрезка $x=(0{,}5+1)/2=0{,}75$, из двух полученных отрезков выбираем правый отрезок [0,75; 1], $f(0{,}75) = -0{,}015625< 0$, $f(1)=1> 0$. Процесс продолжаем до получения корня с заданной степенью точности.

У метода половинного деления есть несколько модификаций. Например, если делить отрезок [a; b] сразу на десять частей, то на следующем шаге можно получить отрезок в десять раз меньший, чем [a; b].

2 Метод Фибоначчи

Рассмотрим одну из разновидностей метода половинного деления – метод Фибоначчи. Пусть дано уравнение f(x)=0, где функция y=f(x) непрерывна на [a; b] и f(a)f(b)<0. Для уточнения корня данного уравнения введем последовательность чисел Фибоначчи: F0=F1=1, Fk=Fk-1+Fk-2, k=2, 3, …, n – это будут числа 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 и т.д. Согласно данному методу, на каждом n-ом этапе отрезок делят в отношении $F_n:F_{n+1}$, где F_n и F_{n+1} соответственно n-е и (n+1)-е число из последовательности Фибоначчи. Так на первом шаге отрезок [a; b] делят в отношении 1:1 (пополам) и выбирают тот из них, на концах которого функция y=f(x) имеет разные знаки. На втором этапе выбранный суженный отрезок $[a_1; b_1]$ делят в отношении 1:2, следующие – в отношениях 2:3, 3:5, 5:8, … В результате на некотором этапе получаем точный корень уравнения или же бесконечную последовательность n отрезков $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$, …, $[a_n; b_n]$, … таких, что $f(a_n)f(b_n)<0$ (n=1, 2,…). Формула деления отрезка в отношении Фибоначчи имеет вид $c=a+F_n/(F_n+F_{n+1})(b-a)$, в качестве приближенного корня уравнения можем принять $x = \frac{(a_n + b_n)}{2}$.

3 Метод золотого сечения

Еще одним методом последовательного деления отрезка, содержащего корень уравнения, является метод золотого сечения. Его смысл состоит в делении отрезка на две неравные части так, чтобы отношение всего отрезка к большей части равнялось отношению большей части отрезка к меньшей (принцип «золотого сечения»).

Пусть дано уравнение f(x)=0, где функция y=f(x) непрерывна на [a; b] и f(a)f(b)<0. Суть метода состоит в том, чтобы разделить отрезок [a; b] точкой c так, чтобы $\frac{c-a}{b-c} = \frac{b-c}{b-a}$, решая это уравнение, получаем $c = b - \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)$. Все остальные действия осуществляются аналогично предыдущему методу.

4 Метод рандомизации

Метод рандомизации также является методом последовательного сужения отрезка, содержащего корень уравнения. Вводим элемент случайности (RND) так, что точки деления отрезка выбираются в соответствии с определенным законом распределения. При этом можно получить некоторый выигрыш в числе этапов по сравнению с другими аналогичными методами.

Пусть дано уравнение f(x)=0, где функция y=f(x) непрерывна на [a; b] и f(a)f(b)<0. Точку деления текущего отрезка $[a_n; b_n]$ на каждом этапе находим из выражения $c=rnd*(b_n-a_n)+a_n$, где rnd – случайное число, причем 0<rnd<1.

В результате на некотором этапе получаем точный корень уравнения, или же бесконечную последовательность n отрезков $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$, …, $[a_n; b_n]$, … таких, что $f(a_n)f(b_n)<0$ (n=1, 2,…).

В качестве корня выбираем $x = \frac{(a_n + b_n)}{2}$.

Перейдем к другой группе методов – методу хорд, методу касательных и комбинированному методу.

5 Метод хорд

Идея метода хорд состоит в том, что можно с известным приближением допустить, что функция на достаточно малом отрезке [a; b] изменяется практически линейно, тогда кривую y = f(x) на этом отрезке можно заменить хордой и в качестве приближенного значения корня принять точку пересечения хорды с осью абсцисс (рисунок 5). Построим график функции y = f(x) на участке [a; b]. Истинный корень уравнения f(x)=0 есть абсцисса точки A, являющейся точкой пересечения кривой MM' с осью абсцисс. Заменив кривую MM' хордой MM', мы примем в качестве приближенного значения корня абсциссу точки B, в которой хорда пересекается с осью.

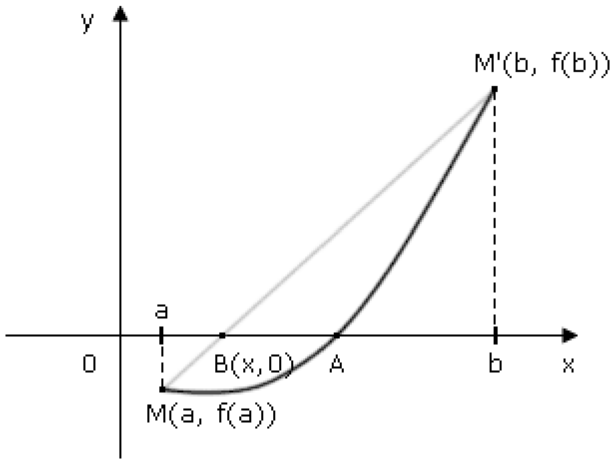

Рисунок 5 – Графическая иллюстрация первого шага метода хорд

Запишем уравнение прямой, проходящей через точки M(a,f(a)) и M'(b,f(b)): $\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}$. Абсцисса точки B, являющаяся приближенным значением корня x_1 уравнения f(x) = 0, может быть найдена из уравнения прямой, если положить в нем y = 0. Тогда получим $x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)$. Полученное значение x_1 можно снова использовать для дальнейшего уточнения корня по способу хорд, рассматривая интервалы [a, x_1] или [x_1, b], исходя из того, в каком из них лежит истинный корень. Чтобы определить это, находят знак f(x_1).

Для доказательства сходимости процесса предположим, что корень отделен и вторая производная $f''(x)$ сохраняет постоянный знак на отрезке [a; b]. Пусть для определенности $f''(x) > 0$ при $a \le x \le b$ (случай $f''(x) < 0$ сводится к данному, если записать уравнение в виде $-f(x) = 0$). Тогда кривая y=f(x) будет выпукла вниз и, следовательно, расположена ниже своей хорды. Возможны два варианта: 1) f(a)>0 и 2) f(a)<0 (рисунок 6).

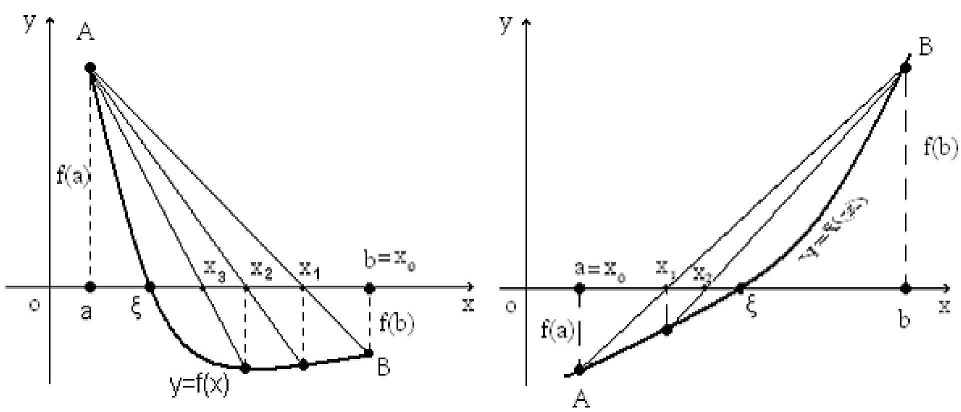

Рисунок 6 – Графическая иллюстрация метода хорд

В первом случае конец a неподвижен и последовательные приближения:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a)$$

образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность, причем $a < \xi < \ldots < x_{n+1} < x_n < \ldots < x_1 < x_0$.,

Во втором случае неподвижен конец b, а последовательные приближения:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n)$$

образуют ограниченную монотонно возрастающую последовательность, причем $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < \xi < b$.

Обобщая эти результаты, заключаем – неподвижен тот конец, для которого знак функции f(x) совпадает со знаком ее второй производной (рисунок 6).

Пример 1. **Найти методом хорд корень уравнения $f(x) = \sin x + \ln x = 0$, лежащий на отрезке [0,2; 1].**

Решение. Определим, какой из концов отрезка [0,2; 1] останется неподвижным: $f''(x) = -\sin x - \frac{1}{x^2} < 0$, $f(0{,}2) = -1{,}411$, $f''(0{,}2) = -25{,}199$; следовательно, 0,2 неподвижный конец.

Применяем формулы метода хорд:

$$x_1 = 0{,}2 - \frac{-1{,}4107}{0{,}8414 + 1{,}4107}(1 - 0{,}2) = 0{,}701107; \qquad f(x_1) = 0{,}2899;$$

$$x_2 = 0{,}701107 - \frac{0{,}2899}{0{,}2899 + 1{,}4107}(0{,}701107 - 0{,}2) = 0{,}615670; \qquad f(x_2) = 0{,}0924;$$

$$x_3 = 0{,}615670 - \frac{0{,}0924}{0{,}0924 + 1{,}4107}(0{,}615670 - 0{,}2) = 0{,}590102; \qquad f(x_3) = 0{,}0289;$$

$$x_4 = 0{,}590102 - \frac{0{,}0289}{0{,}0289 + 1{,}4107}(0{,}590102 - 0{,}2) = 0{,}582248; \qquad f(x_4) = 0{,}0090;$$

$$x_5 = 0{,}582248 - \frac{0{,}0090}{0{,}0090 + 1{,}4107}(0{,}582248 - 0{,}2) = 0{,}579813; \qquad f(x_5) = 0{,}0028;$$

$$x_6 = 0{,}579813 - \frac{0{,}0028}{0{,}0028 + 1{,}4107}(0{,}579848 - 0{,}2) = 0{,}579055; \qquad f(x_6) = 0{,}00087.$$

Таким образом, *корень уравнения* равен x= 0,579055**.**

6 Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть корень уравнения f(x)=0 отделен на отрезке [a; b], причем $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют определенные знаки при $a \le x \le b$.

Метод Ньютона эквивалентен замене небольшой дуги кривой y=f(x) касательной, проведенной в некоторой точке кривой. Пусть для определенности,

$f''(x)>0$, при $a \le x \le b$ и f(b)>0 (рисунок 7). Выберем, x_0=b, для которого $f(x_0)f''(x_0)>0$. Проведем касательную к кривой y=f(x) в точке $B_0(x_0;\ f(x_0))$. В качестве первого приближения x_1 корня возьмем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью Ox.

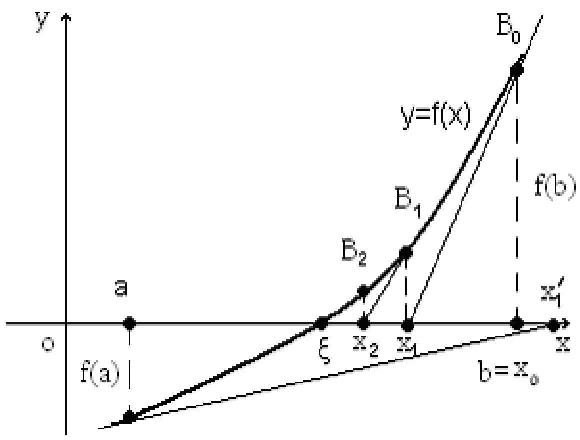

Рисунок 7 – Графическая иллюстрация метода касательных

Через точку $B_1(x_1;\ f(x_1))$ снова проведем касательную, абсцисса точки пересечения которой, даст нам второе приближение x_2 корня и т.д. Очевидно, что уравнение касательной в точке $B_n(x_n; f(x_n))$, n=0, 1, 2, … есть $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$. Полагая y=0, $x=x_{n+1}$, получим формулу $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Заметим, что если положить x_0=a и, $f(x_0)f''(x_0)<0$, то, проведя касательную к кривой y=f(x) в точке A(a; f(a)), мы получили бы точку x_1, лежащую вне отрезка [a; b], т.е. при этом выборе начального значения метод Ньютона оказывается непрактичным. Таким образом, в данном случае «хорошим» начальным приближением x_0 является то, для которого выполнено равенство $f(x_0)f''(x_0)>0$.

Существует модификация метода касательных, когда через точки $B_n(x_n;\ f(x_n))$, проводят прямые, параллельные первой касательной прямой, т.е. прямые с угловым коэффициентом f'(b), при этом вычисления имеют менее громоздкий вид, $x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(b)$.

Пример 2. **Методом касательных (Ньютона) уточнить корень уравнения $f(x)=\sin x+\ln x=0$, лежащий на отрезке [0,2; 1].**

Решение. Определим, какой из концов отрезка [0,2; 1] выбрать в качестве исходной точки: $f''(x) = -\sin x - \dfrac{1}{x^2}$; $f(0{,}2) = -1{,}411$, $f''(0{,}2) = -25{,}199$;, следовательно x_0=0,2. Применяя формулу метода Ньютона, получим:

$x_1 = 0{,}2 - \dfrac{-1{,}4107}{5{,}9800} = 0{,}435911$; $\qquad f(x_1) = -0{,}4080$;

$$x_2 = 0{,}435911 - \frac{-0{,}4080}{3{,}2005} = 0{,}563415; \quad f(x_2) = -0{,}0396;$$

$$x_3 = 0{,}563415 - \frac{-0{,}0396}{2{,}6203} = 0{,}578551; \quad f(x_3) = -0{,}000416.$$

Таким образом, корень уравнения равен x= 0,578551.

7 Комбинированный метод

Рассмотренные выше метод хорд и метод касательных дают приближение корня с разных сторон, причем такой характер приближения имеет место всегда, значит выгодно применять оба способа одновременно, благодаря чему уточнение корня может быть получено быстрее.

Ограничения, наложенные на функцию и отрезок интервала изоляции, дают нам четыре возможных случая, которые легче всего рассмотреть графически: $f'(x) > 0; f''(x) > 0$; $f'(x) > 0; f''(x) < 0$ (рисунок 8); аналогично можно рассмотреть случаи $f'(x) < 0; f''(x) > 0$ и $f'(x) < 0; f''(x) < 0$.

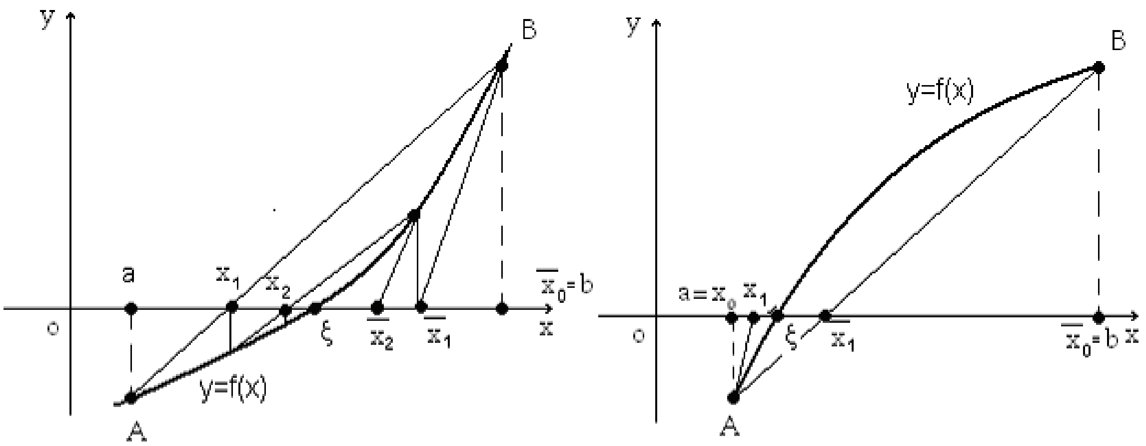

Рисунок 8 – Графическая иллюстрация комбинированного метода

Ограничимся разбором первого случая, остальные случаи рассматриваются аналогично, причем характер вычислений легко понять из соответствующих чертежей, а сами случаи можно свести к первому, если заменить рассматриваемое уравнение f(x)=0 равносильными ему уравнениями: –f(x)=0 или $\pm f(-z) = 0$, где $z = -x$.

Пусть $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$ при $a \le x \le b$. Полагаем $x_0 = a$; $\bar{x}_0 = b$, и

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n), \qquad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}, \text{ n=0, 1, 2, …}$$

Из доказанного выше следует, что $x_n < \xi < \bar{x}_n$ и $0 < \xi - x_n < \bar{x}_n - x_n$. Если допустимая абсолютная погрешность приближенного значения корня x_n задана заранее и равна ε, то процесс сближения прекращается в тот момент, когда будет обнаружено, что $|\bar{x}_n - x_n| < \varepsilon$.

Пример 3. **Найти корень уравнения** $f(x) = \sin x + \ln x = 0$**, лежащий на отрезке** [0,2; 1] **комбинированным методом.**

Решение: Применяя формулы комбинированного метода, получим:

$$x_1 = 0{,}2 - \frac{-1{,}4107}{0{,}8414 + 1{,}4107}(1 - 0{,}2) = 0{,}701107; \qquad \overline{x}_1 = 0{,}2 - \frac{-1{,}4107}{5{,}98} = 0{,}435911;$$

$$\overline{x} = \frac{1}{2}(x_1 + \overline{x}_1) = 0{,}568509; \qquad f(\overline{x}) = -0{,}0263;$$

$$x_2 = 0{,}615670; \quad \overline{x}_2 = 0{,}563415; \quad \overline{x} = \frac{1}{2}(x_2 + \overline{x}_2) = 0{,}589542; \quad f(\overline{x}) = 0{,}0275;$$

$$x_3 = 0{,}590102; \quad \overline{x}_3 = 0{,}578551; \quad \overline{x} = \frac{1}{2}(x_3 + \overline{x}_3) = 0{,}584327; \quad f(\overline{x}) = 0{,}0143;$$

$$x_4 = 0{,}582248; \quad \overline{x}_4 = 0{,}578713; \quad \overline{x} = \frac{1}{2}(x_4 + \overline{x}_4) = 0{,}580481; \quad f(\overline{x}) = 0{,}0045;$$

$$x_5 = 0{,}579813; \quad \overline{x}_5 = 0{,}578713; \quad \overline{x} = \frac{1}{2}(x_5 + \overline{x}_5) = 0{,}579263; \quad f(\overline{x}) = 0{,}0014;$$

Оценим погрешность: $0 < \xi - \overline{x} < \dfrac{0{,}0014}{1{,}5403} \approx 0{,}0028.$

Таким образом, *корень уравнения* равен x= 0,579263.

8 Метод итераций

В ряде случаев удобным приемом решения уравнений является *метод итераций (повторений)*. Для применения этого метода исходное уравнение f(x)=0 надо записать в равносильной форме x=φ(x). Теоретически, в качестве φ(x) бывает удобно выбрать функцию вида φ(x)=x+λf(x), где λ= –1/M, если $f'(x) > 0$ и λ= 1/M, если $f'(x) < 0$, где $M = \max\limits_{[a,b]} f'(x)$.

Пусть для функции x=φ(x) выделен интервал изоляции корня этого уравнения [a; b] и x_0 – любая точка этого интервала (нулевое приближение). Для получения следующего приближения x_1, в правую часть уравнения вместо x подставляем значение x_0, так что $x_1 = \varphi(x_0)$. Следующие приближения получаются по схеме: $x_2 = \varphi(x_1)$, $x_3 = \varphi(x_2)$, . . ., $x_n = \varphi(x_{n-1})$. Если последовательность x_1, x_2, … x_n, … имеет предел $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, то x является корнем исходного уравнения. Поэтому одно из значений x_n с достаточно большим номером можно принять за приближенное значение корня. Однако может случиться, что последовательность x_1, x_2, … x_n, … не имеет предела и тогда метод итераций не приведет к цели. Выясним условия, при которых итерационный процесс сходится.

Справедлива теорема: *Пусть интервал [a; b] является интервалом изоляции корня уравнения x = φ(x) и во всех точках этого интервала производная φ'(x) удовлетворяет неравенству |φ'(x)| ≤M<1. Если при этом выполняется условие a ≤ φ(x) ≤ b, то итерационный процесс сходится, причем за нулевое приближение x_0 можно брать любую точку интервала [a; b].*

Геометрический смысл итерационного процесса изображен на рисунке 9. Построим графики функций y = φ(x) и y = x. Корнем уравнения является абсцисса точки пересечения кривой y = φ(x) с биссектрисой координатного угла. Если x_0 – абсцисса нулевого приближения, то $x_1 = \varphi(x_0)$ равно ординате соответствующей точки M кривой или же абсциссе точки M_1, аналогично находятся следующие приближения.

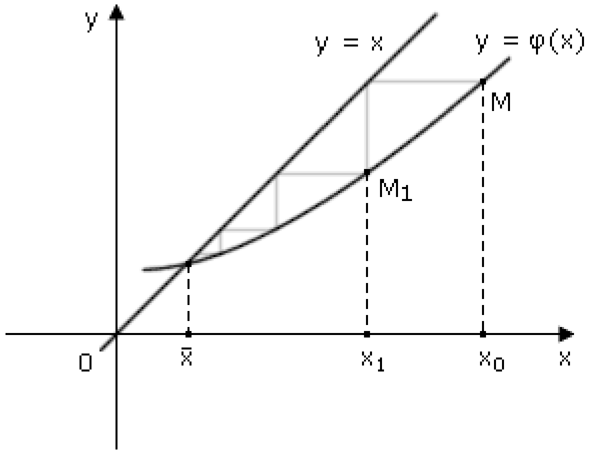

Рисунок 9 – Графическая иллюстрация метода простой итерации

На рисунке 10 приведен случай, когда φ'(x) > 1, в этом случае процесс итерации оказывается расходящимся.

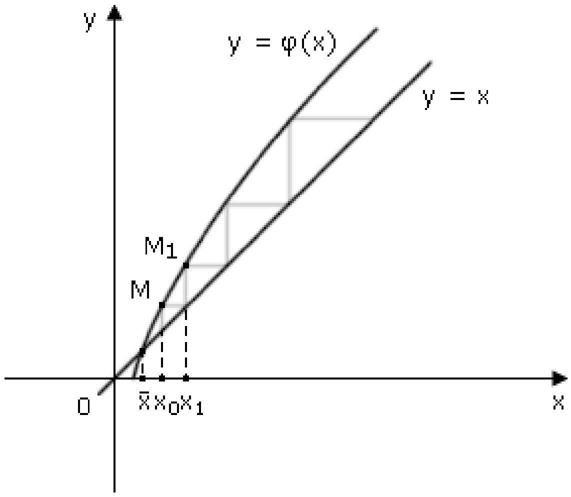

Рисунок 10 – Графическая иллюстрация расходящегося метода итерации

Пример 4. **Найти методом итерации корень уравнения** $f(x) = \sin x + \ln x = 0$, **лежащий на отрезке [0,2; 1].**

Решение. Заменим данное уравнение ему равносильным, найдем производную $f'(x) = \cos x + \dfrac{1}{x}$, функция монотонно убывает на отрезке [0,2; 1], поэтому $M = \max\limits_{[0,2;1]} f'(x) = f'(0{,}2) = 5{,}98$. Так как $f'(x) > 0, x \in [0{,}2; 1]$, то

$\lambda = -\frac{1}{5{,}98} = -0{,}1672;$ $\varphi(x) = x - 0{,}1672\sin x - 0{,}1672\ln x;$ $|\varphi'(x)| < 1,$ следовательно, процесс итерации сходится. В качестве x_0 выберем середину отрезка [0,2; 1] x_0=0,6. Все необходимые вычисления занесем в таблицу 2.

Таблица 2 – Метод итерации

i	xi	φ(xi)	|xi-φ(xi)|
0	0,6	0,591001823	0,008998177
1	0,591001823	0,585775649	0,005226174
2	0,585775649	0,582761456	0,003014193
3	0,582761456	0,581030208	0,001731248
4	0,581030208	0,580038236	0,000991972
5	0,580038236	0,579470648	0,000567588
6	0,579470648	0,579146145	0,000324503
7	0,579146145	0,578960704	0,000185441
8	0,578960704	0,57885476	0,000105944
9	0,57885476	0,578794242	0,000060518

Оценим погрешность: $|\xi - x_{10}| \le \frac{0{,}000206}{1{,}5403} \approx 0{,}000133.$ В качестве корня уравнения можем принять x=0,578794.

Приведем примерный образец выполнения отчета по лабораторной работе.

Примерный образец оформления лабораторной работы

Задание. Вычислить с точностью 0,001 корень уравнения $\frac{1}{x} = \cos x$.

Отделение корня: корни данного уравнения могут быть найдены как абсциссы точек пересечения кривых $y = \cos x$ и $y = \frac{1}{x}$.

По графику на рисунке 11 замечаем, что корни уравнения принадлежат отрезкам [4; 6] и [7; 8]. Уточним, например, корень, лежащий на отрезке [7; 8]. Уравнение запишем в виде $f(x) = 0,$ $f(x) = cos\ x - \frac{1}{x}$.

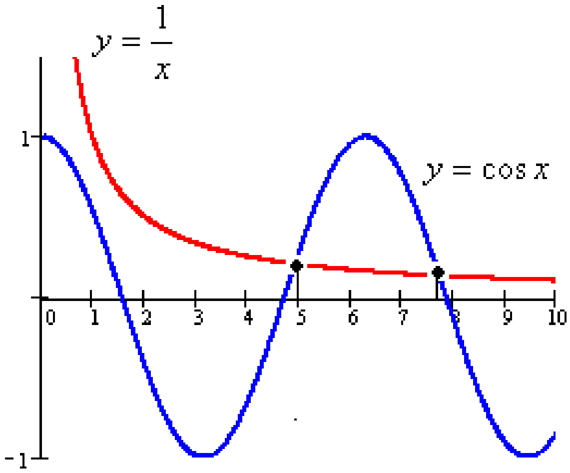

Рисунок 11 – Отделение корней уравнения

Вычисления удобно оформить в виде таблиц 3-6.

Таблица 3 – Метод половинного деления

№	a	в	x	f(x)
1	7	8	7,5	0,21330
2	7,5	8	7,75	-0,02524
3	7,5	7,75000	7,62500	0,09584
4	7,62500	7,75000	7,68750	0,03563
5	7,68750	7,75000	7,71875	0,00527
6	7,71875	7,75000	7,73438	-0,00997
7	7,71875	7,73438	7,72656	-0,00235
8	7,71875	7,72656	7,72266	0,00146
9	7,72265	7,72656	7,72460	-0,0004

Корень уравнения равен x=7,7246, погрешность f(x)= – 0,0004.

Таблица 4 – Метод Фибоначчи

№	a:b	a	b	x	f(x)
1	1:1	7	8	7,5	0,21330
2	1:2	7,5	8	7,66667	0,05579
3	2:3	7,66667	8	7,80000	-0,07425
4	3:5	7,66667	7,8	7,71667	0,00729
5	5:8	7,71667	7,8	7,74872	-0,02398
6	8:13	7,71667	7,74872	7,72888	-0,00461
7	13:21	7,71667	7,72888	7,72134	0,00275
8	21:34	7,72113	7,72887	7,72421	-0,00005

Корень уравнения равен x=7,72421, погрешность f(x)= –0,00005.

Таблица 5 – Метод золотого сечения

№	a	b	c	f(c)
1	7	8	7,381966	0,31922
2	7,381966	8	7,618034	0,10250
3	7,618034	8	7,763932	-0,03887
4	7,618034	7,763932	7,673762	0,04893
5	7,673762	7,763932	7,708204	0,01553
6	7,708204	7,763932	7,729490	-0,00520
7	7,708204	7,729490	7,716335	0,00762
8	7,716335	7,729490	7,721360	0,00272
9	7,721359	7,729490	7,724465	-0,00030

Корень уравнения равен x=7,724465, погрешность f(x)=–0,0003.

Таблица 6 – Метод рандомизации

№	Rnd	a	b	x	f(x)
1	0,038625	7	8	7,038625	0,58590
2	0,845374	7,038625	8	7,851347	-0,12473
3	0,986774	7,038625	7,851347	7,840598	-0,11416
4	0,502909	7,038625	7,840598	7,441944	0,26610
5	0,292490	7,441944	7,840598	7,558546	0,15886
6	0,504041	7,558546	7,840598	7,700712	0,02281
7	0,427129	7,700712	7,840598	7,760461	-0,03547
8	0,999532	7,700712	7,760461	7,760433	-0,03545
9	0,839071	7,700712	7,760433	7,750822	-0,02604
10	0,097017	7,700712	7,750822	7,705573	0,01809
11	0,721382	7,705573	7,750822	7,738215	-0,01372
12	0,251936	7,705573	7,738215	7,713797	0,01009
13	0,816922	7,713797	7,738215	7,733745	-0,00936
14	0,430309	7,713797	7,733745	7,722381	0,00173
15	0,176364	7,722381	7,733745	7,724385	-0,00023

Корень уравнения равен x=7,724385, погрешность f(x)=–0,00023.

Вывод. В ходе лабораторной работы вычислен корень уравнения $\frac{1}{x} = \cos x$, равный x=7,724 с погрешностью 0,001.

Михащенко Татьяна Николаевна

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ
С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**
$f(x)=0$

Методические указания
к выполнению лабораторных работ
по дисциплине «Численные методы»
для студентов направлений 010100.62, 050100.62, 050202.62

Редактор Е.А. Могутова

Подписано в печать 27.01.15	Формат 60×84 1/16	Бумага 65 г/м^2
Печать цифровая	Усл. печ.л. 1,25	Уч.-изд. л. 1,25
Заказ 4	Тираж 25	Не для продажи

РИЦ Курганского государственного университета.
640000, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.