МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра алгебры, геометрии и методики преподавания математики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
(Часть 1)

Методические указания
для практических занятий и самостоятельной работы
студентов направления 010100.62

Курган 2014

Кафедра: «Алгебра, геометрия и методика преподавания математики»

Дисциплина: «Теория вероятностей»,
(направление 010100.62).

Составил: ст. преподаватель Е.А. Лукерьянова.

Утверждены на заседании кафедры «15» октября 2014 г.
Рекомендованы методическим советом университета «20» декабря 2013 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Изучение вероятностно-статистического материала продиктовано самой жизнью. Вероятностный характер многих явлений действительности во многом определяет поведение человека. Курс «Теория вероятностей» должен формировать соответствующие практические ориентиры, вооружать обучающихся, как общей вероятностной интуицией, так и конкретными способами оценки данных. Необходимость формирования вероятностного мышления обусловлена и тем, что вероятностные закономерности универсальны: современные физика, химия, биология, демография, лингвистика, весь комплекс социально-экономических наук развивается на базе вероятностно-статистической математики.

Основные цели изучения дисциплины состоят в следующем:

1) овладение системой вероятностно-статистических представлений, необходимых человеку в повседневной жизни, для изучения на современном уровне общественных и естественнонаучных дисциплин в вузе;
2) формирование вероятностной интуиции, статистической культуры, комбинаторного мышления, умение делать обоснованные выводы на основе имеющейся информации;
3) овладение такими важнейшими методами познания, как нахождение закономерностей в случайных процессах, создание адекватных моделей явлений, экспериментальная проверка гипотез.

Краткое содержание дисциплины: случайные события; случайные величины; многомерные случайные величины; предельные теоремы теории вероятностей.

Особая роль в подготовке студентов к профессиональной деятельности принадлежит самостоятельной работе, организуемой в процессе обучения. Настоящие методические указания предназначены для организации самостоятельной работы по изучению курса.

Методические указания включают в себя планы занятий, примерные задания для контрольных работ, статистические таблицы. Планы занятий содержат теоретическую справку, вопросы для повторения, задачи для решения в аудитории, самостоятельного решения, решения дома. Задачи для решения в аудитории предназначены для обсуждения и совместного решения в группе. Задачи для самостоятельного решения студенты выполняют индивидуально, затем происходит обсуждение в группе, также задачи для самостоятельного решения могут быть использованы для проверочных самостоятельных работ. Для закрепления знаний, полученных на лекциях и практических занятиях, студенту предлагаются задачи для решения дома с последующей проверкой на занятии.

Методические указания составлены в соответствии с учебным планом по дисциплине «Теория вероятностей».

Тема 1. Пространство элементарных событий. Алгебра событий

Теоретическая справка

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным явлениям.

Под случайным явлением понимают явление, предсказать исход которого невозможно (при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта оно протекает каждый раз несколько по иному).

Опыт, эксперимент, наблюдение явления называют *испытанием.*

Результат, исход испытания называется *событием.*

Для обозначения событий используются большие буквы латинского алфавита: *A, B, C* и т.д.

Определение 1. Событие А называется *случайным,* если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

Определение 2. Два события называются *совместимыми,* если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Определение 3. Два события называются *несовместимыми,* если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании. Несовместимость более чем двух событий в данном испытании означает их по парную несовместимость.

Определение 4. Два события *A* и *B* называются *противоположными,* если в данном испытании они несовместимы и одно из них обязательно происходит.

Событие, противоположное событию А, обозначают через $\overline{\mathrm{A}}$.

Определение 5. Событие называется *достоверным,* если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и *невозможным*, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

Говорят, что совокупность событий образует *полную группу событий* для данного испытания, если его результатом обязательно становится хотя бы одно из них.

Рассмотрим полную группу попарно несовместимых событий $U_1, U_2, \ldots, U_n$, связанную с некоторым испытанием. Предположим, что в этом испытании осуществление каждого из событий U_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ равновозможно, т.е. условия испытания не создают преимуществ в появлении какого-либо события перед другими возможными.

События, образующие полную группу попарно несовместимых и равновозможных событий, называют *элементарными событиями.*

Событие *A* называется *благоприятствующим* событию *B,* если наступление события *A* влечет за собой наступление события *B*.

Действия над событиями

Определение 6. Суммой событий А и В называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении по крайней мере одного из событий А или В.

Аналогично суммой конечного числа событий A_1, A_2, ..., A_k называется событие $A = A_1 + A_2 + ... + A_k$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A_i ($i=1, ..., k$).

Определение 7. Произведением событий А и В называется событие $C = AB$, состоящее в том, что в результате испытания произошли и событие A, и событие B.

Аналогично произведением конечного числа событий A_1, A_2, ..., A_k называется событие $A = A_1 A_2 \dots A_k$, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события.

Вопросы для повторения

1 События. Примеры событий.

2 Невозможные, достоверные и случайные события. Примеры.

3 Совместные и несовместные события. Примеры.

4 Равновозможные события. Примеры.

5 Полная группа событий. Примеры.

6 Противоположное событие. Примеры.

7 Сумма и произведение событий. Примеры.

8 Алгебра событий. Σ – алгебра событий.

Задачи для решения в аудитории

1 Укажите пространство элементарных событий для следующих испытаний: а) производится выстрел по мишени, представляющий собой 10 концентрических кругов, занумерованных числами от 1 до 10; б) проводится турнирный футбольный матч между двумя командами; в) наудачу подбрасывается игральная кость.

Можно ли составить несколько пространств элементарных событий для какого-нибудь испытания?

2 Для испытания, состоящего в двукратном подбрасывании игрального кубика, запишите все возможные исходы испытания, если элементы пространства элементарных событий являются: а) упорядоченными парами чисел m и n; б) не упорядоченными парами чисел m и n; в) являются суммами m и n. Во всех трех случаях m и n выражают число очков, выпавших при каждом броске.

3 На десяти жетонах выбиты числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Наудачу извлекается один жетон. В каких из следующих ответах указаны все возможные исходы испытания: а) {четное; нечетное }; б) {простое, 4; 6; 8; 9; 10}, в) {четное; 1; 3; 5}, {не более трех; не менее четырех}?

4 Являются ли совместными следующие события: а) опыт бросания монеты, события: A_1 – появления герба, A_2 – появление решки; б) опыт бросания двух монет, события: B_1 – появления герба, B_2 – появление решки; в) опыт – два выстрела по мишени, события: C_0 – ни одного попадания, C_1 – одно попадание, C_2 – два попадания; г) опыт – два выстрела по мишени, события: D_1 – хотя бы один промах, D_2 – хотя бы одно попадание?

5 Являются ли равновозможными следующие события: а) опыт – бросание двух монет, события: A_1 – появление двух гербов, A_2 – появление одной решки и одного герба, A_3 – выпадение двух решек; б) опыт – бросание игральной кости, события: B_1 – выпадение менее трех очков, B_2 – выпадение более трех очков; в) опыт – бросание правильной монеты, события: C_1 – появление герба, C_2 – появление решки?

6 Образуют ли полную группу следующие группы событий: а) опыт бросания двух монет, события: A_1 – появление двух гербов, A_2 – появление двух решек; б) опыт – два выстрела по мишени, события: B_0 – ни одного попадания, B_1 – одно попадание, B_2 – два попадания по мишени; в) опыт – два выстрела по мишени, события: C_1 – хотя бы одно попадание, C_2 – хотя бы один промах?

7 Назовите для указанных событий противоположные: A – «выпало два герба», для опыта бросание двух монет; B – «вытащили белый шар», опыт: вытаскивают один шар из ящика, в котором лежат белые, красные и синие шары; C – «три попадания», опыт: сделано три выстрела по мишени; D – «хотя бы одно попадание», опыт: пять выстрелов по мишени; E – «не более двух попаданий», опыт: пять выстрелов по мишени; F – «выиграл Петров», опыт: партия в шахматы между Петровым и Васиным.

8 Для получения кредита предприятие обратилось к трем банкам. Банки выделяют кредит независимо друг от друга, и если примут решение о его выделении, то в размере: первый банк – 60 млн рублей, второй – 40 млн рублей, третий – 100 млн рублей. Рассмотрим следующие события: A – первый выделит кредит, B – второй выделит кредит, C – третий выделит кредит, D – предприятие получит кредит в размере 100 млн. рублей, E – предприятие получит кредит не менее 140 млн рублей. Запишите события D – предприятие получит кредит в размере 100 млн рублей, E – предприятие получит кредит не менее 140 млн рублей через события A, B, C.

Задачи для самостоятельного решения

1 Сколько элементарных событий содержит каждое из следующих случайных событий: а) сумма двух наудачу выбранных однозначных чисел равна 12 (элементарное событие – появление пары однозначных чисел (m,n)); б) число очков выпавших на верхней грани игрального кубика нечетное.

2 Приведите примеры: а) двух несовместных событий и образующих полную группу событий, но не равновозможных; б) двух равновозможных событий, образующих полную группу, но совместных.

3 Может ли сумма событий совпадать с их произведением?

4 В поле микроскопа находится четыре клетки. За время наблюдения каждая клетка может как разделиться, так и не разделиться. Рассмотрим следующие события: A – разделилась ровно одна клетка; B – разделилась хотя бы одна клетка; C – разделилось не менее двух клеток; D – разделилось ровно три клетки; E – разделились все клетки. Запишите словами, в чем состоят события 1-7 и верны ли равенства 8 и 9:

1) E; *2)* $A + B$; *3)* $A \pm B$; *4)* $B + C$; *5)* $B \cdot C$; *6)* $(C + D) + E$; *7)* $B \cdot E$; *8)* $B \cdot E = C \cdot E$; *9)* $B \cdot C = D$.

Задачи для решения дома

1 Указать события, противоположные следующим: А – три дня шел дождь; В – среди пяти человек нет ни одного мужчины; С – из трех облигаций хотя бы одна выигрывает; D – при одном бросании игральной кости выпадает не менее 5 очков.

2 Пусть А и В – некоторые события. Запишите следующие события в более простой форме:

а) $(A+\bar{B})\cdot\bar{A}$ б) $(A+\bar{B})\cdot(\bar{A}+B)$; в) $\overline{\bar{A}\bar{B}}$; г) $\overline{\bar{A}+\bar{B}}$.

3 Прибор состоит из двух блоков. Первый блок состоит из двух однотипных деталей и работает при исправности хотя бы одной из них. Второй блок состоит из трех однотипных деталей и работает при исправности хотя бы двух из них. Весь прибор работает, если работают оба блока. Выразите через события A_k – «исправна k-я деталь первого блока», k = 1, 2, B_n – «исправна n-я деталь второго блока», где n = 1, 2, 3 и $\bar{A}_n$, $\bar{B}_n$ события:

А – «работает первый блок»;
В – «работает второй блок»;
С – «не работает первый блок»;
D – «не работает второй блок»;
И – «прибор работает»;
K – «прибор не работает».

Тема 2. Статистическое определение вероятности событий. Классическое определение вероятности события

Теоретическая справка

Пусть произведено n испытаний, при этом некоторое событие A наступило m раз.

Определение 1. Число m называется *абсолютной частотой* (или просто *частотой)* события A, а отношение $\frac{m}{n}$ называется *относительной частотой* события A.

Относительная частота события А обозначается Р*(А) и находится по формуле $P^*(A)=\frac{m}{n}$.

Пример 1. При транспортировке из 10000 арбузов испортилось 26. Здесь m =26 – абсолютная частота испорченных арбузов, а $P^*(A) = \frac{26}{10000} =$ =0,0026 – относительная.

Определение 2. Статистической вероятностью события А называется число, около которого колеблется относительная частота события А при достаточно большом числе испытаний.

Пример 2. Производится бросание монеты.

Таблица 1 – Результаты подбрасывания монеты

Экспериментатор	Число бросаний	Число выпадений герба	Относительная частота
Бюффон	4040	2048	0,5080
Пирсон 1	12000	6 019	0,5016
Пирсон 2	24000	12012	0,5005

Здесь относительные частоты незначительно отличаются от числа 0,5, причем тем меньше, чем больше число испытаний. При 4040 испытаниях отклонение равно 0,008, а при 24 000 – 0,0005.

Таким образом, относительная частота события приближенно совпадает с его вероятностью в статистическом смысле, если число испытаний достаточно велико.

Существует простой способ определения вероятности события, основанный на равновозможности любого из конечных числа исходов опыта. Пусть производится опыт с n исходами, которые можно представить в виде полной группы несовместных событий. Такие исходы называют случаями, шансами, элементарными событиями, опыт – классическим. Про такой опыт говорят, что он сводится к схеме случаев. Случай w_i, который приводит к наступлению события А, называется благоприятствующим этому событию.

Определение 3. Вероятностью события А называется отношение числа элементарных событий благоприятствующих событию А, к общему числу элементарных событий: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Пример 3. Вычислить вероятность выпадения герба при одном бросании монеты.

Решение. Очевидно, событие А – выпадение герба – и событие *B* – выпадение решки – образуют полную группу несовместимых и равновозможных событий для данного испытания. Значит, здесь n = 2. Событию *A* благоприятствует лишь одно событие – само А, т.е. здесь m=1. Поэтому Р(А) =1/2 .

Применение элементов комбинаторики к нахождению вероятностей

Комбинаторика – раздел математики, занимающийся вопросами о том, сколько комбинаций определенного типа можно получить из данных предметов (элементов). Как при решении задач с использованием классического определения вероятности, так и в дальнейшем нам могут понадобиться некоторые определения и формулы комбинаторики.

Определение 1. Размещениями из n различных элементов по *m* элементов ($m \leq n$) называются комбинации, составленные из данных n элементов по *m* элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Например, из трех элементов a, b, c можно составить по два элемента следующие размещения: ab, ac, bc, ba, ca, cb.

Число A_n^m размещений из n элементов a_1, a_2, ..., a_n по m равно $A_n^m=$ $=n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$

Для подсчета вероятности события используют формулу $A_m^n=\frac{m!}{(m-n)!}$.

Определение 2. *Перестановками* из n различных элементов называются размещения из этих n элементов по n.

Перестановки можно рассматривать как частный случай размещений при m = n, поэтому общее число перестановок из n элементов равно $P_n =$ $=n(n-1)(n-2)\ldots3\cdot2\cdot1= n!$

Определение 3. *Сочетаниями* из n различных элементов по m элементов называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Обозначим через C_n^m число сочетаний из *n* элементов по m. Число сочетаний из n элементов по m вычисляются по формуле $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Свойства числа сочетаний:

1) $C_n^0 = C_n^n = 1$;
2) $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;
3) $C_n^k = C_n^{n-k}$;
4) $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.

Определение 4. *Размещением* с повторениями из n элементов по m называются кортежи длины m составленные из n элементного множества.

Размещения с повторениями могут отличаться друга от друга элементами, их порядком и количеством повторений элементов.

Число всех размещений из n элементов по m с повторениями обозначается $\overline{A_n^m}$ и вычисляется по формуле $\overline{A_n^m} = n^m$.

Определение 5. Пусть во множестве с n элементами есть k различных элементов, при этом 1-ый элемент повторяется n_1 раз, 2-ой элемент – n_2 раза, …, k-й элемент – n_k раз, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Перестановки из *n* элементов данного множества называют перестановками с повторениями из n элементов.

Число перестановок с повторениями из n элементов обозначается символом $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\ n_2! \ldots\ n_k!}.$$

Определение 6. Сочетаниями из n элементов по . m с повторениями называются различные составы кортежей длины m из n элементов некоторого множества X.

Их число обозначается $\overline{C_n^m}$.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m вычисляется по формуле $\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m$.

Рассмотрим пример на вычисление вероятности события с применением комбинаторики.

Пример 4. Партия из 10 деталей содержит одну нестандартную. Какова вероятность, что при случайной выборке 5 деталей из этой партии все они будут стандартными (событие A)?

Решение. Здесь число всех случайных выборок и $n = C_{10}^5$, а число выборок, благоприятствующих событию A, есть $m = C_9^5$. Таким образом, искомая вероятность

$$P(A) = \frac{C_9^5}{C_{10}^5} = \frac{\frac{9!}{5!4!}}{\frac{10!}{5!5!}} = \frac{9!5!5!}{10!5!4!} = \frac{9!5}{10!} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Вопросы для повторений

1 Совместные и несовместные события. Примеры.

2 Равновозможные события. Примеры.

3 Полная группа событий. Примеры.

4 Пространство элементарных событий.

5 Исходы испытания, благоприятствующие событию. Примеры.

6 Относительная частота событий и ее свойства.

7 Статистическое определение вероятности события.

8 Классическое определение вероятности события.

Задачи для решения в аудитории

1 Отдел технического контроля обнаружил 5 бракованных книг в партии из случайно отобранных 100 книг. Найти частоту появления бракованных книг.

2 При испытании партии приборов частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найдите число годных приборов, если проверено 200 приборов.

3 Как приближенно установить число рыб в озере?

4 На карточках написать буквы о, р, е, м. Карточки перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «море»?

5 Производится трехкратное подбрасывание монеты. Определить вероятность события A, заключающегося в выпадении «герба» хотя бы один раз.

6 Из колоды в 36 игральных карт наудачу выбирается одна. Определить вероятность того, что она окажется тузом.

7 Буквенный замок содержит на общей оси пять дисков, каждый из которых разделен на шесть секторов с различными нанесенными на них

буквами. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Определить вероятность того, что замок будет открыт, если установлена произвольная комбинация букв.

8 В урне 7 белых и 4 черных шара. Какова вероятность того, что среди пяти шаров, наудачу вынутых из урны, будет 3 белых и 2 черных?

9 Подсчитать вероятность того, что в наудачу выбранном телефонном номере, состоящем из четырех цифр, все цифры окажутся различными.

10 В лотерее 100 билетов, из них 40 выигрышных. Какова вероятность того, что ровно один из трех взятых билетов окажется выигрышным.

11 Выясните, что вероятнее выбросить при метании двух костей – 7 очков или 8 очков?

12 В мешке лежат 33 жетона, помеченные буквами русского алфавита. Из него извлекают жетоны и записывают соответствующие буквы, причем вынутые жетоны обратно не возвращают. Какова вероятность того, что при этом получится слово «оно»? Слово «ар»?

13 В мешке лежит 5 жетонов помеченных буквами «а», «б», «в», «г» и «д». Из него 4 раза извлекают жетон, который после записи его буквы возвращается обратно. Какова вероятность, что при этом ни одна буква не повторится дважды?

14 На карточках выписаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Наугад берут четыре карточки и выкладывают их в ряд. Какова вероятность того, что: 1) получится четное число; 2) получится число 1234?

15 В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд в каждой. Среди участников соревнований имеется пять команд экстра-класса. Найти вероятность следующих событий: A – все команды экстра-класса попадут в одну и ту же группу, B – две команды экстра-класса попадут в одну из групп, а три – в другую.

16 Из полного набора костей домино наудачу берутся пять костей. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы одна с шестеркой.

17 В ящике 60 деталей, среди которых три детали с дефектом. Из ящика наудачу взяли 10 деталей. Найти вероятность того, что среди них окажется: A – хотя бы одна дефектная, B – только одна дефектная, C – все три дефектные детали.

18 Пусть на диаметр задан допуск, равный ± 1. Изделия, выходящие за пределы этого допуска, считаются дефектными. Изделия, находящиеся внутри поля допуска, считаются годными. Партия, состоящая из 1000 изделий, содержит 15 изделий, выходящих за верхнюю границу допуска, и 18 изделий, выходящих за нижнюю границу допуска. Определить вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется дефектным.

19 Три студента МАИ, два студента МЭИ и четыре студента МГУ наугад рассаживаются в три вагона. Для каждого пассажира вероятность оказаться в любом из вагонов одинакова.

Найти вероятность следующих событий: а) три студента МАИ окажутся в разных вагонах; б) два студента МЭИ окажутся в разных вагонах.

20 Из десяти вариантов контрольной работы, написанных на отдельных карточках, наугад выбирают восемь и раздают восьми студентам, сидящим в одном ряду. Найти вероятность следующих событий:

A = {варианты 1 и 2 останутся неиспользованными},

B = {варианты 1 и 2 достанутся рядом сидящим студентам},

C = {будут распределены последовательные номера вариантов}.

Задачи для самостоятельного решения

1 Четыре зенитных пулемета ведут огонь по 3 самолетам. Каждый пулемет выбирает объект обстрела наугад. Какова вероятность того, что все 4 пулемета ведут огонь по одному и тому же самолету?

2 В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают наудачу один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказывается белым. После этого из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет тоже белым.

3 В урне c белых и d черных шаров ($c \geq 2$). Из урны вынимают наудачу сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

4 Производится одно бросание игральной кости. Найти вероятность событий: A – появление четного числа очков, B – появление не менее пяти очков, C – появление не более пяти очков.

5 Производится одно бросание одновременно двух игральных костей. Найти вероятность следующих событий: A – сумма выпавших очков равна 8, B – произведение выпавших очков равна 8, C – сумма выпавших очков больше, чем их произведение.

6 В лифте семиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность следующих событий: A – все пассажиры выйдут на четвертом этаже; B – все пассажиры выйдут одновременно; C – все пассажиры выйдут на разных этажах.

7 Брошена игральная кость. Какова вероятность, что выпадет не менее 5 очков?

8 Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков окажется:A – равной 7, B – не более 7, C – кратной 3 или 4.

9 Какова вероятность того, что в январе наудачу взятого года окажется 5 воскресений?

10 Задумано двузначное число, цифры которого различны. Найти вероятность того, что окажется равным задуманному числу: а) случайно названное двузначное число; б) случайно названное число, цифры которого различны.

11 Брошены две игральные кости. Найти вероятность событий: A – сумма выпавших очков равна восьми, а разность четырем, B – сумма

выпавших очков равна восьми, если известно, что их разность равна четырем.

12 В партии из p изделий k бракованных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки S изделий ровно l изделий окажутся бракованными.

13 Бросаются три игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна 11?

14 Среди 12 студентов 7 отличников. Из группы отобрано наудачу 5 человек. Какова вероятность того, что среди них окажется 3 отличника?

15 Подбрасывается К игральных костей. Найти вероятность получения суммы очков, равной К.

Задачи для решения дома

1 В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

2 Набирая номер телефона, абонент забыл последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

3 В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам отобраны наудачу 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.

4 Монета брошена 2 раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится «герб».

5 Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Каждый экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Найти вероятность того, что: а) студент знает все 3 вопроса, содержащиеся в его экзаменационном билете; б) студент знает только 2 вопроса своего экзаменационного билета; в) студент знает только 1 вопрос своего экзаменационного билета.

6 Какова вероятность того, что в наудачу взятом високосном году будет 53 воскресенья?

7 Участники жеребьевки тянут жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

8 Из 20 изделий 3 дефектных. Определить вероятность того, что случайно отобранные 4 изделия окажутся годными. Какова вероятность того, что число годных и дефектных изделий среди них одинаковое?

9 Из квадратиков с буквами сложили слово «вероятность», после чего квадратики положили в мешок и перемешали. Какова вероятность того, что после поочередного извлечения квадратиков из мешка получится то же самое слово?

10 В урне 3 белых и 8 черных шаров. Вынуто 3 шара. Какова вероятность того, что хотя бы один из них будет белым?

11 На девяти карточках написаны цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Две из них вынимаются наудачу и укладываются на стол в порядке появления, затем

читается полученное число, 07 (семь), 14 (четырнадцать) и т.п. Найти вероятность того, что число будет четным.

12 Для 20 участников конференции, среди которых 12 из России, в гостинице забронировано 20 номеров. Из этих номеров 12 – с видом на море. Портье наугад выдает участникам конференции ключи от номеров. Найти вероятность того, что номера с видом на море достанутся 12 российским участникам конференции.

13 В предположении, что день рождения любого человека равновероятен в любой день года, найти вероятность того, что все люди в компании из r человек родились в различные дни. Подсчитать эту вероятность для r = 23 .

Тема 3. Геометрическое определение вероятности

Теоретическая справка

Пусть отрезок l составляет часть отрезка *L*. На отрезок *L* на удачу поставлена точка. Если предположить, что вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L, то вероятность попадания точки на отрезок l определяется равенством *P = Длина l / Длина L*.

Пусть плоская фигура *g* составляет часть плоской фигуры *G*.
На фигуру *G* наудачу брошена точка. Если предположить, что вероятность попадания брошенной точки на фигуру *g* пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно G, ни от формы *g*, то вероятность попадания точки, в фигуру *g* определяется равенством
P = Площадь g /Площадь G.

Аналогично определяется вероятность попадания точки в пространственную фигуру, которая составляет часть фигуры *V:*
P = Объем f / Объем V.

Пример. В окружность вписан квадрат. В круг наудачу ставят точку. Какова вероятность того, что эта точка попадет в квадрат?

Событие А – точка попадает в квадрат.

Отношение площадей квадрата и круга дает искомую вероятность:

P(A) = $\frac{S_1}{S_2}$, где $S_1 = a^2$ (площадь квадрата), $S_2 = \pi R^2$ (площадь круга).

$$P(A) = \frac{a^2}{\pi R^2} = \frac{2\,R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}.$$

Вопросы для повторений

1 Совместные и несовместные события. Примеры.

2 Равновозможные события. Примеры.

3 Полная группа событий. Примеры.

4 Пространство элементарных событий.

5 Геометрическое определение вероятности события.

Задачи для решения в аудитории

1 На отрезок L длины 20 см помещен меньший отрезок длины 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

2 Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса R. Какова вероятность того, что расстояние точки от центра круга окажется меньше R/2?

3 Шар радиуса R брошен в проволочную сетку, образующую квадраты со стороной 6R. Какова вероятность того, что шар не заденет сетки?

4 Петров и Васечкин договорились о встречи на следующих условиях: каждый приходит в указанное место независимо друг от друга и наудачу в любой момент времени от 13.00 до 14.00. Придя, ожидает не более получаса, а уходит не позднее 14.00. Какова вероятность того, что они встретятся?

5 В точке С, положение которой на телефонной линии АВ длины l равновозможно, произошел разрыв. Определить вероятность того, что точка С удалена от точки А на расстояние, не меньше l.

6 Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, где p и q выбраны наудачу на отрезке [– 1; 1] окажутся действительными.

7 На отрезке ОА длины L числовой оси ОХ наудачу поставлены две точки: В(х) и С(у). Найти вероятность того, что из трех получившихся отрезков можно построить треугольник.

8 На плоскости заданы окружность радиуса R и точка А, находящиеся на расстоянии d (d>R) от центра окружности. Найти вероятность того, что прямая, проведенная наудачу через точку А, пересечет окружность.

Задачи для самостоятельного решения

1 В квадрат с вершинами в точках (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1) наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что ее координаты x и y будут удовлетворять неравенству y<2x?

2 На плоскости проведены параллельные линии, расстояния между которыми попеременно равны 1,5 см и 8 см. Определить вероятность того, что наудачу брошенный на эту плоскость круг радиуса 2,5 см не будет пересечен ни одной линей.

3 В любой момент промежутка времени Т равновозможные поступления в приемник двух сигналов. Приемник будет забит, если разность между моментами поступления сигналов меньше τ. Определить вероятность того, что приемник будет забит.

4 Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное y/x не более двух.

Задачи для решения дома

1 На окружности радиусом R зафиксирована точка А. Какова вероятность того, что случайно брошенная на окружность точка В такова, что АВ = R?

2 Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника.

3 На плоскости начерчены две концентрические окружности радиусов 5 см и 10 см. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями.

4 На отрезке ОА длины L числовой оси ОХ наудачу поставлены две точки В (х) и С (у), причем $y \geq x$. Найти вероятность того, что длина отрезка ВС будет меньше длины отрезка ОВ (см. рисунок 1)

Рисунок 1 – Отрезок ОА

5 Какова вероятность того, что сумма двух наудачу взятых положительных чисел, каждое из которых не больше единицы, не превзойдет единицы, а их произведение будет не больше 2/9?

Тема 4 Условные вероятности событий. Вычисление вероятностей событий

Теоретическая справка

Пусть Ω множество всех возможных исходов некоторого опыта (эксперимента), S – алгебра событий.

Определение 1. Совокупность S подмножеств множества Ω называется *алгеброй,* если выполнены следующие условия:

1 S содержит невозможное и достоверное события.

2 Если события A_1 , A_2, … ,A_n, … (конечное или счетное множество) принадлежит S, то S принадлежит сумма, произведение и дополнение (т.е. противоположное для A_i) этих событий.

Определение2. Вероятностью называется функция Р(А), определенная на алгебре событий S, принимающая действительные значения и удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) A_1 Аксиома неотрицательности: вероятность любого события $A \in S$ неотрицательна, т.е. $P(A) \geq 0$;

2) A_2 Аксиома нормированности: вероятность достоверного события равна единице, т.е. $P(\Omega)=1$;

3) A_3 Аксиома аддитивности: вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е. если $A_i \cdot A_j = \emptyset$ (I≠J), то $P(\sum_k A_k) = \sum_k P(A_к)$.

Определение 3. Совокупность объектов (Ω, S,P), где Ω – пространство элементарных событий, S алгебра событий, P – числовая функция, удовлетворяющая аксиом, называется *вероятностным пространством случайного эксперимента.*

Свойства вероятности

1 Вероятность невозможного события равна 0, т.е. $P(\emptyset)=1$.

2 Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т.е. P(A)+P(A)=1.

3 Вероятность любого события не превосходит единицы, т.е. $P(A) \leq 1$.

4 Если $A \subset B$, т.е. событие A влечет за собой B, т.е. $P(A) \leq P(B)$.

5 Если события A_1 , A_2, … , A_n образуют полную группу несовместных событий, т.е. $\sum_k A_k = \Omega$ и $A_i \cdot A_j = \emptyset$ (I≠J), то $P(\sum_i A_i) = 1$.

Условные вероятности

Определение 4. Условной вероятностью события B при условии, что произошло событие A, называется отношение вероятности произведения этих событий к вероятности события A, причем $P(A) \neq 0$, обозначается символом P(B\A).

Таким образом $P(B\backslash A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, $P(A) \neq 0$.Вероятность P (B), в отличие от условной, называется безусловной вероятностью. Аналогично определяется условная вероятность события A при условии B, т.е. P (A\B).

Пример 1. В урне 2 белых и 7 черных шаров. Из нее последовательно вынимают два шара. Какова вероятность того, что 2-й шар окажется белым при условии, что 1-й шар черный?

Решим задачу двумя способами.

1 Пусть A – первый шар черный, B – второй шар белый. Так как событие A произошло, то в урне осталось 8 шаров, из которых 2 белых. Поэтому $P(B\backslash A)=\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

2 Найдем P (B\A)исходя из формулы $P(B\backslash A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, $P(A) = \frac{7}{9}$, $P(AB)=9 \cdot 8 = 72$ – общее число исходов (появление двух шаров). Событию AB благоприятствуют $m=2 \cdot 7 = 14$ исходов. Поэтому $P(AB) = \frac{14}{72} = \frac{7}{36}$. Следовательно, $P(B\backslash A)= \frac{7}{36} : \frac{7}{9} = \frac{1}{4}$.

Вероятность произведения событий. Независимость событий

Из определения условной вероятности следует, что P (AB)= P(A)·P (B\A)= P(B) ·P (A\B), т.е. вероятность произведения двух событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло.

Последнее равенство называют правилом или теоремой умножения вероятностей. Это правило обобщается на случай n событий:
$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2| A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n | A_1 \cdot A_2 | A_1 \cdot \ldots \cdot A_n | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$.

Определение 5. Событие А называется независимым от события В, если его условная вероятность равна безусловной, т.е. $P(A)= P(A \backslash B)$.

Лемма (о взаимной независимости событий). Если событие А не зависит от В, то событие А не зависит от В.

Можно дать следующее определение независимости событий.

Определение 6. Два события называются независимыми, если появление одного из них не меняет вероятность появления другого.

Для независимых событий правило умножения вероятностей принимает вид: $P(AB)= P(A) \cdot P(B)$.

Равенство $P(AB)= P(A) \cdot P(B)$ часто используют в качестве определения независимости событий: события А и В называются независимыми, если

$P(AB)= P(A) \cdot P(B)$. Можно доказать, что если события А и В независимы, то события $\overline{A}$ и B, $\overline{B}$ и A, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ независимы.

Определение 7. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми, если каждое из них не зависит от произведения любого числа остальных событий и от каждого в отдельности. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, то $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$.

Теорема. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их произведения, т.е. $P(A+B)=P(A)+P(B) - -P(A \cdot B)$.

Можно получить формулу вероятности суммы трех и большего числа совестных событий; для трех событий она имеет вид $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+ +P(C) - P(A \cdot B) - P(A \cdot C) - P(B \cdot C)+P(A \cdot B \cdot C)$.

Проще найти вероятность суммы нескольких совместных событий $P(B)=P(A_1+ +A_2+\ldots+A_n)$, используя равенство $P(B) + P(\overline{B})=1$, где $\overline{B}= \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}$ – противоположно событию В. Тогда $P(B)= 1- P(\overline{B})$.

Вопросы для повторений

1 Совместные, несовместные события. Примеры.

2 Зависимые, независимые события. Примеры.

3 Несовместимость нескольких событий. Примеры.

4 Независимые в совокупности события. Примеры.

5 Попарно независимые события. Примеры.

6 Аксиоматическое определение вероятности.

7 Свойства вероятностей.

8 Условные вероятности.

9 Вероятность произведения событий.

10 Вероятность суммы событий.

Задачи для решения в аудитории

1 Опыт состоит в последовательном бросании двух монет. Рассматриваются события: A – выпадения герба на первой монете, B – выпадение хотя бы одного герба, E – выпадение хотя бы одной цифры, F – выпадение герба на второй монете. Определить, являются зависимыми или независимыми события в следующих парах событий: 1) A и E; 2) A и F; 3) B и E; 4) B и F.

2 Из колоды карт (52 карты) наугад выбирают одну карту. Являются ли зависимыми события A={эта карта туз} и B={эта карта имеет пиковую масть}?

3 На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу два учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

4 В лотерее выпущено 10000 билетов и установлено: 10 выигрышей по 200 р., 100 – по 100 р., 500 – по 25 р. и 1000 выигрышей по 5 р. Гражданин купил один билет. Какова вероятность того, что он выигрывает не меньше 25 р.?

5 Разрыв электрической цепи происходит в том случае, когда выходит из строя хотя бы один из трех последовательно соединенных элементов. Определить вероятность того, что не будет разрыва цепи, если элементы выходят из строя соответственно с вероятностями 0,3; 0,4; 0,6.

6 Партия из 100 деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной детали среди пяти проверяемых. Какова вероятность того, что данная партия не будет принята, если она содержит 5% неисправных деталей.

7 В группе 25 студентов, из них отлично успевают по математике 5 человек, хорошо – 12, удовлетворительно – 6, и слабо – 2. Преподаватель, не знакомый с группой, вызывает по списку одного из студентов. Определить вероятность того, что вызванный студент будет отличником или хорошо успевающим.

8 Два стрелка, для которых вероятность попадания в мишень равна соответственно 0,7 и 0,8, производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

9 В электрическую цепь последовательно включены 3 элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны: $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}15$; $p_3 = 0{,}2$. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

10 На предприятие при массовом изготовлении изделий брак составляет в среднем 2,4% всех изделий. Из числа годных 92,3% составляют изделия первого сорта. Найти вероятность того, что наудачу взятое из всей партии изделие окажется первого сорта.

11 Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором 2 вопроса.

12 В ящике 10 кубиков, среди которых 6 окрашенных. Наудачу извлекают 4 кубика. Найти вероятность того, что извлеченные кубики окажутся окрашенными.

13 Для получения кредита предприятие обратилось к трем банкам. Статистические исследования показали, что вероятности выделения кредита этими банками соответственно равны $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,3$ и $p_3 = 0,9$. Банки выделяют кредит независимо друг от друга и, если примут решение о его выделении, то в размере: первый банк – 60 млн руб., второй банк – 40 млн руб., и третий – 100 млн руб.

Рассматриваются события:

A – первый банк выделит кредит,

B – второй банк выделит кредит,

C – третий банк выделит кредит,

D – предприятие получит кредит в размере 100 млн руб.,

E – предприятие получит кредит в размере не менее 140 млн руб.

Требуется: 1) записать события D и E через события A, B и C; 2) найти вероятности событий D и E.

14 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,4. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,22. Найти вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

15 При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,2, а при каждом последующем – 0,7. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

16 Три независимых эксперта делают прогнозы стоимости акций компании, ошибаясь при этом с одинаковой вероятностью p. Найти p, если вероятность того, что хотя бы один из них ошибается, равна 0,271.

17 Пусть P(A)=P(B) $= \frac{1}{2}$. Верно ли, что P(A/B)=P(B/A)?

18 Пусть P(C)=$\frac{1}{2}$. Сравните вероятности P(A+B/C) и P(A/C)+P(B/C).

19 Некто нашел чужую пластиковую банковскую карту. Найти вероятность того, что двух попыток, предоставляемых банкоматом, хватит для того, чтобы отгадать неизвестный ему четырехзначный код.

20 Пусть P(A)= $\frac{1}{2}$. Найдется ли такое событие B, чтобы P(AB) $> \frac{1}{2}$? Ответ обосновать.

Задачи для самостоятельного решения

1 Каждое из четырех несовместных событий может произойти соответственно с вероятностями 0,012; 0,001; 0,006; 0,002. Определить вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из событий.

2 По статистическим данным ремонтной мастерской на 20 остановок токарного станка в среднем приходится 10 остановок для смены резца, 3 остановки из-за неисправности привода, 2 – из-за несвоевременной подачи заготовок, остальные по другим причинам. Найти вероятность остановки станка по другим причинам.

3 Прибор состоит из трех блоков. Надежность каждого из них в течение времени T равна 0,9, и блоки отказывают независимо друг от друга. Найти надежность прибора в течение времени T, если отказ каждого блока означает отказ прибора.

4 В мастерской имеется 2 мотора. Вероятность работы с полной нагрузкой для каждого из них равна 0,4. Определить вероятность того, что A – оба мотора работают с полной перегрузкой; B – оба мотора работают с неполной нагрузкой; C – хотя бы один мотор работает с полной нагрузкой.

5 Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме, представленной на рисунке 2.

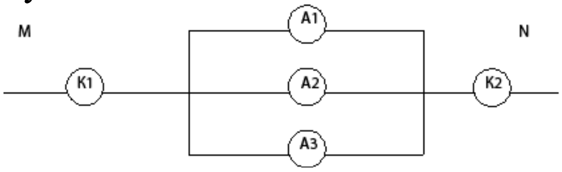

Рисунок 2 – Электрическая цепь между точками M и N

Выход из строя за время T различных элементов цепи – независимые события, имеющие следующие вероятности: $P(K_1) = 0{,}6$; $P(K_2) = 0{,}5$; $P(A_1) = 0{,}4$; $P(A_2) = 0{,}7$; $P(A_3) = 0{,}9$. Определить вероятность разрыва цепи за указанный промежуток времени.

6 Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 – для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

7 В цехе работает семь мужчин и три женщины. По табельным номерам наудачу отобраны три человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

8 Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность поражения цели хотя бы одним выстрелом.

9 Вакансия, предлагаемая безработному биржей труда, удовлетворяет его с вероятностью 0,01. Сколько нужно обслужить безработных, чтобы вероятность того, что хотя бы один из них найдет работу, была бы не ниже 0,95?

10 Пусть P(A)=P(B)=$\frac{1}{2}$. Верно ли , что P(A/B)≥P(B/A)?

11 Пусть вероятность P(A)=$\frac{1}{2}$. $\mathrm{P(B)} = \frac{2}{3}$. Верно ли, что P(A+B≥ $\frac{1}{6}$)? Ответ обосновать.

12 Из колоды карт 36 карт подряд вытаскиваются две карты. Рассматриваются события А={первая карта имеет пиковую масть}, В={обе карты красного цвета}. Зависимы ли события А и В? Ответ обосновать.

Задачи для решения дома

1 Пусть события А и В – независимы и Р(АВ)=Р(В)=$\frac{1}{4}$. Найти вероятность Р(А+В).

2 Пусть Р(АВ)=Р(В)=$\frac{1}{4}$. Верно ли, что Р(А+В) больше в том случае, когда А и В независимы, чем когда А и В несовместны? Ответ обосновать.

3 Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом, втором, третьем справочниках, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что: а) формула содержится в одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трех справочниках.

4 Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

5 Сколько надо бросить игральных костей, чтобы с вероятностью, меньшей 0,3, можно было ожидать, что ни на одной из выпавших граней не появится шесть очков?

6 Техническое устройство состоит из 5 узлов. Вероятность отказа узлов в течение времени Т соответственно равны 0,1; 0,15; 0,12; 0,05; и 0,01. Найти вероятность отказа хотя бы одного узла в течение времени Т.

7 В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.

8 Пусть Р(В)$>$0. Доказать, что Р(А/$\overline{B}$)=1 – Р(А/В).

9 Пусть Р(А) =$\frac{1}{7}$, Р(В) = $\frac{4}{21}$. Верно ли, что Р(А+В)$\leq$ $\frac{1}{3}$. Ответ обосновать.

10 Система состоит из двух элементов с надежностями p_1 и p_2 соответственно. Элементы соединены параллельно и выходят из строя независимо друг о друга. Система работает. Найти вероятность того, что неисправен первый элемент.

Тема 5. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Теоретическая справка

Теорема. Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из n попарно несовместимых событий B_1, B_2, ..., B_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$$

(формула полной вероятности).

События $B_1, B_2, ..., B_n$ будем называть *гипотезами.*

Пример 1. Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом находятся две белые мыши и одна серая, во втором – три белые и одна серая, в третьем – две белые и две серые мыши. Какова вероятность того, что из наугад выбранного ящика будет извлечена белая мышь?

Решение. Обозначим B_1 – выбор первого ящика, B_2 – выбор второго ящика, B_3 – выбор третьего ящика, A – извлечение белой мыши.

Так как все ящики одинаковы, то $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 1/3$. Если выбран первый ящик, то $P_{B_1}(A) = 2/3$. Аналогично $P_{B_2}(A) = 3/4$, $P_{B_3}(A) = 1/2$. Наконец, по формуле полной вероятности получаем $P(A)= =1/3\cdot 2/3+1/3\cdot 3/4+1/3\cdot 1/2 = 23/36$.

Пусть в результате опыта событие A наступило вместе с одним из событий $B_1, B_2, ..., B_n$, образующих полную группу. Спрашивается, как изменились (в связи с тем, что событие A уже произошло) вероятности гипотез, т.е. величины $P(B_k)$, $k=1, 2, ..., n$? Найдем условную вероятность $P_A(B_k)$.

Имеем $P(AB_k)= P(A)P_A(B_k) = P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)$.

Отсюда $P_A(B_k) = \frac{P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}{P(A)}$, где $k=1, 2, ..., n$.

Вероятность события A находят по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

Пример 2. Партия деталей изготовлена тремя рабочими, причем первый рабочий изготовил 25% всех деталей, второй – 35%, третий – 40%. В продукции первого рабочего брак составляет 5%, в продукции второго – 4% и в продукции третьего – 2%. Случайно выбранная для контроля деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена вторым рабочим?

Решение. Введем обозначения для событий: A – выбранная для контроля деталь оказалась бракованной; B_1, B_2, B_3 – эта деталь изготовлена соответственно первым, вторым и третьим рабочим. Имеем:

$P(B_1) = 0,25$; $P(B_2) = 0,35$; $P(B_3) = 0,40$; $P_{B_1}(A) = 0,05$; $P_{B_2}(A) = 0,04$; $P_{B_3}(A) = =0,02$.

По формуле Байеса находим $P_A(B_2) = \frac{0,35\cdot 0,04}{0.25\cdot 0,05+0,35\cdot 0,04+0,4\cdot 0,02} = \frac{28}{69} \cong 0,4$.

Вопросы для повторения

1 Полная группа несовместных событий. Примеры.

2 Формула полной вероятности.

3 Формула Байеса.

Задачи для решения в аудитории

1 Подбрасывают две игральных кости. Какие из представленных ниже наборов событий образуют систему гипотез:

1) H_1 ={на первой кости выпадет одно очко},,
H_2= {на первой кости выпадет два очка},
……………………………………………,
H_6= {на первой кости выпадет шесть очков};

2) H_1 = {на обеих костях выпадет по одному очку},
H_2= {на обеих костях выпадет по два очка},
……………………………………………,
H_6= {на обеих костях выпадет по шесть очков};

3) H_1 = {на первой кости выпадет четное число очков},
H_2= {на второй кости выпадет нечетное число очков}?

2 Пусть H_1, H_2, H_3,H_4 – равновероятные гипотезы. Являются ли гипотезами события H_1+H_2, H_3+H_4 ?

3 Пусть H_1, H_2, H_3 – равновероятные гипотезы. Произошло событие А= =H_2 + H_3. Образуют ли систему гипотез события H_1 + H_2 и H_3? Если да, то найдите их апостериорные вероятности.

4 В тире имеются пять ружей, вероятности попадания, из которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стрелок берет одно ружье наудачу.

5 Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения дефектной детали на первом автомате равна 0,06, на втором – 0,09. Производительность второго автомата втрое больше первого. Найти вероятность того, что взятая наудачу с конвейера деталь окажется дефектной.

6 Частица пролетает мимо трех счетчиков, причем она может попасть в каждый из них с вероятностями 0,3, 0,2 и 0,4. В свою очередь, если частица попадает в первый счетчик, то она регистрируется с вероятностью 0,6, во второй – с вероятностью 0,5 и в третий – с вероятностью 0,55. Найти вероятность того, что частица будет зарегистрирована.

7 Среди поступающих на сборку деталей с первого, второго, третьего и четвертого автоматов наблюдается соответственно 0,1%, 0,2%, 0,25% и 0,5% дефектных. Производительности автоматов относятся как 4 : 3 : 2 : 1 соответственно. Взятая наудачу деталь оказалась годной. Найти вероятность того, что она изготовлена первым автоматом.

8 Три охотника выстрелили по кабану, который был убит одной пулей. Определить вероятность того, что кабан убит каждым из охотников, если вероятности попадания соответственно равны 0,2; 0,4 и 0,6.

9 Имеется 10 одинаковых урн, из которых в девяти находятся по два черных и два белых шара, в одной – пять белых и один черный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечен белый шар. Какова вероятность того, что шар извлечен из урны, содержащий пять белых шаров?

10 Строительная бригада получает железобетонные перекрытия от трех домостроительных комбинатов (ДСК) от I ДСК – 30%, от II ДСК – 55% и от III ДСК – 15% перекрытий. Известно, что брак продукции I ДСК составляет

5%, II ДСК – 6%, а III ДСК – 10%. Полученные перекрытия хранятся в общем складе. Перекрытие, проверенное для контроля наугад, оказалось браком. Какова вероятность того, что бракованное перекрытие изготовлено на I ДСК?

11 Пятнадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Студент может ответить только на 25 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из одного билета или на один вопрос первого билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета.

12 Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 60% яиц из первого хозяйства – яйца высшей категории, а из второго хозяйства – 40% высшей категории. Всего высшую категорию получает 48% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

13 Две компании Х и У производят однотипную продукцию и конкурируют на рынке сбыта. Перед каждой из них стоит задача модификации производства. Существует два возможных пути изменения технологии: А и В. Вероятность того ,что компания Х выберет путь А, равна 0,4. Вероятность того, что компания У выберет путь А, равна 0,7. Компании выбирают пути изменения технологии независимо друг от друга. В таблице 2 приведены оцененные экспертами шансы на победу в конкурентной борьбе для компании Х в соответствии с выбором компаниями путей изменения технологии. Найти вероятность победы компании Х в конкурентной борьбе.

Таблица 2 – Шансы на победу в конкурентной борьбе для компании Х в соответствии с выбором компаниями путей изменения технологии

Х/У	А	В
А	5:3	2:1
В	1:2	1:2

Задачи для самостоятельного решения

1 Подбрасываются две игральные кости. Образуют ли систему гипотез следующие события: А={на первой кости выпадает одно очко}, В={сумма очков на двух костях равна 9}?

2 Имеются две партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое на удачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделия из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

3 Охотник сделал три выстрела по кабану. Вероятность попадания первым выстрелом примерно равна 0,4, вторым – 0,5, третьим – 0,7. Одним попаданием кабана можно убить с вероятностью, примерно равной 0,2, двумя попаданиями – с вероятностью, примерно равной 0,6, а тремя наверняка. Найти вероятность того, что кабан будет убит.

4 Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0,55, а ко

второму – 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,9, вторым – 0,98. Стандартное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверил второй товаровед.

5 У рыбака есть 3 излюбленных места рыбалки. Эти места он посещает с одинаковой вероятностью. Вероятность того, что рыба клюнет в первом месте, близка к 1/3, во втором – 1/2, в третьем – 1/4. Известно, что рыбак забросил удочку 3 раза, а вытащил только одну рыбу. Какова вероятность того, что он рыбачил в первом из излюбленных мест?

6 В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

Задачи для решения дома

1 Может ли априорная вероятность быть больше апостериорной? Ответ обосновать.

2 Партия электрических лампочек на 20% изготовлена заводом I, на 30% заводом II и на 50% – заводом III. Для завода I вероятность выпуска бракованной лампочки равна 0,01, для завода II – 0,005 и для завода III – 0,006. Какова вероятность того, что взятая наудачу из партии лампочка оказалась бракованной?

3 Обследование больного вызвало предположение о возможности одного из трех заболеваний: H_1, H_2, H_3 с вероятностями 5/12, 1/3, 1/4 соответственно. Для уточнения диагноза был проведен дополнительный анализ, дающий положительный ответ с вероятностью 0,8 при первом заболевании, с вероятностью 3/8 при втором и с вероятностью 1/6 при третьем заболевании. Анализ дал положительный результат. Какова после этого вероятность каждого из трех заболеваний.

4 В Сказочной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причем погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,6 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 12 февраля. Погода в Сказочной стране хорошая. Найти вероятность того, что 14 февраля в Сказочной стране будет отличная погода.

5 Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятность попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны $P_1 = 0{,}4$, $P_2 = 0{,}3$, $P_3 = 0{,}5$.

6 В торговую фирму поступили телевизоры от трех фирм изготовителей в соотношении 2:5:3. Телевизоры, поступающие от первой фирмы, требуют ремонта в течение гарантийного срока в 15% случаев, от второй и третьей – соответственно в 8% и 6% случаев. Найти вероятность

того, что поступивший в торговую фирму телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока.

Тема 6. Повторение независимых испытаний

Теоретическая справка

Пусть осуществляется n испытаний, причем вероятность появления события A в каждом испытании равна p и не зависит от исхода других испытаний (независимые испытания). Такая последовательность испытаний называется схемой Бернулли. Так как вероятность наступления события A в одном испытании равна p, то вероятность его не наступления равна $q = 1 – p$. Найдем вероятность того, что при n испытаниях событие A наступит m раз ($m \leq n$).

Пусть событие A наступило в первых m испытаниях m раз и не наступило во всех последующих испытаниях. Это сложное событие можно записать в виде произведения:

$$\underbrace{AA \dots A}_{m \text{ раз}} \ \underbrace{\bar{A}\bar{A} \dots \bar{A}}_{n-m \text{ раз}} .$$

Общее число сложных событий, в которых событие A наступает m раз, равно числу сочетаний из n элементов по m элементов. При этом вероятность каждого сложного события оказывается равной $p^m q^{n-m}$. Так как указанные сложные события являются несовместимыми, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей. Итак, если $P_n(m)$ есть вероятность появления события A m раз в n испытаниях, то

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

или

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \qquad (2.6)$$

Формула (2.6) называется формулой Бернулли.

Пример 1. Пусть всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найдем вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трех.

Решение. а) В данном случае $n = 4$, $m = 3$, $p = 0,9$, $q = 1 – p = 0,1$. Применяя формулу Бернулли, получим $P_4(3) = \frac{4!}{3!1!} (0,9)^3(0,1)^1 = 0,2916$; б) Искомое событие A состоит в том, что из четырех семян взойдут три или четыре. По теореме сложения вероятностей $P(A) = P_4(3) + P_4(4)$.
Но $P_4(4) = (0,9)^4 = 0,6561$. Поэтому $P(A) = 0,2916 + 0,6561 = 0,9477$.

Пусть проводится серия n независимых испытаний ($n = 1, 2, 3, \dots$), причем вероятность появления данного события A в этой серии $P(A) = p_n > 0$ зависит от ее номера n и стремится к нулю при $n \to \infty$ (последовательность «редких событий»). Предположим, что для каждой серии среднее значение числа появлений события A постоянно, т.е. $np_n = \mu = const$.

Отсюда $p_n = \frac{\mu}{n}$. На основании формулы Бернулли (2.6) для вероятности появления события A в n-й серии ровно m раз имеет место формула

$$P_n(m) = C_n^m\, p_n^m(1 - p_n)^{n-m} = C_n^m\left(\frac{\mu}{n}\right)^m\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-m}.$$

Пусть m фиксировано. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} C_n^m\left(\frac{\mu}{n}\right)^m = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]}{m!n^m}\,\mu^m =$$

$$= \frac{\mu^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\left[1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\right] = \frac{\mu^m}{m!};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{m!}\right)^{n-m} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left[\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-\frac{n}{\mu}}\right]^{-\mu}\cdot\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-m}\right\} = e^{-\mu}\cdot 1 = e^{-\mu}.$$

(здесь использован второй замечательный предел $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$). Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\mu^m}{m!}\,e^{-\mu}.$$

Если n велико, то в силу определения предела вероятность $P_n(m)$ сколь угодно мало отличается от $\frac{1}{m!}\cdot\mu^m\cdot e^{-\mu}$. Отсюда при больших п для искомой вероятности $P_n(m)$ имеем приближенную формулу Пуассона (для простоты знак приближенного равенства опущен). $P_n(m) = \frac{\mu^m}{m!}\,e^{-\mu}$, где $\mu = np_n$.

Пример 2. Завод отправил на базу 500 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,002. Найдем вероятность того, что на базу придут три негодных изделия.

Решение. По условию $n = 500$, $p_n = 0{,}002$, $m = 3$. Поэтому $\mu = 500\cdot 0{,}002 = 1$ и искомая вероятность $P_{500}(3) = \frac{1}{3!}\,e^{-1} = 0{,}06$.

Число (наступления события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна *p)* называют *наивероятнейшим,* если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях *k* раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число *k* определяют из двойного неравенства $np - q < ko < np + p$, причем:

а) если число $np - q$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число k ;

б) если число $np - q$ – целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно: $np - q$, $np + p$,

в) если число np – целое, то наивероятнейшее число $k = np$.

Пример 3. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит 46 испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

Решение. По условию, п = 15, р=0,9, Найдем наивероятнейшее число *ko* из двойного неравенства $np - q < k_0 < np + p$.

Подставив данные задачи в формулу, получим $150 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 < k_0 < 150 \cdot 0{,}9 + 0{,}9$, или $13{,}5 < ko < 14{,}4$. Так как k_0 – целое число, и поскольку между числами 13,4 и 14,4 заключено одно целое число, а именно 14, то искомое наивероятнейшее число $k_0 = 14$.

Локальная теорема Лапласа

Если производится n независимых испытания в каждом из которых событие А может произойти с вероятностью p ($0 < p < 1$), то вероятность того, что в n испытаниях событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равно (тем точнее, чем больше n)

$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$. Таблица функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в приложении А (см таблицу А1); для отрицательных значений надо использовать туже таблицу, но использовать тот факт, что функция четная.

Пример 4. Найти вероятность того. что событие А наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

Решение. Так как n=243 достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа: $P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Найдем значение $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{70-243 \cdot 0.25}{\sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = 1{,}37$, $\varphi(1{,}37) = 0{,}1561$, искомая вероятность $P_{243}(1400) = \frac{1}{6{,}75} \cdot 0{,}1561 = 0{,}0231$.

Интегральная теорема Лапласа

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие наступит не менее k_1 и не более k_2 раз, приближенно равна $P(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x')$. Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi \cdot} \cdot \int_0^x e^{-\frac{x}{2}} dz$ – функция Лапласа, $x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Таблица функции Лапласа для положительных значений x ($0 \leq x \leq 5$) приведены в приложении А (см таблицу А2); для значений $x \geq 5$ полагают $\Phi(x) = \frac{1}{2}$. Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Пример 5. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаниях постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 и не более 90 раз.

Решение. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа.

$$P\ (k_1;\ k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где $\Phi\ (x) = \frac{1}{2\pi\cdot} \cdot \int_0^x e^{-\frac{x}{2}} dz$ – функция Лапласа, $x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0.2}} = -1{,}25$, $x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 2{,}5$.

$\Phi\ (2{,}5) = 0{,}4938$, $\Phi\ (-1{,}25) = -0{,}3944$;

$P\ (75;\ 90) = 0{,}4938 — 0{,}3944 = 0{,}8882.$

Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от вероятности появления события не превысит положительного числа ε, приближенно равна удвоенной функции Лапласа при $x = \varepsilon\sqrt{n|pq}$:

$$P(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon) = 2\ \Phi\left(\varepsilon\sqrt{n|pq}\right).$$

Пример 6. Вероятность появления события в каждом из 625 независимых испытаниях равна 0,8. Найти вероятность того, что относительная частота появления событии отклонится от вероятности появления событии по абсолютной величине не более чем на 0,04.

Решение. Воспользуемся формулой $P(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon) = 2\ \Phi\left(\varepsilon\sqrt{n|pq}\right)$.

Имеем $P(\left|\frac{m}{625} - 0{,}8\right| \leq 0{,}04) = 2\ \Phi\left(0{,}04\sqrt{625|0{,}04 \cdot 0{,}96}\right) = 2\Phi\ (2{,}5) =$
$= 2 \cdot 0{,}4938 = 0{,}9876.$

Вопросы для повторения

1 Формула Бернулли $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$. Вывод формулы Бернулли.

2 Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях.

3 Локальная и интегральная формулы Муавра – Лапласа.

4 Формула Пуассона.

5 Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.

Задачи для решения в аудитории

1 Найти вероятность того, что при десяти бросаниях игральной кости три очка выпадут ровно два раза.

2 Что вероятнее – выиграть у равносильного противника (ничейный результат исключается): а) три партии из четырех или пять из восьми; б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

3 Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит: а) цифры пять; b) ровно двух пятерок; c) двух и

более пятерок. Известно, что все номера четырехзначные, неповторяющиеся и равновозможные (считать возможным номер 0000).

4 Испытывается каждый из пятнадцати элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равно 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

5 Медиками установлено, что 94% лиц, которым сделаны прививки против туберкулеза, приобретают иммунитет против этого заболевания. Какова вероятность того, что среди ста тысяч граждан, получивших прививки, 5800 не защищены от заболевания туберкулезом?

6 Вероятность получения по лотерее проигрышного билета равна 0,1. Какова вероятность того, что среди 500 наудачу купленных билетов не менее 48 и не более 55 безвыигрышных?

7 Всхожесть хранящегося на складе зерна равна 80%. Отбираются первые попавшиеся 100 зерен. Требуется определить вероятность того, что доля всхожих семян будет отличаться от 0,8 по абсолютной величине не более чем на 0,1.

8 Вероятность появления события в каждом из независимых испытаниях равна 0,5. Найти число испытаний n, при котором с вероятностью 0,7698 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

9 Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаниях равна 0,8. Найти такое $\varepsilon > 0$, что с вероятностью 0,9876 абсолютная величина частоты появления события от его вероятности 0,8 не превысит ε.

10 Вероятность того, что на странице книги могут оказаться опечатки, равна 0,0025. Проверяется книга, содержащая 800 страниц. Найдите вероятность того, что с опечатками окажется: а) 5 страниц, б) от трех до пяти страниц.

11 Средний процент невозвращения в срок кредита, выдаваемого банком, составляет 5%. Найти вероятность того, что при выдаче банком 100 кредитов проблемы с возвращением денег возникнут не менее чем в двух случаях.

Задачи для самостоятельного решения

1 В семье 10 детей. Считая вероятность рождения мальчика и девочки одинаковыми, определить вероятность того, что в данной семье: а) пять мальчиков, б) мальчиков не менее трех, но не более восьми.

2 Лицензия отбирается у любого торгового предприятия, как только торговая инспекция в третий раз обнаружит серьезное нарушение правил торговли. Найти вероятность того, что лицензия будет отобрана после пятой проверки. Известно, что вероятность обнаружения нарушения при одной проверке равна 0,2 и не зависит от результатов предыдущих проверок.

3 Вероятность встретить на улице своего учителя 0,002. Какова вероятность того, что среди 1200 случайных прохожих вы встретите не более трех своих учителей?

4 Какова вероятность того, что при двухсоткратном бросании монеты число появления герба k удовлетворяет неравенству: $95 \le k \le 105$?

5 Отдел технического контроля проверил 900 изделий на стандартность. Вероятность того, что деталь стандартная, равна 0,9. Найти с вероятностью 0,9544 границы, в которых будет заключено число m стандартных изделий среди проверенных.

6 Телефонная станция обслуживает 2000 абонентов. Вероятность позвонить любому абоненту в течение часа равна 0,003. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

7 Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Что вероятнее: отказ четырех приборов при испытании 20 или отказ шести приборов при испытании 30, если приборы испытываются независимо друг от друга?

8 Отдел надзора отделения центрального банка курирует деятельность ряда коммерческих банков. При сдаче квартальных отчетов серьезные финансовые нарушения обнаруживаются в среднем у 5% банков. На проверку выбрали три банка. Найти наиболее вероятное число банков с серьезными нарушениями финансовой отчетности среди выбранных.

Задачи для решения дома

1 Счетчик регистрирует попадающие в него частицы с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что он зарегистрировал 4 частицы при условии, что в него попало 10 частиц.

2 Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз.

3 Сколько надо произвести независимых испытаний с вероятностью появления события в каждом испытании, равной 0,4, чтобы наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях было равно 25?

4 Вероятность того, что саженец ели прижился, и будет успешно расти, примерно равна 0,8. Посажено 400 саженцев ели. Какова вероятность того, что нормально вырастут не меньше 250 деревьев?

5 Отдел технического контроля проверяет 475 изделий на брак. Вероятность того, что изделие браковано, равно 0,05. Найти с вероятностью 0,9426 границы, в которых будет заключено число m бракованных изделий среди проверенных.

6 Завод «Золотая балка» отправил в Москву 1500 бутылок сока. Вероятность того, что в пути бутылка может разбиться, равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет разбито не более четырех бутылок.

7 Прибор состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента в момент включения прибора равна 0,2. Найти:

а) наивероятнейшее число отказавших элементов; б) вероятность наивероятнейшего числа отказавших элементов; в) вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы четыре элемента.

8 Вероятность рождения мальчика равна 0,51 . Найти вероятность того, что в семье, где четверо детей, не менее двух девочек.

Примерный вариант контрольной работы № 1 для студентов факультета математики и информационных технологий направления 010100.62 «Математика»

1 В коробке находятся 60 красных и 40 синих карандашей. Найти вероятность того, что среди 5 наудачу вынутых из коробки карандашей 2 красных и 3 синих.

2 Стрелок производит 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания в цель при одном выстреле 0,8. Найти вероятность поражения цели хотя бы одним выстрелом.

3 Для некоторой местности среднее число теплых дней в октябре равно 14. Чему равна вероятность того, что первые три дня октября будут теплыми?

4 Сборщик получил 3 коробки одинаковых деталей, изготовленных заводом № 1 и 7 коробок деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартна, равна 0,8, а завода № 2 – 0,6. Из наудачу взятой коробки сборщик наудачу извлекает деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь.

5 Вероятность появления события A в каждом из 7 испытаний равна 0,2. Найти вероятность непоявления события A ровно 3 раза.

6 Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие появится 76 раз.

7 В ОТК поступила партия изделий. Вероятность того, что наудачу взятое изделие стандартно, равна 0,8. Найти вероятность того, что из 100 проверенных изделий окажется стандартных не менее 84.

8 Вероятность непоявления события в каждом из независимых испытаний равна 0,36. Произведено 144 испытаний. Найти вероятность того, что частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

Список литературы

1 Баврин, И. И. Высшая математика [Текст] / И. И. Баврин. – М. : Просвещение, 2004.

2 Владимирский, Б. М. Математика. Общий курс [Текст] : учебник для бакалавров / Б. М. Владимирский. – М. : Просвещение, 2008.

3 Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики [Текст] : учебное пособие для студентов / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 2006.

4 Ильин, В. А. Высшая математика [Текст] / В. А. Ильин. – М. : Проспект, 2005.

5 Карелина, И. Г. Математика [Текст] / И. Г. Карелина. – Воронеж : Издательство Воронежского гос. ун – та, 2004.

6 Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистка [Текст] / В. А. Колемаев, В. Н. Калинин. – М. : Инфра, 1997.

7 Лобоцкая, Н. Л. Основы высшей математики [Текст] / Н. Л. Лобоцкая. – Минск : Высшая школа, 2000.

8 Маркович, Э. С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики [Текст] / Э. С. Маркович. – М. : Высшая школа, 1982.

9 Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике [Текст] / В. П. Минорский. – М. : Физматлит, 2001.

10 Кремер, Н. М. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / Н. М. Кремер. – М. : Наука, 2000.

Приложение А

Таблица А1 – **Значения функции** $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица А2 – Значения функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

	Φ(*x*)
0,00	0,0000
0,01	0,0040
0,02	0,0080
0,03	0,0120
0,04	0,0160
0,05	0,0199
0,06	0,0239
0,07	0,0279
0,08	0,0319
0,09	0,0359
0,10	0,0398
0,11	0,0438
0,12	0,0478
0,13	0,0517
0,14	0,0557
0,15	0,0596
0,16	0,0636
0,17	0,0675
0,18	0,0714
0,19	0,0753
0,20	0,0793
0,21	0,0832
0,22	0,0871
0,23	0,0910
0,24	0,0948
0,25	0,0987
0,26	0,1026
0,27	0,1064
0,28	0,1103
0,29	0,1141
0,30	0,1179
0,31	0,1217

x	**Φ(*x*)**
0,32	0,1255
0,33	0,1293
0,34	0,1331
0,35	0,1368
0,36	0,1406
0,37	0,1443
0,38	0,1480
0,39	0,1517
0,40	0,1554
0,41	0,1591
0,42	0,1628
0,43	0,1664
0,44	0,1700
0,45	0,1736
0,46	0,1772
0,47	0,1808
0,48	0,1844
0,49	0,1879
0,50	0,1915
0,51	0,1950
0,52	0,1985
0,53	0,2019
0,54	0,2054
0,55	0,2088
0,56	0,2123
0,57	0,2157
0,58	0,2190
0,59	0,2224
0,60	0,2257
0,61	0,2291
0,62	0,2324
0,63	0,2357

x	**Φ(*x*)**
0,64	0,2389
0,65	0,2422
0,66	0,2454
0,67	0,2486
0,68	0,2517
0,69	0,2549
0,70	0,2580
0,71	0,2611
0,72	0,2642
0,73	0,2673
0,74	0,2703
0,75	0,2734
0,76	0,2764
0,77	0,2794
0,78	0,2823
0,79	0,2852
0,80	0,2881
0,81	0,2910
0,82	0,2939
0,83	0,2967
0,84	0,2995
0,85	0,3023
0,86	0,3051
0,87	0,3078
0,88	0,3106
0,89	0,3133
0,90	0,3159
0,91	0,3186
0,92	0,3212
0,93	0,3238
0,94	0,3264
0,95	0,3289

x	**Φ(*x*)**
0,96	0,3315
0,97	0,3340
0,98	0,3365
0,99	0,3389
1,00	0,3413
1,01	0,3438
1,02	0,3461
1,03	0,3485
1,04	0,3508
1,05	0,3531
1,06	0,3554
1,07	0,3577
1,08	0,3599
1,09	0,3621
1,10	0,3643
1,11	0,3665
1,12	0,3686
1,13	0,3708
1,14	0,3729
1,15	0,3749
1,16	0,3770
1,17	0,3790
1,18	0,3810
1,19	0,3830
1,20	0,3849
1,21	0,3869
1,22	0,3883
1,23	0,3907
1,24	0,3925
1,25	0,3944

Продолжение таблицы А2

1,26	0,3962	1,59	*0,4441*	1,92	0,4726	*2,50*	0,4938
1,27	0,3980	1,60	*0,4452*	1,93	0,4732	*2,52*	0,4941
1,28	0,3997	1,61	*0,4463*	1,94	0,4738	*2,54*	0,4945
1,29	0,4015	1,62	*0,4474*	1,95	0,4744	*2,56*	0,4948
1,30	0,4032	1,63	*0,4484*	1,96	0,4750	*2,58*	0,4951
1,31	0,4049	1,64	*0,4495*	1,97	0,4756	*2,60*	0,4953
1,32	0,4066	1,65	*0,4505*	1,98	0,4761	*2,62*	0,4956
1,33	0,4082	1,66	*0,4515*	1,99	0,4767	*2,64*	0,4959
1,34	0,4099	1,67	*0,4525*	2,00	0,4772	*2,66*	0,4961
1,35	0,4115	1,68	*0,4535*	2,02	0,4783	*2,68*	0,4963
1,36	0,4131	1,69	*0,4545*	2,04	0,47,93	*2,70*	0,4965
1,37	0,4147	1,70	*0,4554*	2,06	0,4803	*2,72*	0,4967
1,38	0,4162	1,71	*0,4564*	2,08	0,4812	*2,74*	0,4969
1,39	0,4177	1,72	*0,4573*	2,10	0,4821	*2,76*	0,4971
1,40	0,4192	1,73	*0,4582*	2,12	0,4830	*2,78*	0,4973
1,41	0,4207	1,74	*0,4591*	2,14	0,4838	*2,80*	0,4974
1,42	0,4222	1,75	*0,4599*	2,16	0,4846	*2,82*	0,4976
1,43	0,4236	1,76	*0,4608*	2,18	0,4854	*2,84*	0,4977
1,44	0,4251	1,77	*0,4616*	2,20	0,4861	*2,86*	0,4979
1,45	0,4265	1,78	*0,4625*	2,22	0,4868	*2,88*	0,4980
1,46	0,4279	1,79	*0,4633*	2,24	0,4875	*2,90*	0,4981
1,47	0,4292	1,80	*0,4641*	2,26	0,4881	*2,92*	0,4982
1,48	0,4306	1,81	*0,4649*	2,28	0,4887	*2,94*	0,4984
1,49	0,4319	1,82	*0,4656*	2,30	0,4893	*2,96*	0,4985
1,50	0,4332	1,83	*0,4664*	2,32	0,4898	*2,98*	0,4986
1,51	0,4345	1,84	*0,4671*	2,34	0,4904	*3,00*	0,49865
1,52	0,4357	1,85	*0,4678*	2,36	0,4909	*3,20*	0,49931
1,53	0,4370	1,86	*0,4686*	2,38	0,4913	*3,40*	0,49966
1,54	0,4382	1,87	*0,4693*	2,40	0,4918	*3,60*	0,499841
1,55	0,4394	1,88	*0,4699*	2,42	0,4922	*3,80*	0,499928
1,56	0,4406	1,89	*0,4706*	2,44	0,4927	*4,00*	0,499968
1,57	0,4418	1,90	*0,4713*	2,46	0,4931	*4,50*	0,499997
1,58	0,4429	1,91	*0,4719*	2,48	0,4934	*5,00*	0,499997

Таблица А3 – Формула Пуассона

$$p(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

k	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
5	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,004968	0,007669	0,011115
6		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,000695	0,001227	0,002001
7			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035	0,000081	0,000164	0,000300
8					0,000001	0,000003	0,000008	0,000019	0,000039
								0,000002	0,000004

k	λ								
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,367879	0,135335	0,049787	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,367879	0,270671	0,149361	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,183940	0,270671	0,224042	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,061313	0,180447	0,224042	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994
4	0,015328	0,090224	0,168031	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737
5	0,003066	0,036089	0,100819	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727
6	0,000511	0,012030	0,050409	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7	0,000073	0,003437	0,021604	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8	0,000009	0,000859	0,008101	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9	0,000001	0,000191	0,002701	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124007	0,131756
10		0,000038	0,000810	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580
11		0,000007	0,000221	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12		0,000001	0,000055	0,000642	0,003434	0,011262	0,026350	0,048127	0,072765
13			0,000013	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14			0,000003	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384
15			0,000001	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16				0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17				0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18					0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19					0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20						0,000004	0,000030	0,000159	0,000617
21						0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22							0,000003	0,000022	0,000108
23							0,000001	0,000008	0,000042
24								0,000003	0,000016
25								0,000001	0,000006
26									0,000002
27									0,000001

Лукерьянова Елена Александровна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
(Часть 1)

Методические указания
для практических занятий и самостоятельной работы
студентов направления 010100.62

Редактор Е.А. Могутова

Подписано в печать 01.12.14	Формат 60 х 84 1/16	Бумага 65 г/м^2
Печать цифровая	Усл. печ. л 2,5	Уч.-изд.л. 2,5
Заказ 302	Тираж 25	Не для продажи

РИЦ Курганского государственного университета.
640000, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.