

*МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ*  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Курганский государственный университет»

Кафедра «Инноватика и менеджмент качества»

**ЭМПИРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
ВТОРОГО ПОРЯДКА**

Контрольные задания  
по дисциплине «Математическое моделирование  
в инженерной и инновационной деятельности»  
для студентов направления 221700.62

Курган 2014

Кафедра: «Инноватика и менеджмент качества»

Дисциплина: «Математическое моделирование в инженерной и инновационной деятельности»  
(направление 221700.62).

Составил: канд. техн. наук, доцент В.Ф. Губанов.

Утверждены на заседании кафедры «05» марта 2014 г.

Рекомендованы методическим советом университета «12» марта 2014 г.

## ВВЕДЕНИЕ

В современной промышленности в настоящее время нашли широкое применение методы планирования эксперимента и обработки экспериментальных данных, что обусловлено сложностью, многообразием и в определенном смысле «неоднозначностью» физических явлений и их последствий для многих реальных технологических процессов, таких, как выглаживание деталей машин.

Выглаживание, как известно, представляет собой отделочно-упрочняющую обработку поверхностным пластическим деформированием, при которой происходит упрочнение поверхностного слоя детали, что выражается в повышении микротвердости поверхностного слоя и создании в нем благоприятных остаточных сжимающих напряжений.

В контрольных заданиях на примере процесса выглаживания приводятся данные, отражающие количественные связи между режимами выглаживания и параметрами шероховатости выглаженных деталей, полученные при наиболее эффективном планировании экспериментов для процесса выглаживания – не композиционном планировании экспериментов второго порядка (научные исследования выполнялись на кафедре инноватики и менеджмента качества доцентом В.Ф. Губановым).

Целью настоящих контрольных заданий является освоение математического аппарата обработки экспериментальных данных при многофакторном планировании экспериментов второго порядка.

## ЗАДАНИЕ

Для установления многофакторной регрессионной модели процесса алмазного выглаживания, отражающей количественные связи между натягом ( $h_3$ ), подачей ( $S_0$ ), скоростью ( $V$ ) и исследуемым параметром шероховатости поверхности, был спланирован и поставлен эксперимент второго порядка.

Факторы приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Факторы

	Факторы		
	$h_3$ , мкм	$S_0$ , мм/об	$V$ , м/мин
Кодированное обозначение	$x_1$	$x_2$	$x_3$

Матрица плана эксперимента представлена в таблице 2.

Таблица 2 – Матрица некомпозиционного плана второго порядка ( $k=3$  – число факторов)

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$
1	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0
2	+	+	-	0	-	0	0	+	+	0
3	+	-	+	0	-	0	0	+	+	0
4	+	-	-	0	+	0	0	+	+	0
5	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	+	+	0	+	0	+	0	+	0	+
7	+	+	0	-	0	-	0	+	0	+
8	+	-	0	+	0	-	0	+	0	+
9	+	-	0	-	0	+	0	+	0	+
10	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	+	0	+	+	0	0	+	0	+	+
12	+	0	+	-	0	0	-	0	+	+
13	+	0	-	+	0	0	-	0	+	+
14	+	0	-	-	0	0	+	0	+	+
15	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Результаты измерения исследуемого параметра шероховатости поверхности ( $Ra$  или  $R_{max}$ , или  $R_p$  – в зависимости от номера варианта) представлены в таблице 3 ( $Ra$  – среднее арифметическое отклонение профиля, мкм;  $R_p$  – высота сглаживания профиля шероховатости, мкм;  $R_{max}$  – наибольшая высота профиля, мкм).

Таблица 3 – Результаты измерения исследуемого параметра шероховатости поверхности

Номер опыта	Номер варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	<i>Ra</i>	<i>Rmax</i>	<i>Rp</i>	<i>Ra</i>	<i>Rmax</i>	<i>Rp</i>	<i>Ra</i>	<i>Rmax</i>	<i>Rp</i>	<i>Ra</i>
1	0,234	0,938	0,645	0,264	1,018	0,703	0,313	1,237	0,856	0,372
2	0,108	0,427	0,288	0,117	0,452	0,315	0,133	0,531	0,355	0,160
3	0,255	1,028	0,688	0,269	1,059	0,709	0,309	1,210	0,846	0,374
4	0,110	0,435	0,303	0,119	0,481	0,329	0,139	0,552	0,374	0,169
5	0,127	0,511	0,344	0,137	0,538	0,361	0,151	0,670	0,458	0,180
6	0,193	0,761	0,518	0,207	0,823	0,550	0,234	0,932	0,630	0,269
7	0,146	0,574	0,392	0,166	0,649	0,435	0,198	0,791	0,543	0,232
8	0,208	0,806	0,538	0,231	0,928	0,647	0,258	0,996	0,693	0,298
9	0,157	0,613	0,426	0,171	0,674	0,451	0,191	0,764	0,530	0,231
10	0,133	0,519	0,357	0,143	0,553	0,375	0,158	0,662	0,441	0,179
11	0,207	0,805	0,544	0,218	0,880	0,613	0,244	0,942	0,636	0,274
12	0,144	0,556	0,375	0,155	0,605	0,415	0,182	0,710	0,481	0,222
13	0,053	0,209	0,144	0,061	0,245	0,169	0,067	0,266	0,178	0,081
14	0,045	0,177	0,118	0,051	0,200	0,134	0,056	0,222	0,154	0,067
15	0,129	0,520	0,354	0,143	0,545	0,364	0,158	0,677	0,463	0,183

Номер опыта	Номер варианта										
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	<i>R<sub>max</sub></i>	<i>R<sub>p</sub></i>	<i>R<sub>a</sub></i>	<i>R<sub>max</sub></i>	<i>R<sub>p</sub></i>	<i>R<sub>a</sub></i>	<i>R<sub>max</sub></i>	<i>R<sub>p</sub></i>	<i>R<sub>a</sub></i>	<i>R<sub>max</sub></i>	<i>R<sub>p</sub></i>
1	1,435	0,996	0,438	1,728	1,162	0,551	2,185	1,495	0,713	2,873	2,008
2	0,640	0,433	0,190	0,761	0,531	0,236	0,930	0,623	0,296	1,139	0,765
3	1,453	0,975	0,457	1,806	1,232	0,570	2,288	1,594	0,712	2,873	1,928
4	0,665	0,446	0,210	0,833	0,557	0,251	1,007	0,673	0,307	1,204	0,818
5	0,715	0,497	0,210	0,836	0,570	0,254	1,021	0,707	0,324	1,276	0,882
6	1,060	0,736	0,315	1,238	0,825	0,398	1,563	1,065	0,513	2,016	1,352
7	0,893	0,610	0,276	1,081	0,754	0,333	1,305	0,880	0,422	1,635	1,140
8	1,171	0,805	0,351	1,385	0,947	0,425	1,691	1,177	0,513	2,031	1,393
9	0,924	0,626	0,278	1,070	0,735	0,348	1,379	0,960	0,440	1,697	1,155
10	0,695	0,482	0,208	0,826	0,558	0,265	1,020	0,695	0,322	1,275	0,865
11	1,077	0,730	0,337	1,316	0,893	0,413	1,655	1,111	0,513	2,054	1,395
12	0,857	0,580	0,258	1,010	0,693	0,305	1,217	0,836	0,375	1,480	1,018
13	0,314	0,217	0,093	0,359	0,242	0,114	0,455	0,304	0,140	0,553	0,384
14	0,260	0,179	0,080	0,313	0,210	0,097	0,374	0,258	0,120	0,465	0,320
15	0,700	0,490	0,216	0,830	0,565	0,260	1,035	0,690	0,325	1,283	0,870

## ПРИМЕР [2]

Для установления многофакторной регрессионной модели процесса алмазного выглаживания, отражающей количественные связи между натягом, подачей, скоростью и параметром шероховатости -  $Ra$ , был спланирован и поставлен эксперимент второго порядка.

Факторы приведены в таблице 4.

Таблица 4 – Факторы

	Факторы		
	$h_3,$ мкм	$S_0,$ мм/об	$V,$ м/мин
Кодированное обозначение	$x_1$	$x_2$	$x_3$

Матрица плана эксперимента и результаты измерений  $Ra$  представлены в таблице 5.

Таблица 5 – Матрица некомпозиционного плана второго порядка ( $k=3$  – число факторов)

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$y (Ra, \text{мкм})$
1	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	0,239
2	+	+	-	0	-	0	0	+	+	0	0,110
3	+	-	+	0	-	0	0	+	+	0	0,260
4	+	-	-	0	+	0	0	+	+	0	0,112
5	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,130
6	+	+	0	+	0	+	0	+	0	+	0,197
7	+	+	0	-	0	-	0	+	0	+	0,149
8	+	-	0	+	0	-	0	+	0	+	0,212
9	+	-	0	-	0	+	0	+	0	+	0,160
10	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,136
11	+	0	+	+	0	0	+	0	+	+	0,211
12	+	0	+	-	0	0	-	0	+	+	0,147
13	+	0	-	+	0	0	-	0	+	+	0,054
14	+	0	-	-	0	0	+	0	+	+	0,046
15	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,132

*Все формулы, используемые при расчетах в этом примере, взяты из работы [1].*

Коэффициенты уравнения регрессии рассчитываются по формулам 1-4, выбирая необходимые значения констант, входящих в указанные формулы, из таблицы 6.

$$b_0 = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} y_{0i}, \quad (1)$$

$$b_i = A \sum_{j=1}^N x_{ij} \cdot y_j, \quad (2)$$

$$b_{iu} = D \sum_{j=1}^N x_{ij} \cdot x_{uj} \cdot y_j, \quad (3)$$

$$b_{ii} = B \sum_{j=1}^N x_{ij}^2 \cdot y_j + C \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^N x_{ij}^2 \cdot y_j - \frac{1}{p \cdot n_0} \sum_{i=1}^{n_0} y_{0i}, \quad (4)$$

где  $n_0$  – число опытов в центре плана (в нашем случае опыты: 5, 10, 15) – т.е. при нахождении факторов на нулевых уровнях рассчитывается нулевой уровень как половина суммы верхнего и нижнего уровней;

$A, B, C, D, p$  – константы, зависящие от числа факторов;

$N$  – общее число опытов;

$i = 1..k$  – номер фактора;

$j$  – номер опыта (строки в матрице планирования).

Таблица 6 – Значения констант

Число факторов	$A$	$B$	$B_1$	$C$	$D$	$p$	$n_0$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{48}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	2	3
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{48}$	$\frac{1}{4}$	2	3
5	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{96}$	$-\frac{1}{96}$	$\frac{1}{4}$	2	6

$$\begin{array}{cccccc}
 b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_{12} & b_{13} \\
 0,1327 & -0,0061 & 0,0669 & 0,0215 & -0,0048 & -0,0010 \\
 b_{23} & b_{11} & b_{22} & b_{33} & & \\
 0,0140 & 0,0563 & -0,0087 & -0,0095 & & 
 \end{array}$$

Дисперсию  $s^2\{y\}$  определяем по трем параллельным опытам в центре плана, т.е. по результатам опытов, выполненных при нахождении факторов на основных уровнях (таблица 7, формула 5):  $s^2\{y\}=0,000010$ .

$$s^2\{y\} = \frac{\sum_{u=1}^{n_0} (y_u - \langle y \rangle)^2}{n_0 - 1}, \quad (5)$$

где  $n_0$  – число параллельных опытов в центре плана;

$y_u$  – значение функции отклика в  $u$ -м опыте;

$\langle y \rangle$  – среднее арифметическое значение функции отклика в  $n_0$  опытах.

Таблица 7 – Вспомогательная таблица для расчета дисперсии  $s^2\{y\}$

Номер опыта	$y$	$\langle y \rangle$	$(y - \langle y \rangle)^2$
5	0,130		0,000009
10	0,136	0,133	0,000009
15	0,132		0,000001

Дисперсии коэффициентов уравнения регрессии определяем по формулам 6-9:

$$s^2\{b_0\} = \frac{1}{n_0} s^2\{y\}, \quad (6)$$

$$s^2\{b_i\} = A \cdot s^2\{y\}, \quad (7)$$

$$s^2\{b_{iu}\} = D \cdot s^2\{y\}, \quad (8)$$

$$s^2\{b_{ii}\} = B_1 \cdot s^2\{y\}, \quad (9)$$

где дисперсия  $s^2\{y\}$  определяется по параллельным опытам в центре плана (формула 5);

$B_1$  – константа, зависящая от числа факторов (таблица 6).

$$s^2\{b_0\} = 0,0000033; \quad s^2\{b_i\} = 0,0000013; \quad s^2\{b_{iu}\} = 0,0000025; \quad s^2\{b_{ii}\} = 0,0000027.$$

Доверительные интервалы для коэффициентов уравнения регрессии определяем по формуле 10 (табличное значение критерия Стьюдента при 5%-м уровне значимости и числе опытов  $n_0=3$  по приложению А:  $t=4,30$ ):

$$\Delta b_i = \pm t \cdot S\{b_i\}, \quad (10)$$

$$\Delta b_0 = \pm 0,0079, \quad \Delta b_i = \pm 0,0048, \quad \Delta b_{iu} = \pm 0,0068, \quad \Delta b_{ii} = \pm 0,0071.$$

В связи с тем, что коэффициенты  $b_{12}$ ,  $b_{13}$  по абсолютной величине меньше доверительного интервала, их можно признать статистически незначимыми и исключить из уравнения регрессии.

**Уравнение регрессии примет вид**

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2.$$

По уравнению регрессии вычисляем «теоретическое» значение параметра оптимизации  $\hat{y}$  (таблица 8).

Определяем сумму квадратов отклонений по результатам опытов в центре плана (таблица 7, формула 11):  $S_e = 0,000019$ .

$$S_e = \sum_{u=1}^{n_0} (y_u - \langle y \rangle)^2. \quad (11)$$

Сумма квадратов отклонений «теоретических» значений параметра оптимизации  $\hat{y}$  от экспериментальных значений

$$S_r = \sum_{j=1}^N (y_j - \hat{y}_j)^2. \quad (12)$$

Таблица 8 – Вспомогательная таблица для расчета дисперсии  $s_{ад}^2\{y\}$

Номер опыта	$\hat{y}$	$y$	$(y - \hat{y})^2$
1	0,241	0,239	0,000004
2	0,107	0,110	0,000009
3	0,253	0,260	0,000049
4	0,120	0,112	0,000064
5	0,133	0,130	0,000009
6	0,195	0,197	0,000004
7	0,152	0,149	0,000009
8	0,207	0,212	0,000025
9	0,164	0,160	0,000016
10	0,133	0,136	0,000009
11	0,217	0,211	0,000036
12	0,146	0,147	0,000001
13	0,055	0,054	0,000001
14	0,040	0,046	0,000036
15	0,133	0,132	0,000001
$S_r = 0,000273$ (формула 12)			

Дисперсию адекватности определяют по зависимости 13 (с числом степеней свободы  $f = N - z - (n_0 - 1) = 15 - 8 - (3 - 1) = 5$ ):

$$S_{ад}^2 = \frac{S_r - S_e}{N - z - (n_0 - 1)}, \quad (13)$$

где  $z$  – число статистически значимых коэффициентов регрессии.

$$S_{ад}^2 = \frac{0,000273 - 0,000019}{5} = 0,000051.$$

По формуле 14 находим расчетное значение  $F$ -критерия:

$$F_p = \frac{S_{ад}^2}{s_y^2}. \quad (14)$$

$$F_p = \frac{0,000051}{0,000010} = 5,1.$$

Табличное значение  $F$ -критерия (при большей дисперсии –  $S_{ад}^2$  с числом степеней свободы  $f = N - z - (n_0 - 1)$ ; меньшей дисперсии –  $s^2\{y\}$  с числом степеней свободы  $f = n_0 - 1$ ) приведено в приложении Б.

Табличное значение  $F$ -критерия при 5%-м уровне значимости (при большей дисперсии –  $S_{ад}^2$  с числом степеней свободы  $f = 5$ ; меньшей дисперсии –  $s^2\{y\}$  с числом степеней свободы  $f = 2$ ) равно 19,30, т.к.  $F_p < F$ , то модель (уравнение регрессии) адекватна.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Спиридонов, А. А. Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов [Текст] / А. А. Спиридонов. – М. : Машиностроение, 1981. – 184 с.
- 2 Выглаживание: специфика, управление качеством и инновации : учеб. пособие / В. Ф. Губанов [и др.]. – Курган : Изд-во Курганского гос. ун-та, 2010. – 106 с.

## Приложение А

Таблица А1 – Значения критерия Стьюдента ( $t$ -критерия) при уровне значимости  $\alpha=0,05$  для различного числа опытов ( $n_0$ )

$n_0$	$t$	$n_0$	$t$	$n_0$	$t$
2	12,71	11	2,23	20	2,09
3	4,30	12	2,20	21	2,09
4	3,18	13	2,18	22	2,08
5	2,78	14	2,16	23	2,07
6	2,57	15	2,14	24	2,07
7	2,45	16	2,13	25	2,06
8	2,36	17	2,12	26	2,06
9	2,31	18	2,11	27	2,06
10	2,26	19	2,10	28	2,05

## Приложение Б

Таблица Б1 – Значения критерия Фишера ( $F$ -критерия) при уровне значимости  $\alpha=0,05$

Число степеней свободы для меньшей дисперсии \ / \ Число степеней свободы дисперсии	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	$\infty$
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	246,5	249,0	251,8	254,3
2	19,51	19,0	19,6	19,24	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,45	19,47	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,69	8,64	8,58	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,77	5,70	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,60	4,53	4,44	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,84	3,75	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,49	3,41	3,32	3,28
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	3,12	3,03	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,98	2,90	2,80	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,82	2,74	2,64	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,70	2,61	2,50	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,60	2,50	2,40	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,51	2,42	2,32	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,44	2,35	2,24	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,39	2,29	2,18	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,24	2,13	2,01
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	2,08	1,96	1,84
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,89	1,76	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,79	1,66	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,74	1,60	1,44
100	3,94	3,09	2,60	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,75	1,63	1,48	1,28
$\infty$	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,64	1,52	1,35	1,00

Губанов Виктор Федорович

**ЭМПИРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
ВТОРОГО ПОРЯДКА**

Контрольные задания  
по дисциплине «Математическое моделирование  
в инженерной и инновационной деятельности»  
для студентов направления 221700.62

Редактор Е.А. Могутова

---

Подписано в печать 19.06.14  
Печать цифровая  
Заказ 189

Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>  
Усл. печ. л. 0,88  
Тираж 27

Бумага 65 г/м<sup>2</sup>  
Уч.-изд. л. 0,88  
Не для продажи

---

РИЦ Курганского государственного университета.  
640000, г. Курган, ул. Советская, 63/4.  
Курганский государственный университет.