МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра прикладной математики и компьютерного моделирования

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Контрольные задания и методические указания
к выполнению самостоятельной работы
по курсу математики
для студентов направлений
190109, 190110, 140400, 190600, 190700, 151900,
150700, 220700, 220400, 280700, 221700, 220601

Курган 2014

Кафедра прикладной математики и компьютерного моделирования

Дисциплина: «Математика» (направления (специальности) 190109, 190110, 140400, 190600, 190700, 151900, 150700, 220700, 220400, 280700, 221700, 220601)

Составили: канд. тех. наук, доцент. Т.Р.Змызгова,
доцент Т.В. Корнюшева
оператор ЭВиВМ Ю.В. Тупицина

Утверждены на заседании кафедры «28» октября 2011 г.
Рекомендованы методическим советом университета «7» марта 2013 г.

ВВЕДЕНИЕ

Математика как наука возникла из потребностей практики. От простого применения результаты математических исследований шагнули сегодня к широкому приложению во многих сферах нашей жизни.

Важный класс задач, возникающих при математическом моделировании, представляют собой задачи эволюционного типа, описывающие явления и процессы, изменяющиеся во времени и связанные с дифференциальными уравнениями или системами таких уравнений, разрешенными относительно производных первого порядка по времени от неизвестных функций и не содержащими производных по времени в правых частях уравнений. Простым примером здесь может служить предлагаемая ниже математическая модель, которая позволяет раскрыть одну из загадок Каспийского моря.

I ЗАГАДКА КАСПИЙСКОГО МОРЯ

Черное и Каспийское моря произошли от одного древнего моря, которое потом было разделено Кавказскими горами на две части. Каспийское море замкнутое, Черное вытекает через Босфор и Дарданеллы в Средиземное море. Несмотря на это, Черное море намного солонее Каспийского. Это кажется необъяснимым, но вспомним, что у Каспийского моря есть залив Кара-Богаз-Гол. На первый взгляд, кажется, что это ничего не меняет: ведь оно по-прежнему остается замкнутым. Однако это не так, поскольку перемешивание вод Каспийского моря и залива не происходит: вода из Каспия все время течет в залив. Может ли это привести к опреснению Каспия? Попробуем получить ответ на этот вопрос, построив соответствующую математическую модель. Учтем, что реки несут в Каспий чуть-чуть солоноватую воду, вода из Каспия перетекает в залив и там, как и в Каспии, испаряется. Пусть: Q – общий приток вод в Каспий, I – превышение испарения над дождями в Каспии и I – в заливе, q – интенсивность перетекания воды из Каспия в Кара-Богаз-Гол. Тогда, очевидно, скорости V и $V_/$ в Каспии и заливе соответственно

$$V = Q - I - q, \quad V_/ = q+I_{1.} \tag{1}$$

И Каспий, и залив уже давно наполнились, и объемы воды лишь незначительно меняются в зависимости от погоды и времени года. Пренебрегая этими очень малыми изменениями, будем считать $V = V_1 = 0$, что влечет равенства

$$Q - I - q =0, \quad q+I_1 =0, \tag{2}$$

означающие уравновешенность притоков и оттоков воды в Каспии и заливе. При этом объемы воды в Каспии и заливе достигают некоторых равновесных величин V^* и V^*_1.

Воды рек приносят в Каспий соли. Пусть V – соленость вод рек, тогда соль прибывает в Каспий с интенсивностью Qv , а в залив – с интенсивностью $q\mu$, где μ - соленость воды Каспия. Согласно этому, скорости изменения M и M_1 количеств солей M и M_1 в Каспии и заливе, очевидно, составляют

$$M = Qv - q\mu, \quad M_1 = q\mu. \tag{3}$$

Из второго соотношения (3) следует, что количество солей в заливе неограниченно растет. Как мы знаем, в заливе концентрация солей давно достигла насыщения и тысячелетиями осаждается на дне залива, образуя громадные залежи. Количество же солей в Каспии возрастает до тех пор, пока приток солей превышает их отток $q\mu$. Увеличение солености Каспия замедляется с ростом его солености μ и прекращается, достигнув равновесного значения, когда

$$Qv - q\mu = 0, \qquad (4)$$

то есть когда соленость μ Каспия достигает равновесного значения μ^*, равного $\mu^* = \frac{Qv}{q}$.

Найти эту величину, кажется, очень трудно: нужно знать объем приносимой реками воды и ее соленость, нужно знать, сколько воды перетекает из Каспия в залив. Конечно, все это можно узнать, но совсем непросто. Но, оказывается, это не нужно. Действительно, из первого соотношения (2) следует, что $Q = I + q$, и поэтому

$$\mu^* = \frac{Qv}{q} = \frac{(I+q)v}{q} = (1 + \frac{I}{q})v.$$

Из второго соотношения (1) видно, что $q = I_1$, и поэтому

$$\mu^* = (1 + \frac{I}{q})v = (1 + \frac{I}{I_1})v,$$

I/I_1 - это отношение интенсивностей испарения воды в Каспии и заливе. Грубо приближенно это соотношение равно отношению площадей Каспия и залива, то есть

$$\mu = (1 + \frac{I}{I_/})v \approx (1 + \frac{S}{S_1})v.$$

Размеры Каспия примерно в 40 раз превышают размеры залива Кара - Богаз - Гол, так что $\mu^* \approx 40\, v$. *Это даже меньше, чем соленость Каспия сегодня. То есть сегодня залив Кара - Богаз - Гол опресняет Каспийское море и делает это уже довольно давно. Это и объясняет, почему Каспийское море менее соленое, чем Черное, и дальше будет еще менее соленым. Но это в геологических масштабах времени.*

II ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1 Определения. Теорема существования и единственности решения

Дифференциальное уравнение – это уравнение, содержащее неизвестную функцию одной или нескольких переменных, независимые переменные и производные (или дифференциалы) неизвестной функции по независимым переменным.

Порядком дифференциального уравнения называется максимальный порядок входящей в уравнение производной (или дифференциала) неизвестной функции.

Обыкновенным дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение, содержащее производные лишь по одной из независимых переменных, т.е. уравнение вида

$$F\left(x; y\left(x\right); y'\left(x\right); \ldots; y^{(n)}\left(x\right)\right) = 0. \qquad (5)$$

Под дифференциальным уравнением в явной форме понимают дифференциальное уравнение, разрешенное относительно старшей производной:

$$y^{(n)}\left(x\right) = f\left(x; y\left(x\right); y'\left(x\right); \ldots, y^{(n-1)}\left(x\right)\right). \qquad (6)$$

Уравнение (6) называют дифференциальным уравнением в ***неявной форме.***

Решением уравнения (6) называется функция $y = \varphi\left(x\right)$, удовлетворяющая этому уравнению, т.е. такая, после подстановки которой в уравнение (6) оно обращается в тождество.

Функцию $\varphi\left(x; C_1; C_2; \ldots; C_n\right)$ мы будем называть ***общим решением*** рассматриваемого дифференциального уравнения в области D, если при соответствующем выборе постоянных $C_1; C_2; \ldots; C_n$, φ обращается в любое решение этого уравнения. Уравнение $\Phi\left(x; y; C_1; C_2; \ldots; C_n\right) = 0$ будет являться ***общим интегралом*** данного дифференциального уравнения в области D, если при соответствующем выборе постоянных $C_1; C_2; \ldots; C_n$ это уравнение дает любую интегральную линию нашего уравнения, проходящую в области D.

Частным решением дифференциального уравнения называется такое решение, которое получается из общего при некотором частном задании произвольных постоянных.

Дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, бесчисленное множество решений. Чтобы из всей совокупности решений выделить отдельную интегральную кривую, представляющую собой частное решение, надо задать дополнительные условия. Во многих случаях такими дополнительными условиями являются ***начальные условия***.

Задача Коши (задача с начальными условиями) есть задача о нахождении частного решения обыкновенного дифференциального уравнения n порядка, которое удовлетворяет начальным условиям

$$y\left(x_0\right) = y_0; \; y'\left(x_0\right) = y_0'; \; y''\left(x_0\right) = y_0''; \ldots; y^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_0^{(n-1)}. \qquad (7)$$

Особым решением дифференциального уравнения называется такое решение, которое не может быть получено из общего решения ни при одном частном значении произвольной постоянной, включая $\pm\infty$.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$$

и его общее решение

$$y=(x+C)^3. \tag{8}$$

Очевидно, что решение $y=0$ не содержится в семействе решений (8), а значит, является особым (см. рисунок 1).

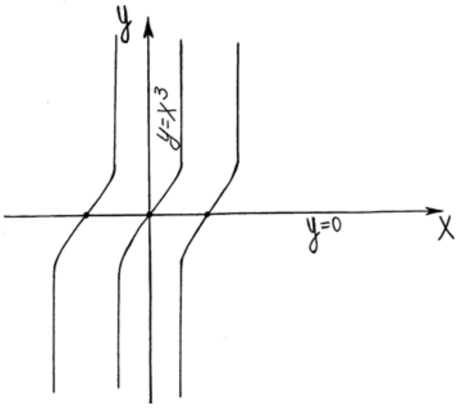

Рисунок 1 – Иллюстрация к примеру

При интегрировании дифференциального уравнения надо стремиться к тому, чтобы наряду с определением общего решения были найдены также и особые.

В теории дифференциальных уравнений важным теоретическим вопросом является вопрос о том, насколько много решений имеет дифференциальное уравнение. Оказывается, что дифференциальное уравнение имеет континуальное множество решений. Описать совокупность всех решений данного дифференциального уравнения можно на основании теоремы существования и единственности.

Теорема существования и единственности решения для уравнения 1-го порядка

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y'=f(x;y). \tag{9}$$

Будем предполагать, что функция $f(x,y)$ задана в некоторой области D плоскости переменных x, y. Пусть функция $f(x,y)$, её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ являются непрерывными во всей области D. Тогда:

1) для всякой точки (x_0,y_0) области D найдется решение $y=y(x)$ уравнения (9), удовлетворяющее условию

$$y(x_0)=y_0, \tag{10}$$

2) если два решения $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ уравнения (9) совпадают хотя бы для одного значения $x = x_0$, т.е. если

$$y_1(x_0) = y_2(x_0),$$

то эти решения тождественно равны для всех значений переменной x, для которых они оба определены.

Таким образом, эта теорема утверждает, что координаты любой точки (x_0, y_0) области D являются начальными значениями для некоторого решения уравнения (9) и что два решения с общими начальными данными совпадают.

Геометрическое содержание теоремы существования и единственности заключается в том, что через каждую точку (x_0, y_0) области D проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (9).

Рассмотрим теперь точки (x_0, y_0), в окрестности которых решение уравнения (9), удовлетворяющее условию (10), не существует или существует, но не единственно. Такие точки называют ***особыми точками***.

2 Особые решения

Кривая, состоящая сплошь из особых точек, называется особой. Если график некоторого решения состоит только из особых точек, то решение называется особым. Итак, особым решением можно назвать такое решение дифференциального уравнения, которое во всех своих точках не удовлетворяет свойству единственности, т.е. в любой окрестности каждой точки особого решения существует, по крайней мере, две интегральные кривые, проходящие через эту точку.

Для нахождения особых точек и особых решений надо, прежде всего, найти множество точек, в которых нарушены условия теоремы о существовании и единственности решения, так как только среди таких точек могут быть особые. Конечно, не каждая точка, в которой нарушены условия этой теоремы, обязательно является особой, так как условия теоремы достаточны для существования и единственности решения, но они не являются необходимыми.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$y' = f(x, y). \tag{11}$$

Первое условие теоремы нарушается в точках разрыва функции $f(x, y)$. Причем, в тех задачах, в которых переменные x и y равноправны, уравнение (11) может быть заменено уравнением

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)},$$

для которого правая часть уже непрерывна в точке (x_0, y_0) разрыва функции $f(x,y)$, если считать

$$\frac{1}{f(x_0, y_0)} = 0\,.$$

Следовательно, в задачах, в которых переменные x и y равноправны, первое условие теоремы существования и единственности нарушается в тех точках, в которых функции $\frac{1}{f(x,y)}$ и $f(x,y)$ разрывны. Второе условие теоремы нарушается чаще всего в точках, при приближении к которым $\frac{\partial f}{\partial y}$ неограниченно возрастает, т.е. в точках, в которых $\frac{1}{\partial f/\partial y} = 0$.

Уравнение $\frac{1}{\partial f/\partial y} = 0$, вообще говоря, определяет некоторую кривую, в точках которой может быть нарушено условие единственности решения. Если это так, то кривая будет особой, если, кроме того, эта кривая окажется интегральной, то получим особую интегральную кривую, т.е. найденная кривая представляет собой особое решение.

Пример 1 Имеет ли уравнение $y' = \sqrt[3]{(y-x)^2} + 5$ особое решение?

Правая часть непрерывна, но частная производная

$$y' = \frac{2}{3}(y-x)^{-\frac{1}{3}}$$

неограниченно возрастает при приближении к прямой $y = x$. Следовательно, на прямой $y = x$ может нарушиться единственность. Но функция $y = x$ не удовлетворяет рассматриваемому уравнению, значит, особого решения нет.

Пример 2 Имеет ли уравнение $y' = \sqrt[3]{(y-x)^2} + 1$ особое решение?

Как и в предыдущем примере, в точках прямой $y = x$ частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ становится бесконечной, но на этот раз функция $y = x$ удовлетворяет данному уравнению. Остается выяснить, нарушена ли единственность в точках этой прямой.

Заменой переменных $z = y - x$ приводим исходное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, которое имеет решение в виде

$$y - x = \frac{(x+C)^3}{27}.$$

Кривые этого семейства проходят через точки графика решения $y = x$. Значит, в каждой точке прямой $y = x$ единственность решения нарушена, и функция $y = x$ является особым решением (рисунок 2).

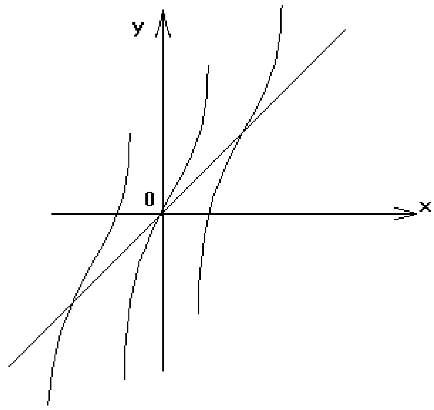

Рисунок 2 – Иллюстрация к примеру 2

Примечание

Этот пример показывает, что одной непрерывности правой части в уравнении $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ недостаточно для единственности решения основной начальной задачи. Однако можно доказать, что существование решения этим уже обеспечивается.

3 Теорема о дифференцируемости. Теорема о непрерывной зависимости. Устойчивость решений

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$y' = f(x; y). \tag{12}$$

Приведенная ниже теорема дает ответ на вопрос о степени гладкости решения этого уравнения при некоторых предположениях.

Теорема о дифференцируемости решений

Если $f(x, y)$ имеет непрерывные производные по x и y до p-го ($p \geq 0$) порядка включительно, то всякое решение уравнения (12) имеет непрерывные производные по x до $(p+1)$-го порядка.

До сих пор мы исследовали решение дифференциального уравнения, когда фиксируется некоторая точка (x_0, y_0), через которую должно проходить это решение. Если изменить x_0 и y_0, то будет изменяться и решение. Возникает важный в приложениях вопрос: как оно будет при этом меняться. Этот вопрос имеет принципиальное значение. Действительно, если какая-нибудь физическая задача приводит к нахождению решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего некоторым начальным условиям, то эти начальные условия обычно определяются экспериментально или вычисляются. А это неизбежно связано с появлением погрешностей, и найденное из условия $y(x_0) = y_0$ решение дифференциального уравнения не имело бы никакого прикладного значения, если бы даже незначительные погрешности в измерении y_0 могли привести к сильному изменению решения дифференциального уравнения. Следующая теорема показывает, что при некоторых условиях решение дифференциального уравнения зависит непрерывным образом от начальных данных и от правой части.

Теорема о непрерывной зависимости решения

Если функция $f(x,y)$, заданная в области D, непрерывна, ограничена и если через каждую внутреннюю точку (x_0, y_0) этой области проходит только одно решение дифференциального уравнения $y' = f(x;y)$, то это решение непрерывно зависит от правой части $f(x,y)$ и от точки (x_0, y_0).

Эта теорема имеет существенное значение для возможности использования задачи Коши в качестве математической модели многих естественнонаучных задач. В силу теоремы малое изменение начальных данных и правой части уравнения приводит соответственно к малым изменениям решения. Это и оправдывает использование полученных решений задачи Коши для интерпретации того реального процесса, математической моделью которого служит данное уравнение.

Геометрическое содержание теорем состоит в следующем.

Решение задачи Коши $y = y(x, y_0)$ является непрерывной функцией x, y_0, где x, y_0 - значения из области D, т. е. для любого $\varepsilon \rangle 0$ существует столь малое $|\Delta y_0|$, что интегральная кривая

$$y = y(x, y_0 + \Delta y_0)$$

будет лежать в полосе шириной 2ε около интегральной кривой $y = y(x, y_0)$ (рисунок 3).

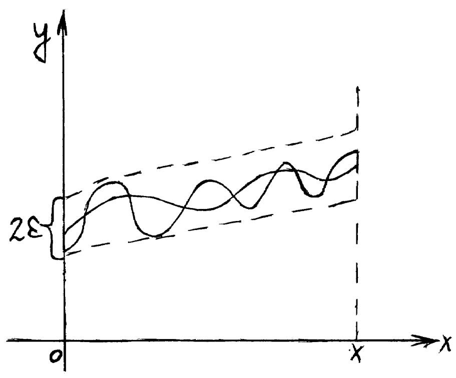

Рисунок 3 – Геометрическая иллюстрация к теореме

Таким образом, малая погрешность в начальных условиях не оказывает существенного влияния на характер процесса, рассматриваемого в области D. Однако нередко требуется исследовать процесс на каких угодно больших промежутках изменения переменной x. Будем заранее предполагать, что решение начальной задачи существует на этом бесконечном промежутке. Возникает вопрос, останется ли кривая $y = y(x, y_0 + \Delta y_0)$ в ε - полосе около кривой $y = y(x, y_0)$, если только $|\Delta y_0|$ достаточно мало, или с увеличением x кривые разойдутся. Этим вопросом занимается теория устойчивости.

Устойчивой интегральной кривой называется интегральная кривая, обладающая тем свойством, что все достаточно близкие к ней при $x = x_0$ интегральные кривые остаются близкими к ней и для всех $x \ge x_0$. Соответствующее этой кривой *решение* будет называться *устойчивым.*

В противном случае интегральная кривая и соответствующее ей решение будет *неустойчивым.*

Понятие устойчивости решения дифференциального уравнения можно сформулировать и несколько иначе.

Решение $\varphi(x)$ уравнения (12) называется устойчивым или, точнее, устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon \rangle 0$ можно подобрать такое $\delta(\varepsilon) \rangle 0$, что для всякого решения $y(x)$ этого же уравнения, начальные значения которого удовлетворяют неравенству

$$\left| y(x_0) - \varphi(x_0) \right| \langle \delta(\varepsilon),$$

для всех $x \ge x_0$ справедливо неравенство

$$\left| y(x) - \varphi(x) \right| \langle \varepsilon, \qquad (13),$$

т.е. близкие по начальным значениям решения остаются близкими для всех $x \ge x_0$.

Если при сколь угодно малом $\delta \rangle 0$ неравенство (13) не выполняется, то решение $\varphi(x)$ называется *неустойчивым*.

Среди устойчивых решений может встретиться решение, обладающее тем свойством, что все близкие к нему в начальный момент решения не только не удаляются с увеличением x, но и бесконечно приближаются к нему. Поэтому вводится еще одно определение.

Решение $\varphi(x)$ называется *асимптотически устойчивым,* если оно не только устойчиво, но, кроме того, удовлетворяет условию

$$\lim_{x \to \infty} \left(y(x) - \varphi(x) \right) = 0, \qquad (14),$$

если $\left| y(x_0) - \varphi(x_0) \right| \langle \delta_1$ $(\delta_1 \rangle 0)$.

Заметим, что из одного условия (14) не следует устойчивости решения $\varphi(x)$.

Пример

Исследовать на устойчивость решение дифференциального уравнения

$$y' = -\alpha^2 y,\ \alpha \neq 0,$$

определяемое начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Решение

$$y = y_0 e^{-\alpha^2 (x - x_0)}$$

устойчиво, так как

$$\left| y_0 e^{-\alpha^2 (x-x_0)} - \overline{y}_0 e^{-\alpha^2 (x-x_0)} \right| = e^{-\alpha^2 (x-x_0)} \left| y_0 - \overline{y}_0 \right| \langle \varepsilon,$$

при $x \geq x_0$, если $\left| y_0 - \overline{y}_0 \right| \langle \varepsilon e^{-\alpha^2 x_0}$.

Исследуем решение на асимптотическую устойчивость.

Имеем

$$\lim_{x \to \infty} e^{-\alpha^2 (x-x_0)} \left| y_0 - \overline{y}_0 \right| = 0.$$

Значит, решение исходного дифференциального уравнения асимптотически устойчиво.

III КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1 Дифференциальные уравнения первого порядка

Рассмотрим методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка определенного типа.

Тип 1 Уравнения с разделяющимися переменными

$$M(x)P(y)dx + N(x)Q(y)dy = 0. \tag{15}$$

Общее решение уравнения (15) будем искать в виде $\varphi(x, y) = C$.

Алгоритм нахождения решения:	Пример $xydx + (x+1)dy = 0$.
1 Делим обе части уравнения (15) на выражение $N(x) \cdot P(y)$, получаем	1. $\frac{x}{x+1}dx + \frac{dy}{y} = 0$.

$\dfrac{M(x)}{N(x)}dx+\dfrac{Q(y)}{P(y)}=0$ (16).	
2 Интегрируем обе части уравнения (16), получаем общее решение в виде $\int\dfrac{M(x)}{N(x)}dx+\int\dfrac{Q(y)}{P(y)}dy=C$.	2 $\int\dfrac{x}{x+1}dx+\int\dfrac{dy}{y}=0$. Отсюда $x-\ln\|x+1\|+\ln\|y\|=C$.
3 Ищем особое решение уравнения (15) из условия $N(x)\cdot P(y)=0$.	3 $y(x+1)=0$. Отсюда $y=0$ или $x+1=0$, т.е. $y=0$ или $x=-1$. Ответ: $x+\ln\dfrac{y}{x+1}=C$; $y=0$ или $x=-1$.

Уравнение вида $y'=f(ax+by+c)$ приводится к уравнению с разделяющими переменными с помощью подстановки $z=ax+by+c$, $y=\dfrac{z-ax-c}{b}$, $y'=\dfrac{z'-a}{b}$.

Алгоритм нахождения решения:	Пример. Решить уравнение $y'=\dfrac{1}{3x+y}$.
1 Делаем замену $z=ax+by+c$, $y'=\dfrac{z'-a}{b}$.	1 $z=3x+y$, $y'=z'-3$.
2 Решаем полученное дифференциальное уравнение с разделяющими переменными.	2 $z'-3=\dfrac{1}{z}$; $z'=\dfrac{1}{z}+3$; $z'=\dfrac{1+3z}{z}$; $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1+3z}{z}$; $\dfrac{zdz}{1+3z}=dx$; $\int\dfrac{zdz}{1+3z}=\int dx$; $\dfrac{1}{3}z-\dfrac{1}{9}\ln\|1+3z\|=x+C$. Ответ: $\dfrac{1}{3}(3x+y)-\dfrac{1}{9}\ln\|9x+3y+1\|=x+C$.

Варианты для самостоятельного решения

1 $(x^2-1)y'+2xy^2=0$. Ответ: $y(\ln|x^2-1|+C)=1$; $y=0$.

2 $y'x + y = 2$, $y(1) = 1$. Ответ: $y = 2 - \frac{1}{x}$.

3 $y'=3\sqrt[3]{y^2}$, $y(0)=2$. Ответ: $y=(x-c)^3$; $y=0$.

4 $\sqrt{y^2+1}\,dx = xydy$. Ответ: $\ln|x|=C+\sqrt{y^2+1}$.

5 $2x^2yy' + y^2=2$. Ответ: $y^2 - 2 = ce^{\frac{1}{x}}$.

6 $e^{-s}(1+\frac{ds}{dt}) = 1$. Ответ: $e^{-s}=1+ce^{t}$.

7 $x\frac{dx}{dt}+t=1$. Ответ: $x^2 + t^2 - 2t = c$.

8 $y' - y = 2x - 3$. Ответ: $2x+ y - 1 = ce^{x}$.

9 $y' - xy^2 = 2xy$. Ответ: $(ce^{-x^2} - 1)\, y=2$; $y=0$.

10 $y' = \sqrt{4x+2y-1}$. Ответ: $\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln\sqrt{4x+2y-1} = x+c$).

11 $xy' + y = y^2$; $y(1) = 0{,}5$. Ответ: $y(1 - cx)=1$; $y=0$; $y(1+x)=1$).

12 $z'=10^{x+z}$. Ответ: $z = -\lg(c - 10^{x})$.

13 $y' = \cos(y - x)$. Ответ: $\mathrm{ctg}\frac{y-x}{2} = x+c$.

14 $(x+2y)y'=1$; $y(0) = -1$. Ответ: $x+2y+2 = ce^{y}$; $x + 2y+ 2 = 0$.

15 $y'\cos x= y/\ln y$; $y(0) = 1$. Ответ: $\frac{1}{2}\ln^2 y = \ln \mathrm{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$.

16 $\ln\cos y\, dx + x\,\mathrm{tg}\, y\, dy = 0$. Ответ: $y = \arccos e^{cx}$.

17 $y'=2^{x-y}$; $y(-3)=5$. Ответ: $2^{x} - 2^{y} = \frac{3}{32}$.

18 $(1+e^{2x})y^2dy = e^{x}dx$; $y(0) = 0$. Ответ: $\frac{y^3}{3}+\frac{\pi}{4} = \mathrm{arctg} e^{x}$.

19 $y' + \cos(x+2y) = \cos(x - 2y)$; $y(0) = \frac{\pi}{4}$. Ответ: $\ln|\mathrm{tg} y| = 4(1 - \cos x)$.

20 $\frac{y}{y'}= \ln y$; $y(2) = 1$. Ответ: $2(x - 2) = \ln^2 y$.

21 $y' + \sin(x+ y) = \sin(x - y)$. Ответ: $2\sin x+\ln|\mathrm{tg}\frac{y}{2}| = c$.

22 $yy' = - 2x\sec y$. Ответ: $x^2 + y\sin y+\cos y=c$.

23 $y'=e^{x+y}+e^{x-y}$; $y(0)=0$. Ответ: $y = \ln\mathrm{tg}\,(e^{x} + \frac{\pi}{4} - 1))$.

24 $\frac{dx}{x(y-1)}+\frac{dy}{y(x+2)} = 0$; $y(1) = 1$. Ответ: $x+y +2\ln x - \ln y=2$.

25 $e^{1+x^2}\mathrm{tg} y dx - \frac{e^{2x}}{x-1}dy=0$; $y(1) = \frac{\pi}{2}$. Ответ: $2\ln|\sin y| = e^{(x-1)^2} - 1$.

Тип 2 Линейные дифференциальные уравнения

$$y' + p(x)y = g(x). \qquad (17)$$

Уравнение (17) линейное, т.к. искомая функция и ее производная входят в него в первых степенях, не перемножаясь между собой. Если $g(x)=0$, то уравнение называется линейным *однородным.*

Общее решение уравнения (17) ищем в виде

$$y = y_{оо} + y_{чн},$$

где $y_{оо}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, $y_{чн}$ – частное решение уравнения (17).

Алгоритм нахождения решения:	Пример. Решить уравнение $xy' - 2y = 2x^4$. Приведем уравнение к виду (17). Для этого разделим обе части на коэффициент при y': $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$.
1 Делаем подстановку вида $y = e^{-\int p(x)dx} \cdot v$ (18), где $p(x)$ – коэффициент при y, $v = v(x)$ – новая искомая функция.	1 $p(x) = -\frac{2}{x}$, $y = e^{\int \frac{2}{x}dx} v = e^{2\ln\lvert x\rvert} v =$ $= e^{\ln x^2} \cdot v = x^2 v$.
2 Подстановка (18) приводит уравнение (17) к уравнению с разделяющимися переменными. Подставим выражение (18) в уравнение (17), для этого найдем y.	2 $y' = 2xv + x^2v'$. Подставляем в уравнение: $2xv + x^2v' - \frac{2}{x}x^2v = 2x^3 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2v' = 2x^3$.
3 Решаем уравнение с разделяющимися переменными, находим $v(x,C)$.	3 $x^2\frac{dv}{dx} = 2x^3 \Rightarrow dv = \frac{2x^3}{x^2}dx$, $dv = 2xdx \Rightarrow v = x^2 + C = v(x,C)$
4 Функцию $v(x,C)$ подставляем в (18), получаем общее решение.	4 $y = x^2(x^2+C) = x^4 + x^2C$. Ответ: $y = x^4 + x^2C$.

Варианты для самостоятельного решения

1 $y' + y\,\mathrm{ctg}x = \sec x$. Ответ: $y = \sin x + C\cos x$.

2 $x^2y' + xy + 1 = 0$. Ответ: $xy = C - \ln\lvert x\rvert$.

3 $y' = 2x(x^2 + y)$. Ответ: $y = Ce^{x^2} - x^2 - 1$.

4 $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$. Ответ: $xy = (x^3 + C)e^{-x}$.

5 $(x + y^2)dy = ydx$. Ответ: $x = y^2 + Cy$; $y = 0$.

6 $(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y)y' = 1$. Ответ: $x = (C - \cos y)\sin y$.

7 $y' + \operatorname{tg} y = \dfrac{x}{\cos y}$. Ответ: $\sin y = C e^{-x} + x - 1$.

8 $x(y' - y) = e^x$. Ответ: $y = e^x(\ln|x| + C)$.

9 $y = x(y' - x\cos x)$. Ответ: $y = x(C + \sin x)$.

10 $y'\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$; $y(0) = 0$. Ответ: $y = \operatorname{tg} x - 1 + e^{-\operatorname{tg} x}$.

11 $y' - y\operatorname{th} x = \operatorname{ch}^2 x$. Ответ: $y = \operatorname{ch} x(\operatorname{sh} x + C)$.

12 $y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = \arcsin x + x$. Ответ: $y = \sqrt{1-x^2}\left(\dfrac{\arcsin^2 x}{2} - \sqrt{1-x^2} + C\right)$.

13 $y = xy' + y'\ln y$. Ответ: $x = C y - 1 - \ln y$.

14 $xy' - y = x^2\cos x$. Ответ: $y = x(\sin x + C)$.

15 $y' + 2xy = xe^{-x^2}$. Ответ: $y = e^{-x^2}\left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)$.

16 $y'\cos x + y = 1 - \sin x$. Ответ: $y = \cos x(x + C) / (1 + \sin x)$.

17 $y' + \dfrac{n}{x}y = \dfrac{a}{x^n}$; $y(1) = 0$. Ответ: $y = a(x - 1) / x^n$).

18 $y'(x + y^2) = y$. Ответ: $x = C y + y^2$.

19 $(2xy + 3)\,dy - y^2\,dx = 0$. Ответ: $x = C y^2 - 1 / y$.

20 $(y^4 + 2x)y' = y$. Ответ: $x = C y^2 + \dfrac{y^4}{2}$.

Замечание Некоторые дифференциальные уравнения становятся линейными, если поменять местами искомую функцию и независимую переменную.

Тип 3 Уравнение Бернулли

$$y' + p(x)y = g(x)y^n, \quad n \neq 0,\ n \neq 1. \tag{19}$$

Общее решение ищем в виде $\varphi(x, y) = C$.

Алгоритм нахождения решения:	Пример. Решить уравнение $y' - \dfrac{1}{x}y = -y^2$
1 Умножаем обе части уравнения (19) на y^{-n}.	1 $y'y^{-2} - \dfrac{1}{x}y^{-1} = -1$.
2 Делаем подстановку $y^{1-n} = z$ (20), где	2 $z = y^{-1}$, $z' = -y^{-2}y'$.

$z=z(x)$ - новая искомая функция. Дифференцируем обе части равенства (20): $y^{-n}y'=\dfrac{z'}{1-n}$ (21).	
3 После подстановки (20) и (21) в уравнение (19) получаем линейное уравнение первого порядка.	3 $-z'-\frac{z}{x}=-1,\quad z'+\frac{z}{x}=1.$ Решаем это линейное уравнение. Подстановка: $y=e^{-\int p(x)dx}\cdot v=e^{-\int\frac{1}{x}dx}v=e^{-\ln\|x\|}v=$ $=vx^{-1}$, $z'=\frac{v'x-v}{x^2}$. Получаем уравнение: $\frac{v'x}{x^2}-\frac{v}{x^2}+\frac{v}{x^2}=1$. Отсюда $dv=xdx$, $v=\frac{x^2}{2}+C$. Имеем $z=\left(\frac{x^2}{2}+C\right)\frac{1}{x}$.
4 Возвращаемся к искомой функции, заменяя z на y^{1-n}.	3 $y^{-1}=\left(\frac{x^2}{2}+C\right)\frac{1}{x}$. Ответ: $y=\frac{2x}{x^2+2C}$.

Варианты для самостоятельного решения

1 $y' + 2y = y2e^x$. Ответ: $y(e^x + Ce^{2x}) = 1$; $y = 0$.

2 $y' = y^4\cos x + y\,\mathrm{tg}x$. Ответ: $y^{-3} = C\cos x - 3\sin x\cos^2x$; $y = 0$.

3 $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$. Ответ: $y^{-2} = x^4(2e^x + C)$; $y = 0$.

4 $y' + \frac{y}{x} = x^2y^4$. Ответ: $y = \frac{1}{x\sqrt{3\ln(C/x)}}$.

5 $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 4\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{arctg}x$. Ответ: $y = (1 + x^2)(\mathrm{arctg}^2x + C)^2$.

6 $(x^2\ln y - x)y' = y$. Ответ: $x = \frac{1}{\ln y + 1 - Cy}$.

7 $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2y^{4/3}$. Ответ: $y^{-1/3} = Cx^{2/3} - \frac{3}{7}x^3$.

8 $y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}$. Ответ: $y = (x - 1)/(C - x)$.

9 $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$. Ответ: $y^{-1/2} = \text{tg}x + (\ln\cos x + C)/x$.

10 $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$. Ответ: $y^{-4} = x^3(e^x + C)$.

11 $y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}$; $y(0) = \frac{9}{4}$. Ответ: $y = e^{-x}[(\frac{1}{2}e^x + 1)^2])$.

12 $y' + \frac{3x^2 y}{x^3+1} = y^2(x^3 + 1)\sin x$; $y(0) = 1$. Ответ: $y = \sec x/(x^3 + 1)$.

13 $ydx + (x + x^2y^2)dy = 0$. Ответ: $x = 1/(y(y + C))$.

14 $y' - 2y\text{tg}x + y^2\sin^2 x = 0$. Ответ: $y = \sec^2 x/(\text{tg}x - x + C)$.

15 $(y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0$; $y(1) = 0$. Ответ: $x^2 + y^2 = e^{-y}$.

16 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$. Ответ: $y^2 = Cx + \frac{x^3}{2}$.

17 $z' = z^2 + 2\frac{z}{x}$. Ответ: $z = \frac{3x^2}{3C - x^3}$.

18 $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2\sqrt{y}$. Ответ: $y = x^4(C + \frac{1}{2}\ln x)^2$.

19 $xy' + y = xy^2\ln x$. Ответ: $\frac{1}{y} = x(C - \frac{1}{2}\ln^2 x)$.

20 $y' - \frac{xy}{2(x^2-1)} - \frac{x}{2y} = 0$; $y(0) = 1$. Ответ: $y = \sqrt{2\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1}$.

21 $(x + 1)(y' + y^2) = -y$. Ответ: $y(x + 1)(\ln|x + 1| + C) = 1$; $y = 0$.

22 $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1}$. Ответ: $y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2-1|}$.

23 $x^2y' = y(x + y)$. Ответ: $y\ln xC = -x$; $y = 0$.

24 $y - y' = y^2 + xy$. Ответ: $y(x + C) = x + 1$; $y = 0$.

25 $y' + y = xy^3$. Ответ: $y^2(Ce^{2x} + x + 0{,}5) = 1$; $y = 0$.

Тип 4 Однородные уравнения

Однородным дифференциальным уравнением I-го порядка называют уравнение, которое можно представить в виде

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (22).$$

Общее решение имеет вид $\varphi(x, y) = C$.

Алгоритм нахождения решения:	Пример. Решить уравнение $(x+2y)dx - xdy = 0$.
1 Проверяем, является ли уравнение однородным.	1 Уравнение представим в виде $xdy = (x+2y)dx$, $\frac{dy}{dx} = 1 + 2\cdot\frac{y}{x}$. Уравнение свели к виду (22).
2 Вводим новую искомую функцию $u = \frac{y}{x}$, $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$. В результате получаем уравнение с разделяющимися переменными.	2 Замену $y = ux$ подставляем в полученное уравнение; $u + x\frac{du}{dx} = 1 + 2u$, $\frac{du}{dx} = \frac{1+u}{x}$, $\frac{du}{1+u} = \frac{dx}{x}$, $\ln\lvert u+1\rvert = \ln\lvert Cx\rvert$, $u + 1 = Cx$.
3 Заменяем u на $\frac{y}{x}$, т.е. возвращаемся к исходным переменным.	3 $x + y = Cx^2$, особое решение $x = 0$. Ответ: $x + y = Cx^2$, $x = 0$.

К однородным уравнениям приводятся уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2x + c_2}\right), \qquad (23),$$

если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Чтобы привести уравнение (23) к однородному уравнению делаем замену $\begin{cases} x = u + \alpha, \\ y = v + \beta, \end{cases}$

где α, β - единственное решение системы $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$

В случае, когда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, уравнение (23) сводится к уравнению с разделяющими переменными при помощи замены $z = a_1x + b_1y$, $y' = \frac{z'}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}$.

Алгоритм нахождения решения:	Пример. Решить уравнение $y' = \frac{2x + y - 1}{2x - 2}$

1 Полагаем $\begin{cases} x=u+\alpha, \\ y=v+\beta, \end{cases}$	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \ne 0$ 1 Пусть $\begin{cases} x=u+\alpha, \\ y=v+\beta, \end{cases}$ где α, β - решение системы $\begin{cases} 2\alpha+\beta-1=0, \\ 2\alpha-2=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-1 \end{cases}$
2 Получаем однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка относительно неизвестных функций $u=u(x)$, $v=v(x)$.	2 Подставляем полученные выражения в дифференциальное уравнение. Имеем $y'=(v-1)'=v'$. Тогда $v'=\dfrac{2(u+1)-(v-1)-1}{2(u+1)-2}=\dfrac{2u+v}{2u}$, $v'=\dfrac{\frac{v}{u}+2}{2}, v\ne 0$.
3 Решаем полученное однородное дифференциальное уравнение типа (22)	3 Имеем $v=t\cdot u$, $v'=t'u+t$. Тогда последнее дифференциальное уравнение примет вид $t'u+t=\dfrac{t+2}{2}$ или $\dfrac{dt}{du}\cdot u=\dfrac{2-t}{2}$, $\dfrac{du}{u}=\dfrac{2dt}{2-t}$ $\ln\lvert c\rvert+\ln\lvert u\rvert=-2\ln\lvert 2-t\rvert$, $uc=\dfrac{1}{(2-t)^2}$, $t=\dfrac{u}{v}$, находим $uc=\dfrac{1}{(2-\frac{v}{u})^2}$ т.е. $uc=\dfrac{u^2}{(2u-v)^2}$, $\dfrac{u}{(2u-v)^2}=C$.
4 Возвращаемся к исходным переменным $u=x-\alpha$, $v=y-\beta$.	4 Имеем $u=x-1$, $v=y+1$. Тогда получаем общий интеграл в виде: $\dfrac{x-1}{(2x-y-3)^2}=C$.

Варианты для самостоятельного решения

1 $(x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$.

Ответ: $\ln (x^2 + y^2) = C - 2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

2 $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$. Ответ: $x = \pm y\sqrt{\ln cx}$; $y = 0$.

3 $(x^2 + y^2)y' = 2xy$. Ответ: $y^2 - x^2 = Cy$; $y = 0$.

4 $xy' = y - xe^{y/x}$. Ответ: $y = -x\ln\ln Cx$.

5 $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$. Ответ: $\ln cx = \operatorname{ctg}(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x})$; $y = xe^{-2xR}$; где $R = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

6 $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$. Ответ: $\arcsin\frac{y}{x} = \ln Cx \cdot \operatorname{sgn}x$; $y = \pm x$.

7 $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$. Ответ: $2x + y - 1 = Ce^{2y - x}$.

8 $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$. Ответ: $(y - x + 5)^5(x + 2y - 2) = C$.

9 $y' = 2(\frac{y+2}{x+y-1})^2$. Ответ: $y + 2 = Ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}$.

10 $y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\frac{y-2x}{x+1}$. Ответ: $\sin\frac{y-2x}{x+1} = C(x + 1)$.

11 $2x^2y' = y^3 + xy$. Ответ: $x = -y^2\ln Cx$; $y = 0$.

12 $ydx + x(2xy + 1)dy = 0$. Ответ:$y^2e^{-1/xy} = C$; $y = 0$; $x = 0$.

13 $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$. Ответ: $1 - xy = Cx^3(2 + xy)$; $xy = -2$.

14 $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$. Ответ: $x(y - x) = Cy$, $y = 0$.

15 $y^2 + x^2y' = xyy'$. Ответ: $y = Ce^{y/x}$.

16 $xy' - y = x\operatorname{tg}\frac{y}{x}$. Ответ: $\sin\frac{y}{x} = Cx$.

17 $xy' - y = (x + y)\ln\frac{x+y}{x}$. Ответ: $\ln\frac{x+y}{x} = Cx$.

18 $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$. Ответ; $x\ln Cx = 2\sqrt{xy}$; $y = 0$.

19 $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$. Ответ: $(y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2$; $y = x + 1$.

20 $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$. Ответ: $(y - x + 2)^2 + 2x = C$.

21 $(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy$. Ответ:$(y + 2)^2 = C(x + y - 4)$; $y = 1 - x$.

22 $(y' + 1)\ln\frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}$. Ответ: $\ln\frac{y+x}{x+3} = 1 + \frac{C}{x+y}$.

23 $x^3(y' - x) = y^2$. Ответ: $x^2 = (x^2 - y)\ln Cx$; $y = x^2$.

24 $2xdy + (x^2y^4 + 1)ydx = 0$. Ответ: $x^2y^4\ln Cx^2 = 1$; $y = 0$.

25 $2y' + x = 4\sqrt{y}$. Ответ: $(2\sqrt{y} - x)\ln C(2\sqrt{y} - x) = x$; $2\sqrt{y} = x$.

Тип 5 Уравнение в полных дифференциалах

Уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (24)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции F(x, y). Это имеет место, если

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (25)$$

Данное условие является необходимым и достаточным. Чтобы решить уравнение (23), надо найти функцию F(x,y), полный дифференциал которой

$$dF(x,y) = F'_x dx + F'_y dy$$

равен левой части уравнения (23), т.е.

$$M(x,y) = F'_x,\ N(x, y) = F'_y. \qquad (26)$$

Тогда общее решение уравнения (23) будет иметь вид

$$F(x,y) = C.$$

Алгоритм нахождения решения:	Пример. Решить уравнение $2xydx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$.
1Проверяем, является ли уравнение уравнением в полных дифференциалах, используя условие (25).	1 $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$. Данное уравнение - уравнение в полных дифференциалах, т.к. выполняется условие (25).
2 Находим функцию F(x,y) из условия (26). Для этого интегрируем первое из уравнений (26) по x при фиксированном y и замечаем, что произвольная постоянная в этом случае может зависеть от y. Получаем: $F(x,y)=\int M(x,y)dx+ \varphi(y)$. (27)	2 $F'_x = 2xy \Rightarrow$ $F(x,y) = \int 2xydx + \varphi(y) =$ $= x^2y + \varphi(y)$.
3 Подставляя полученное выражение во второе из условий (26), находим функцию φ(y).	3 $F'_y = x^2 - y^2$. Так как $F(x,y) = x^2y + \varphi(y)$, то $(x^2y + \varphi(y))'_y = x^2 - y^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi'(y) = - y^2$. Интегрируем $\varphi(y) = \frac{-y^3}{3} + C_1$.
4 Подставляя найденное выражение для φ(y) в равенство (27), получаем общее решение .	4 $F(x,y) = x^2y - \frac{y^3}{3} + C_1$. Ответ: $3x^2y - e^3 = C$.

Если уравнение (24) не является уравнением в полных дифференциалах, а функции M(x, y) и N(x, y) имеют непрерывные частные производные и не обращаются в нуль одновременно, то при помощи некоторой функции $n(x,y) \neq 0$ уравнение (24) можно привести к уравнению в полных дифференциалах.

Функция n(x, y), после умножения на которую уравнение превращается в уравнение типа 24, называется *интегрирующим множителем*. Общего метода для отыскания не существует. Но в некоторых случаях бывают полезны следующие приемы:

а) если отношение

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) / N$$

является функцией только от x, то у данного уравнения существует интегрирующий множитель, зависящий только от x. Тогда функцию n(x) находим по формуле

$$n = e^{\int\left(\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)/N\right)dx}.$$

Если отношение

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)/M$$

является функцией только от y , то аналогично интегрирующий множитель, зависящий только от y , определяется по формуле:

$$n = e^{-\int\left(\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)/M\right)dy}.$$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$ydx - xdy + \ln x dx = 0.$$

$$M(x, y)=y + \ln x, \; N(x,y)= - x.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1, \; \frac{\partial N}{\partial x}=-1.$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) / N= - \frac{2}{x}.$$

Поэтому данное уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x. Найдем интегрирующий множитель:

$$n = e^{\int\left(\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)/N\right)dx} = e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx} = e^{\ln|x|^{-2}} = \frac{1}{x^2}.$$

Умножаем исходное уравнение на $\frac{1}{x^2}$, получаем уравнение $(\frac{y+\ln x}{x^2})dx$ -

$$\frac{dy}{x}=0,$$

которое, как нетрудно убедиться, уже является уравнением в полных дифференциалах:

б) иногда в уравнении (24) можно выделить полный дифференциал, что значительно упрощает его решение, для этого используются формулы вида:

$$d(x, y) = ydx + \ xdy,\ d(y^2) = 2ydy,$$

$$d(\frac{x}{y})\,(\frac{ydx-xdy}{y^2}),\ d(\ln y)=\frac{dy}{y} \text{ и т.п.}$$

Пример. Рассмотрим уравнение:

$$(x^2 + \ y^2 + \ y)dx - x\ dy = 0.$$

Выделяем полный дифференциал

$$ydx - xdy = y^2\,d(\frac{x}{y}),$$

получаем уравнение

$$(x^2 + \ y^2)dx + \ y^2\,d(\frac{x}{y}).$$

Делим обе части уравнения на y^2:

$$(\frac{x^2}{y^2}+1)dx + \ d(\frac{x}{y}) = 0.$$

Делаем подстановку $\frac{x}{y}$ = z$\Rightarrow$

$$(1 + z^2)dx + dz = 0,$$

$$dx = -\frac{dz}{1+z^2} \Rightarrow \ x = -\ \mathrm{arctg} z + C,$$

$$x = -\mathrm{arctg}\frac{x}{y} + C.$$

$$\text{Ответ: } x + \mathrm{arctg}\frac{x}{y} = C.$$

Варианты для самостоятельного решения

1 $(x + \sin y)\ dx + \ (x \cos y + \sin y)dy = 0$. Ответ: $\frac{1}{2}x^2 + x\sin y - \cos y = C$.

2 $(y + e^x\sin y)dx + (x + e^x\cos y)dy = 0$. Ответ: $xy + e^x\sin y = C$.

3 $(xy + \sin y)dx + (\ 0{,}5\ x^2 + x\cos y)dy = 0$. Ответ: $\frac{1}{2}x^2y + \ x\sin y = C$.

4 $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0$, $y(0) = 0$. Ответ: $\frac{1}{3}x^3 + xy^2 + xy + e^y = 1$.

5 $(x^2 + \sin y)dx + (1 + x\cos y)dy = 0$. Ответ: $x^3 + 3y + 3x\sin y = C$.

6 $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0$. Ответ: $ye^x + \frac{1}{2}y^2 = C$.

7 $(e^x\sin y + x)dx + (e^2\cos y + y)dy = 0$. Ответ: $x^2 + y^2 + 2e^x\sin y = C$.

8 $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$. Ответ: $xe^{-y} - y^2 = C$.

9 $(2xye^x + \ln y)dx + (e^{x^2} + \frac{x}{y})dy = 0$, $y(0) = 0$. Ответ: $ye^{x^2} + x\ln y = 1$.

10 $(3x^2y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0$. Ответ: $x^3y - \cos x - \sin y = C$.

11 $(e^{x+y} + 3^{x^2})dx + (e^{x+y} + 4y^3)dy = 0$; $y(0) = 0$. Ответ: $e^{x+y} + x^3 + y^4 = 1$.

12 $xy^2(xy' + y) = 1$. Ответ: $2x^3y^3 - 3x^2 = C$.

13 $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$. Ответ: $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = C$.

14 $(y + x\ln y)dx + \frac{x^2}{2y} + x + 1)\,dy = 0$. Ответ: $x^2\ln y + 2y(x + 1) = C$.

15 $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$. Ответ: $4y\ln x + y^4 = C$.

16 $(\ln y - 5y^2\sin 5x)dx + (\frac{x}{y} + 2y\cos 5x)dy = 0$; $y(0) = e$. Ответ: $x\ln y + y^2\cos 5x = e^2$.

17 $(\arcsin x + 2xy)dx + (x^2 + 1)dy + \mathrm{arctg}\, y\, dy = 0$.

Ответ: $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2} + x^2y + y\,\mathrm{arctg}\,y - \frac{1}{2}\ln(1 + y^2 + y = C$.

18 $(\mathrm{tg}\,y - y\,\mathrm{cosec}^{2x})dx + (\mathrm{ctg}\,x + x\sec^2 y)dy = 0$. Ответ: $x\,\mathrm{tg}\,y + y\,\mathrm{ctg}\,x = C$.

19 $(\sin y + (1 - y)\cos x)dx + (1 + x)\cos y - \sin x)dy = 0$.

Ответ: $(1 + x)\sin y + (1 - y)\sin x = C$.

20 $\frac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0$. Ответ: $x + \frac{x^3}{y^2} + \frac{5}{y} + C$.

21 $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0$. Ответ: $x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} = C$.

22 $(1 + y^2\sin 2x)dx - 2y\cos^2 x dy = 0$. Ответ: $x - y^2\cos^2 x = C$.

23 $3x^2(1 + \ln y)dx = (2y - \frac{x^3}{y})dy$. Ответ: $x^3 + x^3\ln y - y^2 = C$.

24 $(\frac{x}{\sin y} + 2)dx + \frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0$. Ответ: $x^2 + 1 = 2(C - 2x)\sin y$.

25 $xdx = (xdy + ydx)\sqrt{1+x^2}$. Ответ: $\sqrt{1+x^2} = xy + C$.

IV Дифференциальные уравнения высших порядков

1 Уравнения, допускающие понижение порядка

Тип 1 Уравнения вида

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \qquad (28)$$

Это уравнения, содержащие только независимую переменную и производную n–го порядка. Если уравнение (28) разрешимо относительно $y^{(n)}$, то запишется в виде

$$y^{(n)} = f(x). \qquad (29)$$

Общее решение уравнения (29) находится путем n– кратного интегрирования:

$$y = \underbrace{\int dx \int dx \ldots \int}_{n\ раз} f(x)dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n .$$

Пример. Решить уравнение $xy^{IV} = 1$.

Решение. Уравнение $xy^{IV} = 1$ запишем в виде $y^{IV} = \dfrac{1}{x}$.

Найдем общее решение последовательным интегрированием последнего уравнения:

$$y''' = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C_1;$$

$$y'' = \int \left(\ln|x| + C_1\right) dx = x \ln x + C_1 x + C_2 - x;$$

$$y' = \int \left(x \ln|x| - x + C_1 x + C_2\right) dx = \frac{x^2}{2} \ln|x| + C_1' x^2 + C_2 x + C_3;$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} \ln|x| + C_1 x^2 + C_2 x + C_3\right) dx = \frac{1}{6} x^3 \ln|x| + C_1'' x^3 + C_2' x^2 + C_3 x + C_4.$$

Тип 2 Уравнения вида

$$F(x, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \qquad (30)$$

т. е. не содержащие явно искомой функции y.

Алгоритм нахождения решения:	Пример. $x^2 y'' = y'^2$.
1 Понижаем порядок уравнения (30), взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных данного уравнения, т.е. $y' = z(x)$.	1 Замена $y' = z(x) \Rightarrow y'' = \dfrac{dz}{dx}$. Исходное уравнение примет вид $\dfrac{x^2 dz}{dx} = z^2$.
2 Получаем в результате уравнение одного из ранее исследованных типов и решаем его относительно новой неизвестной функции $z = z(x)$.	2 Получили уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируем полученное уравнение: $\dfrac{dz}{z^2} = \dfrac{dx}{x^2} \Rightarrow z = \dfrac{x}{1 + C_1 x}$.

3 Заменяем z на y' и, интегрируя обе части полученного равенства по x, получаем общее решение исходного уравнения.	3 $y' = \frac{x}{1+C_1x} \Rightarrow$ $y=\int\frac{x}{1+C_1x}dx=\frac{1}{C_1}\int(1-\frac{1}{1+C_1x})dx=$ $=\frac{x}{C_1}-\frac{\ln\lvert C_1x+1\rvert}{C_1^2}+C_2.$ Ответ: $y=\frac{x}{C_1}-\frac{\ln\lvert C_1x+1\rvert}{C_1^2}+C_2.$ $y = C.$ $y=\frac{x^2+C}{2}$ - особое решение.

Тип 3 Уравнения вида

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = C, \tag{31}$$

не содержащие независимой переменной x.

Порядок уравнения (31) можно понизить, если положить

$$y' = z(y), \tag{32}$$

а за новый аргумент принять y.

Тогда по правилу дифференцирования сложной функции получим выражение высших производных неизвестной функции уравнения (31) через z и производные z по y:

$$y'' = z\frac{dz}{dy}, \quad y''' = z\left[z\frac{d^2z}{dy^2}+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] \quad \text{и т. д.} \tag{33}$$

Тип 4 Уравнение

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{34}$$

однородное относительно функции y и ее производных, т. е. такое, что оно не меняется при одновременной замене y на ty, y' на ty' и т. д., где $t \neq 0$.

Порядок данного уравнения понижается в результате подстановки $y' = yz$, где z – новая искомая функция.

Пример. Решить уравнение $yy'' - y'^2 = 0.$

Решение. Очевидно, что данное уравнение является однородным относительно y, y', y''. Разделим обе части уравнения на $\boldsymbol{y}^2$

$$y^2 : \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 0.$$

Положим:

$$y' = yz \qquad \text{или} \qquad \frac{y'}{y} = z,$$

отсюда

$$\frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2} = z' \qquad \text{или} \qquad \frac{y''}{y} = z' + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = z' + z^2.$$

Подставляем в уравнение:

$$z' + z^2 - z^2 = 0 \Rightarrow z' = C.$$

Возвращаемся к исходной переменной:

$$\frac{y'}{y} = C.$$

Интегрируем: $In|y| = Cx + C_1 \Rightarrow y = C_2 e^{Cx}$.

Ответ: $y = C_2 e^{Cx}$.

Тип 5 Уравнение, однородное относительно x и y в обобщенном смысле, т.е. уравнение, которое не меняется при замене x на tx, y на $t^m y$, y' на $t^{m-1}y'$, y'' на $t^{m-2}y''$ и т. д.

Чтобы узнать, является ли уравнение однородным, и найти число m , необходимо приравнять друг к другу показатели степеней, в которых число t будет входить в каждый член уравнения после замены.

Например, рассмотрим уравнение

$$xyy'' - xy'^2 = yy'.$$

В результате замены число t будет входить в первый член уравнения в степени $1 + m + m - 2$, во второй член – в степени $1 + (m-1)2$, в третий – в степени $m - 1 + m$, значит, m должно удовлетворять уравнениям

$$1 + m + m - 2 = 1 + (m-1)2 = m - 1 + m \Rightarrow 2m - 1 = 2m - 1 = 2m - 1.$$

Отсюда следует, что m – любое число.

Если же полученные уравнения будут для m несовместными, то дифференциальное уравнение не будет являться однородным в обобщенном смысле.

Далее делаем замену

$$x = e^t, y = ze^{mt},$$

где $z = z(t)$ – новая независимая функция.

В результате этой замены порядок исходного уравнения понижается на единицу.

2 Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}^{(x)} y' + p_n(x)y = f(x) \qquad (*)$$

называется линейным дифференциальным уравнением порядка. Здесь искомая функция и ее производные входят в уравнение в первой степени. Функции $f(x)$ и $p_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ являются непрерывными на некотором интервале $(a;b)$.

Возможны случаи, когда $a=-\infty$, $b=+\infty$. Функции $p_i(x)$ называются коэффициентами уравнения (1).
Если $f(x)=0$, то уравнение *(*)* называется линейным однородным уравнением, в противном случае уравнение (*) называется неоднородным.

Тип 1 Линейные однородные уравнения с переменными коэффициентами это уравнения вида

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y=0, \qquad (35)$$

где *$p_i(x)$,* $(i=1,2,\dots,n)$– функция независимой переменной x. Общее решение уравнения (35) ищется в виде

$$y=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_{n,} \qquad (36)$$

где $y_1,y_2,\dots,y_n$– линейное независимые частные решения уравнения (35); $c_1,c_2,\dots,c_n$– произвольные постоянные.

Примечание. Функции $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ называются линейно независимыми в промежутке $(a;b)$, если не существует такой системы чисел α_1, ..., α_n (которые не равны нулю одновременно), что в промежутке *(a, b)* имело бы место тождество $\alpha_1y_1+...+\alpha_ny_n=0.$
Для того, чтобы функции $y_1,y_2,\dots,y_n$ были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского этих функций был отличен от нуля хотя бы в одной точке из промежутка $(a;b)$, т.е.

$$W(y_1,...,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \_ & \_ & \_ & y_n \\ y_1' & y_2' & \_ & \_ & \_ & y_n' \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \_ & \_ & \_ & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (37)$$

Если для уравнения (35) неизвестно хотя бы одно частное решение $y_1(x)$, то порядок этого уравнения можно понизить на единицу при помощи подстановки

$$y=y_1\int u(x)dx\,, \qquad (38)$$

где $u=u(x)$– новая искомая функция.
После подстановки уравнение также будет линейным.
Для линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$$

в случае, если известно одно частное решение $y_1(x)$, второе решение, линейно независимое с первым, можно найти по формуле, которая является следствием формулы Лиувилля – Остроградского

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx\,. \qquad (39)$$

Алгоритм нахождения решения:	Пример. Решить уравнение: $(1-\ln x)y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$
1 Ищем частное решение путем подбора.	1 $y_1 = \ln x$.
2 Ищем второе частное решение по формуле Лиувилля – Остроградского (39).	2 $p_1(x) = \frac{1}{-x(\ln x - 1)}$ $y_2 = \ln x\int \frac{e^{-\int\frac{dx}{x(1-\ln x)}}}{\ln^2 x}dx = x$
3 Проверяем, являются ли решения линейно независимыми.	3 $W = \begin{vmatrix} \ln x & x \\ \frac{1}{x} & 1 \end{vmatrix} = \ln x - 1$ W≠0, например, при *x=2*.
4 Запишем общее решение, используя формулу (36).	4 $y = c_1\ln x + c_2 x$ Ответ: $y = c_1\ln x + c_2 x$.

Замечание. В тех задачах, где не дано частное решение, можно его искать путем подбора в виде показательной функции или алгебраического многочлена.

Тип 2 Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами - это уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0, \qquad (40)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – действительные числа.

Общее решение уравнения (40) ищется в виде

$$y = C_1 y_1 + ... + C_n y_n, \qquad (41)$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – частные решение.

Для нахождения частных решений составляется характеристическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1}k + a_n = 0, \qquad (42)$$

которое получается из исходного уравнения (40) заменой производных искомой функции соответствующими степенями k, причем сама функция заменяется единицей.

Тогда общее решение уравнения (40) получается в зависимости от корней уравнения (41). При этом возможны случаи

а) если все характеристические корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$ действительные и среди них нет повторяющихся, то систему n линейно независимых частных решений уравнения (40) можно записать в виде

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x},\ y_3 = e^{k_3 x}, \ldots, y_n = e^{k_n x},$$

б) если все характеристические корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$ действительные, но среди них есть равные, то каждому корню k_i кратности l будет соответствовать l линейно независимых частных решений (40):

$$y_1 = e^{k_i x}, y_2 = xe^{k_i x}, y_3 = x^2 e^{k_i x}, y_\ell = x^{\ell-1} e^{k_i x},$$

в) если среди корней характеристического уравнения (42) есть комплексные, не равные между собой, то каждой паре сопряженных комплексных корней $\alpha + \beta\, i,\ \ \alpha - \beta\, i$ соответствуют два частных линейно независимых решения уравнения (40):

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta\, x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta\, x,$$

г) если среди комплексных корней характеристического уравнения есть равные, то каждой паре комплексных сопряженных корней $\alpha \pm \beta\, i$ кратности l соответствуют $2l$ частных линейно независимых решений уравнения (40):

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta\, x, \quad y_2 = xe^{\alpha x} \cos\beta\, x, \ldots, y_\ell = x^{\ell-1} e^{\alpha x} \cos\beta\, x,$$

$$y_{\ell+1} = e^{\alpha x} \sin\beta\, x, \quad y_{\ell+2} = xe^{\alpha x} \sin\beta\, x, \ldots, y_{2\ell} = x^{\ell-1} e^{\alpha x} \sin\beta\, x.$$

Пример. Решить уравнение $y^V + 8y''' + 16y' = 0.$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^5 + 8k^3 + 16k = 0, \qquad k(k^4 + 8k^2 + 16) = 0 \Rightarrow$$
$$k_1 = 0, \quad k_{2,3,4,5} = \pm 2i.$$

Корень k_1 соответствует случаю а, значит,

$$y_1 = e^{0x} = 1$$

Корни $k_{2,3,4,5}$ сопряженные, кратности *2*. Согласно случаю г) имеем

$$y_2 = e^{0x} \cos\beta\, x = \cos 2x, \quad y_3 = x \cos 2x,$$

$$y_4 = \sin 2x, \quad y_5 = x \sin 2x.$$

Получаем общее решение в виде

$$y = C_1 + (C_2 + C_3 x)\cos 2x + (C_4 + C_5 x)\sin 2x.$$

Тип 3 Линейные неоднородные уравнения это уравнения вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x). \tag{43}$$

Общее решение ищется в виде:

$$y = y_{чн} + y_{oo},$$

где $y_{чн}$–частное решение уравнения (43), y_{00} – общее решение соответствующего однородного уравнения.

Если правая часть уравнения (43) есть сумма двух функций, т.е.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

то следует рассмотреть два уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f_1(x), \tag{44}$$

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f_2(x), \tag{45}$$

Тогда общее решение будет иметь вид:

$$y = y_1 + y_2 + y_{oo},$$

где y_1–частное решение уравнения (44), y_2–частное решение уравнения (45), y_{oo}–общее решение однородного уравнения.

В случае, если:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x),$$

общее решение уравнения следует искать в виде:

$$y = y_{00} + y_1 + y_2 + \ldots + y_n.$$

Это свойство называется наложением решений.

Рассмотрим два метода отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения.

3 Метод вариации произвольных постоянных

Алгоритм нахождения решения:	Пример. Решить уравнение $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^4 - x^2$
1 Преобразуем уравнение, чтобы коэффициент при старшей производной был равен единице.	1 $y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = x^2 - 1.$
2 Находим общее решение соответствующего однородного уравнения. $y_{00}=C_1y_1+...+C_ny_n$.	2 $y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0.$ $y_1 = x^2, \quad y_2 = x^2\int \frac{e^{\int \frac{4}{x}dx}}{x^4}dx = x^3.$ $y_{00}=C_1x^2+C_2x^3.$

3 Ищем частное решение исходного уравнения, полагая, что в решении y_{00} величины $C_1,...C_n$ являются функциями независимой переменной *x,* т.е. $y_{чн}=C_1(x)y_1+C_n(x)y_2$ (46)	3 $y_{чн}=C_1(x)x^2+C_2(x)x^3$.
4 Для нахождения функций $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ в (46) составляем систему уравнений (47) $\begin{cases} C_1'(x)y_1+\ldots+C_n'(x)y_n=0, \\ C_1'(x)y_1+\ldots+C_n'(x)y_n'=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n^{(n-1)}y^{(n-1)}=f(x). \end{cases}$	4 $\begin{cases} C_1'(x)x^2+C_2'(x)x^3=0, \\ 2xC_1'(x)+3x^2C_2'(x)=x^2-1. \end{cases}$
5 Находим $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$, используя определитель Вронского. $C_i'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix} y_1\ldots 0\ldots y_n \\ y_1'\ldots 0\ldots y_n' \\ ------- \\ y_1^{(n-1)}\ldots f(x)\ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{W}$ (48) $(i=1,2,\ldots,n)$	5 $W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix}=x^4.$ $C_1'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ x^2-1 & 3x^2 \end{vmatrix}}{x^4}=\dfrac{1}{x}-x.$ $C_2'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & x^2-1 \end{vmatrix}}{x^4}=1-\dfrac{1}{x^2}.$
6 Интегрируя равенство (48), находим $C_i(x)$, $(i=1,2,\ldots,n)$.	6 $C_1(x)=\int\left(\dfrac{1}{x}-x\right)dx=\ell n\lvert x\rvert-\dfrac{x^2}{2}+C_1.$ $C_2(x)=x+\dfrac{1}{x}+C_2.$
7 Подставляем найденные функции в формулу (46), получаем частное решение исходящего уравнения.	7 $y_{чн}=\left(\ln\lvert x\rvert-\dfrac{x^2}{2}+C_1\right)x^2+$ $+\left(x+\dfrac{1}{x}+C_2\right)x^3.$
8 Записываем общее решение: $y=y_{чн}+y_{oo}$.	8 $y''+2y'+y=6e^{2x}$.

4 Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод применим только к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x), \tag{49}$$

причем только в том случае, если правая часть может быть представлена так:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta\, x + Q_m(x)\sin\beta\, x\right]. \qquad (50)$$

Здесь α *и* β - постоянные, $P_n(x)$ *и* $Q_m(x)$ – многочлены от *x* соответственно *n*- й и *m*-й степени.

Частное решение уравнения (49) ищем в виде

$$y = e^{\alpha x}\cdot x^r\left[P_e(x)\cos\beta x + Q_e(x)\sin\beta x\right], \qquad (51)$$

где $P_e(x)$ *и* $Q_e(x)$ – полные многочлены от *x* степени *l* с неопределенными коэффициентами, причем *l* равно наибольшему из чисел *m* и *n*,
r – показатель кратности корня $\alpha + \beta i$ характеристического уравнения

$$K^n + a_1K^{(n-1)} + \ldots + a_n = 0.$$

Если характеристическое уравнение такого корня не имеет, следует положить $r = 0$.

Неопределенные коэффициенты многочленов $P_e(x)$ и $Q_e(x)$ находятся из системы линейных алгебраических уравнений, которая получается так: в заданное уравнение подставляем частное решение $y(x)$ и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой части равенства.

Если правая часть исходного уравнения равна сумме нескольких различных функций рассматриваемой структуры (50), то для отыскания частного решения такого уравнения следует использовать ранее описанный способ наложения решений.

Теперь рассмотрим несколько примеров нахождения частных решений с помощью такого метода.
Пример 1 Найти частное решение уравнения $y'' + 5y' + 6y = 2.$

Решение. Сравниваем правую часть уравнения с (50). Она не содержит функций $e^{\alpha x}$, синус и косинус $\Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 0.$ Проверим, является ли выражение $\alpha + \beta i = 0$ корнем характеристического уравнения.

$$k^2 + 5k + 6 = 0, \qquad k_1 = -3; k_2 = -2.$$

Очевидно, что $\alpha + \beta i = 0$ не является характеристическим корнем, значит, в равенстве (51) показатель кратности $r = 0$. Тогда получаем, что частное решение этого уравнения ищем в виде многочлена нулевой степени, т. е. константы: $y = A$.

Подставляем в уравнение: $6A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$, т. е. $y = \frac{1}{3}$. Ответ. $y = \frac{1}{3}$.

Пример 2 Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' + y = 6e^{2x}$.
Решение. Очевидно, что здесь $\alpha = 2, \beta = 0 \Rightarrow \alpha + \beta\, i = 2.$
Находим характеристические корни:
$k^2 + 2k + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 1$

$\alpha+\beta i=2$ не является корнем характеристического уравнения $\Rightarrow$ *r=0.* Правая часть исходного уравнения содержит многочлен от *x* степени *0* $\Rightarrow$, ищем частное решение в виде:

$$y = Ae^{2x}.$$

Подставляем в уравнение:

$$(4A+4A+A)e^{2x}=6e^{2x}.$$

Приравниваем коэффициенты

$$9A=6\Rightarrow A=\frac{2}{3}\Rightarrow y=\frac{2}{3}e^{2x}.$$

Пример 3 Найти частное решение уравнения $y''-2y'=x^3+2x+1$.

Решение. Здесь

$$\alpha=0, \beta=0\Rightarrow\alpha+\beta\, i=0.$$

Это значение является корнем характеристического уравнения кратности I (проверить !), значит, $r = 1$.

Правая часть исходного уравнения содержит многочлен третьей степени, тогда частное решение имеет вид

$$y=x(Ax^3+Bx^2+Cx+D).$$

Неопределенные коэффициенты находим как в предыдущих случаях.

Пример 4 Найти частное решение уравнения

$$y''+y=(3x+2)\sin 2x+(x^2+2x+1)\cos 2x.$$

Решение. Очевидно, что

$$\alpha=0,\ \beta=2\Rightarrow\alpha+\beta i=2i.$$

Данное значение не является корнем характеристического уравнения $r = 0$. Наибольшая степень многочлена от x, содержащегося в правой части, равна *2*, тогда частное решение имеет вид

$$y=(A_1x^2+B_1x+C_1)\sin 2x+(A_2x^2+B_2x+C_2)\cos 2x.$$

Список литературы

1 Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений [Текст] / В. В. Степанов. – М. : ГИТТЛ, 1959.

2 Смирнов, В. И. Курс высшей математики [Текст] / В. И. Смирнов. – М. : Наука, 1967. – Т.2.

3 Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения [Текст] / А. Н. Тихонов, А. Г. Васильева, А. Г. Свешников. – М. : Наука, 1980.

4 Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / И. Г. Петровский. – М. : Наука, 1964.

5 Портнягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Л. С. Портнягин. – М. : Наука, 1974.

6 Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление [Текст] / Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1965.

Содержание

Змызгова Татьяна Рудольфовна
Корнюшева Татьяна Владиславовна
Тупицина Юлия Валерьевна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Контрольные задания и методические указания
к выполнению самостоятельной работы по курсу математики
для студентов направлений
190109, 190110, 140400, 190600, 190700, 151900,
150700, 220700, 220400, 280700, 221700, 220601

Редактор А.С. Мокина

Подписано в печать 20.01.14	Формат 60х84 1/16	Бумага тип. №1
Печать цифровая	Усл. печ. л. 2,5	Уч.-изд. л. 2,5
Заказ 19	Тираж 37	Не для продажи

РИЦ Курганского государственного университета.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет.