МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра прикладной математики и компьютерного моделирования

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические рекомендации
к изучению модуля «Функции нескольких переменных.
Дифференциальные уравнения»
для студентов специальностей 190109.65 и 190110.65
и направлений 140400.62, 190700.62, 151900.62,
150700.62, 220700.62, 280700.62, 221700.62

Курган 2014

Кафедра: «Прикладная математика и компьютерное моделирование»
Дисциплина: «Математика»
(специальности 190109.65 и 190110.65;
направления 140400.62, 190700.62, 151900.62, 150700.62,
220700.62, 280700.62, 221700.62).

Составили: канд. пед. наук, доц. А.Т. Зверева (модель учебного занятия при личностно-деятельностном подходе, общая редакция);
ст. преподаватель. Ю.С. Малышева (теоретическая часть, варианты заданий).

Методические рекомендации составлены на основе учебных программ по курсу «Математика».

Утверждены на заседании кафедры «27» августа 2013 г.

Рекомендованы методическим советом университета «31» декабря 2013 г.

ВВЕДЕНИЕ

Методические рекомендации предназначены студентам инженерных направлений всех форм обучения для изучения разделов «Функции нескольких переменных» и «Дифференциальные уравнения» в условиях личностно-деятельностного подхода.

Личностно-деятельностный подход определяется как единство равноценных по значимости личностного и деятельностного компонентов (И.А. Зимняя, Е.П. Ильин, А.Н. Леонтьев). Личностный компонент предполагает, что в центре обучения находится сам обучающийся – его мотивы, цели, его неповторимый психологический склад, то есть студент как личность. А это означает, что учебный процесс должен быть ориентирован на формирование таких личностно-значимых качеств, как критичность мышления, гибкость мышления, самостоятельность, ответственность, активность.

Деятельностный компонент предполагает создание определённых условий для организации учебной деятельности обучаемых, позволяющих достичь оптимального уровня сформированности этих качеств.

В процессе нашего исследования установлено, что обозначенные личностные качества формируются в процессе выполнения следующих действий:

1 формулирование разумного вопроса к условию задачи из данных разделов;
2 выбор объекта, удовлетворяющего заданным условиям;
3 сопоставление вопроса и верного ответа;
4 выбор, из предложенных вариантов, правильного решения задачи или объекта определенного типа;
5 формулирование правильного вывода на основе конкретных примеров или эмпирических данных;
6 нахождение наиболее оптимального способа решения задачи;
7 добавление необходимых условий для решения задачи с неполными данными;
8 нахождение ошибки в предложенных решениях или рассуждениях;
9 перевод информации с одного математического языка на другой (символьный, геометрический, вербальный);
10 проверка корректности первоначальных условий задачи.

Решение классических задач по математике не всегда акцентирует внимание студентов на выполнение действий, указанных в списке, поэтому нами составлены задачи на материале указанного модуля, предусматривающие в процессе решения реализацию указанных действий.

Исходя из выше сказанного, мы предлагаем следующую структуру методических рекомендаций:

1 Программа модуля.
2 Критерии оценки рейтинговых показателей для модуля.
3 Задачник.
4 Таблица распределения задач по направленности на формирование личностно-значимых качеств.
5 Методические рекомендации по использованию задач на каждом из этапов учебного цикла.

6 Критерии достижения уровня сформированности личностных качеств.
7 Тест для вводного контроля.
8 Материалы для текущего и итогового контроля обученности.
9 Приложение А. Теоретическая и организационная модели учебного занятия в условиях личностно-деятельностного подхода к обучению.

1 Программа модуля

Изучение материала модуля осуществлялось в соответствии с программой курса, которая представлена в таблице 1.

Таблица 1 – Программа изучения модуля

Содержание лекций		
Наименование раздела, темы дисциплины	Наименование и содержание лекции (с указанием часов)	Трудоемкость, часы
Функции нескольких переменных	Понятие функции двух переменных, нескольких переменных. Область определения и область значений функции нескольких переменных. Геометрическое изображение функции двух переменных. Понятие линии уровня и поверхности уровня. Предел функции нескольких переменных. Непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные первого порядка. Геометрический смысл частных производных функций двух переменных. Частные производные высших порядков. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Полный дифференциал функции нескольких переменных. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков. Производная сложной функции. Полная производная. Инвариантность формы полного дифференциала. Дифференцирование неявной функции. Дифференцирование сложной функции, полная производная. Производная по направлению. Градиент функции. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Первая и вторая квадратичная формы поверхности. Необходимые и достаточные условия экстремума. Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области.	6
Дифференциальные уравнения	Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка: основные понятия. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах. Основные понятия. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка. Уравнения, допускающие понижение порядка. Понятие линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка.	10

Продолжение таблицы 1

	Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка. Метод вариации произвольных постоянных.	
	Содержание практических занятий:	
Функции нескольких переменных	Понятие функции двух переменных, нескольких переменных. Область определения и область значений функции нескольких переменных. Геометрическое изображение функции двух переменных. Понятие линии уровня и поверхности уровня. Предел функции нескольких переменных. Непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные первого порядка. Геометрический смысл частных производных функций двух переменных. Частные производные высших порядков. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Полный дифференциал функции нескольких переменных. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков. Производная сложной функции. Полная производная. Инвариантность формы полного дифференциала. Дифференцирование неявной функции. Дифференцирование сложной функции, полная производная. Производная по направлению. Градиент функции. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Первая и вторая квадратичная формы поверхности. Необходимые и достаточные условия экстремума. Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области.	6
Дифференциальные уравнения	Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка: основные понятия. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах. Основные понятия. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка. Уравнения, допускающие понижение порядка. Понятие линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейного неоднородные дифференциального уравнения n-го порядка. Метод вариации произвольных постоянных. Основные понятия. Нормальная система дифференциальных уравнений. Задача Коши. Структура общего решения. Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.	10

2 Критерии оценки рейтинговых показателей для модуля

Текущий контроль в модуле осуществляется посредством рейтинговой системы контроля. Описание рейтинговых показателей и критериев выставления баллов представлено в таблице 2.

Таблица 2 – Критерии оценки рейтинговых показателей для модуля

Качества	Форма контроля	Критерии оценки
I критичность мышления	Выполнение тестовых заданий	Студентам предлагается выполнить 5 заданий (с. 49, III блок заданий) с недостающими данными, среди которых могут быть «полные задачи». За каждое верно выполненное задание студент получает 1 балл (максимум: 5*1=5 баллов). От 1 до 2 баллов студент может получить при решении заданий данного типа на практических занятиях.
II гибкость мышления	Выполнение тестовых заданий	Студентам предлагается 3 базовых данных (с. 50, IV блок заданий), по которым необходимо составить от 1 до 14 возможных задач. За каждую верно составленную задачу студент получает 0,5 балла (максимум: 14*0,5=7 баллов).
III самостоятельность	Выполнение тестовых заданий. Поиск информации в заданном направлении	1) Студентам предлагается 10 тестовых заданий (с. 48, I блок заданий). За каждую верно выполненную задачу 0,4 балла (максимум: 10*0,4=4 балла). 2) Написание углублённого реферата на тему «Некоторые практические приложения теории функции многих переменных на практике» или «Некоторые практические приложения теории дифференциальных уравнений на практике» - от 1 до 3 баллов.
IV активность	Активное и своевременное выполнение дополнительных заданий	Студентам предлагается 7 углублённых дополнительных (необязательных) заданий из задачника. За каждое верно и своевременно выполненное задание 1 балл (максимум: 7*1=7 баллов).
V ответственность	Оцениваем посещение занятий и своевременное выполнение заданий из типовых расчетов, ответы на теоретические вопросы при их защите	В модуле 16 занятий (лекций и практик). Следовательно, за каждое занятие, на котором студент присутствовал, он получает 0,2 балла (максимум: 16*0,2=3,2 балла). 1 балл студент получает бонусом при посещении всех занятий данного модуля. В данном модуле студентам нужно выполнить и защитить за определённый срок 14 обязательных заданий. Защита состоит в решении задач из типового расчета в аудитории без тетрадей и ответах на теоретические вопросы по данному модулю. При выполнении данных условий студент зарабатывает за каждое задание 0,2 балла (максимум: 14*0,2=2,8 баллов).

3 Задачник

№1 Выразить объем прямоугольного параллелепипеда, вписанного в шар радиуса R, как функцию его измерений x и y. Найти область определения этой функции.

№2 Выразить площадь S равнобочной трапеции как функцию трех величин: длин оснований x и y и боковой стороны z. Найти область определения этой функции.

№3 Подобрать аналитическое выражение функции двух переменных $z = f(x;y)$ так, чтобы областью определения такой функции были бы следующие множества: а) плоскость с выброшенной точкой $A(2;-3)$;

б) плоскость с выброшенными точками $A(2;-3)$ и $B(3;-2)$;

в) плоскость с выброшенной окружностью $x^2 + y^2 = 4$;

г) плоскость, из которой выброшены парабола $x^2 = 2y$ и прямая $x = -2$;

д) внешняя часть круга $x^2 + (y-3)^2 > 9$.

№4 Дано $f(x;y) = \dfrac{(x+y)^2}{2xy}$. Найти: а) $f\left(1;\dfrac{y}{x}\right)$; б) $f(x;-x)$; в) $f(0;y)$;

г) $f\left(\dfrac{1}{x};\dfrac{1}{y}\right)$.

№5 Дано $f(x+y;x-y) = (x+y)^2 y^2$. Найти: $f(x;y)$.

№6 Дана функция $f(x;y) = \dfrac{2x+y}{x+2y}$. Проверить, что:

а) $f(1;2) = \dfrac{1}{f(2;1)}$; б) $f(c;c) = -f(-c;c)$.

№7 Найти и схематически изобразить линии уровня данных функций:
а) $z = x + y$; б) $z = \sqrt{xy}$; в) $z = x^2 - y^2$.

№8 Для функции трех переменных составить матрицу соответствующей квадратичной формы и найти поверхности уровня:
а) $u = x^2 + y^2 + z^2$; б) $u = x^2 + y^2 - z^2$.

№9 Записать аналитически и изобразить схематически область определения данных функций: а) $z = \sqrt{y^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$;

б) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 4)(9 - x^2 - y^2)}$;

в) $z = \log_3(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$; г) $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$.

№10 Найти значение функции $f(x;y) = \dfrac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{10 - x^2 - y^2}$ в точках окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

№11 Найти условный экстремум функции $u = x + y + z^2$ при условиях связи $\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases}$

№12 Исследовать на условный экстремум функцию $z = x^2 y^2$, если переменные x и y удовлетворяют уравнению связи: $x - y = 2$.

№13 Даны функции $f(x;y) = x^2 - y^2$, $g(x;y) = \cos x$, $\varphi(x;y) = \sin x$. Найти:
а) $f(g(x);\varphi(x))$; б) $g(f(x;y))$.

№14 Подобрать функции $f(x)$ и $g(x)$ так, чтобы имели место формулы:
а) $f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$; б) $g(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$;
в) $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1 - f(x)f(y)}$; г) $f(x+y) = f(x)f(y)$.

№15 Каким из методов с Вашей точки зрения более рационально можно решить данное дифференциальное уравнение $y'' - y' = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$?

№16 Классифицируйте данное дифференциальное уравнение и предложите наиболее рациональное с Вашей точки зрения решение для него
$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{2x}$.

№17 Пусть $z = g(u;v) = \arcsin(u+v)$, $u = 2x - 3y$, $v = x + y$. Указать область определения функции $z = \varphi(x;y)$.

№18 Вычислить предел: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 7}} (1 + 3xy)^{\frac{5}{x^2+xy}}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{e^{y(x+y-2)} - 1}{3(1+x)(x+y-2)}$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{\sin(x+y-3)}{(x+2y)^2 - 9}$; д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x - y^2)\sin\dfrac{1}{x+y}\cos\dfrac{x}{x-y}$;

е) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -3}} \dfrac{\ln(3 + x^2 + y)}{2 + y + x^2}$.

№19 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$ в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной прямыми: $x = 0,\ y = 0,\ 2x + 3y - 6 = 0$.

№20 Доказать, что функция $u = f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$ непрерывна в точке $O(0;0)$ по каждой переменной x и y, но не является непрерывной в этой точке по совокупности переменных.

№21 Доказать, что функция $u(x;y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ ограничена на множестве $\Omega = \{(x;y): 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$ и по возможности найти её минимум, максимум, inf и sup на этом множестве.

№22 Найти множества точек разрыва следующих функций:

а) $u(x;y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$; б) $u(x;y) = \ln(4-x^2-y^2)$; в) $u(x;y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$;

г) $u(x;y) = \sin\dfrac{x}{y}$; д) $u(x;y) = \dfrac{\sin x \sin y}{xy}$.

№23 Найти множества точек, в которых функции не дифференцируемы:

а) $z = |x-y|$; б) $z = (x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}$.

№24 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+y^2}$ на замкнутом круге радиуса 1 с центром в начале координат.

№25 Докажите, что функция $u = \dfrac{1}{r}$, где $r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ удовлетворяет при $r \neq 0$ уравнению Лапласа $u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0$.

№26 Найдите частные производные указанного порядка:

а) $\dfrac{\partial^{10} u}{\partial x^2 \partial y^8}$, если $u = e^{xy}$; б) $\dfrac{\partial^{10} u}{\partial x^4 \partial y^6}$, если $u = \sin x \cos 2y$;

в) $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, если $u = x^m y^n$; г) $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, если $u = e^{2x}\sin y + e^x \cos\dfrac{y}{2}$.

№27 Какие из предложенных функций двух переменных являются гармоническими, то есть удовлетворяют уравнению Лапласа $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$:

а) $u = x^3 - 2xy + y^3$; б) $u = 3x + 5y + 7$; в) $u = \sin(3x+7)\cos\dfrac{y}{5}$; г) $u = \ln(x^2+y^2)$.

№28 Найдите точки локальных экстремумов следующих функций двух переменных: а) $u = x^2 - xy + y^2$; б) $u = x^3 - 2x^2y^2 + y^4$; в) $u = (x-2y)e^{-(x^2+y^2)}$.

№29 В химической реакции участвуют три вещества с концентрациями x, y и z. Скорость реакции v в любой момент времени выражается законом $v = kx^2yz$. Найти концентрации x, y и z, при которых скорость v течения реакции максимальна.

№30 Из данного куска жести площадью $2a$ надо сделать закрытую коробку в форме параллелепипеда, имеющую наибольший объем V.

№31 Даны три функции: а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; б) $z = \sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$; в) $z = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$.

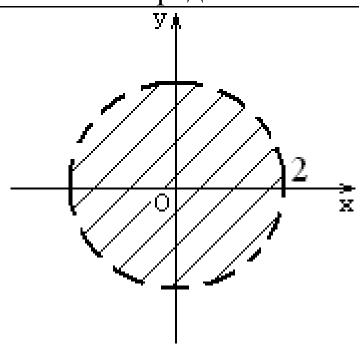
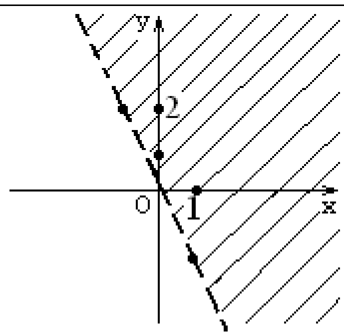
Какая из данных функций удовлетворяет уравнению $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2}$?

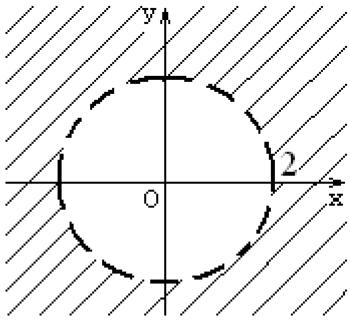
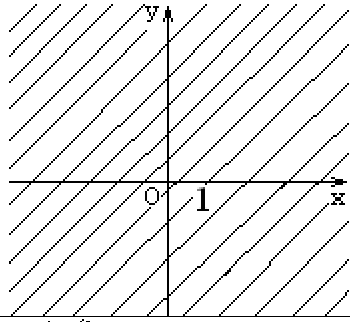
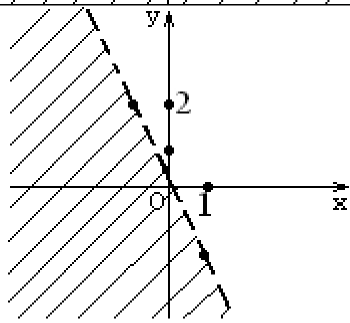
№32 Дана функция $z = \dfrac{4}{x^2 + y^2}$ и точка $A(-1;2)$. Поставьте хотя бы один разумный вопрос данной темы и решите Вашу задачу.

№33 Дано уравнение поверхности $x^2 + y^2 - xz - yz = 0$ и точка $M(0;2;2)$. Поставьте хотя бы один разумный вопрос данной темы и решите Вашу задачу.

№34 Соотнесите функцию и её область определения в таблице 3.

Таблица 3 – Таблица к задаче № 34

	Функция		Область определения
1)	$z = 3y - x$	1)	
2)	$z = \dfrac{5}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$	2)	

	$z = \ln(2x + y)$	3)	
4)		4)	
5)		5)	

№35 Запишите ответ в виде пар соответствующих чисел из таблицы 4.

Таблица 4 – Таблица к задаче № 35

1) Линией уровня функции $z = f(x; y)$ называется …	1) предел: $\dfrac{\partial z}{\partial \bar{a}} = \lim\limits_{\left\|\overline{MM_1}\right\| \to 0} \dfrac{f(M_1) - f(M)}{\left\|\overline{MM_1}\right\|}$.
2) Поверхностью уровня функции трех переменных $u = f(x; y; z)$ называется …	2) плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности β через любую точку $M \in \beta$.
3) Функция $z = f(x; y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x; y)$, если …	3) прямая, проходящая через произвольную точку M перпендикулярно касательной плоскости α к поверхности β.
4) Касательной плоскостью α к поверхности β в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ называется …	4) поверхность в трёхмерном пространстве, заданная уравнением $f(x; y; z) = C$, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $u = 0$.
5) Нормалью ℓ (нормальной прямой) к поверхности β в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ называется …	5) ее полное приращение в этой точке можно представить в виде: $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y$, где $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

6) Градиентом функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ называется …	6) линия на плоскости Oxy, заданная уравнением $f(x; y) = 0$, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $z = C$.
7) Производной функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ в направлении вектора $\bar{a} = \overline{MM_1}$ называется …	7) длина вектора, выходящего из точки M и имеющего своими координатами значения частных производных функции z, вычисленных в точке M: $\operatorname{grad} z = z_x^/(M)\,\bar{i} + z_y^/(M)\,\bar{j}$.
	8) ее полное приращение в этой точке можно представить в виде: $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, где $\alpha = \alpha(\Delta x; \Delta y) \to 0$, $\beta = \beta(\Delta x; \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.
	9) линия на плоскости Oxy, заданная уравнением $f(x; y) = C$, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $z = C$.
	10) вектор, выходящий из точки M и имеющий своими координатами значения частные производные функции z, вычисленных в точке M: $\operatorname{grad} z = z_x^/(M)\,\bar{i} + z_y^/(M)\,\bar{j}$.
	11) поверхность в трёхмерном пространстве, заданная уравнением $f(x; y; z) = C$, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $u = C$.
	12) плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности β через точку M_0
	13) выражение вида $\dfrac{\partial z}{\partial \bar{a}} = z_x^/(M)\,\bar{i} + z_y^/(M)\,\bar{j}$.
	14) прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной плоскости α к поверхности β в этой же точке.

№36 Добавьте необходимое для решения задачи условие и решите ее. Поверхность задана уравнением $7zx^2 - 3xy^2 - 4 = 0$. Найти уравнение нормали в точке M_0 этой поверхности.

№37 Запишите ответ в виде пар соответствующих чисел из таблицы 5.

Таблица 5 – Таблица к задаче № 37

1) Функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ называются линейно независимыми на интервале $(a;b)$, если равенство $\alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 \cdot y_2 = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда …	1) определителем Вронского.
2) Функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ называются … на интервале $(a;b)$, если для $\forall x \in (a;b)$ существует такое постоянное число $t = \dfrac{y_1}{y_2}$.	2) $k^2 + k + 1 = 0$.
3) Если дифференцируемые функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ линейно зависимы на $(a;b)$, то определитель Вронского на этом интервале …	3) $y = c_1 y_1(x) \cdot c_2 y_2(x)$, где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.
4) Совокупность любых двух линейно независимых на интервале $(a;b)$ частных решений $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка называется …	4) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$.
5) Если два частных решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка образуют на интервале $(a;b)$ фундаментальную систему, то общим решением этого уравнения является функция …	5) частного решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.
6) Характеристическим уравнением линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами 2-го порядка $y'' + py' + qy = 0$ является выражение вида …	6) нигде не обращается в нуль.
7) Общим решением линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами является сумма его произвольного частного решения и …	7) линейно независимыми.
	8) фундаментальной системой решений.
	9) общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.
	10) $k^2 + pk + q = 0$.
	11) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
	12) тождественно равен нулю.
	13) линейно зависимыми.
	14) $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

№38 Какая из функций: $y = e^x$, $y = 2$, $y = \dfrac{1}{x+1}$, $y = \sqrt{\ln(x+1)}$ является решением дифференциального уравнения $ydy = \dfrac{dx}{2(x+1)}$?

№39 В каких из указанных видов можно представить множество всех решений уравнения $y' = y$:

а) $y = Ce^x$; б) $y = C_1e^x + C_2$; в) $y = \sqrt{C}e^x$; г) $y = (\sin C)e^x$; д) $y = e^{x+C}$?

№40 Покажите с помощью стрелки, уравнением с разделяющимися переменными или однородным являются данные дифференциальные уравнения:

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

Однородное дифференциальное уравнение

1) $(1+e^x)\cdot y \cdot y' = e^x$;

2) $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$;

3) $\dfrac{dy}{y}\sin x = \ln y \cdot dx$;

4) $(xy^2 + x)dx + (yx^2 - y)dy = 0$;

5) $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$;

6) $y' - 2xy = e^x$.

№41 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = tgx$ методом вариации произвольных постоянных, заполнив пропуски в решении.

Решение: 1) Составим характеристическое уравнение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения и найдём его корни: $y'' + y = 0$, $k^2 + 1 = 0$, $k^2 = -1$, $k_1 = \_\_$, $k_2 = \_\_$. Фундаментальная система решений имеет вид: $y_1 = \_\_\_\_\_$, $y_2 = \_\_\_\_\_$. Тогда $y_{oo} = C_1\cos x + C_2\sin x$.

2) $y_{он}$ будем искать в виде: $y_{он} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$.

Функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ найдем из системы вида:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)\_\_\_\_\_ + C_2'(x)\_\_\_\_\_ = tgx. \end{cases}$$

Применим к полученной системе формулы Крамера:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 1,$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ tgx & \cos x \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = -\frac{\sin^2 x}{\cos x},$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & tgx \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \sin x.$$

Тогда $C_1^{/}(x)=\dfrac{W_1}{W}=$ _______ ,

$$C_1(x)=\int\frac{W_1}{W}dx=-\int \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_}\, dx=-\ln\left(tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)+\sin x+C_3.$$

$C_2^{/}(x)=\dfrac{W_2}{W}=$ ___________ ,

$$C_2(x)=\int\frac{W_2}{W}dx=\int \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_}\, dx=-\cos x+C_4.$$

$y_{он}=($_________________$)\cos x+($_____________$)\sin x=$

$$=-\ln\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\cos x+C_3\cos x+C_4\sin x=y_{чн}+y_{оо}.$$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y_{он}=-\ln\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\cos x+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

№42 Найти наибольшую скорость возрастания скалярного поля $u=tgx-x+3\sin y-\sin^3 y+z+ctgz$ в точке $M(\pi/4;\pi/3;\pi/2)$.

№43 Составить уравнение нормали к параболоиду $z=x^2+y^2$ в точке $N(1;2;3)$, если это возможно.

№44 Существует ли частная производная $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ функции $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$ в точке $M(0;1)$?

№45 Составить уравнение касательной плоскости к поверхности $z=e^{x+y}$ в точке $D(1;-1;2)$, если это возможно.

№46 Является ли плоскость $z=0$ касательной в точке $O(0;0;0)$: а) к параболоиду вращения $z=x^2+y^2$; б) к конусу $z=\sqrt{x^2+y^2}$; в) к гиперболическому параболоиду $z=xy$?

№47 Проверить, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений указанные функции:

а) $y=\dfrac{1}{3(x+1)}$, $y^{/}=3y^2$; б) $v=\dfrac{c}{b}\left(1-e^{-\frac{bt}{a}}\right)$, $a\dfrac{dv}{dt}+bv-c=0$;

в) $y=3-e^{-x^2}$, $xy^{/}+2y=e^{-x^2}$; г) $x^2+t^2-2t=C$, $x\dfrac{dx}{dt}+t=1$.

№48 Добавьте хотя бы одно необходимое для решения задачи условие и решите её. Функция задана уравнением $z=2x-3y^2$. Найти производную $\dfrac{\partial z}{\partial \bar{a}}$ в точке $M_0(1;1)$.

№49 Добавьте необходимое для решения задачи условие и решите ее. Указать направление наибольшего возрастания скалярного поля $U(x;y;z) = x^2 + y^3 + z$.

№50 По методу решения определить хотя бы один тип и вид дифференциального уравнения из таблицы 6.

Таблица 6 – Таблица к задаче № 50

Тип и вид дифференциальных уравнений первого порядка	Метод решения
	$\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx = -\int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)} dy + C$
	Подстановка: $y = z \cdot x$, $y' = z' \cdot x + z$, где $z = z(x)$
	Метод Бернулли: подстановка $y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$.
	1) $U(x;y) = \int M\,(x;y)dx = \Phi(x;y) + \varphi(y)$; 2) $\Phi'_y(x;y) + \varphi'(y) = N(x;y)$; 3) $\varphi(y) = \int \left(N(x;y) - \Phi'_y(x;y)\right)dy$; 4) $U(x;y) = \Phi(x;y) + \varphi(y)$; 5) $U'_x = M(x;y)$, $U'_y = N(x;y)$.

№51 Привести хотя бы один пример дифференциального уравнения, которое одновременно являлось бы: 1) с разделяющимися переменными;
2) линейным однородным; 3) в полных дифференциалах.

№52 Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, заполнив пропуски в указанном решении.

Решение: 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{*}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{*}{x^2 + y^2}$;

2) $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{*}{x^2 + y^2} - \frac{*}{x^2 + y^2}$.

№53 Вычислить приближенно $1{,}02^{3{,}01}$, заполнив пропуски в решении.

Решение: 1) Рассмотрим функцию $f(x;y) = x^y$ и применим к данной функции формулу $f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x;y) + \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

2) Для данного случая $x = 1$, $y = 3$, $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = *$,

$f(x;y)=f(1;3)=1^3=1$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=yx^{y-1}\Delta x+{*}{*}\,\Delta y=3\cdot 1\cdot 0{,}02+{*}{*}{*}=0{,}06$.

3) Таким образом, получим: $1{,}02^{3{,}01}\approx 1+0{,}06=1{,}06$.

№54 Пусть y как функция от x задана соотношением $e^{xy}-x-y=0$.

Найти $\dfrac{dy}{dx}$, заполнив пропуски в решении.

Решение: 1) Формула для вычисления искомой производной имеет вид:

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x^{/}(x;y)}{F_y^{/}(x;y)}$, где $F(x;y)=e^{xy}-x-y$, $F_x^{/}(x;y)={*}e^{xy}-1$, $F_y^{/}(x;y)={*}e^{xy}-1$.

2) Окончательный результат: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{{*}\,e^{xy}-1}{{*}\,e^{xy}-1}=\dfrac{1-{*}e^{xy}}{{*}\,e^{xy}-1}$.

№55 Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности β, заданной уравнением $3^{\frac{y}{z}}+3^{\frac{z}{x}}=12$, в точке $M_0(1;2;2)$, заполнив пропуски в решении.

Решение:1) $3^1+3^2=12$ – верное равенство, следовательно, точка $M_0\in\beta$.

2) Запишем уравнение поверхности β в виде $F(x;y;z)=0$, где

$F(x;y;z)=3^{\frac{y}{z}}+3^{\frac{z}{x}}-12$.

3) Вычислим $F_x^{/}=-\dfrac{z}{x^2}3^{\frac{z}{x}}\cdot\ln 3$, $F_y^{/}=\dfrac{1}{z}3^{\frac{y}{z}}\cdot\ln 3$, $F_z^{/}=$ ________________, следовательно, уравнение касательной плоскости примет вид:

$-18\cdot\ln 3\cdot(x-1)+\dfrac{3}{2}\ln 3\cdot(y-2)+$ ______$(z-2)=0$ или α: $12x-y-5z=0$.

Уравнение нормали примет вид ℓ: $\dfrac{x-1}{12}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-2}{\_\_\_}$.

№56 Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $(x^2y^2-9x^2)dx+ydy=0$, заполнив пропуски:

1) $x^2(y^2-9)dx+ydy=0$;

2) $x^2(y^2-9)dx=$ ______ ;

3) ___________ $=-\dfrac{y}{y^2-9}dy$;

4) ___________ $=-\displaystyle\int\frac{y}{y^2-9}dy$;

5) $\dfrac{x^3}{3}=$ ___________ $+C$.

№57 Найти общее решение дифференциального уравнения в полных дифференциалах $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$, заполнив пропуски в решении.

Решение: 1) Выполним проверку:

$M_y^/(x;y) = \left(\frac{2x}{y^3}\right)_y^/ = -\frac{6x}{y^4}$, $N_x^/(x;y) = \left(\frac{y^2-3x^2}{y^4}\right)_x^/ = $ _____, то есть равенство $M_y^/(x;y) = N_x^/(x;y)$ – является __________________.

2) Определим функцию $U(x;y)$ с точностью до произвольной дифференцируемой функции: $U(x;y) = \int M(x;y)dx = \int$ ______ $dx = \Phi(x;y) + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y)$.

3) Составим уравнение для определения функции $\varphi(y)$:

$\Phi_y^/(x;y) + \varphi^/(y) = N(x;y)$ (*).

Для этого найдем $\Phi_y^/(x;y) = \left(\frac{x^2}{y^3}\right)_y^/ = -\frac{3x^2}{y^4}$, тогда равенство (*) примет вид

$-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi^/(y) = $ _____ или $\varphi^/(y) = $ _____. Тогда $\varphi(y) = \int$ _____ $dy = $ _____ $+ C_1$.

4) Составим искомую функцию: $U(x;y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y)$, $U(x;y) = $ __________ $+ C_1$.

5) Выполнить проверку: $U_x^/ = ($ __________ $+ C_1)_x^/ = \frac{2x}{y^3} = M(x;y)$,

$U_y^/ = ($ __________ $+ C_1)_y^/ = \frac{y^2-3x^2}{y^4} = N(x;y)$.

Так как все решения этого уравнения удовлетворяют условию $U(x;y) = C$, где C - произвольная постоянная, то выражение $U(x;y) = $ __________ $+ C_1$ примет вид $C = $ __________ $+ C_1$ или __________ $+ C_1 - C = 0$, обозначив $C_1 - C = C_2$, получим общий интеграл уравнения: $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C_2 = 0$.

№58 Решить дифференциальное уравнение $x^2dy - \left(xy + y^2e^{-\frac{x}{y}}\right)dx = 0$, заполнив пропуски в решении.

Решение: 1) Преобразуем данное уравнение $x^2dy = \left(xy + y^2e^{-\frac{x}{y}}\right)dx$,

$\frac{dy}{dx} =$ ________ или $y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}e^{-\frac{x}{y}}$ (*).

2) Проверим на однородность функцию $f(x;y) = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}e^{-\frac{x}{y}}$:

$f(tx;ty) =$ ________ $= t^0f(x;y)$, то есть $f(x;y) = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}e^{-\frac{x}{y}}$ - ___________ функция нулевого порядка. Следовательно, исходное уравнение является однородным.

3) Произведем подстановку в уравнение (*): $y = z \cdot x$, $y' = z' \cdot x + z$. Получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$z' \cdot x + z = z + z^2 \cdot e^{-\frac{1}{z}}$ или $z'x = z^2 \cdot e^{-\frac{1}{z}}$ (**).

4) Решим уравнение (**): $\frac{dz}{dx} \cdot x =$ _______, $\frac{dz}{\_\_\_\_\_\_} = \frac{dx}{x}$, $\int$ ______ $dz = \int \frac{dx}{x}$,

так как $\int \frac{e^{\frac{1}{z}}dz}{z^2} = -\int e^{\frac{1}{z}}d\left(\frac{1}{z}\right) = -e^{\frac{1}{z}} + C$, то общий интеграл для уравнения (**) примет вид: $-e^{\frac{1}{z}} = \ln|x| + C$.

5) Так как была произведена замена $z = \frac{y}{x}$, то общий интеграл для исходного уравнения $-e^{\frac{x}{y}} = \ln|x| + C$.

№59 Решить дифференциальное уравнение $y' \cdot x - 7 \cdot y = x^3\sqrt{y}$, заполнив пропуски в решении.

Решение: 1) Данное дифференциальное уравнение является уравнением Бернулли ($y' + p(x)y = g(x)y^m$, где $m \in \mathbf{R}$, $m \neq 0$, $m \neq 1$), которое мы получим поделив обе части уравнения на $x \neq 0$, следовательно: $y' - 7 \cdot \frac{y}{x} = x^2\sqrt{y}$, где $m = \frac{1}{2}$.

2) Отметим, что в точке $x = 0$ существует частное решение данного дифференциального уравнения, если $y(0) = 0$.

3) Применим метод Бернулли, то есть произведем подстановку $y = u \cdot v$,

$y' =$ __________ . Получим уравнение: $u' \cdot v + u \cdot v' - 7 \cdot \frac{u \cdot v}{x} = x^2 \sqrt{u \cdot v}$ или

$u' \cdot v + u \cdot (\_\_\_\_\_\_\_\_) = x^2 \sqrt{u \cdot v}$. Составим систему: $\begin{cases} v' - 7 \cdot \frac{v}{x} = 0, \\ u' \cdot v = x^2 \sqrt{u \cdot v}. \end{cases}$ (*)

4) Решим первое уравнение системы (*): $v' - 7 \cdot \frac{v}{x} = 0$, $v' =$ ______ ,

$\frac{dv}{dx} =$ ______ , $\frac{dv}{v} =$ ______ . Проинтегрировав последнее дифференциальное уравнение, получим: $\int \frac{dv}{v} =$ ______ , $\ln|v| =$ _____ , $v =$ _____ .

5) Так как $v = x^7$, то второе уравнение системы (*) примет вид:
$u' \cdot x^7 =$ ________ . Решим его как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{du}{dx} \cdot x^7 =$ _______ , $\frac{du}{\sqrt{u}} =$ ______ , $\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$ ______ ,

$2\sqrt{u} =$ ________ . Выделим $u : \sqrt{u} =$ ________ , $u = (\_\_\_\_\_\_\_)^2$.
6) Так как $y = u \cdot v$, то общее решение исходного уравнения примет вид:

$y = \left(-\frac{1}{\sqrt{x}} + C_1 \right)^2 \cdot x^7$, где $C_1 = \frac{C}{2}$.

№60 Найти решение дифференциального уравнения: $y''' = \sin(3x)$, заполнив пропуски в решении.
Решение: Последовательно интегрируя данное уравнение три раза, получим:
$y'' = \int \sin(3x) dx =$ ____________ ,

$y' = \int (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_) dx =$ ________________________ ,

$y = \int (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_) dx = \frac{1}{27} \cos(3x) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$.

№61 По методу решения определить хотя бы один тип и вид дифференциального уравнения допускающего понижение порядка из таблицы 7.

Таблица 7 – Таблица к задаче № 61

Тип и вид дифференциальных уравнений допускающих понижение порядка	Метод решения
	$y^{(n-1)} = \int f(x) dx$, $y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x) dx \right) dx$, …,

	$y = \underbrace{\int\left(\ldots\int\left(\int f(x)dx\right)dx\ldots\right)dx}_{n \text{ раз}}$
	Замена $y^{(k)} = z$, где $z = z(x)$, тогда $y^{(k+1)} = z^{/}, \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$.
	Замена $y^{/} = z$, где $z = z(y)$, тогда $y^{//} = z \cdot z^{/}$, $y^{///} = z^{//} \cdot z + \left(z^{/}\right)^2$ и т.д.

№62 Даны две функции двух переменных. Проверить вычисление частных производных первого и второго порядков и найти ошибки.

1) $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$,

$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 8xy^3 + 7y$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = 12x^2y^2 + 7x$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 8y^3$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 24xy^2 + 7$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24x^2y$.

2) $z = \sin(2x+3)\cos(5y-4)$,

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(2x+3)\cos(5y-4)$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = -5\sin(2x+3)\sin(5y-4)$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4\sin(2x+3)\cos(5y-4)$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 10\cos(2x+3)\sin(5y-4)$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -25\sin(2x+3)\cos(5y-4)$.

№63 Даны две неявно заданные функции. Проверить вычисление $\frac{dy}{dx}$ и найти ошибки.

1) $F(x;y) = y - xe^y + x$,

$F_x^{/}(x;y) = -e^y + 1$,

$F_y^{/}(x;y) = 1 - xe^y$,

$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y - 1}{1 - xe^y}$.

2) $F(x;y) = \sin(x+y) - y$,

$F_x^{/}(x;y) = \cos(x+y)$,

$F_y^{/}(x;y) = \cos(x+y) - 1$,

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos(x+y)}{\cos(x+y) - 1}$.

№64 Даны функции двух переменных. Отметить те из них, областью определения которых является всё множество всех точек плоскости Oxy.

а) $z = x^2 + y^2$; б) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; в) $z = \frac{1}{(x-1)(y-2)}$;

г) $z = 1 - x - y$; д) $z = xy$; е) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$;

№65 Исследовать на условный экстремум функцию $z = x^2 y^2$, если переменные x и y удовлетворяют уравнению связи: $x - y = 2$.

№66 Найдите точки локального экстремума функции
$u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$.

№67 Найдите ошибки в решении и назовите их.

1) $y'' - 2y' - 3y = 0$;
$k^2 - 2k - 3 = 0$;
$k_1 = 3$, $k_2 = -1$;
$y_{oo} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{-x}$.

2) $y'' + 2y' + y = 0$;
$k^2 + 2k + 1 = 0$;
$k_1 = k_2 = -1$;
$y_{oo} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x}$.

3) $y'' - 2y' + 10y = 0$;
$k^2 - 2k + 10 = 0$;
$k_1 = 1 + 3i$, $k_2 = 1 - 3i$;
$y_{oo} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

№68 Укажите буквы, под которыми записаны верные утверждения в таблице 8, а в неверных укажите ошибки.

Таблица 8 – Таблица к задаче № 68

Вид уравнения	Тип уравнения
а) $y^2 e^x dx + (2ye^x - y)dy = 0$	дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными
б) $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$	линейное неоднородное дифференциальное уравнение
в) $y^2 dx - (x^2 - xy)dy = 0$	однородное дифференциальное уравнение
г) $2xy' - y = 3x^2$	линейное неоднородное дифференциальное уравнение
д) $(1 + x^2)y' - 2xy - (1 + x^2) = 0$	дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными
е) $xy' - y = y^2$	уравнение Бернулли
ж) $(x^2 + y - 4)dx + (x + y + e^y)dy = 0$	дифференциальное уравнение в полных дифференциалах
з) $y' + y = e^{\frac{1}{2}x} \sqrt{y}$	дифференциальное уравнение в полных дифференциалах

№69 Найдите ошибки в решении дифференциальных уравнений и назовите их: а) $y'' = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{x}$; б) $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

Решение: а) 1) Произведем замену $y' = z$, $y'' = z'$, где $z = z(y)$:

$z' = \dfrac{\sqrt{1+z^2}}{x}$ - дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Произведем разделение переменных и проинтегрируем: $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\sqrt{1+z^2}}{x}$,

$\int \dfrac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \dfrac{dx}{x}$, $\ln\left|z + \sqrt{1+z^2}\right| = \ln|x| + \ln|C_1|$.

2) Выразим функцию z: $z + \sqrt{1+z^2} = x \cdot C_1$, $\sqrt{1+z^2} = x \cdot C_1 - z$, $\left(\sqrt{1+z^2}\right)^2 = (x \cdot C_1 - z)^2$, $1 + z^2 = x^2 \cdot C_1^2 - 2 \cdot x \cdot C_1 \cdot z + z^2$, $1 = x^2 \cdot C_1^2 - 2 \cdot x \cdot C_1 \cdot z$, $2 \cdot x \cdot C_1 \cdot z = x^2 \cdot C_1^2 - 1$, $z = \dfrac{x^2 \cdot C_1^2 - 1}{2 \cdot x \cdot C_1}$,

$z = \dfrac{x \cdot C_1}{2} - \dfrac{1}{2 \cdot x \cdot C_1}$. 3) Так как $z = y'$, то $y' = \dfrac{x \cdot C_1}{2} - \dfrac{1}{2 \cdot x \cdot C_1}$, тогда $y = \int \left(\dfrac{x \cdot C_1}{2} - \dfrac{1}{2 \cdot x \cdot C_1} \right) dx$, $y = \dfrac{C_1}{4} x^2 - \dfrac{1}{2 \cdot C_1} \cdot \ln|x| + C_2 -$ общее решение исходного уравнения.

б) 1) Произведем замену $y' = z$, $y'' = z \cdot z'$, где $z = z(y)$: $z^2 + 2 \cdot y \cdot z \cdot z' = 0$ или $z \cdot \left(z + 2 \cdot y \cdot z'\right) = 0$. Возможны два случая:

I) $z = 0$, так как $y' = z$, то $y' = 0$, следовательно $y = C_1$ - тривиальное решение.

II) $z + 2 \cdot y \cdot z' = 0$ - дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Найдем его общее решение: $2 \cdot y \cdot z' = -z$, $2 \cdot y \cdot \dfrac{dz}{dy} = -z$, $\dfrac{dz}{z} = -\dfrac{1}{2} \dfrac{dy}{y}$,

$\int \dfrac{dz}{z} = -\dfrac{1}{2} \int \dfrac{dy}{y}$, $\ln|z| = -\dfrac{1}{2} \ln|y| + \ln|C_2|$, $z = \dfrac{C_2}{\sqrt{y}}$.

2) Так как $y' = z$, то $y' = \dfrac{C_2}{\sqrt{y}}$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{C_2}{\sqrt{y}}$, $\sqrt{y}dy = C_2 dx$, $\int \sqrt{y} dy = C_2 \int dx$,

$\dfrac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} = C_2 x + C_3$ – общий интеграл уравнения.

№70 Проверить подбор вида частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения. Выявить возможные ошибки.

а) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$;

1) Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 2k - 3 = 0$, $k_1 = 3$, $k_2 = -1$.

2) $f(x) = e^{4x}$, тогда $y_{чн} = A \cdot e^{4x}$, так как $\alpha + \beta \cdot i = 4$ – корня нет среди корней характеристического уравнения, $r = 0$, $s = 0$, $\beta = 0$.

б) $y^{//}+y=xe^{x}$;

1) Составим характеристическое уравнение: $k^{2}+1=0$, $k^{2}=-1$, $k_1=i$, $k_2=-i$.

2) $f(x)=xe^{x}$, тогда $y_{чн}=(Ax+B)e^{x}$, так как $\alpha+\beta\cdot i=1$ – корня нет среди корней характеристического уравнения, $r=0$, $s=1$, $\beta=0$.

№71 Функция $y=\varphi(x)$ задана параметрически: $x=te^{t}$, $y=e^{-t}$. Доказать, что эта функция является решением уравнения $(1+xy)\dfrac{dy}{dx}+y^{2}=0$.

№72 Составить дифференциальное уравнение по заданному семейству интегральных кривых: а) $y=Cx^{3}$; б) $y^{2}=Cx$; в) $y=\dfrac{C}{x}$; г) $x^{3}=C(x^{2}-y^{2})$.

№73 В заданном семействе кривых найти линию, удовлетворяющую начальному условию: а) $y(1-Cx)=1$, $y(2)=\dfrac{1}{3}$; б) $y^{2}-x^{2}=C$, $y(0)=1$.

№74 При каком значении C заданная функция является решением данного уравнения: а) $s=Ct+4$, $s^{/}=-1$; б) $y=x^{3}$, $y^{/}=Cx^{2}$.

№75 При каких α и β уравнение $y^{/}=2x^{\alpha}+3y^{\beta}$ приводится к однородному с помощью замены $y=u^{m}$.

№76 Проверить выполнение теоремы существования и единственности решения для дифференциального уравнения $\dfrac{dy}{dx}=3y^{2/3}$ и найти все его решения.

№77 Найти направление наибыстрейшего возрастания и наибольшую скорость изменения функции $z=x^{2}+y^{3}$, в точке $M(2;1)$.

№78 Найти кривую, проходящую через точку $O(0;0)$, зная, что угловой коэффициент в любой ее точке равен сумме координат этой точки.

№79 Решить дифференциальное уравнение: $y\dfrac{dx}{dy}+x=\sin y$.

№80 Решить уравнения: а) $xy^{/}-xe^{y}+2=0$; б) $y(x)=\int\limits_{0}^{x}y(t)dt+x+1$.

№81 Даны функции $y_1=e^{x}$, $y_2=e^{-2x}$. Составить однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого имеет вид $y_{oo}=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$.

№82 Составить линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, для которого данные функции составляют фундаментальную систему решений, предварительно проверив, что данные функции линейно независимы: а) 1, x; б) e^{2x}, e^{x};
в) $\sin 2x$, $\cos 2x$.

№83 Показать, что не существует линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, для которого данная система функций является фундаментальной: а) $\sin x$, $\sin 2x$; б) $\cos x$, $\cos 2x$.

№84 Составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, фундаментальная система решений которого имеет вид: а) e^{2x}, e^{-3x}, e^{x}; в) $\sin 2x$, $\cos 2x$, e^{-x}.

№85 Составить линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами по данному общему решению: а) $y = C_1 x + \dfrac{C_2}{x^2}$;

б) $y = C_1 x^2 + C_2 x^4 + C_3$.

№86 Зная фундаментальную систему решений e^x, $\cos x$, $\sin x$ линейного однородного уравнения, найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3$, $y^{/}(0) = 4$, $y^{//}(0) = -1$.

№87 Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y^{//} - 4y^{/} + 3y = 0$, касающуюся в точке $M(0;2)$ прямой $y = x + 2$.

№88 Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(-2;3)$, если угловой коэффициент касательной к этой кривой в любой ее точке равен абсциссе этой точки.

№89 Найти форму зеркала, отражающего все лучи, выходящие из данной точки, параллельно заданному направлению.

№90 Построить интегральные кривые уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{|xy|}{xy}$.

№91 Концы каната цепного моста находятся на высоте H=5 м, а его середина - на высоте h=4 м от проезжей части моста. Длина моста 2L=20 м. Найти кривую провисания каната.

№92 С высоты 18 м над уровнем Земли брошено вертикально вверх тело со скоростью 30 м/с. Найти высоту, на которой тело находится в момент времени t, как функцию времени. Определить наибольшую высоту подъема тела.

№93 Лодка замедляет своё движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки равна 2 м/с, а её скорость через 4 с равна 1 м/с. Через сколько секунд скорость лодки будет равна 0,25 м/с? Какой путь может пройти лодка до остановки?

№94 Металлическая болванка, нагретая до 420° С, охлаждается в воздухе, температура которого 20° С. Через 15 минут после начала охлаждения температура детали понизилась до 120° С. Определить температуру болванки через 30 минут охлаждения, считая, что скорость охлаждения пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха.

№95 В эллипсоид вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

№96 Найти хотя бы одну ошибку в решении дифференциального уравнения допускающего понижение порядка $y^{//}(2y + 3) - 2(y^{/})^2 = 0$ при $y \neq 0$

Решение: Так как уравнение не содержит в явном виде аргумент x, то применима замена $y' = z(y)$, тогда $y'' = z \cdot z'$ и данное дифференциальное уравнение примет вид: $z \cdot z'(2y+3) = 2z^2$. Это уравнение первого порядка относительно функции $z(y)$ с разделяющимися переменными. Решим его: $\frac{dz}{z} = \frac{2dy}{2y+3}$,

$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2dy}{2y+3}$, $\ln|z| = \ln|C_1| + \ln|2y+3|$, $z = C_1(2y+3)$, $y' = C_1(2y+3)$, где

$C_1 \neq 0$. Следовательно, $\frac{dy}{2y+3} = C_1 dx$. Откуда $\frac{1}{2}\ln|2y+3| = C_1 x + C_2$, где $C_1 \neq 0$

.

№97 Заполните пропуски в обосновании к рисунку 1.
Графиком функции $z = f(x;y)$ является ___________________. График функции $z = f(x;y_0)$ есть линия пересечения этой поверхности с плоскостью __________. Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной, заключаем, что $f'_x(x_0;y_0) = \text{tg}\,\alpha$, где α – угол между осью Ox и касательной, проведенной к кривой ________________ в точке $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$.

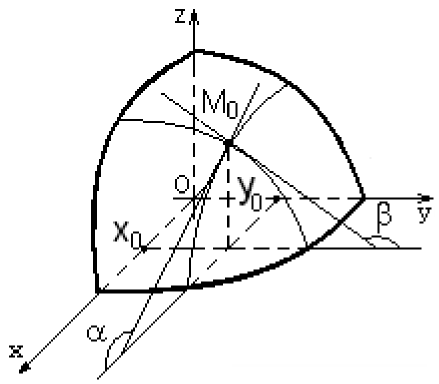


Рисунок 1 – Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

№98 Скорость распада радия пропорциональна наличной его массе. Определить, через сколько лет от 1 кг радия останется 0,7 кг, если известно, что период полураспада радия (время, за которое масса радия уменьшится вдвое) равен 1590 лет.

№99 Является ли положительно определённой квадратичная форма $Q(x_1;x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$?

№100 Пользуясь критерием Сильвестра, установить, является ли знакоопределённой квадратичная форма $Q(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 8x_3^2$?

Ответы и пояснения к задачам

№1 $y-4=x^2/100$. **№2** $S=h=-\frac{1}{2}gt^2+30t+18$, $h_{наиб}=63{,}9$ м.

№3 а) $\frac{1}{(x-2)^2+(y+3)^2}$; б) $\frac{1}{(x-2)^2+(y+3)^2}+\frac{1}{(x-3)^2+(y+2)^2}$;

в) $\frac{1}{x^2+y^2-4}$; г) $\frac{1}{(x^2-2y)(x+2)}$; д) $\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-3)^2-9}}$. **№4** а) $f(x;y)$; б) 0; в) не существует; г) $f(x;y)$. **№5** $f(x;y)=x^2\frac{(x-y)^2}{4}$. **№7** а) прямые $x+y=c$; б) равносторонние гиперболы $xy=c$, $c>0$; в) равносторонние гиперболы.

№8 а) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; концентрические сферы радиуса $\sqrt{c}$, $c>0$, с центром в начале координат; начало координат $O(0;0;0)$ при $c=0$; б) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$; однополостные гиперболоиды с осью Oz, если $c>0$ или двуполостные гиперболоиды при $c<0$. Если $c=0$, то $x^2+y^2-z^2=0$ конус. **№9** а) Две полуполосы $D=\{(x;y)\in R^2:|y|\geq 1,|x|\leq 1\}$; б) Кольцо $2^2\leq x^2+y^2\leq 3^2$; в) Полузамкнутое кольцо $1<x^2+y^2\leq 16$; г) $D=\left\{(x;y)\in R^2:\left|\frac{x}{y}\right|\leq 1\right\}$ - два вертикальных угла, ограниченных прямыми $y=x$, $y=-x$ и содержащих ось Oy. **№10** $\frac{R^4}{10-R^2}$, где $R^2\neq 10$.

№11 (I способ) Найдём условный экстремум функции $u=x+y+z^2$ (1) при условиях связи $\begin{cases}z-x=1,\\ y-xz=1.\end{cases}$ (2) методом исключения части переменных. Решая систему уравнений (2) относительно y и z, находим $y=x^2+x+1$, $z=x+1$ (3). Подставляя выражения (3) в равенство (1), приходим к функции одной переменной x: $u=2x^2+4x+2$, для которой рассмотрим задачу о безусловном экстремуме. Так как $u'=4(x+1)=0$ при $x=-1$, то функция $u(x)$ имеет единственную точку возможного экстремума. Поскольку $u''(-1)=4>0$, то в точке $x=-1$ функция $u(x)$ имеет минимум. Из системы (2) находим соответствующее $x=-1$ значения y и z: $y=1$, $z=0$. Итак, функция (1) при условиях связи (2) имеет в точке $(-1;1;0)$ минимум, причём $u(-1;1;0)=0$.

(2 способ) Метод Лагранжа. Составим функцию Лагранжа:

$\Phi = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1)$ и рассмотри систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0, \\ z - x - 1 = 0, \\ y - xz - 1 = 0. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение: $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, то есть $M_0(-1;1;0)$ - единственная точка возможного экстремума функции (1) при условиях связи (2). Отметим, что в окрестности точки M_0 система (2) определяет единственную пару неявных функций $y(x)$, $z(x)$. Предполагая, что в систему (2) подставлено её решение $y(x)$, $z(x)$ и дифференцируя полученные тождества, приходим к равенствам $\begin{cases} dz - dx = 0, \\ dy - xdz - zdx = 0. \end{cases}$ Отсюда находим $\begin{cases} dz = dx, \\ dy = (x + z)dx, \end{cases}$ (4). Вычислим второй дифференциал функции Лагранжа:

$d^2\Phi = 2(dz)^2 + 2\lambda_2 dxdz$ и, подставляя $\lambda_2 = -1$ и выражение (4) для dz, получаем положительно определённую квадратичную форму от одной переменной dx: $4(dx)^2$. Отсюда следует, что функция (1) при условиях связи (2) имеет в точке M_0 условный минимум.

№12 Составим функцию Лагранжа: $L(x; y; \lambda) = x^2y^2 + \lambda(x - y - 2)$.

Используем необходимое условие условного экстремума:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x; y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy^2 + \lambda = 0 \\ 2yx^2 - \lambda = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy^2 + x^2y = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy(y + x) = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

так как $\lambda = 2x^2y \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \\ \lambda=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y=0 \\ x=2 \\ \lambda=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y=-1 \\ x=1 \\ \lambda=-2 \end{cases}$. Таким образом получили координаты трех точек: $M_0(0;-2)$ при $\lambda_0=0$, $M_1(2;0)$ при $\lambda_1=0$, $M_2(1;-1)$ при $\lambda_2=-2$. Используем достаточное условие условного экстремума. Для этого вычислим: $\varphi'_x=1$, $\varphi'_y=-1$, $L''_{xx}=2y^2$, $L''_{yy}=2x^2$, $L''_{xy}=4xy$, тогда $\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2y^2 & 4xy \\ -1 & 4xy & 2x^2 \end{vmatrix}$. Вычислим значение Δ для каждой из полученных точек: $\Delta(M_0)=8>0$, $\Delta(M_1)=8>0$, $\Delta(M_2)=-12<0 \Rightarrow M_0$, M_1 - точки условного минимума, M_2 - точка условного максимума. Вычислим значение функции в данных точках. $z(M_0)=z(0;-2)=0$, $z(M_1)=z(2;0)=0$, $z(M2)=z(1;-1)=1$.

№13 а) $\cos 2x$; б) $\cos\left(x^2-y^2\right)$. **№14** а) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$; б) $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$; в) $f(x)=\mathrm{tg}x$; г) $f(x)=e^x$. **№17** $-1\le 3x-2y\le 1$. **№18** Вычисление пределов функции двух и более переменных обычно сводится к вычислению пределов функции одной переменной при помощи замены одного из переменных, либо к применению различных оценок.

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 7}}(1+3xy)^{\frac{5}{x^2+xy}}=(1^\infty)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 7}}\left[(1+3xy)^{\frac{1}{3xy}}\right]^{\frac{5\cdot 3xy}{x(x+y)}}=e^{15}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{x^2+(kx)^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$. Если указанный предел существует, то он не должен зависеть от траектории, по которой точка $M(x;y)\to M_0(0;0)$. Выбрав в качестве траектории стремления прямую $y=kx$, получили, что предел зависит от k, то есть зависит от траектории по которой $M\to M_0$. Это доказывает, что исходный предел не существует; в) $\dfrac{2}{3}$; г) $\dfrac{1}{6}$; д) 0; е) 1.

№19

1) Построим область $\overline{D}\subset D(f)=R^2$ (рисунок 2).

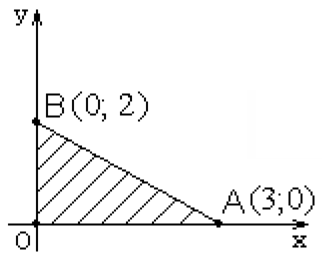


Рисунок 2 – Замкнутая область $\overline{D}$ к задаче № 19

2) Находим критические точки, решая систему уравнений: $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0 \\ 4x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$, $M_1(1;1) \subset \overline{D}$, $z(M_1) = -4$.

3) Исследуем поведение функции на границе $\overline{D}$:

a) OA: $y = 0 \Rightarrow z = f(x) = x^2 - 6x$, где $x \in [0; 3]$;

$f'(x) = 2x - 6$, $f'(x) = 0$ при $x = 3 \in [0; 3]$; $z(O) = z(0; 0) = 0$; $z(A) = z(3;0) = -9$;

b) OB: $x = 0 \Rightarrow z = f(y) = -y^2 - 2y$, где $y \in [0; 2]$;

$f'(y) = -2y - 2$, $f'(y) = 0$ при $y = -1 \notin [0; 2]$; $z(B) = z(0; 2) = -8$;

c) $AB: y = 2 - \frac{2}{3}x \Rightarrow z = f(x) = x^2 + 4x(2 - \frac{2}{3}x) - (2 - \frac{2}{3}x)^2 - 6x - 2(2 - \frac{2}{3}x) =$

$= -\frac{19}{9}x^2 + 6x - 8$, где $x \in [0; 3]$; $f'(x) = -\frac{38}{9}x + 6$, $f'(x) = 0$ при

$x = \frac{27}{19} \approx 1{,}42 \in [0; 3]$; так как $y = 2 - \frac{2}{3}x$, то $y\left(\frac{27}{19}\right) = 2 - \frac{2}{3}\frac{27}{19} = \frac{20}{9} \approx 1{,}05 \in [0; 2]$;

$z(D) = z\left(\frac{27}{9}; \frac{20}{9}\right) = -\frac{71}{19} \approx -7{,}9$.

4) $\max\limits_{\overline{D}} z = z(0;0) = 0$; $\min\limits_{\overline{D}} z = z(3;0) = -9$.

№20 Рассмотрим частное приращение функции $f(x; y)$ в точке $O(0;0)$, соответствующее приращению Δx аргумента x: $\Delta_x u = f(\Delta x; 0) - f(0; 0) = 0 - 0 = 0$. Очевидно $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta_x u = 0$, это означает, что $f(x; y)$ непрерывна в точке $O(0;0)$ по переменной x. Аналогично можно доказать непрерывность $f(x; y)$ в точке $O(0;0)$ по переменной y. Чтобы доказать, что функция $f(x; y)$ не является непрерывной в точке $O(0;0)$ по совокупности переменных, используем результат задачи №18. При решении данной задачи было доказано, что предел функции $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ в точке $O(0;0)$ не существует. Отсюда следует, что функция $f(x;y)$ не является непрерывной в точке $O(0;0)$.

№21 Для исследования функции перейдём к полярным координатам: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тогда $u=\rho^2(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)=\rho^2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\right)$. Так как для $\forall M(x;y)\in\Omega$ выполняются неравенства $0<\rho^2\le 1$, $0<1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\le 1$, то $0<u\le 1$, то есть функция $u(x;y)$ ограничена на множестве Ω.

При $\rho=1$, $\varphi=0$, то есть в точке $x=1$, $y=0$, функция $u(x;y)$ принимает максимальное своё значение, равное 1. Таким образом, $\sup\limits_{\Omega} u(x;y)=1$.

Так как, очевидно, $u\to 0$ при $\rho\to 0$, то $u(x;y)$ принимает сколь угодно малые положительные значения, то есть для $\forall\varepsilon>0\ \exists(x_0;y_0)\in\Omega$ такая, что $u(x_0;y_0)<\varepsilon$. Отсюда и из неравенства $u(x;y)>0$ следует, что $\inf\limits_{\Omega} u(x;y)=0$.

Отметим, что функция $u(x;y)$ не достигает на множестве Ω своей точной нижней грани, то есть ни в одной точке её значение не равно нулю. Следовательно, функция $u(x;y)$ не имеет на множестве Ω минимального значения.

№22 а) $O(0;0)$; б) все точки окружности $x^2+y^2=4$; в) все точки конической поверхности $x^2+y^2=z^2$; г) все точки прямой $y=0$; д) все точки прямых $x=0$ и $y=0$.

№23 а) $x=y$; б) функция дифференцируема на R^2.

№24 $z_{\text{наиб}}=z(0;0)=2$, $z_{\text{наим}}=z\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=$
$=z\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{4}{3}$. **№26** а) $\frac{\partial^{10}u}{\partial x^2\partial y^8}=e^{xy}(56x^6+16x^7y+x^8y^2)$;

б) $\frac{\partial^{10}u}{\partial x^4\partial y^6}=-2^6\sin x\cos 2y$; в) $\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=m!n!$;

г) $\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=2^m e^{2x}\sin\left(y+\frac{\pi n}{2}\right)+2^{-n}e^x\cos\left(y+\frac{\pi n}{2}\right)$.

№27 б), г). **№28** а) $u_{\min}=u(0;0)=0$; б) точек экстремума нет;

в) $u_{\min}=u\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{2}{\sqrt{10}}\right)=-\sqrt{\frac{5}{2e}}$, $u_{\max}=u\left(\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)=\sqrt{\frac{5}{2e}}$.

№29 Пусть $x+y+z=100$ (%). Тогда $z=100-x-y$ и $v=kx^2y(100-x-y)$ (*). Найдем частные производные функции v: $\frac{dv}{dx}=k(200xy-3x^2y-2xy^2)$,

$\frac{dv}{dy} = k(100x^2 - x^3 - 2x^2y)$. Приравнивая полученные выражения к нулю, приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 200xy - 3x^2y - 2xy^2 = 0, \\ 100x^2 - x^3 - 2x^2y = 0. \end{cases}$$

Так как значения $x = 0$ и $y = 0$ максимума функции (*) не дают, то сводим оба уравнения сокращением к виду:

$$\begin{cases} 200 - 3x - 2y = 0, \\ 100 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, получим $x = 50$, $y = 25$. Тогда $z = 25$. Легко проверить, что в точке $M(50;25)$, $D > 0$ и $A < 0$.
Следовательно, при концентрациях $x = 50\%$, $y = 25\%$ и $z = 25\%$ скорость v течения реакции максимальна.

№30 Обозначим длину, ширину и высоту коробки через x, y и z. Задача сводится к отысканию максимума функции $v = xyz$ при условии, что $2xy + 2xz + 2yz = 2a$. Таким образом, данная задача является задачей на условный экстремум: найти максимум функции $v = xyz$ при условии, что переменные x, y, z связаны условием $xy + xz + yz - a = 0, (x > 0, y > 0, z > 0)$ (1).
Составим вспомогательную функцию $F(x, y, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - a)$.

Найдем ее частные производные и приравняем их нулю:

$$\begin{cases} yz + \lambda(y + z) = 0, \\ xz + \lambda(x + z) = 0, \\ xy + \lambda(x + y) = 0. \end{cases}$$

(2). Задача сводится к решению системы четырех уравнений (1) и (2) с четырьмя неизвестными x, y, z и λ. Для решения этой системы умножим первое из уравнений (2) на x, второе – на y, третье – на z и сложим их; принимая во внимание равенство (1), находим $\lambda = -\frac{3xyz}{2a}$. Вставляя в уравнения (2) найденное значение λ, получим

$$yz\left(1 - \frac{3x}{2a}(y + z)\right) = 0,\ xz\left(1 - \frac{3y}{2a}(x + z)\right) = 0,\ xy\left(1 - \frac{3z}{2a}(x + y)\right) = 0.$$

Так как, x, y, z по смыслу задачи отличны от нуля, то из последних уравнений имеем: $\frac{3x}{2a}(y + z) = 1$, $\frac{3y}{2a}(x + z) = 1$, $\frac{3z}{2a}(x + y) = 1$.

Из первых двух уравнений находим $x = y$, из второго и третьего уравнений $y = z$. Но в таком случае из уравнения (1) получаем $x = y = z = \sqrt{\frac{a}{3}}$. Несложно доказать, что полученное решение дает максимум.

Итак, для того чтобы объем коробки был наибольшим, эта коробка должна быть кубом, ребро которого равно $\sqrt{\frac{a}{3}}$.

№31 в). **№34** 1)- 4), 2)- 1), 3)- 2). **№35** 1)-9), 2)-11), 3)-8), 4)-12), 5)-14), 6)-10), 7)-13).
№37 1)-11); 2)-13); 3)-12); 4)-8); 5)-14); 6)-10); 7)-9). **№38** $y = \sqrt{\ln(x+1)}$. **№39** б) нет.

№40

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

Однородное дифференциальное уравнение

1) $(1+e^x)\cdot y \cdot y' = e^x$

2) $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$

3) $\frac{dy}{y}\sin x = \ln y \cdot dx$

4) $(xy^2 + x)dx + (yx^2 - y)dy = 0$

5) $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$

6) $y' - 2xy = e^x$

№42 $\sqrt{73}/8$. **№43** Точка N не принадлежит параболоиду. **№44** Нет. **№45** Точка D не принадлежит поверхности. **№46** а) да; б) нет; в) да. **№47** а), в) нет.
№50 Один из возможных вариантов ответа к задаче №50 представлен в таблице 9.

Таблица 9 – Один из возможных вариантов ответа к задаче № 50

Тип и вид дифференциальных уравнений первого порядка	Метод решения
Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными: $P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$	$\int\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx = -\int\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy + C$
Однородные дифференциальные уравнения: $y' = f(x,y)$, где $f(tx,ty) = f(x,y)$	Подстановка: $y = z\cdot x$, $y' = z'\cdot x + z$, где $z = z(x)$
1) Линейные неоднородные дифференциальные уравнения:	Метод Бернулли: подстановка $y = u\cdot v$,
$y' + p(x)y = g(x)$; 2) Уравнение Бернулли: $y' + p(x)y = g(x)y^m$, где $m \in \mathbf{R}$, $m \neq 0$, $m \neq 1$	$y' = u'\cdot v + u\cdot v'$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$.

Продолжение таблицы 9

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах: $M(x;y)dx+N(x;y)dy=0$, где	1) $U(x;y)=\int M(x;y)dx=\Phi(x;y)+\varphi(y)$; 2) $\Phi'_y(x;y)+\varphi'(y)=N(x;y)$;
$M'_y(x;y)=N'_x(x;y)$	3) $\varphi(y)=\int\left(N(x;y)-\Phi'_y(x;y)\right)dy$; 4) $U(x;y)=\Phi(x;y)+\varphi(y)$; 5) $U'_x=M(x;y)$, $U'_y=N(x;y)$.

№51 $y'+xy=0$. **№52** $dz=\dfrac{ydx}{x^2+y^2}-\dfrac{xdy}{x^2+y^2}$.

№61 Один из возможных вариантов ответа к задаче №61 представлен в таблице 10.

Таблица 10 – Один из возможных вариантов ответа к задаче №61

Тип и вид дифференциальных уравнений допускающих понижение порядка	Метод решения
Дифференциальное уравнение разрешенное относительно старшей производной: $y^{(n)}=f(x)$	$y^{(n-1)}=\int f(x)dx$, $y^{(n-2)}=\int\left(\int f(x)dx\right)dx$, …, $y=\underbrace{\int\left(\ldots\int\left(\int f(x)dx\right)dx\ldots\right)dx}_{n\ раз}$
Дифференциальное уравнение не содержащее явно искомой функции y: $F\left(x;y^{(k)};y^{(k+1)};\ldots;y^{(n)}\right)=0$	Замена $y^{(k)}=z$, где $z=z(x)$, тогда $y^{(k+1)}=z'$, …, $y^{(n)}=z^{(n-k)}$.
Дифференциальное уравнение не содержащее явно независимой переменной x: $F\left(y;y';y'';\ldots;y^{(n)}\right)=0$	Замена $y'=z$, где $z=z(y)$, тогда $y''=z\cdot z'$, $y'''=z''\cdot z+\left(z'\right)^2$ и т.д.

№62 верно 1). **№63** верно 2). **№64** а), г), д), е). **№65** $z(M_0)=z(0;-2)=0$, $z(M_1)=z(2;0)=0$ - условные минимумы, $z(M2)=z(1;-1)=1$ - условный максимум. **№66** Вычислив частные производные первого порядка, приравняв их к нулю, находим две точки возможного экстремума: $M_1(1/3;2/3;-1/3)$, $M_2(-1/4;-1/2;1/4)$. Согласно критерию Сильвестра, $d^2u(M_1)$ является положительно определённой квадратичной формой от переменных dx, dy, dz. Следовательно, в точке M_1 функция имеет локальный минимум. Матрица квадратичной формы $d^2u(M_2)$ имеет вид: $A=\begin{pmatrix}4&-1&2\\-1&-3&0\\2&0&2\end{pmatrix}$. Отсюда получаем:

$\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = -13 < 0$, $\Delta_3 = -14 < 0$. Следовательно, $d^2u(M_2)$ не является знакоопределённой квадратичной формой от dx, dy, dz. Эта квадратичная форма является знакопеременной. Например, если положить $dx \neq 0$, $dy = dz = 0$, то получим $d^2u(M_2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_2)dx^2 = 4dx^2 > 0$, а если $dy \neq 0$, $dx = dz = 0$, то получим $d^2u(M_2) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_2)dy^2 = -3dy^2 < 0$. Следовательно, в точке M_2 функция не имеет локального экстремума.

№67 верно 1). **№68** а), в), г), е), ж)- верно. **№69** б)- верно. **№70** а), б)- верно. **№72** а) $xy' = 3y$; б) $2xy' - y = 0$; в) $xy' + y = 0$; г) $2xyy' = 3y^2 - x^2$.

№73 а) $y = \frac{1}{x+1}$; б) $y^2 - x^2 = 1$. **№74** а) $C = -1$; б) $C = 3$. **№75** $\alpha - \beta = \alpha\beta$.

№76 а) $y = C\cos x + \sin x$. б) Разделим переменные и проинтегрируем исходное уравнение: $dx = \frac{dy}{3y^{2/3}}$, $\int dx = \int \frac{dy}{3y^{2/3}}$ или $x = y^{1/3} + C$. Выражая y явно, получим общее решение $y = (x - C)^3$ исходного уравнения. Исходное уравнение имеет решение $y = 0$, которое является особым, так как в каждой точке оси Ox нарушено свойство единственности. Действительно, $f(x;y) = 3y^{2/3}$, $f_y' = 2y^{-1/3} = 2/\sqrt[3]{y}$, то есть $D = \{(x;y) : y \neq 0\}$- область единственности. Условия теоремы о существовании и единственности решения нарушены в каждой точке особого решения $y = 0$. в) $y = \frac{1}{4}x^4 \ln^2|xC| + Cy$- общее решение ($C \neq 0$), $y = 0$- особое решение.

№77 Для решения данной задачи необходимо воспользоваться физическим смыслом градиента: градиент указывает направление наибыстрейшего возрастания функции точке M. Вычислим значения частных производных в точке M:

$z_x' = 2x$, $z_y' = 3y^2$, $z_x'(M) = 4$, $z_y'(M) = 3$, тогда $\operatorname{grad} z = 4\bar{i} + 3\bar{j} = \{4; 3\}$.

Наибольшая скорость изменения функции в точке M равна: $|\operatorname{grad} z| = \sqrt{\left(z_x'(M)\right)^2 + \left(z_y'(M)\right)^2}$. В нашем случае:

$|\operatorname{grad} z| = \sqrt{\left(z_x'(M)\right)^2 + \left(z_y'(M)\right)^2} = 5$.

№78 $y = e^x - x - 1$.

№79 Исходное уравнение является линейным относительно функции $x = x(y)$. Решение уравнения будем искать в виде $x = u(y)v(y)$, подставив в исходное уравнение, получим: $y\frac{du}{dy}v + yu\frac{dv}{dy} + uv = \sin y$ или $v\left(y\frac{du}{dy} + u\right) + yu\frac{dv}{dy} = \sin y$

Выберем $u(y)$ так, чтобы $y\frac{du}{dy} + u = 0$, то есть возьмем любое отличное от нуля решение этого уравнения, например $u = \frac{1}{y}$. Тогда функцию $v(y)$ определим из уравнения $\frac{dv}{dy} = \sin y$, то есть $dv = \sin y dy$, $\int dv = \int \sin y dy$, $v = -\cos y + C$. Таким образом, $x = \frac{-\cos y + C}{y}$ - общее решение. Заметим, что функция $y = 0$ также является решением исходного уравнения.

№80 а) $e^y = \frac{C}{x^2 + Cx}$, обозначить $e^y = z$; б) $y = 2e^x - 1$. **№81** $y'' + y' - 2y = 0$.

№82 а) $y'' = 0$; б) $y'' - 3y' + 2y = 0$; в) $y'' + 4y = 0$. **№84** а) $y''' - 7y' + 6y = 0$;
б) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$.

№85 а) $x^2y'' + xy' - y = 0$; б) $x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0$.

№86 $y_ч = e^x + 2\cos x + 3\sin x$. **№87** $y = \frac{5}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{3x}$.

№88 Согласно геометрическому смыслу производной, угловой коэффициент касательной к данной кривой в данной точке $M(x; y)$ равен $\frac{dy}{dx}$. С другой стороны, согласно условиям задачи, этот угловой коэффициент равен абсциссе точки касания. Таким образом, имеем: $\frac{dy}{dx} = x$ или $dy = xdx$. Интегрируя обе части последнего равенства, находим: $\int dy = \int xdx$ или $y = \frac{x^2}{2} + C$. Последнее уравнение определяет семейство парабол. Из этого семейства парабол выделим кривую, проходящую через точку $M(-2; 3)$. Подставляя координаты точки в последнее уравнение, получим: $3 = \frac{(-2)^2}{2} + C$, откуда $C = 1$. При этом значении C получается искомая функция: $y = \frac{x^2}{2} + 1$.

№89 Рассмотреть плоское сечение зеркала. Совместить источник лучей с началом координат, а ось Oy направить вдоль указанного в условии направления. Использовать закон оптики: угол падения равен углу отражения. Уравнение плоского сечения зеркала: $x^2 = 2p\left(y + \frac{p}{2}\right)$ - уравнение параболы с фокусным расстоянием $\frac{p}{2}$. Следовательно, точка, в которой находится источник лучей, является фокусом параболы. Искомая зеркальная поверхность есть параболоид вращения, а источник лучей находится в его фокусе. Такие зеркала используются в прожекторах.

№90 Данное уравнение определено во всей плоскости Oxy, исключая точки прямых $x = 0$ и $y = 0$. В области определения его можно записать в виде $\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 1, & xy > 0; \\ -1, & xy < 0. \end{cases}$ Поэтому в I и III квадрантах координатной плоскости интегральные кривые – графики функций $y = x + C$, а во II и IV квадрантах - графики функций $y = -x + C$ (рисунок 3).

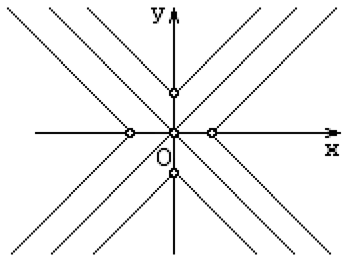


Рисунок 3 – Интегральные кривые

№91 $V = xy\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2}$, $D(V): x^2 + y^2 \le 4R^2$.

№92 $S = \frac{1}{2}(x + y)\sqrt{z^2 - \frac{1}{4}(x - y)^2}$, $D(S): 0 \le x - y \le 2z$.

№93 Пусть $v = v(t)$ - скорость лодки в момент t. Тогда $v(0) = 2$. Согласно второму закону Ньютона, $m\frac{dv}{dt} = F(t)$, где $F(t)$ - сила, действующая на лодку; m - масса лодки. По условию, $F(t) = -kv(t)$, где $k > 0$ - коэффициент пропорциональности, а знак минус означает, что сила направлена против движения (на уменьшение скорости). Поэтому дифференциальное уравнение движения лодки есть $m\frac{dv}{dt} = -kv(t)$. Его решения $v = Ce^{-kt/m}$. Согласно условию, $v(0) = 2$, поэтому $C = 2$ и $v(t) = 2e^{-kt/m}$. Поскольку $v(4) = 1$, можно определить величину $\frac{k}{m}$: $1 = 2e^{-k4/m}$; $\frac{k}{m} = \frac{\ln 2}{4}$.

Скорость лодки $v(t)=2^{1-t/4}$. Время T, через которое скорость лодки будет равна 0,25 м/с, находим из уравнения 0,25=$2^{1-T/4}$, откуда $2^{-2}=2^{1-T/4}$, $-2=1-\frac{T}{4}$, T =12 с. Длину пути, пройденного лодкой, вычислим по формуле $s(t)=\int\limits_0^t v(x)dx=\int\limits_0^t 2^{1-x/4}dx=\frac{8}{\ln 2}\left(1-2^{-t/4}\right)$. Следовательно, лодка может пройти путь не больший чем $\frac{8}{\ln 2}\approx 11{,}5$ м.

№94 45^0 С. **№95** Размеры параллелепипеда: $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$, $\frac{2c}{\sqrt{3}}$, где a, b, c - полуоси эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. **№96** Возможна потеря решения при сокращении на z. Рассмотрим $z=0$, $y=const$ (семейство параллельных горизонтальных прямых).

№97 Графиком функции $z=f(x;y)$ является некоторая поверхность. График функции $z=f(x;y_0)$ есть линия пересечения этой поверхности с плоскостью $y=y_0$. Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной, заключаем, что $f_x^/(x_0;y_0)=\operatorname{tg}\alpha$, где α - угол между осью Ox и касательной, проведенной к кривой $z=f(x;y_0)$ в точке $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$ (рисунок 2).

№98 ≈ 817 лет. **№99** $Q(x_1;x_2)=x_1^2+2x_2^2$ - положительно определённая квадратичная форма, так как $Q(x_1;x_2)$>0 всех точках $(x_1;x_2)$, кроме точки $(0;0)$.

№100 Данная квадратичная форма является положительно определённой, так как все угловые миноры её матрицы положительны: $\Delta_1=1>0$,

$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1>0$, $\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 8\end{vmatrix}=4>0$.

4 Таблица распределения задач по направленности на развитие и формирование личностно-значимых качеств

В таблице 11 приведено распределение задач из задачника по направленности на развитие и формирование личностно-значимых качеств студентов технических специальностей.

Таблица 11 – Распределение задач по направленности на развитие и формирование личностно-значимых качеств

Качества мышления	Виды упражнений
Гибкость	1) Задачи, которые допускают несколько способов решения; (№ 3, 14, 15, 16, 24, 26, 27, 32, 33, 51, 76). 2) Задачи, которые требуют конструирования нового способа из ранее изученных; (№ 1, 2, 7, 8, 18, 22, 77, 78, 88, 89). 3) Задачи, требующие необычный способ решения; (№№ 4, 6, 71, 72, 75, 81, 82, 90). 4) Задачи с необычным содержанием; (№ 5, 10, 73, 74, 79, 80, 83, 84, 86, 87) и др.
Самостоятель-ность	1) Задачи, требующие самостоятельного анализа условия нестандартной задачи; (№ 11, 12, 13, 20, 21, 25, 28, 42). 2) Задачи, требующие конструирования сложного способа из известных простых; (№ 9, 17, 19, 23, 65, 66). 3) Задачи, требующие самостоятельного составления соотношений;(№ 91-95, 97-100) и др.
Критичность	1) Задачи с лишними или недостающими данными; (№ 31-40, 48, 49). 2) Задачи с противоречивыми или нереальными данными; (№ 43-47). 3) Задачи на заполнение пропусков;(№ 41, 50, 52-61). 4) Задачи на нахождение ошибки (указать ее сущность и причину); (№ 62-64, 67-70, 96). и др.

5 Методические рекомендации по использованию задач на каждом из этапов учебного цикла

Представим рекомендации по использованию специальных задач на этапах учебного цикла (ориентировочно-мотивационный, поисково-исследовательский, практический, рефлексивно-оценочный).

1) Ценностно-ориентационный этап. Так как основными задачами этого этапа являлись актуализация опорных знаний и показ значимости изучаемого в системе данного курса математики, то для него целесообразны задания следующих типов: 1) составление задач, примеров; 2) задания на математическое исследование или описание какого-либо процесса (физического, химического и т.д.). Задания ориентировочно-мотивационного этапа используются в начале изучения каждой темы модуля. Приведем примеры.

Пример 1 Изучение темы «Функции нескольких переменных» мы начали с рассмотрения следующих ситуаций. Известно, что:

1) Объем кругового цилиндра есть функция от радиуса R его основания и от высоты H. Зависимость между этими переменными выражается формулой $V = \pi R^2 H$, которая дает возможность, зная значения независимых переменных R и H, установить соответствующее значение V.

2) По закону Ома, напряжение V в цепи электрического тока связано с сопротивлением R цепи и с силой тока I зависимостью $V = RI$.

3) Объем усеченного конуса вычисляется по формуле: $V = \frac{\pi H}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$, где R и r – радиусы обоих его оснований, H – высота конуса.

4) Объем прямоугольного параллелепипеда с ребрами, длины которых равны x, y, z, выражается формулой $V = xyz$.

Ситуации 1 и 2 можно считать примером функции с двумя переменными, а ситуации 3 и 4 – иллюстрируют функцию с тремя переменными.

После приведенных примеров студентам предлагается самостоятельно привести не менее двух примеров функций двух и трех переменных. Обучающимся отводится некоторое время, после чего несколько человек озвучивают свои примеры. Приведенные примеры позволяют сформулировать учебную задачу: дать определение функции нескольких переменных.

Пример 2 При введении темы «Дифференциальные уравнения» студентам поясняется, что при изучении явлений природы, решении задач физики и техники, химии, биологии и других наук не всегда удается непосредственно установить прямую зависимость между величинами, описывающими тот или иной процесс. Поэтому часто используют математические модели в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию, и ее производную первого и более высоких порядков. Такие уравнения называют дифференциальными.

После этого приводятся примеры заданий, например № 88, № 89 (**Задачник**), приводящих к понятию дифференциального уравнения.

Рассмотрение задач такого вида показывает необходимость рассмотрения общей теории решения дифференциальных уравнений.

Приведенные примеры подтверждают возможность применения специально подобранных заданий на ориентировочно- мотивационном этапе. Как показывает практика, названные виды заданий способствуют решению задачи мотивации получения новых знаний, более глубокому осознанию учебного материала, созданию ожидания открытия нового материала и неизвестных знаний, активизации мыслительной деятельности студентов. Кроме того, данные задания могут быть использованы и как средство повторения и закрепления полученных ранее знаний.

2) Организационно-технологический этап. Так как смысл данного этапа заключается в подведении обучающихся к самостоятельному постижению нового материала, формулированию необходимых выводов и их фиксирования в форме удобной для запоминания, то на данном этапе целесообразно использование следующих видов заданий: 1) по данной схеме или таблице воспроизвести материал; 2) составить опорный сигнал (схему, таблицу, рисунок) для запоминания по какой-либо теме; 3) заполнить пропуски;
4) задания с лишними или недостающими данными.

Например, при изучении темы «Функции нескольких переменных» студентам предлагается выполнить задание № 34 (**Задачник**), в котором требуется сопоставить функцию (задана аналитически), и ее область определения (представлены графически).

Перед тем, как студенты начнут выполнять самостоятельно данное задание, поясняется, что отыскание области определения функции двух переменных подчиняется тем же правилам, что и для функции одной переменной.

При изучении темы «Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными» студентам предлагается научиться разделять переменные при помощи задания № 56 (**Задачник**).

После обдумывания, восполнения пропусков и записи в тетрадь один из студентов выходит к доске и записывает ход решения данного дифференциального уравнения, остальные комментируют, соглашаются или не соглашаются с решением, делают выводы, при этом по мере необходимости каждый пункт можно пояснить письменно. Таким образом, студенты учатся разделять переменные в дифференциальном уравнении первого порядка, оценивать и контролировать полученные результаты.

После изучения двух видов дифференциальных уравнений первого порядка, студентам предлагается выполнить задание № 40 (**Задачник**).

Выполняя данное задание, студенты вспоминают вид дифференциального уравнения с разделяющимися переменными и операцию разделения переменных, вид однородного дифференциального уравнения и проверку на однородность функции, стоящей в правой части. Кроме того, у студентов происходит анализ различных способов задания дифференциальных уравнений одного и того же вида.

При выполнении данного задания у студентов возникнет затруднение в связи с определением типа уравнения 6). Преподаватель подводит итог: «Последнее дифференциальное уравнение является линейным неоднородным. Изучением данного типа уравнений мы и займемся на данном практическом занятии».

Таким образом, данное задание является заданием-повторением и заданием-закреплением и позволяет перейти к новому типу уравнений.

С целью повторения и закрепления знаний по теме линейные однородные дифференциальные уравнения студентам предлагается задание № 67 (**Задачник**) (уравнения записаны на доске): найти ошибки в решении и назвать их.

Обучающиеся анализируют записанные на доске дифференциальные уравнения три минуты, после чего устно называют ошибки и преподаватель исправляет их. Решение данных уравнений студенты записывают в тетрадь.

После этого студентам предлагается составить свои примеры и задания, удовлетворяющие изучаемой теме. Первые три студента, придумавшие свои задания, выходят к доске, записывают их.

Таким образом, специально подобранные задания, использованные в процессе поисково-исследовательской деятельности, могут быть использованы при изучении и самостоятельном поиске новых фактов, зависимостей, отношений. Данные задания активизируют мыслительную деятельность студентов и способствуют формированию способности самостоятельно делать выводы.

Так как после изучения нового материала студенты учатся применять теоретические знания для решения разнообразных задач, то на данном этапе оправдано использование следующих видов заданий: 1) установить соответствие между данными терминам и символами (обозначениями), объектами и их свойствами или наоборот; 2) заполнить пропуски;
3) воспроизвести опорный сигнал (схему, таблицу, рисунок); 4) выявить лишние или недостающие данные; 5) найти ошибку в рассуждениях.

Приведем примеры. Группа студентов делится на 2 команды, каждой из которых дается список задач с недостающими данными, например из задания №36 (**Задачник**). Каких данных и в каких задачах не хватает?

После самостоятельной работы ответы озвучиваются одним из студентов каждой команды. В случае необходимости преподаватель исправляет ответ.

При закреплении темы «Дифференцирование сложной функции» целесообразно применять задания типа «найдите ошибку», например задание № 66 (**Задачник**). Обучающиеся должны уметь находить ошибки при вычислении производной сложной функции. После внимательной проверки данного задания студентами, делается вывод, что решено верно 1).

После изучения темы «Дифференциальные уравнения первого порядка» на этапе первичного закрепления мы предлагаем студентам выполнить задания №68 (**Задачник**).

Для закрепления и проверки знаний по теме «Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах» всех студентов группы делим на две команды. Для каждой из команд на листе формата А4 записывается по одному дифференциальному уравнению и его решению с пропусками (Задание № 57 (**Задачник**)).

Правила игры: Преподаватель выдает листы с формулировками задач каждой из команд и просит вместо пропусков произвести записи так, чтобы выполнялись равенства.

После окончания этой работы предлагается всем внимательно просмотреть и проверить записи; после этого проверяет преподаватель и просит одного из студентов выйти к доске и записать правильное решение, которое записывается всеми в тетрадь.

При выполнении заданий такого типа студенты сопоставляют теоретические положения с предложенным ходом решения, делают самостоятельно вывод о правильности применения теоретических знаний в каждой ситуации. Здесь формируются критичность, самостоятельность и гибкость мышления.

Как показывает опытно- экспериментальная работа целесообразно подобранные задания способствуют формированию критичности, самостоятельности и гибкости мышления. Кроме того, данные задания позволяют лучше усвоить и закрепить изучаемый материал, отработать навыки применения формул, алгоритмов, способствуют более глубокому осознанию учебных задач.

3) Оценочно-рефлексивный этап. С нашей точки зрения на данном этапе целесообразно применение всех видов заданий, которые были перечислены ранее. Кроме того, студентам предлагаются критерии качественной оценки своей учебной деятельности.

Пример 3 В конце изучения темы «Функции многих переменных» студентам предлагается такое задание: дописать по памяти пропуски в опорных формулах.

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\ ;$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\ ;$$

$$d\,z = \underline{\qquad\qquad\qquad}\ ;$$

$$f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\ ;$$

$z = f(x; y)$, где $x = x(t),\ y = y(t)$: $\dfrac{dz}{dt} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$;

$z = f(x; y)$, где $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \underline{\qquad\qquad\qquad};\ \frac{\partial z}{\partial v} = \underline{\qquad\qquad\qquad}\ ;$$

$F(x, y) = 0$: $\dfrac{dy}{dx} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$, где $F'_y(x; y) \neq 0$;

$F(x, y, z) = 0$: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$, где

$F'_z(x; y; z) \neq 0$;

$$z''_{xx} = \underline{\qquad\quad}\ ;\ z''_{xy} = z''_{yx} = \underline{\qquad\quad}\ ;\ z''_{xx} = \underline{\qquad\quad}\ ;$$

$d^2z =$ ________________________ $d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \_\_\_\_\_\_\right)^2 z$;

$d^n z = d($________$)$ $d^n z = \left(\_\_\_\_\_\_ + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$, где $n \in N$;

дописать уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0; y_0)$: $F_x^{/}(M_0)(x - x_0) +$ ______________ $+$ _____________ $= 0$ или

$z - z_0 = f_x^{/}(M_0)(x - x_0) +$ ____________________;

Дописать уравнение нормали к поверхности в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$\frac{x - x_0}{F_x^{/}(M_0)} =$ ________ $=$ ________ или $\frac{x - x_0}{f_x^{/}(M_0)} =$ ________ $= \frac{z - z_0}{-1}$;

$\frac{\partial z}{\partial \bar{a}} =$ __________ $+$ __________, где $z = z(x; y)$, $\bar{a} = \{\cos\alpha; \cos\beta\}$;

$\frac{\partial u}{\partial \bar{a}} =$ _____________________, где $u = u(x; y; z)$, $\bar{a} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$;

$grad\ z =$ _________________, где $z = z(x; y)$;

$grad\ u =$ _________________________, где $u = u(x; y; z)$.

После выполнения данного задания студенты проверяли ответы по лекционному материалу и оценивали свою работу, выбрав один из вариантов ответа:

1) Я не сделал ни одной ошибки или недочёта – я материал усвоила(а) на отлично.

2) Я сделал 2-4 ошибки или недочёта – я материал усвоил(а) на среднем уровне.

3) Я сделал больше 4-х ошибок или недочётов – я материал усвоил(а) слабо, нужно очень подробно проработать лекционный материал.

На заключительном этапе изучения темы «Функции многих переменных» студентам предлагалось выполнить тест- соответствие (Задание № 35 (**Задачник**)).

После отведенного времени студентам предлагалось проверить ответы по образцу и оценить свою работу на занятии, выбрав один из вариантов (заранее записанных на доске или представленных в раздаточном материале).

1) У меня все 7 пар чисел верные – я основной материал усвоил(а).

2) У меня 5-6 верных ответов – я материал усвоил(а), но мне еще предстоит внимательно изучить лекционный материал.

3) У меня 4 или менее верных ответов – я усвоил(а) материал слабо, мне нужно ещё раз внимательно проработать лекционный материал.

После изучения темы «Дифференциальные уравнения первого порядка» мы предлагали студентам выполнить задание № 50 (**Задачник**). После отведенного времени, студенты проверяют ответы по верной таблице 12, которая составляется вместе с обучающимися на предыдущем занятии и оценивают свою работу на практике, выбрав один из вариантов ответов (заранее записанных на доске или представленных в раздаточном материале).

Таблица 12 – Опорные формулы по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка»

Тип и вид дифференциальных уравнений первого порядка	Метод решения
Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными: $P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$	$\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx = -\int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy + C$
Однородные дифференциальные уравнения: $y' = f(x,y)$, где $f(tx,ty) = f(x,y)$	Подстановка: $y = z \cdot x$, $y' = z' \cdot x + z$, где $z = z(x)$
Линейные неоднородные дифференциальные уравнения: $y' + p(x)y = g(x)$	Метод Бернулли: подстановка $y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$.
Уравнение Бернулли: $y' + p(x)y = g(x)y^m$, где $m \in \mathbf{R}$, $m \neq 0$, $m \neq 1$	Метод Бернулли: подстановка $y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$.
Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах: $M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$, где $M'_y(x;y) = N'_x(x;y)$	1) $U(x;y) = \int M\,(x;y)dx = \Phi(x;y) + \varphi(y)$; 2) $\Phi'_y(x;y) + \varphi'(y) = N(x;y)$; 3) $\varphi(y) = \int \left(N(x;y) - \Phi'_y(x;y)\right)dy$;
	4) $U(x;y) = \Phi(x;y) + \varphi(y)$; 5) $U'_x = M(x;y)$, $U'_y = N(x;y)$.

1) Таблица заполнена верно – я основной материал усвоил.

2) Если допустил(а) 1-2 ошибки – мне нужно более внимательно прочитать лекционный материал.

3) Если допустил(а) больше 2-х ошибок – мне нужно очень тщательно проработать теорию.

После изучения темы «Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка» мы предлагали студентам выполнить задание №61 (**Задачник**). После отведенного времени, студенты проверяют ответы по верной таблице 13, которая составляется вместе с обучающимися на предыдущем занятии и оценивают свою работу на практике, выбрав один из вариантов ответов (заранее записанных на доске или представленных в раздаточном материале).

Таблица 13 – Опорные формулы по теме «Дифференциальные уравнения , допускающие понижение порядка»

Тип и вид дифференциальных уравнений допускающих понижение порядка	Метод решения
Дифференциальное уравнение разрешенное относительно старшей производной: $y^{(n)} = f(x)$	$y^{(n-1)} = \int f(x)dx$, $y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx\right)dx$, …, $y = \underbrace{\int\left(\ldots\int\left(\int f(x)dx\right)dx\ldots\right)dx}_{n\,\text{раз}}$
Дифференциальное уравнение не содержащее явно искомой функции y: $F\left(x; y^{(k)}; y^{(k+1)}; \ldots; y^{(n)}\right) = 0$	Замена $y^{(k)} = z$, где $z = z(x)$, тогда $y^{(k+1)} = z^{/}$, … , $y^{(n)} = z^{(n-k)}$.
Дифференциальное уравнение не содержащее явно независимой переменной x: $F\left(y; y^{/}; y^{//}; \ldots; y^{(n)}\right) = 0$	Замена $y^{/} = z$, где $z = z(y)$, тогда $y^{//} = z \cdot z^{/}$, $y^{///} = z^{//} \cdot z + \left(z^{/}\right)^2$ и т.д.

1) Написал(а) все типы – я хорошо работал(а).

2) Если не написал(а) 1-2 типа – материал усвоил(а) на среднем уровне.

3) Если не написал(а) больше 2-х типов – материал усвоил(а) слабо, нужно более подробно проработать лекционный материал.

На заключительном этапе изучения темы «Линейные дифференциальные уравнения высших порядков» студентам предлагалось выполнить тест- соответствие (Задание № 37 (**Задачник**)).

После отведенного времени студентам предлагалось проверить ответы по образцу и оценить свою работу на занятии, выбрав один из вариантов (заранее записанных на доске или представленных в раздаточном материале).

1) У меня все 7 пар чисел верные – я основной материал усвоил(а).

2) У меня 5-6 верных ответов – мне предстоит внимательно изучить лекционный материал.

3) У меня 4 или менее верных ответов – я усвоил(а) материал слабо, мне нужно много работать над лекционным материалом.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что специально подобранные задания рефлексивно-оценочного этапа, предлагаемые студентам после изучения какой-либо темы или раздела, вызывают явный интерес у обучающихся, способствуют формированию гибкости и критичности мышления, активности, самостоятельности. Данные задания встраиваются в учебный процесс за счет уменьшения количества вопросов на простое воспроизведение лекционного материала и решения заданий элементарного уровня.

6 Критерии достижения уровня сформированности личностно-значимых качеств

Взаимосвязь уровневых показателей и критериев сформированности личностно-значимых качеств студентов технических специальностей отображена в таблице 14.

Таблица 14 – Критерии и уровневые показатели сформированности личностно-значимых студентов технических специальностей

Высокий уровень	Средний уровень	Низкий уровень
Мотивационно-ценностный критерий Студент стремится овладеть методами решения специальных заданий для формирования ЛЗК, признаёт ценность этих качеств для будущей профессиональной деятельности		
Мотивы глубокие, становятся целью	Мотивы развиты	Мотивы поверхностны, проявляются ситуативно или отсутствуют
Когнитивный критерий Студент знает основные теоретические положения, лежащие в основе решения специальных заданий, владеет способами работы с научно-методическими источниками знаний, справочниками и словарями		
Знания систематизированные, глубокие, осознанные. Самостоятельный перенос знаний в новую ситуацию	Знания глубокие, но не выстроены в систему и не в полной мере осознаны	Знания поверхностные, отрывочные, бессистемные, личностно не осознаны
Деятельностный критерий Студент формулирует свою потребность в математическом знании; способен осуществить поиск необходимого знания в различных информационных ресурсах; разумно отбирает необходимое математическое знание; применяет знания в учебной и практической деятельности через корректную постановку задачи и модели для ее решения		
Все умения сформированы на творческом уровне	Умения сформированы на продуктивном уровне	Умения проявляются на репродуктивном уровне

В таблице 15 представлены критерии достижения определённого уровня сформированности личностно-значимых качеств. В столбцах для мотивационно-ценностного и когнитивного критериев ссылка на номера задач из задачника. В столбце для деятельностного критерия ссылка на перечень действий приведенных во введении.

Таблица 15 – Уровни усвоения дидактических единиц в модуле

Название уровня	Критерии		
	Мотивационно-ценностный	Когнитивный	Деятельностный
I (продвинутый)	29, 30, 89, 93, 94, 98 и др.	1-6 и др.	1-10
II (средний)	30, 93, 94 и др.	7-10 и др.	1-8
III (базовый)	30, 94 и др.	31- 37 и др.	1-4

7 Тест для вводного контроля

Вариант №0

Задание №1

Какие линии на плоскости определяют уравнения? Построить данные линии на плоскости: а) $2x+3y=6$; б) $x^2+2\cdot y^2=25$; в) $x^2-2\cdot y^2=16$.

Задание №2

Какие поверхности в пространстве определяют уравнения? Схематично построить данные поверхности в пространстве: а) $x+2y-3z=6$; б) $x^2+y^2=2z$; в) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{25}=0$.

Задание №3

Вычислить: а) $\left|\overline{AB}\right|=\ldots$, если $A(1;2;6)$, $B(2;-1;7)$;

б) направляющие косинусы вектора $\bar{a}=\bar{i}+0\cdot\bar{j}+2\cdot\bar{k}$;

в) проекцию вектора $\bar{a}=\{1;0;-2\}$ на вектор $\bar{b}=\{3;-1;2\}$.

Задание №4

Вычислить производные данных функций: а) $\left(e^{\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x}\right)^{/}=\ldots$;

б) $\left(x^3\cdot\cos(5x-4)\right)^{/}=\ldots$; в) $\left(10\cdot\log_5\sqrt[3]{7x+2}\right)^{/}=\ldots$; г) $\left(\frac{7^{3x+4}}{\mathrm{arctg}x}\right)^{/}=\ldots$.

Задание №5

Вычислить дифференциалы данных функций: а) $d(3x+5)=\ldots$;

б) $d(5\cdot\mathrm{tg}9x)=\ldots$; в) $d(x^2\cdot\sin 3x)=\ldots$; г) $d\left(\frac{\ln(5x+4)}{\sin x^3}\right)=\ldots$.

Задание №6

Вычислить неопределенный интеграл: а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = ...$; б) $\int \frac{arctg^5 x}{1+x^2} dx = ...$;

в) $\int \frac{dx}{5x-3} = ...$; г) $\int \left(x^2+4\right)^6 xdx = ...$; д) $\int (x^2+5)e^{7x}dx = ...$

Задание №7

Решить квадратное уравнение: а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; б) $x^2 + 6x + 9 = 0$; в) $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Коррекция знаний осуществляется на консультации.

8 Материалы для текущего и итогового контроля знаний

Текущий контроль происходит внутри модуля при выполнении студентами заданий из типового расчёта. Ниже приведены задания по темам данного модуля.

Вариант №0 (Тема «Дифференциальные уравнения»)

Решить дифференциальные уравнения.

1) $y^2 \cdot e^x dx + (2y \cdot e^x - y)dy = 0, \quad y(0) = 1.$

2) $y^2 dx - (x^2 + xy)dy = 0$.

3) $y' - y \cdot ctgx = \frac{1}{sin x}$.

4) $xy'' = y'$.

5) $y'' + 2y' - 3y = e^x$.

6) $y'' + 3y' = 2 cos 3x$.

Решить методом вариации.

7) $y'' + 2y' + y = \frac{1}{x \cdot e^x}$.

Не решая уравнений, написать виды частных решений.

8) $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x) \cdot e^{2x}$.

9) $y'' + 2y' + 2y = 4x \cdot e^{-x} \cdot sin x$.

Вариант №0 (Тема «Функции нескольких переменных»)

1) Для данной функции $z = \sqrt{3x^2 - y^2 - 1}$

а) найти область определения;

б) найти частные производные и дифференциалы первого и второго порядков;

в) вычислить значение дифференциала первого порядка в точке $M(1;1)$ при $\Delta x = 0{,}1$ и $\Delta y = 0{,}2$.

2) Найти линии уровня функции $z = y^2 - x^2$. Изобразить графически.
3) Найти поверхности уровня функции $u = x \cdot y$. Изобразить графически.
4) Найти частные производные по независимым переменным

$$z = y^2 \cos x,\ x = \sin(uv),\ y = v.$$

5) Вычислить значение частных производных функции $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$, заданной неявно в точке $M_0(2;1;1)$.
6) Вычислить приближенно изменение функции $z = \dfrac{x+3y}{y-3x}$ при изменении x от $x_1 = 2$ до $x_2 = 2{,}5$ и y от $y_1 = 4$ до $y_2 = 3{,}5$.
7) Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $y^3 - 2z = 6$ в точке $M(9;2;1)$.
8) Найти глобальные экстремумы функции $z = \sqrt{x^2 + 3y^2}$ в области

$$D: \begin{cases} x - 3 \le 0, \\ x^2 + y^2 \le 25. \end{cases}$$

9) С помощью функции Лагранжа найти условные экстремумы функции $z = x^2 y^2$ при $x - y = 2$.

Итоговый контроль осуществлялся посредством итогового тестирования на проверку усвоения теоретических знаний и умение решать задачи. Приведём пример итогового теста для модуля в таблице 16.

Таблица 16 – Вариант № 0 итогового теста

I) Выберите правильный вариант ответа				
№ задания	Задание			
1	Частная производная f'_x функции $f(x;y) = e^{2x-3y}$ равна …			
	1) $2 \cdot e^{2x-3y}$	2) e^{2x-3y}	3) $3 \cdot e^{2x-3y}$	4) $-3 \cdot e^{2x-3y}$
2	Частная производная второго порядка f''_{xx} функции $f(x;y) = \ln(x + y^2)$ равна …			
	1) $\dfrac{1}{(x+y^2)^2}$	2) $-\dfrac{1}{(x+y^2)^2}$	3) $-\dfrac{x}{(x+y^2)^2}$	4) $\dfrac{2y}{(x+y^2)^2}$
3	Если $d^2z = -\dfrac{1}{x}dx^2 + \dfrac{2}{y}dxdy - \dfrac{x}{y^2}dy^2$, то $z''_{xy} = ...$			

	1) $-\frac{1}{x}$	2) $-\frac{x}{y^2}$	3) $\frac{2}{y}$	4) $\frac{1}{y}$
4	Если функция задана уравнением $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$, то ее область определения $D(z)=...$			
	1) $\{(x;y): x^2+y^2\le 16\}$		3) $\{(x;y): x^2+y^2<16\}$	
	2) $\{(x;y): x^2+y^2\ge 16\}$		4) $\{(x;y): x^2+y^2>16\}$	
5	Если функция задана неявно уравнением $5xyz-e^{3z}=0$, то ее частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}=...$			
	1) $\frac{5yz}{5xy-3e^z}$	2) $\frac{yz}{5xy-3e^z}$	3) $-\frac{5yz}{5xy+3e^z}$	4) $-\frac{5yz}{5xy-3e^z}$
6	Дифференциальное уравнение первого порядка $x(y^2-4)dx+ydy=0$ является …			
	1) уравнением с разделяющимися переменными	2) однородным	3) в полных дифференциалах	4) линейным неоднородным
7	Для решения однородного дифференциального уравнения $(x+2y)dx-xdy=0$ применяют замену …			
	1) $u=\frac{1}{x}$	2) $u=\frac{y}{x}$	3) $u=\frac{x}{y}$	4) $u=\frac{1}{y}$
8	Общее решение уравнения $y^{//}-5y^{/}+6y=0$ имеет вид …			
	1) $y_{00}=C_1e^{2x}+C_2xe^{3x}$		3) $y_{00}=C_1e^{2x}-C_2e^{3x}$	
	2) $y_{00}=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$		4) $y_{00}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$	
9	Для л.н.д.у. $y^{//}-2y^{/}+y=\sin x$ одно из его частных решений можно найти в виде ...			
	1) $y=A\cos x+B\sin x$		3) $y=A\sin x$	
	2) $y=A\cos x$		4) $y=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$	
10	Общее решение дифференциального уравнения $y^{//}=\sin x$ имеет вид ...			
	1) $y=\sin x-C_1x-C_2$		3) $y=\sin x+C_1x+C_2$	
	2) $y=-\sin x-C_1x+C_2$		4) $y=-\sin x+C_1x+C_2$	
II) Решите задачу				
Найти линию, проходящую через точку (2;3) и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенной между координатными осями, делится пополам в точке касания.				

Продолжение таблицы 16

III) Какое условие по Вашему мнению нужно добавить, чтобы можно было решить задачу? Ответ запишите в таблицу в бланке ответов	
1	Если поверхность задана уравнением $3xy + zx^2 - 5 = 0$, то можно найти
	уравнение касательной плоскости в точке M_0.
2	Если функция задана уравнением $z = x + y^2$, то можно найти производную $\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}$ в направлении вектора $\bar{a} = \{3; -4\}$.
3	Если функция задана уравнением $z = x^2 + y^3$, то можно найти модуль градиента данной функции $\lvert gradz \rvert$.
4	Если дифференциальное уравнение имеет вид $(1 + x^2)dx = (1 + y)x^2dy$, то можно найти его общее решение.
5	Если дано дифференциальное уравнение $y'' - 4y = 4x$, то можно найти его частное решение.
IV) Составить вопросы на которые можно ответить, исходя из заданных условий (минимум один, максимум пять вариантов)	
1	Дана функция $f(x\,;\,y) = \arcsin(2x + y^5)$.
2	Дано семейство линий уровня $x^2 - y^2 = C$.
3	Дано общее решение дифференциального уравнения $y = C_1e^{2x} - C_2e^{-x}$.

Реалистичность использования специально подобранных заданий позволяет целенаправленно формировать выделенные нами личностно значимые качества студентов технических специальностей.

Список литературы

1 Гусак, А. А. Сборник задач и упражнений по высшей математике [Текст] / А. А. Гусак. – 2-е изд., перераб. – Минск : Высш. шк., 1967. – 283 с.

2 Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учеб. пособие для студентов втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. В 2 ч. Ч 1. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. школа, 1980. – 320 с.

3 Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учеб. пособие для студентов втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. В 2 ч. Ч 2. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. школа, 1986. – 415 с.

4 Задачи и упражнения по математическому анализу / под ред. Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1978. – 480 с.

5 Запорожец , Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу [Текст] / Г. И. Запорожец. – 3-е изд. – М. : Высш. шк., 1964. – 480 с.

6 Зимняя, И. А. Педагогическая психология [Текст] : учебник для вузов / И. А. Зимняя. – М. : Логос, 2002. – 384 с.

7 Леонтьев, А. Н. Деятельность. Сознание. Личность [Текст] / А. Н. Леонтьев. – М. : Политиздат, 1977. – 304 с.

8 Математический анализ в вопросах и задачах : учеб. пособие / В. Ф. Бутузов [и др.] ; под ред. В. Ф. Бутузова. – 2-е изд., перераб. – М. : Высш. шк., 1993. – 480 с.

9 Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике [Текст] : учеб. пособие для втузов / В. П. Минорский. – 13-е изд. – М. : Наука, 1987. – 352 с.

10 Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов [Текст] : учебное пособие для втузов. В 2 Т. Т. 1 / Н. С. Пискунов. – 13-е изд. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 432 с.

11 Руководство к решению задач по высшей математике : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1989. – 349 с.

12 Руководство к решению задач по высшей математике : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2 / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – 400 с.

13 Сборник задач по математике для втузов : в 4 ч. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа : учеб. пособие для втузов / В. А. Болгов [и др.] ; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М. : Наука, 1986. – 464 с.

14 Сборник задач по математике для втузов : в 4 ч. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа : учеб. пособие для втузов / В. А. Болгов [и др.] ; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М. : Наука, 1986. – 368 с.

15 Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст] : учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 2 / А. П. Рябушко ; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск. : Вышэйшая школа, 1991. – 352 с.

Приложение А
Модель учебного занятия в условиях
личностно-деятельностного подхода к обучению

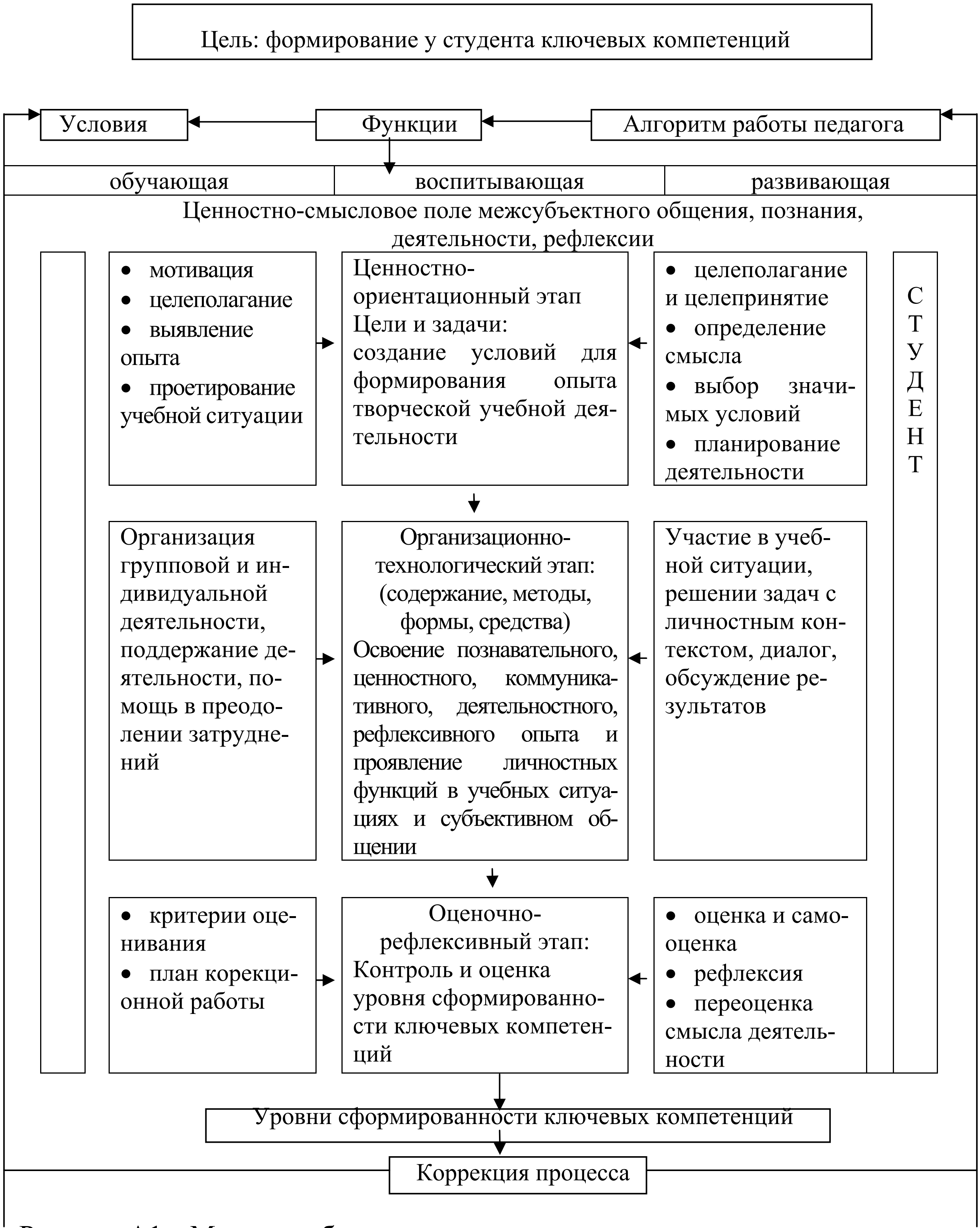


Рисунок А1 – Модель учебного занятия в условиях личностно-деятельностного подхода к обучению

Таблица А1 – Модель учебного занятия при личностно-деятельностном подходе к обучению.

Этап	Дидактические задачи	Организационные формы и методы
1) Ценностно-ориентационный	1) Настрой на учебную деятельность, установление ассоциативных связей и мыслеобразов из имеющегося опыта обучаемых и преподавателя. 2) Актуализация опорных знаний и проблематизация (выявление необходимости изучения нового). Самоконтроль и самооценка возможности осуществления предстоящей деятельности. 3) Планирование предстоящей учебной деятельности в операциональном виде (сформулировать, доказать, выявить, составить алгоритм и т.д.)	1) Коллективное обсуждение историко-культурного, функционального, личностного, ценностно-смыслового значения изучаемого материала, роли и места изучаемого в изучении курса. 2) Проговор в парах опорных теоретических знаний (определений, свойств, признаков, правил, алгоритмов); взаимопроверка и взаиморецензирование ответов в соответствии с представленным эталоном. 3) Вводное тестирование, проверяющее понимание и применение опорных знаний в стандартных ситуациях. После выполнения обязательной части - взаимопроверка по эталонному образцу. 4) Информирование об обязательных результатах обучения, предъявление критериев оценивания. Определение объёма и характера индивидуальной работы для достижения минимального, базового и углублённого уровня обучения. Возможен выбор творческого образовательного продукта.
2) Организационно-технологический	1) Усвоение новых знаний и способов деятельности, связей и отношений в объекте изучения. Обеспечение трёхканального восприятия информации: аудиального, визуального и кинестического. 2) Обобщение и систематизация знаний и способов деятельности.	1) Предъявление учебной информации в сочетании проблемного формально-логического и эмоционально-образного способов. Организация самостоятельной работы по ознакомлению с новыми знаниями или способами действий. Поощрение визуализации формируемого мыслеобраза (рисование, графика, моделирование и др.). Проговаривание в парах ключевых определений, свойств, признаков формируемых понятий, правил, законов и т.д. 2) Групповые взаимодействия по разделению изученного материала на отдельные смысловые единицы и соединение их в новое целостное образование (анализ и синтез). Обобщение, классификация и систематизация знаний, интерпретация их в виде таблиц, диаграмм, рисунков, графиков, моделей и др. Демонстрация творческих образовательных продуктов.

Продолжение таблицы А1

3) Оценочно-рефлексивный	Выявление качества и уровня овладения знаниями и способами деятельности.	1) Итоговый самоконтроль и самооценка по заданиям и критериям, соответствующим планируемым результатам обучения. Коллективная оценка совместной деятельности и её этапов; рефлексия индивидуальная и групповая. 2) Прогнозирование последующей учебно-коррекционной работы и задач саморазвития.

Оглавление

Зверева Анна Тимофеевна
Малышева Юлия Степановна

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические рекомендации
к изучению модуля «Функции нескольких переменных.
Дифференциальные уравнения»
для студентов специальностей 190109.65 и 190110.65
и направлений 140400.62, 190700.62, 151900.62,
150700.62, 220700.62, 280700.62, 221700.62

Редактор Е. А. Могутова

Подписано в печать	Формат 60×84 1/16	Бумага тип. 65 гр.м^2
Печать цифровая	Усл. печ. л. 3,75	Уч.-изд. л. 3,75
Заказ	Тираж 37	Не для продажи

РИЦ Курганского государственного университета.
640000, г. Курган, ул. Советская, 63/4.
Курганский государственный университет.