

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 2

Методические указания
к выполнению лабораторных работ
для студентов направления 190700.62
и специальностей 190109.65 и 190110.65

Курган 2014

Кафедра: «Теоретическая механика и сопротивление материалов»

Дисциплина: «Теоретическая механика»
(направление 190700.62;
специальности 190109.65, 190110.65).

Составил: канд. техн. наук, доцент С.Г. Тютрин.

Составлены на основе изданий: Лабораторные работы по теоретической механике (Динамика) / Головнин Г.Я. – М.: Высшая школа, 1967. – 76 с.; Лабораторные работы по курсу теоретической механики: Учебное пособие / Никитин Е.М. – Л.; Вологда: ЛСХИ, 1974. – 64 с.

Утверждены на заседании кафедры 29 мая 2014 г.

Рекомендованы методическим советом университета 3 июня 2014 г.

6 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ПЛОСКИХ ТЕЛ

Основные теоретические положения

Одним из важнейших параметров, определяющих поведение автомобиля на дороге, является положение его центра тяжести. Высокое расположение центра тяжести автомобиля (с грузом) приводит к его опрокидыванию на повороте или на наклонном участке пути. Смещение центра тяжести автомобиля к левому или правому борту, вперёд или назад приводит к перегрузке колёс или осей, к повышенной нагрузке на дорожное покрытие. Поэтому координаты положения центра тяжести автомобиля оценивают как теоретическими, так и экспериментальными методами.

Поскольку силы тяжести, действующие на разные части тела взаимно параллельны, то нахождение координат центра тяжести тел основывается на результатах исследования систем параллельных сил.

Рассмотрим (рисунок 1) плоскую систему параллельных сил, состоящую из сил $\vec{P}_1 \dots \vec{P}_n$, параллельных оси Oy , и сил $\vec{P}'_1 \dots \vec{P}'_n$, параллельных оси Ox . Равнодействующую сил $\vec{P}_1 \dots \vec{P}_n$ определяет как $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$, она также будет параллельна оси Oy . Равнодействующую сил $\vec{P}'_1 \dots \vec{P}'_n$ определяет как $\vec{R}' = \sum_{i=1}^n \vec{P}'_i$, она будет параллельна оси Ox . Центром данной системы параллельных сил является точка C , в которой пересекаются линии действия равнодействующих \vec{R} и \vec{R}' .

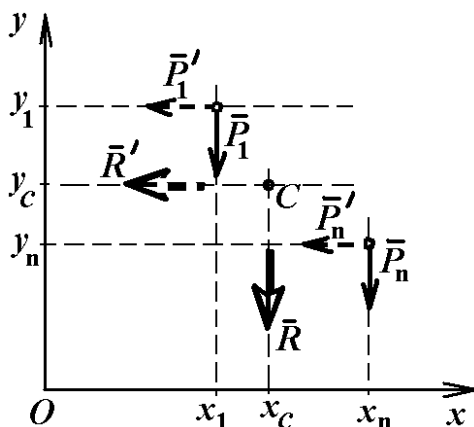


Рисунок 1 – Центр системы параллельных сил

Согласно теореме Вариньона, момент равнодействующей равен сумме моментов её составляющих. Применим теорему Вариньона для равнодействующей \vec{R} относительно точки O (относительно начала осей координат):

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{P}_i) \text{ или } Rx_C = \sum_{i=1}^n P_i x_i.$$

$$\text{Откуда } x_C = \frac{\sum_{i=1}^n P_i x_i}{\sum_{i=1}^n P_i}. \quad (1)$$

В соответствии с теоремой Вариньона, момент равнодействующей \vec{R}^I относительно начала осей координат равен сумме моментов составляющих относительно той же точки:

$$\vec{M}_O(\vec{R}^I) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{P}_i^I) \text{ или } R^I y_C = \sum_{i=1}^n P_i^I y_i.$$

$$\text{Откуда } y_C = \frac{\sum_{i=1}^n P_i^I y_i}{\sum_{i=1}^n P_i^I}. \quad (2)$$

Применим формулы (1) и (2) для определения координат центра тяжести однородной пластины постоянной толщины массой m и площадью F . Пусть i -я часть пластины имеет массу m_i и площадь F_i (рисунок 2).

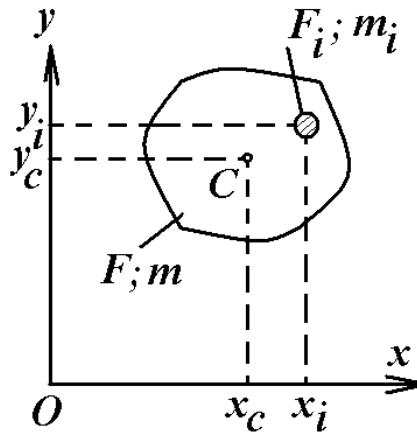


Рисунок 2 – Определение центра тяжести однородной пластины

Если $\gamma = mg/F$ – вес, приходящийся на единицу площади пластины, тогда вес i -й части пластины можно определить как $m_i g = \gamma F_i$. Подставим в формулы (1) и (2) вместо сил \vec{P}_i и \vec{P}_i^I силы тяжести $m_i g$:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i g x_i)}{\sum_{i=1}^n (m_i g)} = \frac{\sum_{i=1}^n (\gamma F_i x_i)}{\sum_{i=1}^n (\gamma F_i)} \text{ и } y_C = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i g y_i)}{\sum_{i=1}^n (m_i g)} = \frac{\sum_{i=1}^n (\gamma F_i y_i)}{\sum_{i=1}^n (\gamma F_i)}.$$

$$\text{В окончательном виде: } x_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \text{ и } y_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (3)$$

где $\sum_{i=1}^n F_i x_i = S_y$ – статический момент площади фигуры относительно оси Oy ;

$\sum_{i=1}^n F_i y_i = S_x$ – статический момент площади фигуры относительно оси Ox .

На практике при определении положения центра тяжести тел применяют следующие способы.

1 Метод симметрии.

Для однородного тела, имеющего плоскость симметрии, центр тяжести находится в плоскости симметрии.

2 Метод разбиения на части (метод группировки).

Некоторые тела сложной формы можно разбить на части, площади F_i и центры тяжести C_i которых известны (рисунок 3). Затем применяют формулы (3), где вместо элементарных площадок используются конечные части:

$$x_C = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3}{F_1 + F_2 + F_3}. \quad (4)$$

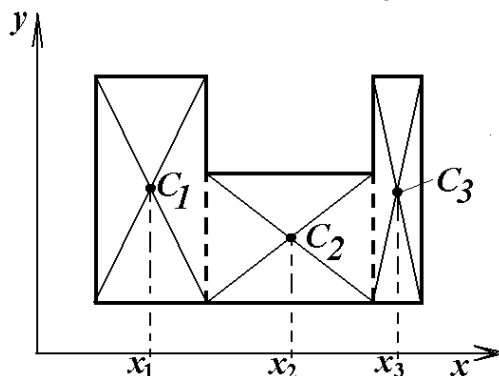


Рисунок 3 – Определение центра тяжести методом группировки

3 Метод отрицательных масс.

Этот метод является разновидностью предыдущего и применяется в тех случаях, когда в деталях имеются пустоты. Его отличие состоит в том, что площади отсутствующих частей (рисунок 4) берутся со знаком «минус»:

$$x_C = \frac{F_1 x_1 - F_2 x_2}{F_1 - F_2}. \quad (5)$$

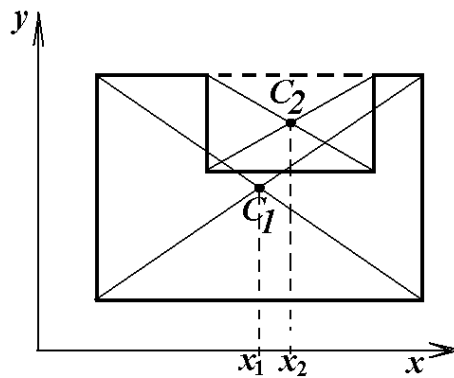


Рисунок 4 – Определение центра тяжести методом отрицательных масс

4 Метод подвешивания (экспериментальный способ).

Тело подвешивают за различные его точки на нити (на тросе). Направленные нити каждый раз будет проходить через центр тяжести тела. В результате центр тяжести тела находится на пересечении этих направлений (рисунок 5).

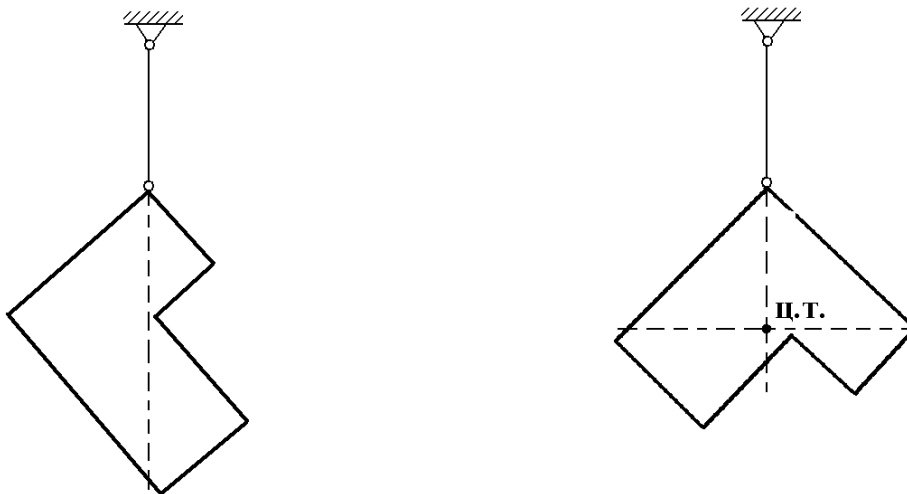


Рисунок 5 – Определение центра тяжести методом подвешивания

5 Метод взвешивания (экспериментальный способ).

Согласно этому методу, необходимо измерить вес G всего тела и вес N_B , приходящийся на одну из двух его опор (рисунок 6). Зная расстояние ℓ между опорами, расстояние a до центра тяжести определяют путем составления уравнения равновесия:

$$\Sigma m_A(P_i) = 0 \text{ или } N_B \cdot \ell - G \cdot a = 0.$$

$$\text{В итоге } a = \frac{N_B \cdot \ell}{G}. \quad (6)$$

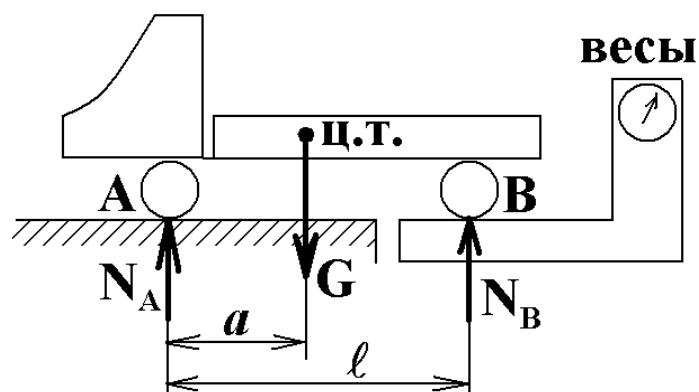


Рисунок 6 – Определение центра тяжести методом взвешивания

Описание лабораторной установки

При проведении лабораторной работы используется метод подвешивания. Лабораторная установка (рисунок 7) состоит из штатива 1, строительного отвеса 2 и плоской модели 3, положение центра тяжести которой требуется определить.

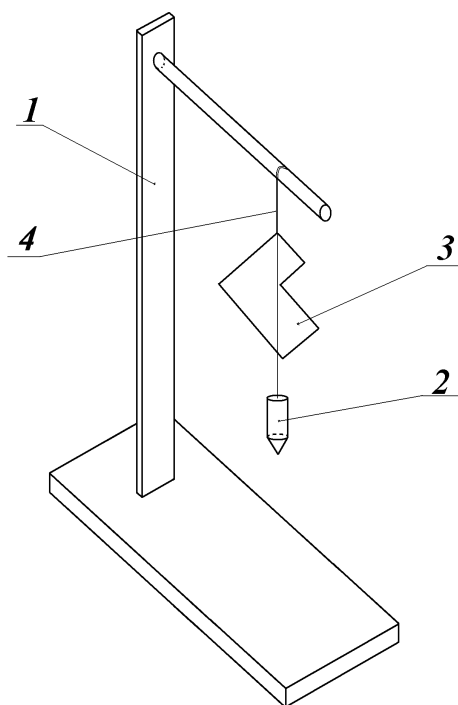


Рисунок 7 – Лабораторная установка

Форма используемой плоской модели позволяет представить её в виде совокупности простых фигур (прямоугольника, треугольника, круга, полукруга), площади и центры тяжести которых легко определяются. Для крепления нити 4 к моделям в них выполнены небольшие технологические отверстия.

Порядок выполнения работы

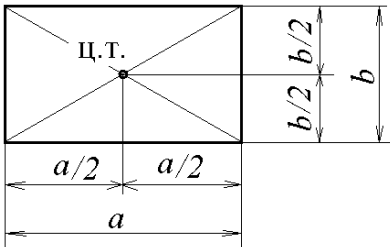
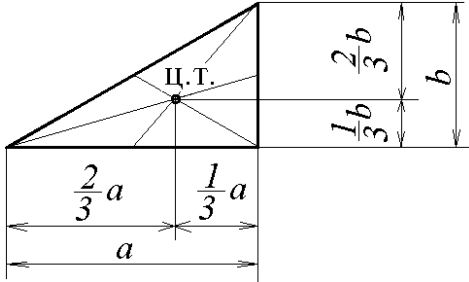
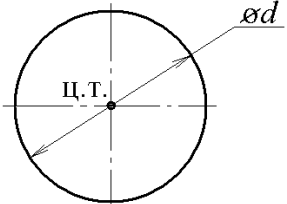
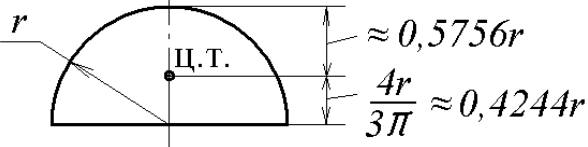
1 Зарисовать эскиз используемой плоской модели, указать её размеры.

2 С помощью эскиза представить плоскую модель как совокупность простых фигур. Пронумеровать эти фигуры, отметить положение их центров тяжести.

3 Указать на эскизе координатные оси, привязав начало осей координат или к угловой точке модели, или к её оси симметрии, или к центру тяжести одной из составляющих фигур.

4 Вычислить площади и координаты центров тяжести всех фигур, составляющих исследуемую модель (таблица 1).

Таблица 1 – Формулы для определения площадей и координат центров тяжести плоских фигур

Наименование фигуры	Положение центра тяжести (ц. т.)	Площадь
Прямоугольник		ab
Прямоугольный треугольник		$\frac{1}{2}ab$
Круг		$\frac{\pi d^2}{4}$
Полукруг		$\frac{\pi r^2}{2}$

5 По формулам (3) вычислить координаты центра тяжести исследуемой модели.

6 С помощью нити подвесить модель на штативе в максимальной близости к нити отвеса, как показано на рисунке 7. После успокоения конструкции отметить карандашом или фломастером направление отвеса на исследуемой модели.

7 Повторить опыт по п. 6 один или более раз, подвешивая модель за другие точки.

8 Измерить координаты точки пересечения проведенных линий: $x_C^{опыт}$ и $y_C^{опыт}$.

9 Определить расхождение теоретических и опытных значений координат центра тяжести исследуемой модели: $\Delta x = x_C - x_C^{опыт}$ и $\Delta y = y_C - y_C^{опыт}$.

Контрольные вопросы

1 Сформулируйте теорему Вариньона.

2 Запишите расчётную формулу для определения координаты x_C центра тяжести плоской фигуры. Поясните входящие в формулу величины.

3 Запишите расчётную формулу для определения координаты y_C центра тяжести плоской фигуры. Поясните входящие в формулу величины.

4 Поясните суть метода симметрии, используемого для определения координат центра тяжести тел.

5 Поясните суть метода группировки (метода разбиения на части), используемого для определения координат центра тяжести тел.

6 Поясните суть метода отрицательных масс, используемого для определения координат центра тяжести тел.

7 Поясните суть метода подвешивания, используемого для определения координат центра тяжести тел.

8 Поясните суть метода взвешивания, используемого для определения координат центра тяжести тел.

9 Поясните порядок теоретического определения координат центра тяжести исследованной плоской модели.

10 Поясните порядок экспериментального определения координат центра тяжести исследованной плоской модели.

Отчет о работе

1 Название работы.

2 Эскиз исследуемой плоской модели (с указанием размеров, выбранных осей координат и составляющих фигур).

3 Расчёт площадей и координат центров тяжести фигур (см. таблицу 1).

4 Расчёт координат центра тяжести модели (формулы (3)).

5 Результаты опыта: $x_C^{опыт} = \dots$, $y_C^{опыт} = \dots$

6 Расхождение полученных результатов:

$$\Delta x = x_C - x_C^{опыт} = \dots, \quad \Delta y = y_C - y_C^{опыт} = \dots$$

7 Вывод: опытным и теоретическим путём определили координаты центра тяжести плоской модели. Расхождение результатов составило: $\Delta x = \dots$ и $\Delta y = \dots$.

7 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ УДАРЕ

Основные теоретические положения

Обычно при движении твердого тела модули и направления скоростей его точек изменяются непрерывно. Однако встречаются случаи, когда скорости точек тела за ничтожно малый промежуток времени получают конечные изменения.

Явление, при котором за ничтожно малый промежуток времени скорости точек тела изменяются на конечную величину, называется ударом.

Примерами этого явления может служить удар мяча о стену, удар молота по заготовке, наезд автомобиля на препятствие или столкновение автомобилей.

В данной лабораторной работе исследуем удар шара о неподвижную плоскость. Предположим, что шар массой m движется поступательно и скорость \vec{v} его центра направлена по нормали к неподвижной массивной поверхности (рисунок 8). В момент времени, когда шар достигает этой поверхности, происходит прямой удар (если направление удара не перпендикулярно ударяемой поверхности, удар называется косым).

Различают две фазы прямого удара. В течение первой фазы удара шар деформируется до тех пор, пока скорость его не станет равной нулю. Во время этой фазы начальная кинетическая энергия шара переходит в потенциальную энергию упругой деформации тел и частично расходуется на их нагревание.

В течение второй фазы удара под действием сил упругости шар частично восстанавливает свою первоначальную форму.

Из-за остаточных деформаций и нагревания первоначальная кинетическая энергия шара полностью не восстанавливается. Поэтому шар отделяется от поверхности со скоростью \vec{u} , модуль которой меньше модуля его скорости до удара \vec{v} .

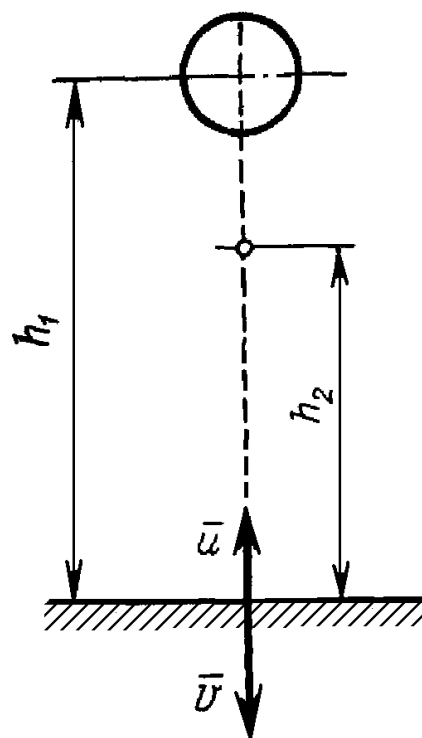


Рисунок 8 – Схема удара

Отношение модуля скорости шара в конце удара к модулю его скорости в начале удара при прямом ударе шара о неподвижную поверхность называется коэффициентом восстановления при ударе

$$k = \left| \frac{u}{v} \right|. \quad (7)$$

Значение коэффициента восстановления определяется опытным путем, поскольку он зависит от материалов соударяющихся тел, от их формы и соотношения масс, а также от скорости удара.

В случае, когда $k=1$, удар является абсолютно упругим. При этом $u=v$, происходит полное восстановление формы шара после удара.

Если $k=0$, удар является абсолютно неупругим. Такой удар заканчивается одной первой фазой, а $u=0$.

При $0 < k < 1$ удар является не вполне упругим. Тогда $0 < u < v$.

Установлено, что при $v \approx 3$ м/с среднее значение коэффициента восстановления для стекла равно $15/16$, для слоновой кости – $8/9$, для стали – $5/9$, для дерева – $1/2$.

Если шар перед ударом свободно падает с высоты h_1 , а после удара отскакивает на высоту h_2 , то скорости до и после удара определяются выражениями:

$$v = \sqrt{2gh_1}, \quad u = \sqrt{2gh_2}. \quad (8)$$

С учетом выражений (7) и (8), величина коэффициента восстановления при ударе определится так:

$$k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \quad (9)$$

Описание лабораторной установки

Установка (рисунок 9) состоит из штатива 1 с державкой 2, которая может менять свою высоту. Державка 2 служит для крепления металлической линейки 4 и одновременно является упором для зажимного устройства 5 шарика б. На основании штатива 1 располагается плоский образец 3, о который ударяется шарик б.

Образцы 3 делают массивными с тем, чтобы обеспечить их неподвижность при ударе (масса образцов 3 должна быть много больше массы шариков б).

Для обеспечения условий прямого удара ударяемая плоскость образцов 3 должна располагаться строго горизонтально. Горизонтальность положения

плоских образцов 3 контролируется с помощью уровня (уровень устанавливают непосредственно на поверхности плоских образцов).

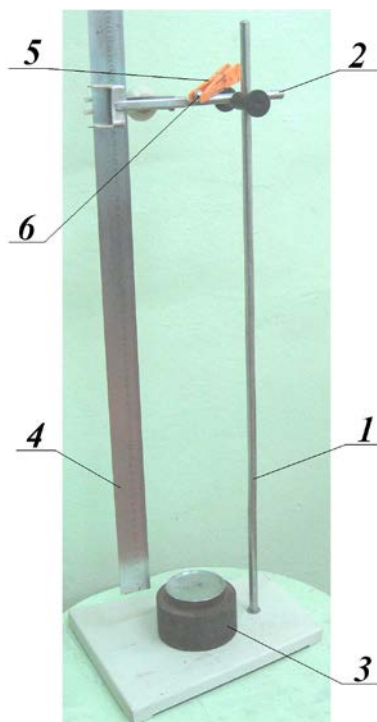


Рисунок 9 – Лабораторная установка

Шарики 6 и плоские образцы 3 делают из различных материалов: стали, латуни, резины, дерева, пластмассы и др.

Порядок выполнения работы

1 Выбрать нужную пару материалов для шарика и плоского образца. Установить их на штатных местах. Проверить горизонтальность положения плоского образца.

2 Переместить державку на высоту h_1 . Закрепить в ней металлическую линейку вертикально так, чтобы начало отсчёта находилось на уровне ударяемой поверхности плоского образца.

3 Установить зажим с шариком на державке, произвести сброс и замерить высоту h_2 отскока шарика от плоского образца. Для фиксации высоты отскока можно использовать видеосъёмку (например, с помощью мобильного телефона). Опыт выполнить 3...5 раз.

4 Взять другие пары материалов и повторить п. 1...3.

5 По формуле (9) вычислить коэффициенты восстановления при ударе. Сравнить полученные результаты с известными значениями.

Контрольные вопросы

- 1 Что называется ударом?
- 2 Какой удар называется прямым ударом, а какой – косым ударом?
- 3 Сколько фаз удара выделяют? Поясните особенности каждой фазы удара.
- 4 Что называется коэффициентом восстановления при ударе?
- 5 В каком случае удар является абсолютно упругим, не вполне упругим и абсолютно неупругим?
- 6 Какие значения может принимать коэффициент восстановления при ударе? От чего они зависят?
- 7 Поясните устройство экспериментальной установки для определения коэффициента восстановления при ударе.
- 8 Поясните порядок проведения опыта и определения коэффициента восстановления при ударе.

Отчет о работе

- 1 Название работы.
- 2 Расчетная схема (рисунок 8).
- 3 Уравнение (7) для определения коэффициента восстановления при ударе.
- 4 Схема установки (рисунок 9).
- 5 Уравнение (9) для вычисления коэффициента восстановления при ударе.
- 6 Результаты опыта внести в таблицу 2.

Таблица 2 – Результаты опыта

№ опыта	Материал шара	Материал образца	Высота падения h_1 , мм	Высота отскока h_2 , мм	$k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$	Среднее значение k_{CP}
1						
2						
3						
...						
1						
2						
3						
...						
1						
2						
3						
...						

- 7 Вывод: Полученные величины коэффициента восстановления при ударе ... (близки или нет) к справочным значениям.

8 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ РАСТЯЖЕНИЯ ПРУЖИНЫ ПРИ УДАРЕ

Основные теоретические положения

Ударом называется явление, при котором за ничтожно малый промежуток времени скорости точек тела изменяются на конечную величину.

С целью смягчения ударных воздействий широко применяются пружины и рессоры. Исследуем величину растяжения цилиндрической пружины под действием падающего груза.

Груз массой m_1 падает с высоты h на тело массой m_2 , закрепленное на пружине (рисунок 10). Коэффициент жесткости пружины обозначим c , массой пружины пренебрегаем. Определим величину растяжения пружины s , вызванную ударом.

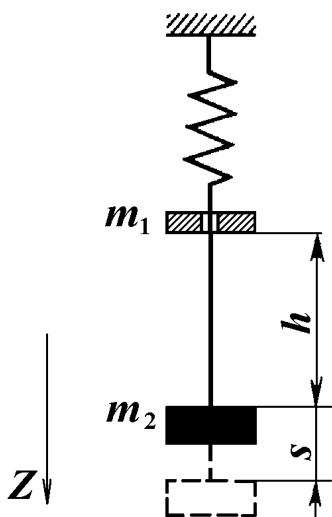


Рисунок 10 – Расчетная схема растяжения пружины при ударе

Согласно теореме об изменении кинетической энергии механической системы, изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ всех сил, действующих на материальные точки системы на этом перемещении:

$$T_2 - T_1 = \sum A_k, \quad (10)$$

где $T_1 = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}$ – кинетическая энергия системы в начальный момент времени после удара, когда груз массой m_1 и тело массой m_2 начинают движение как одно целое со скоростью u ;

$T_2=0$ – кинетическая энергия системы в момент растяжения пружины на наибольшую величину s (в этот момент система не движется);

$\sum A_k$ – сумма работ всех сил, действующих на перемещении s , которая складывается из работы силы тяжести тела с грузом и работы силы упругости пружины.

Сила упругости пружины пропорциональна и противоположно направлена перемещению z . В положении равновесия (до удара) тело массой m_2 , закрепленное на пружине, растягивает её на величину статического удлинения z_{CT} :

$$z_{CT} = \frac{m_2 g}{c}, \quad (11)$$

где $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения;

c – коэффициент жёсткости пружины.

Удар груза приводит к дополнительному растяжению пружины на величину s . Тогда

$$\sum A_k = (m_1 + m_2)gs - \int_{z_{CT}}^{z_{CT}+s} czdz = (m_1 + m_2)gs - \frac{c}{2}(2z_{CT}s + s^2). \quad (12)$$

Подставив найденные выражения кинетической энергии и работы в уравнение (10), после преобразований можно записать:

$$s^2 - \frac{2m_1 g}{c}s - \frac{m_1 + m_2}{c}u^2 = 0. \quad (13)$$

В результате решения квадратного уравнения (13) получаем

$$s = \frac{m_1 g}{c} + \sqrt{\left(\frac{m_1 g}{c}\right)^2 - \frac{m_1 + m_2}{c}u^2}. \quad (14)$$

Вследствие появления остаточных деформаций и нагревания тел при ударе происходит частичная потеря кинетической энергии соударяющихся тел. Для подсчета скорости u , которую получит система после удара, воспользуемся формулой для потери кинетической энергии соударяющихся тел при прямом центральном ударе двух тел:

$$\Delta T = (1 - k^2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 v_1^2}{2}, \quad (15)$$

где k – коэффициент восстановления при ударе (для стали $k = \frac{5}{9}$);

v_1 – скорость груза массой m_1 до удара (в формуле учтено, что скорость тела массой m_2 до удара равна нулю).

Таким образом, кинетическая энергия системы после удара меньше кинетической энергии до удара на величину ΔT :

$$\frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \Delta T. \quad (16)$$

Скорость v_1 груза массой m_1 найдем как скорость свободного падения с высоты h :

$$v_1 = \sqrt{2gh}. \quad (17)$$

С учетом (15), из выражения (16) получаем:

$$(m_1 + m_2)u^2 = m_1 v_1^2 - (1 - k^2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} m_1 v_1^2,$$

откуда

$$u^2 = \frac{m_1 v_1^2}{m_1 + m_2} \left[1 - (1 - k^2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right].$$

С учетом выражения (17), окончательно получаем для квадрата скорости:

$$u^2 = \frac{2ghm_1}{m_1 + m_2} \left[1 - (1 - k^2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right]. \quad (18)$$

Выражения (14) и (18) определяют наибольшую величину растяжения пружины при ударе.

Описание лабораторной установки

Установка (рисунок 11) состоит из штатива 4, на котором закреплена стальная пружина 3. На пружине 3 подвешено тело 2 массой m_2 . Для фиксации величины растяжения пружины имеется отсчётное устройство с диаграммной бумагой, по которой перемещается карандаш, жёстко соединённый с телом 2.

Конструктивно тело 2 состоит из стержня и диска. Вдоль стержня может падать груз 1 массой m_1 . Для этой цели тело груза 1 имеет сквозное отверстие.

Высоту свободного падения груза 1 отсчитывают с помощью линейки 5. Скоба 6 служит для удержания груза 1 на заданной высоте. При выдёргивании скобы 6 происходит падение груза 1 на тело 2.

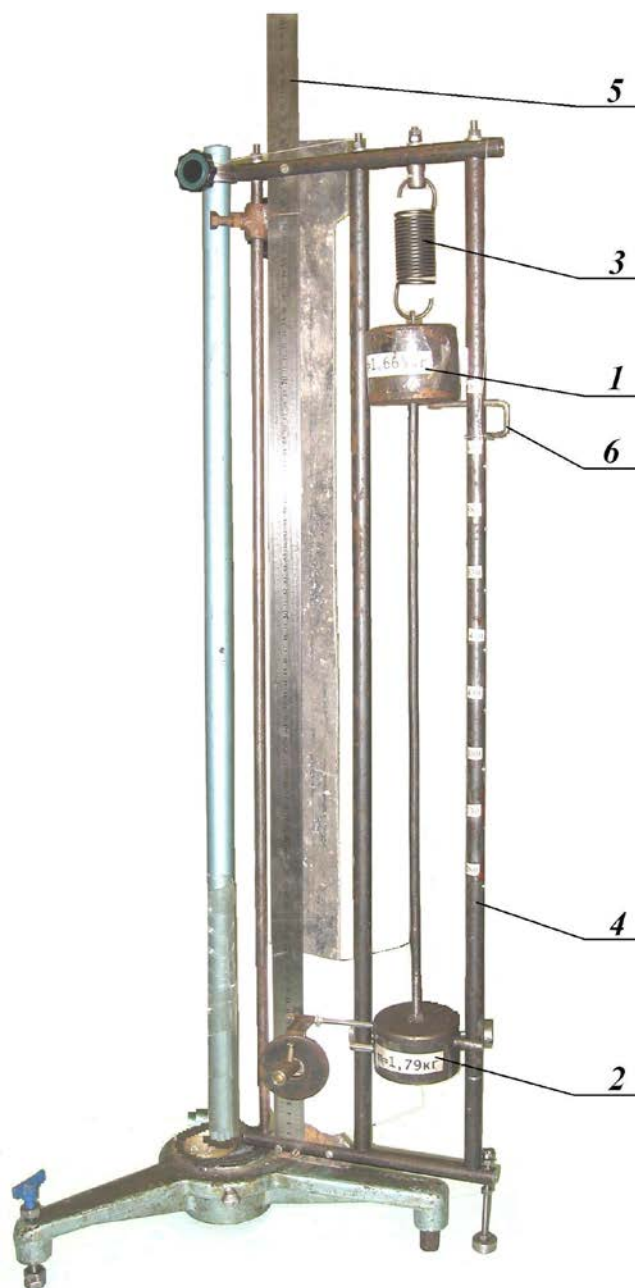


Рисунок 11 – Лабораторная установка

Порядок выполнения работы

- 1 С помощью весов определить массу груза m_1 и массу тела (со стержнем) m_2 .
- 2 Измерить статическое удлинение пружины z'_{CT} под действием груза 1 , для чего положить груз 1 на тело 2 плавно, без удара.
- 3 Вычислить жесткость пружины

$$c = \frac{m_1 g}{z'_{CT}}$$

- 4 Поднять груз 1 над плоскостью тела 2 на некоторую высоту h , зафиксировать груз 1 с помощью скобы 6 . Измерить величину h .

5 Отпустить груз 1 , дав ему свободно падать с высоты h . Измерить наибольшее удлинение s пружины при ударе. Полученные данные внести в таблицу 3.

6 Повторить пункты 4 и 5 несколько раз, не меняя высоты h .

7 Вычислить удлинение пружины, используя формулы (18) и (14).

8 Оценить расхождение теоретических $s^{(T)}$ и опытных $s^{(O)}$ результатов по формуле

$$\frac{s^{(T)} - s^{(O)}}{s^{(O)}} \cdot 100\%.$$

Контрольные вопросы

1 Что называют ударом?

2 Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии механической системы.

3 Чем объясняется частичная потеря начальной кинетической энергии соударяющихся тел?

4 По формуле (15) определите величину потери кинетической энергии при абсолютно упругом ($k=1$) ударе.

5 С помощью формулы (15) поясните в каком случае потеря кинетической энергии будет наибольшей: при абсолютно упругом ударе ($k=1$) или при абсолютно неупругом ударе ($k=0$)?

6 Какой вид примет формула (16) для абсолютно упругого удара?

7 Поясните устройство экспериментальной установки для определения величины растяжения пружины при ударе.

Отчет о работе

1 Название работы.

2 Расчетная схема (рисунок 10).

3 Уравнение (10) для описания теоремы об изменении кинетической энергии механической системы.

4 Схема установки (рисунок 11).

5 Формула (15) для определения потери кинетической энергии соударяющихся тел.

6 Уравнение (16) для вычисления кинетической энергии после удара.

7 Результаты опыта:

масса груза $m_1 = \dots \text{ кг}$;

масса тела $m_2 = \dots \text{ кг}$;

статическое удлинение пружины под действием груза 1: $z'_{CT} = \dots \text{ м}$. Результаты внести в таблицу 3.

Таблица 3 – Результаты опытов с падающим грузом

№ опыта	Высота падения h		Удлинение пружины s		Среднее значение $s^{(0)}$, м
	мм	м	мм	м	
1					
2					
3					
...					

8 Теоретическое определение величины растяжения пружины при ударе:

а) коэффициент жесткости пружины $c = \frac{m_1 g}{z'_{CT}} = \dots \dots \dots H/м;$

б) квадрат скорости системы тел в момент после удара

$$u^2 = \frac{2ghm_1}{m_1 + m_2} \left[1 - \left(1 - k^2 \right) \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right] = \dots \dots \dots м^2/с^2;$$

в) наибольшее удлинение пружины при ударе

$$s^{(T)} = \frac{m_1 g}{c} + \sqrt{\left(\frac{m_1 g}{c} \right)^2 - \frac{m_1 + m_2}{c} u^2} = \dots \dots \dots м.$$

9 Вывод: расхождение теоретических $s^{(T)}$ и опытных $s^{(O)}$ величин растяжения пружины при ударе составляет

$$\frac{s^{(T)} - s^{(O)}}{s^{(O)}} \cdot 100\% = \dots \dots \dots \%$$

9 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ДАЛЬНОСТИ ПАДЕНИЯ ТЕЛА С НАКЛОННОГО ПОЛОТНА

Основные теоретические положения

Знание горизонтальной дальности падения тел с наклонного полотна важно при организации дорожного движения в горной местности, в том числе, в условиях камнепада. Такие задачи решаются методом интегрирования диф-

дифференциальных уравнений движения материальной точки, являются сложными и нуждаются в экспериментальной проверке.

Тело M движется из точки A с начальной скоростью $v_A = 0$ по участку AB шероховатой плоскости длиной ℓ (рисунок 12). Коэффициент трения тела о плоскость равен f , угол наклона плоскости к горизонту равен α . В точке B тело покидает плоскость со скоростью v_B и падает с высоты h в точку C горизонтальной плоскости.

Принимая тело за материальную точку и пренебрегая сопротивлением воздуха, требуется определить расстояние $d = CD$.

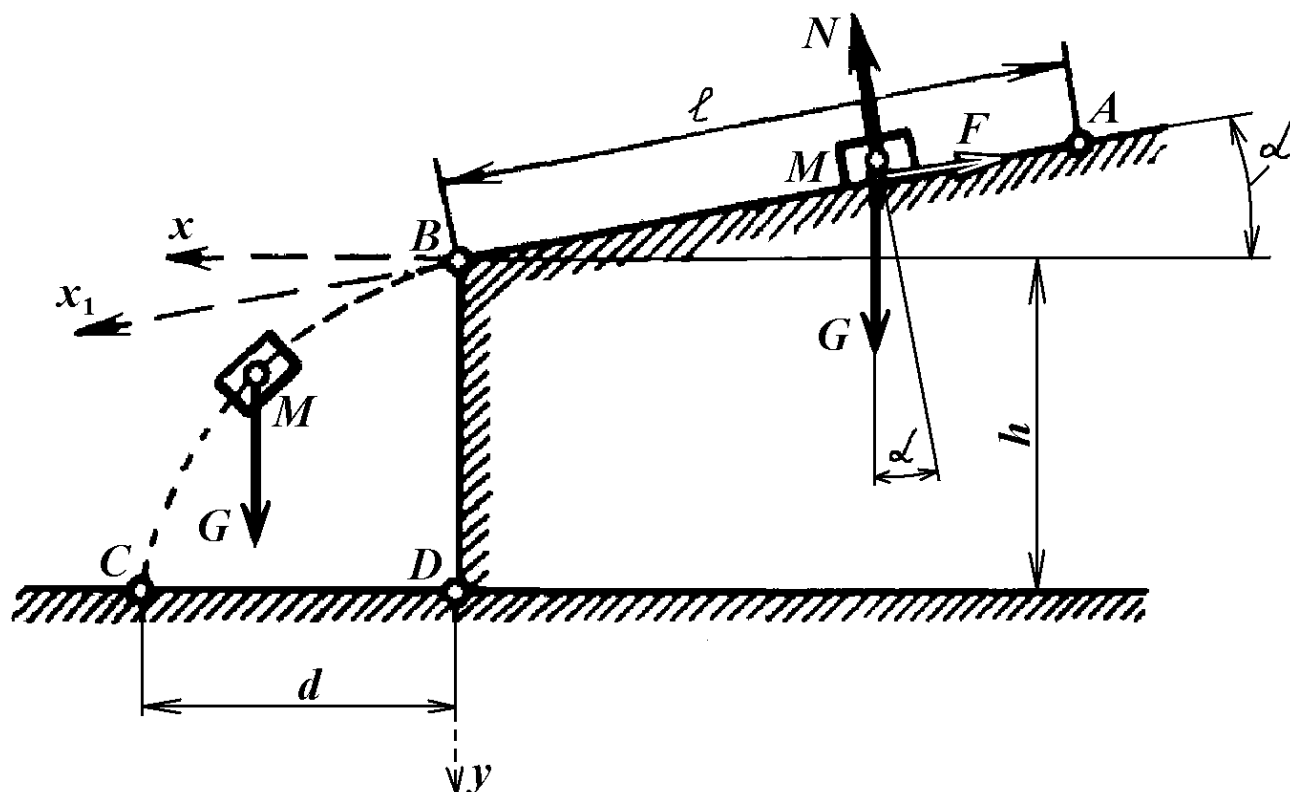


Рисунок 12 – Силы, действующие на тело при падении

Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки в декартовых координатах имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} &= \sum F_{kx} \\ m \ddot{y} &= \sum F_{ky} \\ m \ddot{z} &= \sum F_{kz} \end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

где m – масса материальной точки;

$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} = a_x$ – вторая производная по времени от координаты x точки, равная проекции на ось x ускорения этой точки;

$\ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2} = a_y$ – вторая производная по времени от координаты y точки, рав-

ная проекции на ось y ускорения этой точки;

$\ddot{z} = \frac{d^2 z}{dt^2} = a_z$ – вторая производная по времени от координаты z точки, рав-

ная проекции на ось z ускорения этой точки;

$\sum F_{kx}$ – сумма проекций на ось x всех действующих на точку сил;

$\sum F_{ky}$ – сумма проекций на ось y всех действующих на точку сил;

$\sum F_{kz}$ – сумма проекций на ось z всех действующих на точку сил.

Уравнения (19) можно применить и к несвободной материальной точке, движение которой ограничено какими-либо связями. Для этого нужно применить принцип освобожденности твердых тел от связей: несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, на которое кроме заданных сил действуют реакции связей.

Проведем ось x_1 по направлению движения тела M на участке AB , принимая за начало координат начальное положение тела (точку A). Запишем дифференциальное уравнение движения тела в проекции на ось x_1 :

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \sum F_{kx_1} . \quad (20)$$

На тело действуют (рисунок 12): его сила тяжести $G=mg$ (направлена вертикально вниз); реакция плоскости $N=G \cos \alpha$ (направлена перпендикулярно плоскости AB); сила трения $F=fN$ (направлена против направления движения). Поэтому сумма проекций на ось x_1 всех действующих сил:

$$\sum F_{kx_1} = G \sin \alpha - F = G \sin \alpha - fG \cos \alpha .$$

Тогда выражение (20) распишем:

$$\frac{G}{g} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = G(\sin \alpha - f \cos \alpha),$$

или

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha). \quad (21)$$

Интегрируя уравнение (21), получим:

$$\frac{dx_1}{dt} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1, \quad (22)$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Согласно начальным условиям, в момент времени $t=0$ тело находилось в покое, поэтому проекция скорости $v_{x_1} = \frac{dx_1}{dt} = 0$. Подставляя начальные условия в уравнение (22), находим, что $C_1=0$.

$$\text{Таким образом,} \quad \frac{dx_1}{dt} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t. \quad (23)$$

Интегрируя уравнение (23), будем иметь:

$$x_1 = \frac{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t^2}{2} + C_2, \quad (24)$$

где C_2 – постоянная интегрирования.

Согласно начальным условиям, в момент времени $t=0$ тело находилось в начале координат, поэтому при $t=0$ координата $x_1=0$. Подставляя эти значения в уравнение (24), находим, что $C_2=0$.

$$\text{Таким образом,} \quad x_1 = \frac{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t^2}{2}. \quad (25)$$

Для момента времени $t=t_1$, когда тело покидает участок AB ,

$$\frac{dx_1}{dt} = v_B \text{ и } x_1 = \ell.$$

Подставляя эти значения в уравнения (23) и (25), будем иметь

$$v_B = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t_1; \quad (26)$$

$$\ell = \frac{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t_1^2}{2}. \quad (27)$$

Из уравнения (27) имеем: $t_1 = \sqrt{\frac{2\ell}{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}}$. Подставляя это выражение в уравнение (26), находим

$$v_B = \sqrt{2\ell \cdot g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}. \quad (28)$$

Рассматривая движение свободно падающего тела M из точки B , примем эту точку за начало новой системы координат и проведем оси x и y так, как показано на рисунке 12. На тело действует только сила тяжести \vec{G} , направленная вертикально вниз, как и ось y . Поэтому на ось y сила \vec{G} проецируется в натуральную величину, а на ось x её проекция равна нулю.

Запишем дифференциальные уравнения движения тела M на участке BC :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0; \quad (29)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = G \text{ или } \frac{d^2 y}{dt^2} = g. \quad (30)$$

Интегрируя уравнение (29), имеем

$$\frac{dx}{dt} = C_3 = \text{const}. \quad (31)$$

Так как при $t=0$ $\frac{dx}{dt} = v_x = v_B \cos \alpha$, то из выражения (31) получаем $C_3 = v_B \cos \alpha$ и, следовательно,

$$\frac{dx}{dt} = v_B \cos \alpha. \quad (32)$$

Интегрируя уравнение (32), находим $x = v_B \cos \alpha \cdot t + C_4$. Поскольку при $t=0$ координата тела $x=0$, то постоянная интегрирования $C_4=0$. Следовательно,

$$x = v_B \cos \alpha \cdot t. \quad (33)$$

Интегрируя уравнение (30), будем иметь:

$$\frac{dy}{dt} = gt + C_5. \quad (34)$$

Так как при $t=0$ проекция скорости тела на ось y равна $v_y = \frac{dy}{dt} = v_B \sin \alpha$, то постоянная интегрирования $C_5 = v_B \sin \alpha$. Следовательно, из уравнения (34) имеем

$$\frac{dy}{dt} = gt + v_B \sin \alpha. \quad (35)$$

Интегрируя уравнение (35), находим:

$$y = \frac{gt^2}{2} + v_B \sin \alpha \cdot t + C_6. \quad (36)$$

Так как при $t=0$ координата тела $y=0$, то постоянная интегрирования $C_6=0$. Следовательно, из выражения (36) имеем:

$$y = \frac{gt^2}{2} + v_B \sin \alpha \cdot t. \quad (37)$$

Выразив из уравнения (33) время t и подставив его в выражение (37), получим уравнение траектории падающего тела:

$$y = \frac{g}{2v_B^2 \cos^2 \alpha} x^2 + tg\alpha \cdot x. \quad (38)$$

Учитывая выражение (28), а также то, что в момент падения тела $y=h$, а $x=d$, получим

$$h = \frac{1}{4\ell(\sin \alpha - f \cos \alpha) \cos^2 \alpha} d^2 + tg\alpha \cdot d. \quad (39)$$

Решение квадратного уравнения (39) относительно d после преобразований представим в виде

$$d = 2K \left(\sqrt{tg^2 \alpha + \frac{h}{K}} - tg\alpha \right), \quad (40)$$

где $K = \ell(\sin \alpha - f \cos \alpha) \cos^2 \alpha$.

Здесь из двух корней взят положительный, так как траекторией движения тела является ветвь параболы с положительными абсциссами её точек (рисунок 12).

Описание лабораторной установки

Установка (рисунок 13) состоит из основания 1, стойки 2 и стального полотна 3. Полотно может устанавливаться под любым углом наклона к горизонту в диапазоне от 0° до 60° . Отсчет этого угла проводится по шкале 4.

Горизонтальность полотна при нулевой отметке шкалы устанавливается по отвесу 5 и регулируется с помощью винтов 6.

Для фиксации места падения тела 8 используется кювета 7 с песком.

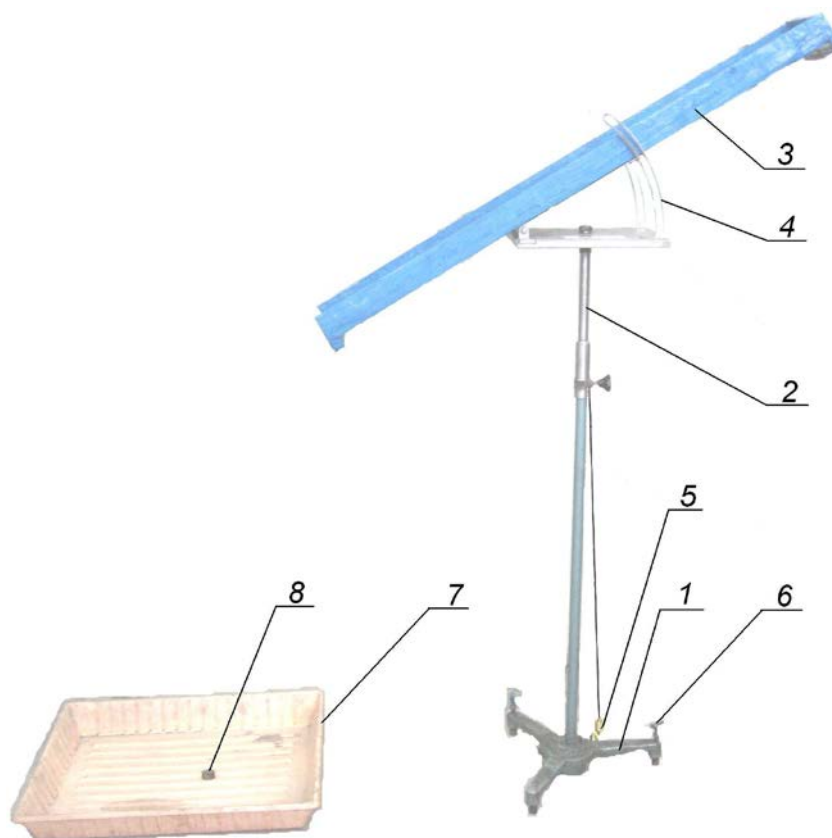


Рисунок 13 – Лабораторная установка

Порядок выполнения работы

1 Определить величину коэффициента трения скольжения f тела по поверхности полотна. Для этого необходимо установить полотно 3 (рисунок 13) горизонтально или с небольшим наклоном и положить на него тело 8. После этого медленно увеличивать угол наклона полотна к горизонту до того момента, когда тело стронется с места. Зафиксировать величину угла наклона $\alpha_{\text{пред}}$ полотна, при котором тело 8 находится в предельном состоянии покоя. Искомый коэффициент трения вычислить по формуле $f = \text{tg} \alpha_{\text{пред}}$.

2 Установить полотно 3 на заданный угол α наклона к горизонту ($\alpha > \alpha_{\text{пред}}$). Рядом с установкой поставить кювету с песком для отметки места падения тела 8.

3 Положить тело 8 на заданном расстоянии ℓ от края полотна.

4 Отпустить тело 8, дав ему свободно скользить по полотну и упасть с него в кювету с песком. С помощью линейки измерить высоту h и дальность d падения тела 8. Полученные результаты записать в таблицу 4.

5 Повторить пункты 3 и 4 несколько раз, не меняя величин α и ℓ .

6 Вычислить горизонтальную дальность полета d по формуле (40), найденной методом интегрирования дифференциальных уравнений движения материальной точки.

7 Оценить расхождение теоретических $d^{(T)}$ и опытных $d^{(O)}$ результатов по формуле

$$\frac{d^{(T)} - d^{(O)}}{d^{(O)}} \cdot 100\% .$$

Контрольные вопросы

- 1 Запишите дифференциальное уравнение движения свободной материальной точки в проекции на ось x . Поясните входящие в это уравнение величины.
- 2 Запишите дифференциальное уравнение движения свободной материальной точки в проекции на ось y . Поясните входящие в это уравнение величины.
- 3 Запишите дифференциальное уравнение движения свободной материальной точки в проекции на ось z . Поясните входящие в это уравнение величины.
- 4 На каком основании несвободную материальную точку M (движение которой было ограничено плоскостью AB), можно рассматривать как свободную?
- 5 Сформулируйте принцип освобожденности твердых тел от связей.
- 6 Какие силы действуют на тело M на участке AB полотна (рисунок 12)?
- 7 Как экспериментально можно определить величину коэффициента трения скольжения тела?
- 8 Поясните устройство экспериментальной установки для определения величины горизонтальной дальности падения тела с наклонного полотна.

Отчет о работе

- 1 Название работы.
- 2 Расчетная схема (рисунок 12).
- 3 Дифференциальное уравнение (20) движения тела в проекции на ось x_1 .
- 4 Результаты экспериментального определения величины коэффициента трения скольжения:

$$\alpha_{\text{пред}} = \quad ;$$

$$f = \text{tg} \alpha_{\text{пред}} = \quad .$$

- 5 Результаты опыта:
 угол наклона полотна $\alpha = \quad$;
 длина рабочего участка полотна $\ell = \quad$ (м);
 высота падения тела $h = \quad$ (м).

Полученные результаты внести в таблицу 4.

Таблица 4 – Результаты опыта

№ опыта	Дальность падения d (м)	Среднее значение $d^{(O)}$, м
1		
2		
3		
...		

6 Теоретическое определение величины горизонтальной дальности падения:

$$K = \ell(\sin \alpha - f \cos \alpha) \cos^2 \alpha = \dots\dots\dots$$

$$d^{(T)} = 2K \left(\sqrt{tg^2 \alpha + \frac{h}{K}} - tg \alpha \right) = \dots\dots\dots$$

7 Вывод: Опытным путём и методом интегрирования дифференциальных уравнений движения материальной точки определена горизонтальная дальность падения тела. Расхождение теоретических $d^{(T)}$ и опытных $d^{(O)}$ значений составляет

$$\frac{d^{(T)} - d^{(O)}}{d^{(O)}} \cdot 100\% = \dots \dots \dots \%$$

Список литературы

- 1 Головнин, Г. Я. Лабораторные работы по теоретической механике (Динамика) [Текст] / Г. Я. Головнин. – М. : Высшая школа, 1967. – 76 с.
- 2 Никитин, Е. М. Лабораторные работы по курсу теоретической механики [Текст] : учебное пособие / Е. М. Никитин. – Л.; Вологда : Изд-во Ленинградского с.-х. ин-та, 1974. – 64 с.
- 3 Старжинский, В. М. Теоретическая механика [Текст] : учебник / В. М. Старжинский. – М. : Наука, 1980. – 464 с.
- 4 Яблонский, А. А. Курс теоретической механики [Текст] : учебник / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – СПб. : Лань, 2004. – 768 с.

Тютрин Сергей Геннадьевич

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 2

Методические указания
к выполнению лабораторных работ
для студентов направления 190700.62
и специальностей 190109.65 и 190110.65

Редактор Е. А. Могутова

Подписано в печать 25.09.14

Печать цифровая

Заказ 243

Формат 60×84 1/16

Усл. печ. л. 1,75

Тираж 25

Бумага 65 г/м²

Уч.-изд. л. 1,75

Не для продажи

РИЦ Курганского государственного университета.

640000, г. Курган, ул. Советская, 63/4.

Курганский государственный университет.