МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра алгебры, геометрии и методики преподавания математики

АЛГЕБРА
(ЧАСТЬ 1)

Материалы для практических занятий
и самостоятельной работы
для студентов факультета МиИТ

Курган 2014

Кафедра: «Алгебра, геометрия и методика преподавания математики»

Дисциплины: «Алгебра»
(направления 010100.62; 050100.62).

Составили: канд. физ.-мат. наук О.Н. Шатных.

Утверждены на заседании кафедры «19» ноября 2013 г.

Рекомендованы методическим советом университета «23» декабря 2013 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие материалы составлены в соответствии с программой дисциплины «Алгебра» и предназначены для студентов направлений «Математика» и «Педагогическое образование» профиля «Математическое образование».

Разделы «Алгебры», «Поле комплексных чисел», «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений» изучаются в первом семестре. В данной брошюре представлены все темы раздела, которые выносятся на практические занятия. Для каждой темы указаны основные теоретические положения, приведены образцы решения типовых задач и список задач для решения.

Раздел 1 Алгебры

Тема 1 Понятие алгебры

1 Понятие бинарной алгебраической операции

Определение. Бинарной алгебраической операцией на множестве М называется правило (закон), по которому любым двум элементам из М, взятым в определенном порядке (т.е. паре (a,b)), ставится в соответствие единственный элемент с из этого же множества.

Пример. 1 Операция сложения на множестве чисел N, Z, Q, R.

2 Операция умножения на множестве чисел N, Z, Q, R.

Задачи для решения

1 Какие из арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) являются бинарными операциями:

а) на множестве {1,0,-1};

б) на множестве N;

в) на множестве Z?

2 Является ли бинарной операцией:

а) умножение на множестве иррациональных чисел;

б) сложение на множестве четных чисел;

в) сложение на множестве нечетных чисел;

г) нахождение десятичных логарифмов на множестве R^+;

д) нахождение среднего геометрического двух чисел на множестве R^+;

е) нахождение наибольшего общего делителя на множестве N?

3 Являются ли действия, выполняемые по формулам:

а) $a \circ b = (a + b)^2$;

б) $a \circ b=\frac{a+b}{2}$;

в) $a \circ b = \frac{a(a+1)+b(b+1)}{2}$,

бинарными операциями на множестве Q, и если являются, то почему?

4 Являются ли алгебраической системой множество чисел вида $a + b\sqrt{5}$, $a, b \in Z$, относительно: а) сложения; б) вычитания; в) умножения?

5 Является ли алгебраической системой множество радиусов-векторов, исходящих из начала декартовой системы координат и расположенных в первой четверти координатной плоскости, с операцией: а) сложение векторов; б) вычитание векторов?

2 Свойства бинарной алгебраической операции

Определение. Операция $\circ$ на множестве М называется *коммутативной*, если для любых a и b из этого множества справедливо равенство

$$a \circ b = b \circ a.$$

Определение. Операция ∘ на множестве М называется *ассоциативной*, если для любых a, b, c ∈ M справедливо равенство

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

Определение. Пусть на М задана операция ∘. Элемент е называется *нейтральным* относительно операции ∘, если для любого a ∈ M справедливо равенство

$$a \circ e = e \circ a = a.$$

Определение. Пусть на М задана операция ∘. Элемент a′ называется *симметричным* к элементу a относительно операции ∘, если выполняется равенство

$$a \circ a' = a' \circ a = e.$$

По сложению, a′ обозначают –a и называют противоположным. По умножению, a′ обозначают a^{-1} и называют обратным.

Определение. Пусть на М задана операция ∘. Операция ∘ называется *обратимой*, если для любых a, b ∈ M уравнения $a \circ x = b$, $y \circ a = b$ имеют решение, причем единственное.

Пусть дано множество, на котором выполнимы две операции ∘ и *.

Определение. Операция ∘ называется *дистрибутивной* относительно операции *, если для любых a, b, c ∈ M выполняются равенства

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c),$$

$$(b * c) \circ a = (b \circ a) * (c \circ a).$$

Пример 1 Докажем, что на множестве R бинарная операция, заданная формулой $a \circ b = \frac{a+b}{2}$, коммутативна, но не ассоциативна.

Решение. Пусть a, b, c – любые действительные числа. В силу коммутативности сложения на R получим:

$$a \circ b = \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2} = b \circ a,$$

т.е. бинарная операция нахождения среднего арифметического на R коммутативна. Далее,

$$(a \circ b) \circ c = \frac{\frac{a+b}{2}+c}{2} = \frac{a+b+2c}{4} \tag{1}$$

и

$$a \circ (b \circ c) = \frac{a+\frac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4}. \tag{2}$$

Из результатов (1) и (2) следует, что при $a \neq c$ равенство $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ не является справедливым. Следовательно, заданная операция не ассоциативна на R.

Пример 2 Докажем, что во множестве К, содержащем не менее двух элементов, на котором формулой $a \circ b = b$ задана бинарная операция, не существует нейтрального элемента.

Решение

Допустим, что в К существует нейтральный элемент е, и пусть а – любой элемент из К. По определению нейтрального элемента $a \circ e = a$, а из условия примера следует, что $a \circ e = e$, т.е. $a = e$. Это означает, что К состоит из одного элемента. Полученный результат противоречит условию, а потому сделанное допущение ошибочно.

Задачи для решения

1 Являются ли коммутативными и ассоциативными на множестве Z бинарные операции сложения, умножения и вычитания?

2 Докажите, что на множестве R^+ бинарная операция $a \circ b = \sqrt{a \cdot b}$ нахождения среднего геометрического коммутативна, но не ассоциативна.

3 Обладает ли множество чисел вида $a + b\sqrt{5}$, где a и b – любые целые числа, нейтральным элементом относительно обычного умножения? Проверьте, имеются ли в данной алгебраической системе обратные элементы для элементов $2 + \sqrt{5}$ и $5 - 2\sqrt{5}$. Обратима ли на данном множестве операция умножения?

4 Какие из нижеприведенных бинарных операций:

а) $a \circ b = a^b$;

б) $a \circ b = c$, где c – наибольший общий делитель чисел a и b;

в) $a \circ b = m$, где m – наименьшее общее кратное чисел a и b, коммутативны и какие ассоциативны на множестве N.

5 Покажите, что действие выполняемое по правилу $a \circ b = a^2 + b^2$, является коммутативной, но не ассоциативной бинарной операцией на множестве R.

6 Докажите, что относительно обычного умножения множество $A=\{x \mid x=3k,\ k \in Z\}$ не содержит нейтрального элемента. Обратима ли операция умножения на множестве A?

7 Пусть I – множество подмножеств некоторого непустого множества M. Существует ли в I нейтральный элемент (если существует, то какой) относительно операции объединения подмножеств на I; пересечения подмножеств? Какие элементы множества I имеют симметричные относительно операций объединения и пересечения? Обратимы ли указанные операции на множестве I?

8 Докажите, что на множестве Q действие, выполняемое по правилу $a \circ b = -ab$, является бинарной, коммутативной, ассоциативной, но необратимой операцией. Обладает ли алгебраическая система $< Z; \circ >$ нейтральным элементом, и если обладает, то каким именно?

3 Виды алгебр

Определение. Алгеброй называется любое непустое множество A, на котором задана некоторая система операций

$$S = \{f_1, f_2, \dots\}$$

Обозначается (A, S), где A – множество, S – система операций.

Пример. (N, +), (Q, +, ·)

Определение. Непустое множество M называется *полугруппой*, если в нем выполнима одна бинарная алгебраическая операция, которая является ассоциативной.

Пример. (N, +), (Z, ·).

Определение. Непустое множество G называется *группой*, если в этом множестве выполнима одна бинарная алгебраическая операция ∘, которая обладает свойствами:

1) $a \circ (\mathrm{b} \circ \mathrm{c}) = (a \circ \mathrm{b}) \circ \mathrm{c}, \forall a, b, c \in G$;

2) $\exists\, e \in G: \forall a \in G\ a \circ \mathrm{e} = \mathrm{e} \circ a = a$;

3) $\forall a \in G, \exists a' \in G, a \circ a' = a' \circ a = \mathrm{e}$.

Группы по сложению называются *аддитивными*; группы по умножению – *мультипликативными*.

Определение. Непустое множество G называется *группой*, если в этом множестве выполнима одна бинарная алгебраическая операция, которая является ассоциативной и обратимой.

Определение. Если в группе G операция коммутативна, то группа G называется *абелевой*.

Определение. Непустое множество K называется *кольцом*, если в нем выполнимы две бинарные алгебраические операции – сложение и умножение, удовлетворяющие условиям:

1) $\forall a, b \in K, a + b = b + a$;
2) $\forall a, b, c \in K, a + (b + c) = (a + b) + c$;
3) $\exists\, 0 \in K: \forall a \in K, a + 0 = a$;
4) $\forall a \in K\ \exists (-a) \in K: a + (-a) = 0$;
5) $\forall a, b, c \in K, a(b + c) = ab + ac, (b + c)a = ba + ca$.

Примеры колец. При обычных операциях сложения и умножения кольцом является множество целых чисел, множество рациональных чисел, множество действительных чисел.

Определение. Непустое множество P называется *полем*, если в нем выполнимы две бинарные алгебраические операции сложение и умножение, удовлетворяющие аксиомам:

1) $\forall a, b \in K, a + b = b + a$;
2) $\forall a, b, c \in K, a + (b + c) = (a + b) + c$;
3) $\exists 0 \in K: \forall a \in K, a + 0 = a$;
4) $\forall a \in K\ \exists (-a) \in K: a + (-a) = 0$;
5) $\forall a, b \in K, ab = ba$;
6) $\forall a, b, c \in K, a(bc) = (ab)c$;
7) $\exists 1 \in K: \forall a \in K, a \cdot 1 = a$;
8) $\forall a \in K\ \exists\, a^{-1} \in K: a \cdot a^{-1} = 1$;
9) $\forall a, b, c \in K, a(b + c) = ab + ac$.

Пример 1 Доказать, что на множество Z образует группу относительно действия, заданного формулой

$$a \circ b = \begin{cases} a + b, & \text{если } a - \text{четное число, } b - \text{любое целое число,} \\ a - b, & \text{если } a - \text{нечетное число, } b - \text{любое целое число.} \end{cases}$$

Доказательство

1 Рассматриваемое на Z действие сводится к сложению или вычитанию целых чисел, а т.к. сложение и вычитание элементов из Z дает в результате элемент из Z, то на множестве Z рассматриваемое действие является бинарной операцией.

2 Проанализируем возможные случаи

а) Если a, b – четные числа, а c – любое число из Z, то

$$a \circ (b \circ c) = a + (b + c),$$

$$(a \circ b) \circ c = (a + b) + c = a + (b + c),$$

т.е. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

б) Если a – четное число, b – нечетное, а c – любое число из Z, то

$$a \circ (b \circ c) = a + (b - c),$$

$$(a \circ b) \circ c = (a + b) - c = a + (b - c),$$

т.е. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

в) Если a – нечетное число, b – четное, а c – любое число из Z, то $a - b$ нечетно и потому

$$a \circ (b \circ c) = a - (b + c) = (a - b) - c,$$

$$(a \circ b) \circ c = (a - b) - c,$$

т.е. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

г) Если a, b – нечетные числа, а c – любое число из Z, то $a - b$ четно и потому

$$a \circ (b \circ c) = a - (b - c) = (a - b) + c,$$

$$(a \circ b) \circ c = (a - b) + c,$$

т.е. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

Итак, во всех возможных случаях заданная на Z бинарная операция является ассоциативной.

3 Т.к. 0 – четное число, то $0 \circ a = 0 + a = a$. Кроме того, если a *четно*, то $a \circ 0 = a + 0 = a$; если же a нечетно, то $a \circ 0 = a - 0 = a$. Итак, $0 \circ a = a \circ 0$, т.е. 0 является в Z нейтральным элементом относительно заданной операции.

4 Для любого элемента $a \in Z$ в Z существует обратный элемент: для четного a обратным будет противоположное число $-a$, т.к. $a \circ (-a) = a +$ $+(-a) = 0$; для нечетного a обратным будет само число a, т.к. $a \circ a = a - a = 0$.

Итак, Z является группой относительно заданной операции.

Задачи для решения

1 Является ли множество Z полугруппой относительно: а) сложения, б) вычитания?

2 Является ли множество N полугруппой относительно операции нахождения наибольшего общего делителя?

3 Почему множество R не является полугруппой относительно действия, выполняемого по правилу $a \circ b = a^2 + b^2$ для любых $a, b \in R$?

4 Выясните, какие из нижеприведенных множеств являются группами относительно нижеуказанных операций:

а) множество Z относительно вычитания;

б) множество четных чисел относительно умножения;

в) множество целых чисел, кратных любому заданному натуральному числу n, относительно сложения;

г) множество Q^{+} относительно умножения;

д) множество Q относительно умножения;

е) множество Q \ {0} относительно умножения;

ж) множество R \ {0} относительно умножения;

з) множество трехмерных (n-мерных) арифметических векторов относительно сложения;

и) множество чисел вида a + b$\sqrt{2}$ относительно сложения, если a и b – любые рациональные числа;

к) множество многочленов одной и той же степени n от одного аргумента относительно сложения;

л) множество многочленов степени не выше n относительно сложения;

м) множество многочленов от одного аргумента относительно сложения;

5 На множестве Q \ {0} определено действие $a \circ$ b = $\frac{a \cdot b}{2}$. Докажите, что относительно указанного действия данное множество является группой.

6 Является ли кольцом множество L чисел вида $a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}, a, b,$ $c \in Z$ относительно обычных операций сложения и умножения?

7 Докажите, что если на Z задана операция a □ b = -ab, то алгебраическая система <Z; +, □> является коммутативным кольцом с единицей. Каков единичный элемент этого кольца?

8 Докажите, что множество A чисел вида 2a + 2b$\sqrt{3}$, где a, b – любые целые числа, является числовым кольцом.

9 Для каких чисел n = 2, 3, 4, 5, 6, 7 существует поле из n элементов?

10 Почему кольцо {0} не является полем?

11 На множестве M = {a, b} сложение ⊕ и умножение □ определены следующим образом:

$$a \oplus a = a, a \oplus b = b \oplus a = b, b \oplus b = a;$$
$$a \,\square\, b = b \,\square\, a = a, a \,\square\, a = a, b \,\square\, b = b.$$

Выясните, обладает ли это множество нулем и единицей и является ли система <M, ⊕, □> полем относительно заданных бинарных операций.

Тема 2 Поле комплексных чисел

Определение. Полем комплексных чисел называется множество C, обладающее следующими свойствами:

1) C – поле,
2) R ∈ C, R ∈ C.
3) $i \in$ C, $i^2 = -1, i = \sqrt{-1}$,

4) С с условиями 1, 2, 3 минимальное.

1 Алгебраическая форма комплексного числа

Определение. Пусть x и y – действительные числа. Число вида $z = x + iy$ называется *комплексным числом в алгебраической форме*. x называют *вещественной или действительной* частью числа z и обозначают $x = \mathrm{Re}(z)$; y называют *мнимой* частью числа z и обозначают $y = \mathrm{Im}(z)$. Число i называют *мнимой единицей*, $i = \sqrt{-1}$.

Пример $z = 2 - 3i$. $\mathrm{Re}(z) = 2$, $\mathrm{Im}(z) = -3$.

Определение. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Определение. Комплексное число $z = x + iy$ равно 0, если $x = 0$ и $y = 0$.

Определение. Число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$.

Действия над комплексными числами

1) $-(a + bi) = -a - bi$;
2) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;
3) $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$;
4) $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$;
5) $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$;
6) $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$;
7) Извлекать из комплексных чисел в алгебраической форме можно только корень второй степени.

$$\sqrt{a + bi} = x + yi; \quad x, y \in R, y \neq 0$$
$$(x + yi)^2 = a + bi;$$
$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi; \quad y \neq 0$$
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Решая систему находим x и y.

8) степени мнимой единицы.

Первой степенью числа i является само это число, тогда:

$$i^1 = i;$$
$$i^2 = -1;$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -i;$$
$$i^4 = i^3 \cdot i = 1;$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = i;$$
$$i^6 = i^5 \cdot i = -1$$

и так далее.

При любом $n \in N$

$$i^{4n} = 1;$$

$$i^{4n+1} = i;$$
$$i^{4n+2} = -1;$$
$$i^{4n+3} = -i.$$

Пример 1 Найти сумму (разность) комплексных чисел:

а) $(2 + i)+ (5 + 6i) = (2 + 5) + (1 + 6)i = 7 + 7i$,

б) $(5 + 7i) + (2 - 6i) = (5 + 2) + (7 - 6)i = 7 + i$,

в) $(6 - 4i) + (- 15 - 2i) = (6 - 15) + (- 4 - 2)i = -9 - 6i$,

г) $(5 + 6i) - (3 + 7i) = (5 - 3) + (6 - 7)i = 2 - i$.

Пример 2 Решить уравнение $(5x + 3yi) + (2y - xi) = 9 + 5i$.
Сложив комплексные числа в левой части уравнения получим

$$(5x + 2y) + (-x + 3y)i = 9 + 5i.$$

Два комплексных числа равны, если равны их действительные части и равны мнимые части, т.е.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 9, \\ -x + 3y = 5. \end{cases}$$

Решением данной системы уравнений будет $x = 1$ и $y = 2$.

Пример 3 Найти произведение комплексных чисел:

1) $(2 + 3i) \cdot (6 - 5i) = (2 \cdot 6 - 3 \cdot (-5)) + (2 \cdot (-5i) + 3i \cdot 6) = 27 + 8i$,

2) $(1 + i) \cdot (1 + i) = 1+ i + i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$,

3) $(2 + 3i) \cdot (2 - 3i) = 4 - 6i + 6i - 9i^2 = 4 + 9 = 13$.

Пример 4 Найти z если $(2 - 3i) \cdot z = -1 - 5i$.
Пусть $z = a + bi$, тогда

$$(2 - 3i) \cdot (a + bi) = (2a + 3b) + (- 3a + 2b)i = -1- 5i,$$

что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 2a + 3b = -1, \\ -3a + 2b = -5. \end{cases}$$

Решением данной системы уравнений будет $a = 1$, $b = -1$, т.е. $z = 1- i$.
Проверим полученное решение

$$(2 - 3i) \cdot z = (2 - 3i) \cdot (1- i) = 2 - 2i - 3i + 3i \cdot 2 = -1- 5i.$$

Пример 5 Найти частное $\frac{9-7i}{2-3i}$, $2 - 3i \neq 0 + 0i$.

$$\frac{9-7i}{2-3i} = \frac{(9-7i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{18+27i-14i+21}{4+9} = \frac{39+13i}{13} = 3 + i.$$

Пример 6 Вычислить:

$$i^{125} - i^{26} = i^{124+1} - i^{24+2} = i - i^2 = i + 1,$$
$$i^{100} + i^{98} + i^{63} = i^{100} + i^{96+2} + i^{60+3} = 1 - 1 - i = -i.$$

Задачи для решения

1 Вычислить в алгебраической форме:

а) $(3 + 6i) + (- 3 - 5i)$,

б) $(- 9 - 4i) + (- 2 - 3i)$,

в) $(- 3-i)^3$,

г) $(1 + 6i) + (1 - 6i)^2 - (4 + i)^3 + (- 4 + i)$,

д) $(7 + 4i)^2 + \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} + (5 + i) \cdot (5 - i)$, е) $(1+i)^3 + \frac{1+i}{3-7i} + \frac{i}{1-i} - (6+4i)\cdot(-6+4i)$,

ж) $\frac{2+i}{2-i} - (2+3i) + (5-3i)$,

з) $\frac{4i}{1+i} - \frac{5}{-4+3i}$,

и) $\frac{a-bi}{b+ai} - \frac{b-ai}{a+bi}i$,

к) $\sqrt{1+2i}$,

л) $\sqrt{2+i} - (9-i)\cdot(7+2i)\cdot(7+3i) - \frac{3+2i}{i}$.

2 Решить уравнение в действительных числах:

а) $(2x - 5yi) + (3y + 2xi) = 13 - i$,

б) $7(3x + 2yi) + (2y - i) = 19 + 3$.

3 Найти z, если:

а) $z\cdot(2+i)=15$, б) $(2+2i)\cdot z = 8i$.

4 Доказать равенство:

$$\frac{2+i}{3-i} = \frac{13+4i}{17-9i}.$$

5 Вычислить:

а) $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56}$;

б) $i^3 + i^{13} + i^{23} + i^{33} + i^{43} + i^{53}$.

2 Геометрическая форма комплексного числа

Комплексное число $z = x + yi$ можно охарактеризовать упорядоченной парой вещественных чисел (x, y), где x – действительная часть, y – мнимая часть числа z.

Такую пару чисел можно отождествить с точкой на плоскости, если на ней задана система координат (рисунок 1).

Множество всех комплексных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех точек плоскости.

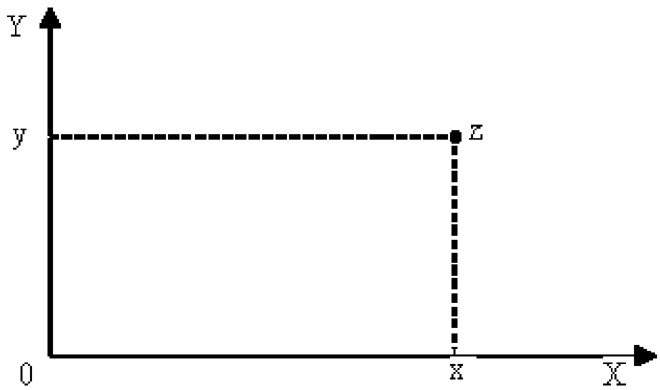

Рисунок 1 – Геометрическая форма комплексного числа

Пример Комплексное число $z = 3 + 2i$ можно отождествить с точкой A (3, 2), которую можно изобразить на плоскости XOY (рисунок 2). Комплексно-сопряженное число $\bar{z} = 3 - 2i$ изобразится точкой A (3, -2), симметричной точке A (3, 2) относительно действительной оси. Точки B (0, 1) и C (- 2, 0) соответствуют комплексным числам $z = 0 + i$ и $z = -2 + 0i$ (рисунок 2).

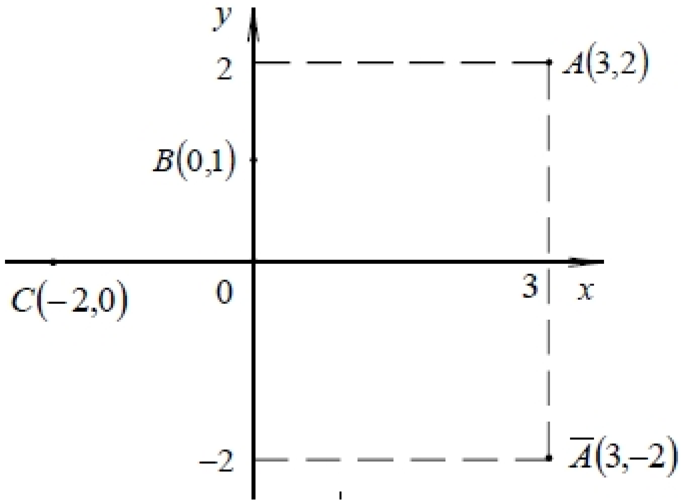

Рисунок 2 – Пример построения геометрической формы

Задачи для решения

1 Записать комплексные числа, сопряженные данным. Изобразить данные и сопряженные к ним комплексные числа точками на плоскости:

а) $1+ i$; б) $4 - 7i$; в) 3;
г) $3i$; д) $-1- 3i$; е) $3 + 6i$;
ж) $- 3 - 5i$; з) $2 + 3i$; и) $- 9 - 4i$; к) 15- i.

3 Тригонометрическая форма комплексного числа

С любой точкой А плоскости XOY мы можем связать радиус-вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ и установить взаимно однозначное соответствие множества комплексных чисел $z = a + bi$ с множеством радиус-векторов с координатами (a, b) (рисунок 3).

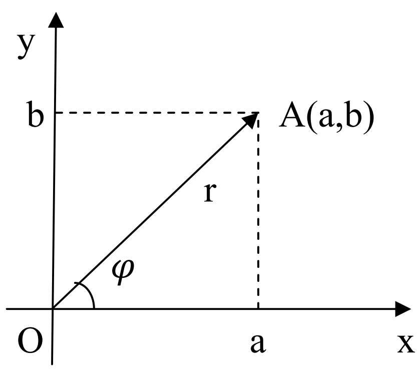

Рисунок 3 – Связь прямоугольной и полярной систем координат

Тогда

$$a = r \cos \varphi,\ b = r \sin \varphi,$$

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
есть так называемая *тригонометрическая форма* комплексного числа.

Определение. $|\overrightarrow{OA}| = \mathrm{r}$ – расстояние от О до А называется модулем комплексного числа.

Определение. Аргументом *arg z* комплексного числа z называется угол φ между положительным направлением оси ОХ и радиусом-вектором ОА.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{a}, \quad tg\,\varphi = \frac{b}{a}.$$

Чтобы определить φ однозначно, нужно знать положение точки А на плоскости.

Если точка А находится в 1 или 4 четверти, то $\varphi = arctg\frac{b}{a}$.

Если точка А находится во 2 или 3 четверти, то $\varphi = \pi + arctg\frac{b}{a}$.

3.1 Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

Умножение и деление комплексных чисел удобнее выполнить, если эти числа записаны в тригонометрической форме.

Пусть
$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$
тогда
$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$
а
$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

3.2 Формула Муавра

При любом натуральном $n \in N$
$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$
или
$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$
– это так называемая *формула Муавра* позволяющая находить целую степень комплексного числа.

3.3 Извлечение корней n-ой степени из комплексного числа

Пусть комплексное число z задано в тригонометрической форме
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0 + 0i.$$
Тогда
$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\,sin\,\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right).$$
$$\mathrm{k} = \overline{0, \mathrm{n} - 1}.$$

Пример 1 Записать в тригонометрической форме комплексные числа:

$$z = 1 + i.$$

Модуль этого комплексного числа $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, числу z соответствует точка (1;1) ∈ I четверти (рисунок 4). Поэтому

$$\varphi = arctg\, 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Запишем

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right].$$

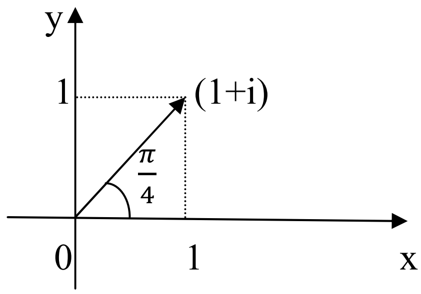

Рисунок 4 – Число 1+i в комплексной плоскости

Окончательно запишем $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Пример 2 Найти произведение и частное комплексных чисел z_1 и z_2

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), z_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Решение:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3\left(\cos(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) = 6\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left(\cos(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

Пример 3 Вычислить $(1 + i)^{10}$.

Решение:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \textit{по формуле Муавра}$$

$$(1 + i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right) = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right) =$$

$$= 32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 32(0 + i \cdot 1) = 32i.$$

Пример 4 Найти все значения корня 4-й степени из z = $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

Здесь r = 1, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тогда $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{4}\right), k = \overline{0,3}$.

Тогда при k = 0, $a_0 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$;

k = 1, $a_1 = \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}$;

k = 2, $a_2 = \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}$;

k = 3, $a_3 = \cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}$.

Задачи для решения

1 Записать данные комплексные числа в тригонометрической форме, определив их модули и аргументы:

а) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$, б) $z = \sqrt{3} + i$,

в) $z = 1 - i$, г) $z = -4$,

д) $z = 3i$, е) $z = -2i$.

ж) $z = -10$; з) $z = 6-6i$;

и) $z = -1-\sqrt{3}i$; к) $z = 1-\sqrt{3}i$.

2 Найти произведение и частное комплексных чисел z_1 и z_2 в тригонометрической форме:

а) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$;

б) $z_1 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

3 Вычислить:

а) $(-1+\sqrt{3}i)^{25} + (1+\sqrt{3}i)^{150}$; б) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{5}}$;

в) $\frac{(1+\sqrt{3}i)^{20}}{(1-i)^{30}}$; г) $\frac{(2-2\sqrt{3})^{15}}{(-4+4i)^{6}} - (3\sqrt{3}-3i)^{10}$;

д) $(3+i)^3 - (3-i)^3$; ж) $(1+\mathrm{i})^5$;

з) $\left(2\sqrt{3}-2i\right)^{15}$; и) $\left(3-\sqrt{3}i\right)^{5} + \frac{(1-i)^2}{(1+i)}$;

к) $\sqrt[10]{512(1-i\sqrt{3})}$; л) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{3i}}$;

м) $\sqrt[6]{i}$; н) $\sqrt[3]{1-i}$;

о) $\sqrt[4]{\frac{-2i}{1-i\sqrt{3}}}$.

4 Найти значения $\sqrt[n]{1}$ при n = 2, 3, 4, 6.

4 Двучленные уравнения

Определение. Уравнения вида $ax^n = b$ называются *двучленными*, где $a, b \in C, a \neq 0$.

Решение этого уравнения находится в виде:

$$x^n = \frac{b}{a} \quad \to x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

Решение двучленных уравнений сводится к извлечению корней n-ой степени из комплексных чисел.

Пример Решить уравнение $x^5 + 32 = 0$.

Решение

Перепишем уравнение в виде $x^5 = -32$; будем рассматривать -32 как комплексное число и представим его в тригонометрической форме:

$$-32 = 32(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Теперь по правилу извлечения корня из комплексного числа найдем

$$x_k = \sqrt[5]{32(\cos\pi + i\sin\pi)} = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{5} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{5}\right),$$

где k следует придать значения 0, 1, 2, 3, 4. Получим пять корней нашего уравнения:

$$x_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right),\ x_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right),\ x_2 = -2,$$

$$x_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right),\qquad x_4 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}\right).$$

Уравнение имеет один действительный корень и четыре комплексных.

Задачи для решения

1 Решить уравнения:

а) $x^4 + 1 = 0$; б) $x^6 - 64 = 0$;

в) $x^6 - 729 = 0$; г) $x^2 - 2x + 15 = 0$;

д) $x^2 + 3x + 7 = 0$; е) $8x^3 - 27 = 0$;

ж) $16x^4 - 7 = 0$; з) $x^3 - 9 = 0$;

и) $-\frac{1}{2}x^3 = 4$; к) $3x^3 = 2$.

5 Геометрическое решение уравнений

Найти геометрическое решение неравенства $|z + 1 - i| \le 3$.

Решение: $|z + 1 - i| \le 3$, $z = a + bi$, $|a + bi + 1 - i| \le 3$, $|(a + 1) + +(b - 1)i| \le 3$. Найдем модуль комплексного числа $(a + 1) + +(b - 1)i$.

$$|(a + 1) + +(b - 1)i| = \sqrt{(a + 1)^2 + (b - 1)^2}.$$

Получим $\sqrt{(a + 1)^2 + (b - 1)^2} \le 3$ (1), возведем в квадрат правую и левую части (1), получим $(a + 1)^2 + (b - 1)^2 \le 3^2$.

$(a + 1)^2 + (b - 1)^2 \le 3^2$ – геометрически это круг с центром в точке А (-1; 1) и радиусом 3 (рисунок 5).

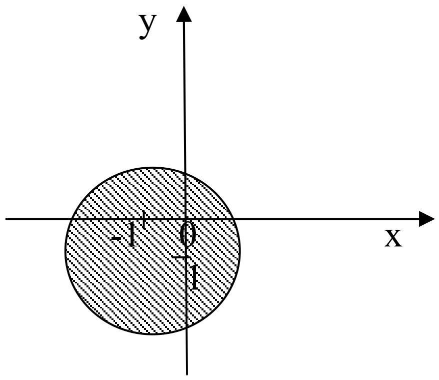

Рисунок 5 – Решение неравенства

Задачи для решения

1 Найти решение систем:

Раздел 2 Матрицы и определители

Тема 1 Матрицы. Определение матрицы, виды матриц, действия над матрицами

Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из чисел некоторого поля P. Числа, из которых состоит матрица, называются элементами матрицы. Если матрица имеет m строк и n столбцов, то (m, n) называют размерностью матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если число строк матрицы равно числу столбцов, то такая матрица называется **квадратной**.

Две матрицы называются **однотипными**, если они имеют одинаковую размерность.

Действия над матрицами

I **Суммой матриц** $A + B$ называется матрица C, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B, т. е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Складывать и вычитать можно только матрицы одинаковой размерности (число строк и столбцов у них должно быть одинаково).

Пример 1: $A = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 17 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 11 & 23 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение: $A + B = \begin{pmatrix} -4+11 & 8+23 \\ 5+(-3) & 17+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 31 \\ 2 & 25 \end{pmatrix}$.

II **Произведением матрицы A на число λ** называется матрица B, которая получается из матрицы A умножением всех ее элементов на λ, т.е.

$$B=\lambda\cdot A=\lambda\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \dots & \lambda\cdot a_{1n} \\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \dots & \lambda\cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda\cdot a_{m1} & \lambda\cdot a_{m2} & \dots & \lambda\cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 2: $A=\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, $\lambda=-3$.

$$B=\lambda\cdot A=-3\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3\cdot 6 & -3\cdot 12 \\ -3\cdot 4 & -3\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -18 & -36 \\ -12 & -21 \end{pmatrix}.$$

III **Разность двух матриц** одинаковой размерности можно определить через операцию сложения матриц и через умножение матрицы на число:

$A-B=A+(-1)\cdot B.$

Пример 3: $A=\begin{pmatrix} 2 & 19 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: $A-B=\begin{pmatrix} 2-(-3) & 19-2 \\ 0-(-2) & -5-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 17 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$.

VI **Матрицу** A **можно умножить на матрицу** B тогда и только тогда, когда число столбцов в первой матрице равно числу строк во второй. При этом получается матрица, имеющая столько строк, сколько в первой, и столько столбцов, сколько во второй.

Произведением двух матриц A и B называется матрица C, элементы которой вычисляются по правилу умножения $i-$ой строки матрицы A на $j-$ый столбец матрицы B.

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{ml} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{\ln} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ml} \end{pmatrix}.$$

$$c_{ij}=a_{i1}\mathrm{b}_{1\mathrm{j}}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{il}b_{ij}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}.$$

Пример: Умножить матрицу A на матрицу B:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+(-1)\cdot 3+5\cdot 2 & 2\cdot 2+(-1)\cdot 4+5\cdot 3 & 2\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+5\cdot 5 \\ 4\cdot 1+1\cdot 3+(-2)\cdot 2 & 4\cdot 2+1\cdot 4+(-2)\cdot 3 & 4\cdot 1+1\cdot(-1)+(-2)\cdot 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 15 & 28 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задачи для решения

1 Найти сумму матриц А и В:

а) $A=\begin{pmatrix} 7 & 13-4 \\ -5 & 8\ 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & -6-1 \\ 6 & 2\ 7 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} -10 & -6 & 11 & 19 & 23 \\ 21 & 5 & 8 & 2 & 20 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 19 & 23 & 11 & 1 & 30 \\ 15 & 3 & 14 & 27 & 13 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} 5 & -8 & 12 & 9 \\ 4 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & -7 & 11 \\ -5 & 9 & 16 & 2 \\ 2 & 13 & -10 & 6 \\ 9 & -2 & 1 & 14 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 11 & -2 \\ 6 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \\ -8 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix} 27 & 29 & 14 \\ 11 & -8 & -15 \\ -7 & 18 & -23 \\ 12 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 13 & 19 \\ 2 & 17 & 22 \\ 24 & 30 & 7 \\ -5 & -11 & 10 \end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix} -21 & 4 & 29 & 3 & -17 \\ 6 & 9 & -13 & 5 & 21 \\ 8 & 7 & 11 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 12 & 19 & 4 \\ 1 & 8 & 15 & -6 & -1 \\ 3 & 4 & 9 & 15 & -9 \end{pmatrix}$;

2 Умножить матрицу А на число λ:

а) $\lambda=-2$, $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 9 \\ 10 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\lambda=5$, $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 10 \\ -4 & 8 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$;

в) $\lambda=7$, $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 1 & 6 & 8 \\ -3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$; г) $\lambda=-3$, $A=\begin{pmatrix} 8 & 3 & -5 & 12 \\ 6 & 11 & 1 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;

д) $\lambda=12$, $A=\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$; е) $\lambda=-8$, $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 & -3 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \\ 10 & -4 & 12 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 15 \\ 1 & 9 & 16 & 20 \end{pmatrix}$;

3 Найти разность матриц А и В:

а) $A=\begin{pmatrix} 18 & -7 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -8 & 13 \\ -14 & 11 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ 3 & -1 & 3\\ 4 & 5 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 3 & -1 & -3\\ 4 & 5 & 5\end{pmatrix};$

в) $A=\begin{pmatrix}8 & -10 & -14 & 8\\ 3 & -9 & 11 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}9 & 19 & 17 & -4\\ 14 & -3 & 2 & 5\end{pmatrix};$

г) $A=\begin{pmatrix}-15\\ 4\\ 22\\ 9\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-11\\ 6\\ 8\\ 12\end{pmatrix};$

д) $A=\begin{pmatrix}10 & 8 & 9 & -4\\ 9 & -2 & 17 & 22\\ 21 & -11 & 13 & -4\\ 7 & -1 & 4 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}9 & 11 & 5 & -1\\ -11 & 4 & 6 & 1\\ -3 & 0 & 5 & -12\\ -9 & 18 & 14 & 15\end{pmatrix};$

е) $A=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 22 & 3\\ 7 & 11\\ -8 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}8 & -9\\ 2 & 17\\ 15 & 11\\ 4 & -9\end{pmatrix};$

4 Найдите произведение матриц A и B:

а) $A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 7 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 6 & -6\\ 2 & -1\end{pmatrix};$

б) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 7 & -1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 7\\ 4 & 5 & 2 & 0\end{pmatrix};$

в) $A=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 4 & -1\\ 2 & 0\\ -5 & 3\end{pmatrix};$

г) $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ -1 & 2 & -7\\ 3 & 2 & -4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -2 & 0\\ -3 & -4 & 2 & 1 & 6\\ 7 & -8 & 0 & 3 & -1\end{pmatrix};$

д) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -4\\ -1 & -2 & -4\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix};$

е) $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3 & 4\\ 1 & 2 & 5 & -1\\ 7 & 2 & -3 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2\\ 6\\ 8\\ 1\end{pmatrix}.$

5 Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Найти: а) $(A+B)C$; б) $\frac{1}{2}B+A$; в) $3A-2B$; г) $C+2AB$;

д) $(2A-3B)C$; е) $\left(\frac{1}{2}C+3B\right)2A$;

6 Выполните действия:

а) $\begin{pmatrix}5 & 1 & -4\\ 6 & 3 & -5\\ 4 & -2 & -3\end{pmatrix}^2$;

б) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}^3$;

в) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}^2\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}^1$;

д) $\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & b & a\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 1 & b & b\\ 1 & c & a\end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^2$.

7 Найти значение многочлена $f(x)$ от матрицы А:

а) $f(x)=2x^2-4x+9$; $A=\begin{pmatrix}9 & 1 & -8\\ 3 & 2 & -1\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}$;

б) $f(x)=x^2-7x+6$; $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & -1\\ 3 & 1 & 8\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

Тема 2 Определители. Перестановки из n элементов. Подстановки n-й степени. Определение определителя n-го порядка. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца. Следствие из неё

Перестановкой чисел 1, 2, ..., n называется любое расположение этих чисел в определенном порядке. Число всех перестановок, которые можно образовать из n чисел, равно $1\cdot 2\cdot ...\cdot n=n!$.

Если в некоторой перестановке мы поменяем местами какие-либо два символа, а все остальные символы оставим на месте, то мы получим новую перестановку. Это преобразование перестановки называется **транспозицией.** **Инверсию** образуют два числа в перестановке, когда меньшее из них расположено правее большего.

Каждой перестановке можно сопоставить число инверсий в ней, которое подсчитывается следующим образом: для каждого из чисел определяют количество стоящих правее его меньших чисел, и полученные результаты складываются.

Перестановка называется четной (или нечетной), если в ней соответственно четно (нечетно) общее число инверсий. Операция, посредством которой от одной перестановки переходят к другой, составленной из тех же n чисел, называется подстановкой n-ой степени.

Произвольное *взаимно-однозначное отображение множества первых* n *натуральных чисел на себя* называется **подстановкой** n **-го порядка**. Подстановка может быть записана с помощью двух перестановок.

Пример перестановки: (1 2 3 4)$\Rightarrow$(2 4 1 3);

Пример транспозиции: (**1** 2 3 **4**) $\Rightarrow$(**4** 2 3 **1**);

Пример инверсии: перестановка (2 4 1 3) содержит три инверсии элементов 2 и 1, 4 и 1, 4 и 3.

Задачи для решения

1 Указать транспозиции, с помощью которых можно

а) от перестановки (10 1 2 8 7 4 3 6 9 5) перейти к перестановке (8 9 5 1 10 7 2 3 6 4);

б) от перестановки (9 5 1 8 3 7 4 6 2) перейти к перестановке (9 8 7 6 5 4 3 2 1);

в) от перестановки (2 4 6 … 2n 1 3 5… 2n-1) перейти к перестановке (2n 2n-1…. 4 3 2 1).

2 Найти число инверсий в следующих перестановках

а)(8 1 5 9 7 4 3 6 2);

б) (10 5 3 8 4 7 2 6 1 9);

в) *музыка*, если в качестве исходной принимается перестановка букв (а з к м у ы).

Определителем n-го порядка называется алгебраическая сумма n! членов, составленная следующим образом: членами служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному в каждой строке и в каждом столбце, причем член берется с плюсом, если его индексы составляют четную подстановку, и со знаком минус – в противоположном случае.

Пусть дана квадратная матрица А второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определитель квадратной матрицы А второго порядка равен числу $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$. Диагональ $a_{11}a_{22}$ – главная, $a_{12}a_{21}$ – побочная.

Пусть дана квадратная матрица А третьего порядка $B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определителем квадратной матрицы А третьего порядка называется число, равное

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-\left(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}\right).$$

Минором M_{ij} называется определитель, полученный из исходного вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Число $(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}=A_{ij}$ **называется алгебраическим дополнением** к элементу a_{ij}**.**

Теорема 1 (разложение определителя по строке или столбцу):

Определитель равен сумме произведений всех элементов произвольной его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

Теорема 2: Сумма произведений элементов некоторой строки квадратной матрицы А на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.

Теорема 100: Определитель, в котором все элементы одной из строк (столбцов), кроме одного, равны нулю равен произведению этого ненулевого элемента на его алгебраическое дополнение.

Пример 1 Найти определитель матрицы А:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}=(1\cdot1\cdot5+2\cdot4\cdot2+(-1)(-2)\cdot3)-(2\cdot1\cdot3+(-1)\cdot2\cdot5+(-2)\cdot4\cdot1)=$$

$$=5+16+6-(6-10-8)=27-(-12)=39.$$

Задачи для решения

1 Найдите определитель 2-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} a+bi & c+d \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$.

2 Найдите определитель 3-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 8 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$; и) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$;

к) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -7 \\ 1 & 7 & 8 \end{vmatrix}$; л) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 5 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$; м) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 11 \\ 2 & -9 & 5 \\ 1 & -4 & -12 \end{vmatrix}$.

3 Найдите определитель 4-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

4 Найдите определитель 5-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5 Решите уравнения, пользуясь соответствующими свойствами определителя (не применяя правило Саррюса):

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & x-10 \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0$;

г) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$; д) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0$.

6 Вычислить определители, разложив их по элементам строки (столбца), содержащей буквы:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

7 Путем разложения по элементам третьей строки вычислить:

а) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

Тема 3 Обратная матрица. Вырожденные и невырожденные матрицы. Обратная матрица и ее вычисление. Матричные уравнения

Пусть А – квадратная матрица.

Матрица В называется **обратной** к матрице А, если $AB = BA = E$.

Обратная матрица обозначается А$^{-1}$ и $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}\dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22}\dots & A_{n2} \\ \dots & \dots\ \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n}\dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырожденная, то есть её *определитель* не равен нулю. Для неквадратных матриц и *вырожденных матриц* обратных матриц не существует.

Уравнение вида $A \cdot X = B$ называют простейшим **матричным уравнением**. Если А – квадратная невырожденная матрица, то решением такого уравнения будет матрица $X = A^{-1}B$.

Если уравнение имеет вид $X \cdot A = B$, то $X = B \cdot A^{-1}$.

Пример 1 Найти матрицу обратную данной: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

1) Найдем определитель матрицы А.

$$|A| = -2 + 12 + 9 - 1 = 18 \neq 0.$$

Следовательно, матрица А невырожденная и имеет себе обратную.

2) Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы А.

$$A_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=7; \qquad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-5; \qquad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3.$$

3) Запишем A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}-1 & 11 & 3\\ -1 & -7 & 3\\ 7 & -5 & -3\end{pmatrix}.$$

4) Выполним проверку:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{18}\begin{pmatrix}-1 & 11 & 3\\ -1 & -7 & 3\\ 7 & -5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}-1 & 11 & 3\\ -1 & -7 & 3\\ 7 & -5 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Пример 2 Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}X=0.$

Решение

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0; \qquad X=A^{-1}B; \qquad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{vmatrix};$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}; \quad X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}; \quad X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -14\\ -3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ \frac{3}{2} & -4\end{pmatrix}.$$

Задачи для решения

1 Найти матрицу, обратную данной:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3 & 5\\ 7 & 9\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}5 & 9 & 7\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}-3 & 11 & 7\\ 0 & 5 & -4\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 3 & -2\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$;

к) $\begin{pmatrix}5 & 0 & 21\\ 21 & 2 & 16\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$; л) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$; м) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; н) $\begin{pmatrix}1 & 3 & -5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

о) $\begin{pmatrix}4 & 7 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 7 & -4\\ 0 & 0 & -5 & 3\end{pmatrix}$; п) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

2 Решите матричное уравнение:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $X \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

д) $X \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 9 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -15 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$; е) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; з) $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 10 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; к) $X \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 12 \end{pmatrix}$.

Раздел 3 Системы линейных уравнений. Методы решения систем линейных уравнений

Тема 1 Решение системы n – линейных уравнений с n неизвестными в матричном виде

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица A коэффициентов при неизвестных называется *главной матрицей системы.*

Свободные члены и неизвестные можно записать в виде столбцевых матриц:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Тогда, используя правило умножение матриц, эту систему уравнений можно записать так:

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

или

$$A \cdot X = B \qquad (1)$$

Равенство (1) называется *матричным уравнением* или *системой уравнений в матричном виде.*

Отсюда

$$X = A^{-1}B.$$

Таким образом, чтобы решить систему уравнение, нужно:

1) Найти обратную матрицу A^{-1}.

2) Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу-столбец свободных членов B, т. е. $X = A^{-1}B$.

Пользуясь определением равных матриц, записать ответ.

Пример Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot2\cdot2 + (-1)\cdot3\cdot4 + (-1)\cdot1\cdot3 - ((-1)\cdot2\cdot4 + 5\cdot3\cdot3 + 1\cdot(-1)\cdot2) =$$

$$= 20 - 12 - 3 - (-8 + 45 - 2) = 5-35 = -30.$$

$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$; $A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$; $A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$;

$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10$; $A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14$; $A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16$;

$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5$; $A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19$; $A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11.$

$$A^{-1} = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Находим матрицу X.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\begin{cases} 5 \cdot 1 - 2 - 3 = 0 \\ 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14 \\ 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 14 = 14 \\ 16 = 16 \end{cases} \text{(верно)}$$

Решением системы является набор (1, 2, 3): x = 1; y = 2; z = 3.

Задачи для решения

1 Решить системы линейных уравнений матричным методом

а) $\begin{cases} x+2y+z=5, \\ x+y-z=0, \\ 4x-y+5z=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x+2y+3z=16, \\ 5x-3y+2z=15, \\ 10x-11y+5z=36; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y-2z=6, \\ 2x+3y-7z=16, \\ 5x+2y+z=16; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x+4y+z=4, \\ 3x+6y+2z=4, \\ 4x-y-3z. \end{cases}$

2 Решить системы линейных уравнений

а) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0, \\ 2x_1-4x_2+5x_3+7x_4=0, \\ 6x_1-12x_2+17x_3-9x_4=0, \\ 7x_1-14x_2+18x_3+17x_4=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0, \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0, \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2, \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1, \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2-3x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-3x_4+4x_5=1, \\ 2x_1-x_2+3x_3+2x_4-x_5=2, \\ x_1+4x_2+2x_3-5x_4+3x_5=3, \\ x_1+15x_2+6x_3-19x_4+9x_5=1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3+x_4+4x_5=0, \\ 3x_1+x_2+4x_3+5x_4-x_5=0, \\ 5x_1-x_2+4x_3+11x_4+7x_5=0, \\ 4x_1+5x_2+9x_3-2x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+11x_3-2x_4+13x_5=0. \end{cases}$

Тема 2 Правило Крамера

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2; \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

Обозначим через Δ и Δ_j определитель матрицы системы и определители, полученные из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots\ a_{1n} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{i1} \dots a_{ij} \dots\ a_{in} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nj} \dots\ a_{nn} \end{vmatrix};\ \Delta_j=\begin{vmatrix} a_{11} \dots b_1 \dots\ a_{1n} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{i1} \dots b_i \dots\ a_{in} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{n1} \dots b_n \dots\ a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если определитель матрицы системы отличен от нуля, $\Delta\neq0$, то решение системы определяется равенствами:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta};\dots,x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta};\dots,x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Пример Решим по правилу Крамера систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1; \\ \qquad 5x_2+6x_3=2; \\ \qquad\qquad 2x_3=3. \end{cases}$$

Запишем матрицу системы, столбец свободных членов и вычислим определитель матрицы системы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};\ \Delta=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=10\neq0.$$

Определитель матрицы системы отличен от нуля. Система имеет единственное решение. Вычислим его по формулам Крамера. Для этого найдем определители $\Delta_j, j=\overline{1,3}$.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-7;\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-14;\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=15.$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-7}{10};\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-14}{10}=\frac{-7}{5};\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}.$$

Проверим:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{7}{10} \\ -\frac{7}{5} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = B.$$

1 Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6; \\ 2x + 3y - 4z = 20; \\ 3x - 2y - 5z = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2; \\ 4x + 3y + 2z = 16; \\ 2x - 3y + z = 17; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -x + 2y + z = 7; \\ 3x - y + 6z = 19; \\ -4x + 3y - z = 8; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 1; \\ 3x - y + 2z = 1; \\ 4x - y + 5z = 10; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y - 2z = 6; \\ 2x + 3y - 7z = 16; \\ 5x + 2y + z = 16; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x + 2y + z = 16; \\ x + y - z = 0; \\ 4x - y + 5z = 3; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1; \end{cases}$ и) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 0; \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 14x_4 = 0; \\ 10x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

Тема 3 Метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса)

Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы.

Рассмотрим метод Гаусса на примере системы из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Первое уравнение оставим без изменения, а из второго и третьего исключим слагаемые, содержащие x_1. Для этого второе уравнение разделим на a_{21} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с первым уравнением. Аналогично третье уравнение разделим на a_{31} и умножим на $-a_{11}$ и сложим с первым. В результате исходная система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases}$$

Теперь из последнего уравнения легко найти x_3, затем из второго уравнения x_2. Для этого третье уравнение разделим на a'_{32}, умножим на $-a'_{22}$ и сложим со вторым. Тогда будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases}$$

Отсюда легко найти x_3, затем из второго уравнения x_2, и из первого x_1. Вместо того чтобы писать систему уравнений выписывают расширенную матрицу системы, которая состоит из коэффициентов этой системы и свободных членов. Приводим ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right).$$

Матрица имеет **ступенчатый вид,** если

- все ненулевые строки (имеющие по крайней мере один ненулевой элемент) располагаются над всеми чисто нулевыми строками;
- ведущий элемент (первый ненулевой элемент строки при отсчёте слева направо) каждой ненулевой строки располагается строго правее ведущего элемента в строке, расположенной выше данной.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{array}\right).$$

Цель элементарных преобразований – привести матрицу к ступенчатому (треугольному) виду.

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие ее преобразования:

I Перестановка двух строк матрицы.

II Умножение всех элементов одной строки матрицы на одно и то же число, отличное от нуля.

III Прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число.

IV Вычеркивание нулевой строки.

Пример:

Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1, \\ 2x - y + 3z = 13, \\ x + 2y - z = 9. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$.

Поменяем местами первую и третью строки

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right).$$

Мы получили единицу в верхнем углу. Теперь нужно получить нули в первом столбце 2-ой и 3-ей строки. Для этого ко второй строке прибавим первую строку, умноженную на -2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)\cdot(-2) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right).$$

К третьей строке прибавим первую, умноженную на 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)\cdot 3 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right).$$

Вторую строку умножим на -1/5, а третью строку на -1/2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \div(-5) \\ \div(-2) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right).$$

К третьей строке прибавим вторую строку, умноженную на -2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)\cdot(-2) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right)\cdot\frac{1}{3} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Из последней строчки находим, что $z = 4$.

Из второй строки находим y: $y - 4 = 1 \Rightarrow y = 5.$

И из первой строки найдем x: $x + 2\cdot 5 - 4 = 6.$

Таким образом, мы нашли решение системы:

$$\begin{cases} x = 6, \\ y = 5, \\ z = 4. \end{cases}$$

Решить методом Гаусса следующие системы уравнений:

1 $\begin{cases} 3x + y - 2z = 4, \\ 2x - 3y + z = 9, \\ 5x + y + 3z = -4; \end{cases}$ 2 $\begin{cases} 2x - y - 3z = -9, \\ x + 2y + z = 3, \\ 3x + y - z = -1; \end{cases}$ 3 $\begin{cases} 7x + 5y + 2z = 18, \\ x - y - z = 3, \\ x + y + 2z = -2; \end{cases}$ 4 $\begin{cases} x + 3y - 6z = 12, \\ 3x + 2y + 5z = -10, \\ 2x + 5y - 3z = 6; \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = -2, \\ x + 2y - 3z = 14, \\ 3x + 4y + z = 16; \end{cases}$ 6 $\begin{cases} 3x + 4y = 11, \\ 5y + 6z = 28, \\ x + 2z = 7; \end{cases}$ 7 $\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11; \end{cases}$ 8 $\begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1, \\ 3x - y - z - 2t = -4, \\ x + 2y + 3z - t = -6, \\ x + 2y + 3z - t = -4; \end{cases}$

$$9\ \begin{cases} x+2y+3z-2t=6, \\ 2x-y-2z-3t=8, \\ 3x+2y-z+2t=4, \\ 2x-3y+2z+t=-8; \end{cases} \quad 10\begin{cases} x+2y+3z+4t=5, \\ 2x+y+2z+3t=1, \\ 3x+2y+z+2t=1, \\ 4x+3y+2z+t=-5; \end{cases} \quad 11\ \begin{cases} y-3z+4t=-5, \\ x-2z+3t=-4, \\ 3x+2y-5t=12, \\ 4x+3y-5z=5; \end{cases}$$

$$12\begin{cases} 2x-y+3z+2t=4, \\ 3x+3y+3z+2t, \\ 3x-y-z+2t=6, \\ 3x-y+3z-t=6; \end{cases} \quad 13\ \begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ 3x_1+4x_2-x_3-x_4=0, \\ x_1+3x_2-x_3+x_4=2, \\ 5x_1-3x_2+6x_3+3x_4=3; \end{cases} \quad 14\ \begin{cases} 3x_1+4x_2+5x_3+7x_4=1, \\ 2x_1+6x_2-3x_3+4x_4=2, \\ 4x_1+2x_2+13x_3+10x_4=0, \\ 5x_1+21x_3+13x_4=3; \end{cases}$$

$$15\ \begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3-7x_4+3x_5=1, \\ 3x_1+x_2-5x_3+6x_4+x_5=0, \\ x_1-7x_2+13x_3-20x_4+5x_5=2, \\ 4x_1+5x_2-14x_3+19x_4-x_5=-1, \\ 5x_1-13x_2+21x_3-34x_4+11x_5=4; \end{cases} \quad 16\ \begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=1, \\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=-1, \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=-1; \end{cases}$$

$$17\ \begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3+4x_4=1, \\ 3x_1++2x_2+4x_3-3x_4=-1, \\ x_1-3x_2-x_3-2x_4=0, \\ x_1+15x_2+5x_3+9x_4=0; \end{cases} \quad 18\ \begin{cases} 3x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+3x_2-2x_3+x_4-4x_5=0, \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4+x_5=2, \\ x_1-2x_2+3x_3-3x_4+7x_5=1; \end{cases}$$

$$19\ \begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4-x_5=0, \\ 2x_1+4x_2+2x_3+3x_4+2x_5=0, \\ x_1+2x_2-5x_3+3x_4-5x_5=0, \\ 3x_1+6x_2+4x_3+x_4+x_5=0, \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4+3x_5=0; \end{cases} \quad 20\ \begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3-5x_4=0, \\ 4x_1+6x_2+2x_3-x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-5x_3-14x_4=0, \\ 10x_1+15x_2+3x_3-7x_4=0. \end{cases}$$

Шатных Олеся Николаевна

АЛГЕБРА
(ЧАСТЬ 1)

Материалы для практических занятий
и самостоятельной работы
для студентов факультета МиИТ

Редактор Е. А. Могутова

Подписано к печати 11.02.14	Формат бумаги 60×84 1/16	Бумага тип. № 1
Печать цифровая	Усл. печ.л. 2,5	Уч.-изд.л. 2,5
Заказ 52	Тираж 30	Не для продажи

РИЦ Курганского государственного университета.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет.