

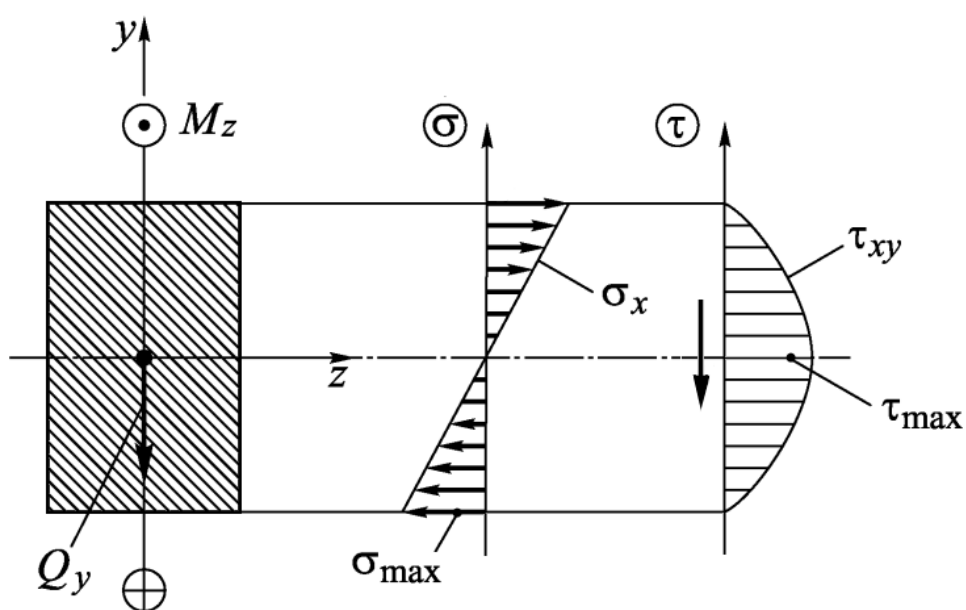
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Курганский государственный университет»

Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

## РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
К РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ №2  
для студентов очной формы обучения направлений  
151900.62, 150700.62



Курган 2013

Кафедра: «Теоретическая механика и сопротивление материалов»

Дисциплины: «Сопротивление материалов», «Техническая механика»  
(направления 151900.62, 150700.62)

Составил: канд. техн. наук, доц. В. К. Коротовских

Утверждены на заседании кафедры 29 мая 2013 г.

Рекомендованы методическим советом университета 14 июня 2013 г.

## Основные сведения

Изгиб относится к наиболее распространенным видам нагружения элементов конструкций. В общем случае при плоском изгибе в поперечных сечениях стержня возникают два внутренних силовых фактора – изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ . Первый обусловлен нормальными напряжениями  $\sigma$ , а второй касательными –  $\tau$ . Вид нагружения, при котором в сечениях стержня возникает только изгибающий момент  $M$  ( $Q = 0$ ), называется *чистым изгибом*. Если, кроме изгибающего момента, имеется и поперечная сила, то это *поперечный изгиб*. Таким образом, обязательным внутренним силовым фактором при изгибе является изгибающий момент. Стержень, работающий на изгиб, называется *балкой*.

С геометрической точки зрения изгиб характеризуется тем, что первоначально прямолинейная ось стержня обращается в криволинейную. При этом по высоте сечения образуются две зоны – растяжения и сжатия, разделяемые нейтральным слоем, то есть одни продольные волокна удлиняются, другие укорачиваются. Продольные волокна нейтрального слоя искривляются, но не меняют своей длины. Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной осью (н.о.)*, или нулевой линией.

Если силовая плоскость, то есть плоскость действия нагрузки, совпадает с одной из главных плоскостей, то имеет место *прямой изгиб*. *Главной* называется плоскость, проходящая через продольную ось стержня и одну из главных центральных осей его поперечного сечения. Относительно главных осей осевые моменты инерции сечения принимают экстремальные значения, а центробежный момент равен нулю. Любая ось симметрии является главной центральной. Главные центральные оси между собой взаимно перпендикулярны, т.е. вторая главная ось будет перпендикулярна первой – и проходить через центр тяжести сечения. В частности, нейтральная ось является главной центральной. При прямом изгибе плоскость, в которой изгибается стержень, совпадает с силовой плоскостью. Если силовая плоскость проходит через продольную ось стержня и не совпадает ни с одной из главных плоскостей, то это *косой изгиб*. При косом изгибе плоскость деформации не совпадает с направлением силовой плоскости.

Для нахождения опасного сечения – сечения, в котором возникают максимальные напряжения, строятся эпюры внутренних силовых факторов. При изгибе – это эпюры поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ . Для определенности при построении их эпюр приняты следующие правила знаков. Поперечная сила считается положительной, если внешняя сила *вращает* отсеченную часть стержня относительно центра тяжести проведенного сечения по ходу часовой стрелки, и «минус» – против часовой стрелки. Знак изгибающих моментов определяется деформацией стержня: эпюра строится со стороны *сжатых* волокон. При этом момент считается положительным – если сжаты верхние волокна, отрицательным – если сжатые волокна расположены внизу.

Основные свойства эпюр поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ :

1 На участке балки, где отсутствует распределенная нагрузка ( $q = 0$ ), эпюра  $Q$  представляет собой прямую линию, параллельную оси эпюры, а эпюра  $M$  – наклонную прямую.

2 На участке с равномерно распределенной нагрузкой ( $q = \text{const}$ ) поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент - по закону квадратной параболы с выпуклостью параболы на нагрузку.

3 На участке, где поперечная сила равна нулю, изгибающий момент постоянен (чистый изгиб).

4 На участке с равномерно распределенной нагрузкой в сечении, где поперечная сила пересекает ось эпюры ( $Q = 0$ ), изгибающий момент  $M$  достигает экстремального значения (максимума или минимума).

5 В сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре  $Q$  должен быть скачок, равный по абсолютной величине этой силе.

6 В том сечении балки, где имеется сосредоточенный момент, на эпюре  $M$  будет скачок, равный по абсолютной величине данному моменту.

В пределах упругих деформаций нормальные напряжения  $\sigma$  при изгибе в любой точке по ширине сечения постоянны. Напряжения изменяются только по высоте поперечного сечения:

$$\sigma = \frac{M}{J_{н.о.}} \cdot y, \quad (1)$$

где  $M$  – изгибающий момент в рассматриваемом сечении;  $y$  – расстояние от точки, в которой вычисляется напряжение до нейтральной оси;  $J_{н.о.}$  – осевой момент инерции сечения стержня относительно нейтральной оси (геометрическая характеристика сечения, учитывающая его размеры и форму при изгибе,  $\text{м}^4$ ). Таким образом, нормальные напряжения по высоте сечения распределяются по линейному закону. Они равны нулю на нейтральной оси (нулевой линии) и достигают наибольших значений в опасных точках, наиболее удаленных от нейтральной оси.

Так как пластичные материалы одинаково работают на растяжение и сжатие (для них допускаемые напряжения на растяжение принимаются равными по величине сжимающим напряжениям  $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$ ), то балки из таких материалов, как правило, выполняются симметричного сечения относительно нейтральной оси. При этом абсолютные величины *наибольших* нормальных растягивающих  $\max \sigma_p$  и сжимающих  $\max \sigma_c$  напряжений в сечении с моментом  $M$  одинаковы (рисунок 1):

$$\max \sigma_p = \max \sigma_c = \max \sigma = \frac{M}{J_{н.о.}} \cdot y_{\max}, \quad (2)$$

где  $y_{\max}$  - расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленных от нее точек (*опасных точек*) сечения.

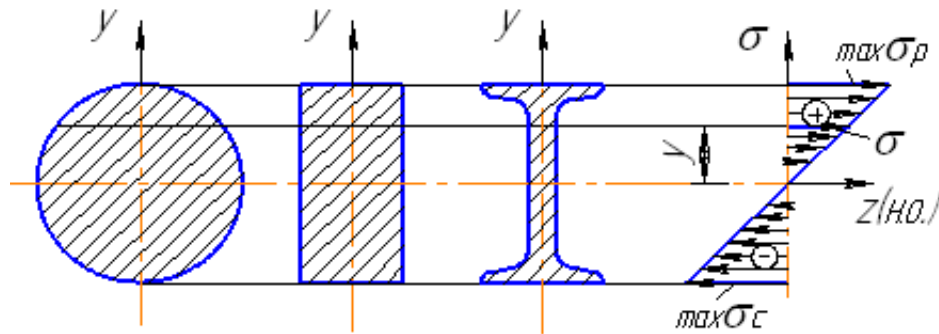


Рисунок 1 - Изменение нормального напряжения по высоте поперечного сечения

Для балок, размеры и форма сечений которых по длине не меняются, опасным является сечение, в котором возникает наибольший по абсолютной величине изгибающий момент  $\max M$ . При этом условие прочности для стержней постоянного сечения из пластичных материалов имеет вид:

$$\max \sigma = \left| \frac{\max M}{W_{н.о.}} \right| \leq [\sigma], \quad (3)$$

где  $W_{н.о.} = J_{н.о.} / y_{\max}$  – осевой момент сопротивления сечения относительно нейтральной оси, используемый для опасных точек сечения при изгибе,  $\text{м}^3$ ;  $[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение. Его величина определяется так же, как при растяжении-сжатии [10].

Хрупкие материалы (например, чугун) по-разному сопротивляются растяжению и сжатию, имеют разные допускаемые напряжения  $[\sigma_p]$  и  $[\sigma_c]$ . Поэтому при расчетах на прочность балок, выполненных из хрупких материалов, составляется два условия прочности для опасных точек опасного сечения – и на растяжение, и на сжатие. Здесь наиболее рациональными являются сечения, несимметричные относительно нейтральной оси. При этом, так как хрупкие материалы лучше работают на сжатие, сечение следует располагать так, чтобы  $\max \sigma_c$  было больше, чем  $\max \sigma_p$  (большая часть материала находилась в растянутой зоне).

При поперечном изгибе в сечениях балки возникают не только нормальные напряжения  $\sigma$ , но и касательные –  $\tau$ . Касательные напряжения  $\tau$  рассчитываются по формуле Д.И. Журавского:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{н.о.}^{отс.}}{J_{н.о.} \cdot b_y}, \quad (4)$$

где  $Q$  – поперечная сила в рассматриваемом сечении;  $S_{н.о.}^{отс.}$  – статический момент отсеченной части сечения относительно нейтральной оси;

$J_{н.о.}$  – осевой момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси;  $b_y$  – ширина сечения на том уровне, где вычисляется напряжение.

Касательные напряжения постоянны по ширине и изменяются только по высоте поперечного сечения по закону квадратной параболы. На поверхности (вверху и внизу) сечения они равны нулю и достигают наибольшей величины на нейтральной оси и направлены в ту же сторону, что и поперечная сила (рисунок 2). Для прямоугольного поперечного сечения с размерами  $b$  и  $h$  максимальные касательные напряжения на нейтральной оси равны:

$$\max \tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F}, \quad (5)$$

где  $F = bh$  – площадь поперечного сечения.

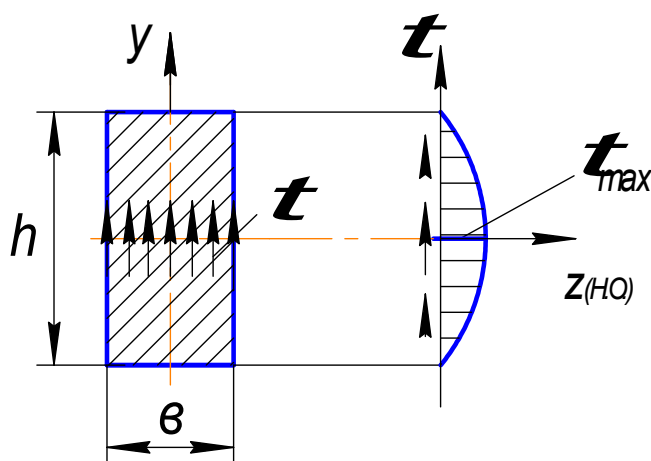


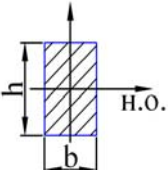
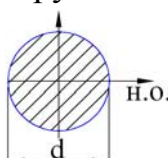
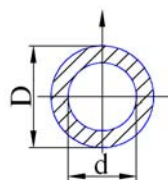
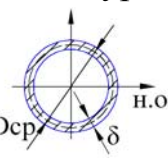
Рисунок 2 – Распределение касательных напряжений по высоте поперечного сечения

Расчет на прочность при изгибе (проектировочный, или проектный; определение грузоподъемности или допускаемой нагрузки; проверочный) осуществляется в основном по *нормальным напряжениям*, так как они существенно

больше касательных. Касательные напряжения в расчетах на прочность учитываются только в некоторых случаях, которые отдельно оговариваются.

Формулы для расчета площади, осевых моментов инерции и сопротивления  $J_{н.о.}$ ,  $W_{н.о.}$  и максимальных касательных напряжений  $\tau_{max}$  для наиболее часто встречающихся в практике симметричных поперечных сечений балок приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Формулы для вычисления  $J_{н.о.}$ ,  $W_{н.о.}$  и  $\tau_{max}$

Поперечное сечение	Площадь	$J_{н.о.}$	$W_{н.о.}$	$\tau_{max}$
1 Прямоугольник 	$bh$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh}$
2 Круг 	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2}$
3 Кольцо 	$\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$	$\frac{\pi D^4}{64}(1 - k^4)$ , где $k = \frac{d}{D}$	$\frac{\pi D^3}{32} \cdot (1 - k^4)$ , где $k = \frac{d}{D}$	$\frac{Q \cdot S^*}{J_{н.о.} \cdot b}$ , где $S^* = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^3 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3$ ; $b = D - d$
4 Тонкостенный контур 	$\pi \cdot D_{cp} \cdot \delta$	$\pi \cdot R_{cp}^3 \cdot \delta$	$\frac{\pi \cdot \delta \cdot D_{cp}^2}{4}$	$\frac{2 \cdot Q}{\pi \cdot \delta \cdot D_{cp}^2}$

Для прокатных профилей типа двутавра, швеллера, равнобоких и неравнобоких уголков значения их размеров и геометрических характеристик

$J_{н.о.}$ ,  $W_{н.о.}$  регламентируются ГОСТ и приводятся в таблице сортамента, например [1; 4].

Во многих случаях работающие на изгиб стержни должны быть рассчитаны не только на прочность, но и на *жесткость*. Под действием нагрузки, вызывающей плоский изгиб балки, ее первоначально прямая ось  $ABC$  искривляется, превращаясь в кривую линию, которая называется изогнутой (упругой) линией балки (штриховая линия  $AB_1C_1$  на рисунке 3). Вследствие искривления оси центры тяжести ее поперечных сечений получают линейные перемещения, перпендикулярные к первоначальной, недеформированной оси. Эти перемещения называются *прогибами*  $y$  сечений. Кроме того, поперечные сечения, оставаясь плоскими и нормальными к изогнутой линии балки (на основании гипотезы плоских сечений Я. Бернулли), поворачиваются вокруг нейтральной оси на *углы поворота*  $\theta$ . И прогибы, и углы поворота сечений переменны по длине. Так, например, для консоли на рисунке 3 они изменяются от нуля в заделке (сечении  $A$ ) до максимального значения на свободном конце (в сечении  $C$ ).

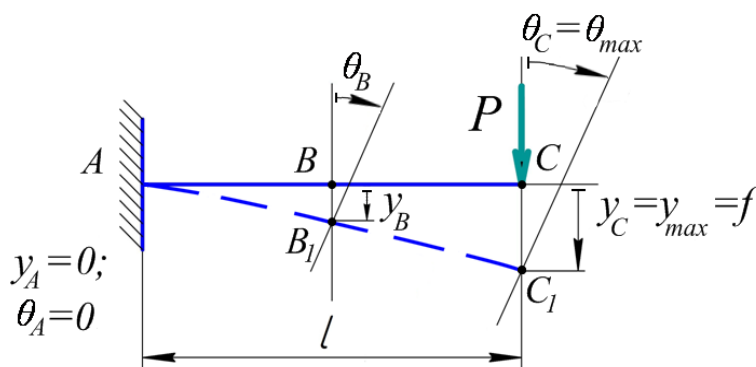


Рисунок 3 - Перемещения при изгибе

При расчете на жесткость максимальные перемещения  $max\delta$  (наибольший прогиб  $y_{max}$  принято называть *стрелой* прогиба -  $f$ ) сечений стержня сопоставляются с их допускаемыми величинами:

$$max\delta \leq [\delta], \quad (6)$$

где  $[\delta]$  – допускаемые значения перемещений, зависящие от назначения и условий эксплуатации элемента конструкции. Обычно допускаемую стрелу прогиба  $[f]$  указывают в долях пролета (межопорного расстояния  $l$ ) балки. Например, для валов и шпинделей металлорежущих станков допускается стрела прогиба  $[f] = (0,005...0,001)l$ . Для обеспечения нормальной работы подшипников скольжения и роликовых подшипников качения иногда ставится ограничение и



угол поворота опорных сечений. При этом допускаемый угол поворота  $[\theta]$  составляет в среднем 0,001 радиана.

Наибольшее применение в инженерной практике для определения перемещений при изгибе получили собственно интеграл О. Мора и интеграл Мора, вычисленный по правилу А.К. Верещагина.

Формула интеграла О. Мора для балок и рам, для которых обычно учитывается только изгибающий момент, имеет вид:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_p M_1}{EJ_{н.о.}} dx, \quad (7)$$

где  $\delta$  – искомое перемещение (прогиб  $y$  или угол поворота  $\theta$ );

$M_p$  – аналитическое выражение изгибающего момента в произвольном сечении балки от заданной нагрузки (для «грузового» состояния);

$M_1$  – аналитическое выражение изгибающего момента в произвольном сечении от единичной нагрузки (для «единичного» состояния);

$E$  – модуль продольной упругости материала стержня;

$EJ_{н.о.}$  – жесткость поперечного сечения балки при изгибе;

$n$  – число слагаемых, каждое из которых имеет свой закон изменения изгибающих моментов от заданной и единичной нагрузок.

Интегрирование по формуле (7) производится в пределах длины каждого слагаемого (участка), а суммирование – по всем участкам.

Единичная нагрузка прикладывается в том сечении и в том направлении, в котором определяется перемещение. Причем при вычислении *прогиба*  $y$  в качестве единичной нагрузки используется сосредоточенная безразмерная сила, равная единице, а при расчете *угла поворота*  $\theta$  – единичный сосредоточенный момент.

Если вычисленное перемещение получилось отрицательным, то это означает, что его действительное направление противоположно принятому направлению единичной нагрузки.

Для прямолинейных стержней постоянной жесткости, наиболее эффективным для вычисления перемещений является графоаналитический способ А.К. Верещагина. Данный способ называют также способом перемножения эпюр, так как вместо аналитических выражений моментов  $M_p$  и  $M_1$  используются их эпюры:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{\pm \omega M_c^I}{EJ_{н.о.}}, \quad (8)$$

где  $\omega$  – площадь эпюры изгибающего момента от заданной нагрузки в пределах рассматриваемого участка;  $M_c^I$  – ордината изгибающего момента от единичной нагрузки, взятая под центром тяжести площади  $\omega$  эпюры моментов от заданной нагрузки;

$n$  – число слагаемых, в пределах которых должны выполняться три условия:

- 1) жесткость балки должна быть постоянной;
- 2) эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_p$  должна быть расположена по одну сторону от оси эпюры, то есть быть однозначной;
- 3) эпюра изгибающих моментов от единичной нагрузки  $M_I$  должна очерчиваться одной прямой линией, без изломов, скачков.

Суммирование производится по всем  $n$  участкам. При этом для каждого слагаемого берется знак «плюс», когда обе эпюры моментов (грузовая и единичная) расположены по одну сторону осей эпюр, например - обе внизу. Знак «минус» - когда эпюры находятся по разные стороны от оси, например  $M_p$  – вверху, а  $M_I$  – внизу.

Площадь берется с той эпюры, порядок которой выше. Если на рассматриваемом участке обе эпюры  $M_p$  и  $M_I$  прямолинейны, то безразлично, на какой эпюре брать площадь  $\omega$ , а на какой – ординату  $M_c^I$ .

Таким образом, при нахождении перемещений по способу Верещагина необходимо:

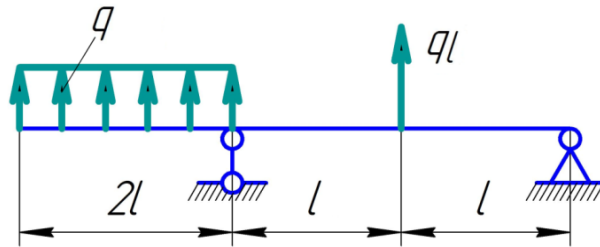
- 1) построить эпюру изгибающего момента от заданной нагрузки  $M_p$  (для двухопорной балки требуется сначала определить опорные реакции);
- 2) снять с балки всю заданную нагрузку и по направлению искомого перемещения приложить безразмерную единичную нагрузку (при нахождении прогиба – силу; угла поворота – момент) в сечении, перемещение которого определяется. Построить от нее соответствующую эпюру изгибающего момента  $M_I$  (при необходимости в расслоенном виде);
- 3) перемножить эпюры (грузовую  $M_p$  и единичную  $M_I$ ), то есть на одной эпюре вычислить площадь и найти ее центр тяжести, а на другой – определить момент под этим центром.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] : учебник для технических вузов / В. И. Феодосьев. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 592 с.
- 2 Ицкович, Г. М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов [Текст] : учебное пособие для вузов / Г. М. Ицкович, Л. С. Минин, А. И. Винокуров ; под ред. Л. С. Минина. – М. : Высшая школа, 2001. – 592 с.
- 3 Ицкович, Г. М. Сопротивление материалов [Текст] : учебник для учащихся машиностроительных техникумов / Г. М. Ицкович. – М. : Высшая школа, 1986. – 352 с.
- 4 Костенко, Н. А. Сопротивление материалов [Текст] : учебное пособие / Н. А. Костенко, С. В. Балясникова, Ю. В. Волошановская [и др.] ; под ред. Н. А. Костенко. – М. : Высшая школа, 2000. – 430 с.
- 5 Сапрыкин, В. Н. Техническая механика [Текст] : учебник / В. Н. Сапрыкин. – М. : ЭКСМО, 2007. – 560 с.
- 6 Бубнов, В. А. Определение перемещений поперечных сечений балок при изгибе [Текст] : методические указания по сопротивлению материалов для индивидуальной работы / В. А. Бубнов, С. Г. Тютрин. – Курган : Изд-во Курганского гос. ун-та, 1995. – 28 с.
- 7 Костенко, С. Г. Расчеты на прочность элементов машиностроительных конструкций при изгибе и сложном сопротивлении [Текст] : учебное пособие / С. Г. Костенко. – Курган : Изд-во Курганского гос. ун-та, 2005. – 106 с.
- 8 Тютрин, С. Г. Построение эпюр внутренних силовых факторов [Текст] : учебное пособие / С. Г. Тютрин. – Курган : Изд-во Курганского гос. ун-та, 1997. – 51 с.
- 9 Тютрин, С. Г. Геометрические характеристики плоских сечений и расчеты на прочность [Текст] : учебное пособие / С. Г. Тютрин. – Курган : Изд-во Курганского гос. ун-та, 2000. – 70 с.
- 10 Коротовских, В. К. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии и кручении [Текст] : задания и методические указания к рубежному контролю №1 / В. К. Коротовских. – Курган : Изд-во Курганского гос. ун-та, 2013. – 32 с.
- 11 Сопротивление материалов. Электронный учебный курс для студентов очной и заочной формы обучения. URL : [www.soprotmat.ru](http://www.soprotmat.ru).
- 12 Электронный ресурс. URL : [www.mysopromat.ru](http://www.mysopromat.ru).
- 13 Электронная библиотека. URL : [www.twirpx.com/files/mechanics/sopromat/](http://www.twirpx.com/files/mechanics/sopromat/).
- 14 Сайт для студентов технических вузов. URL : [www.isopromat.ru](http://www.isopromat.ru).

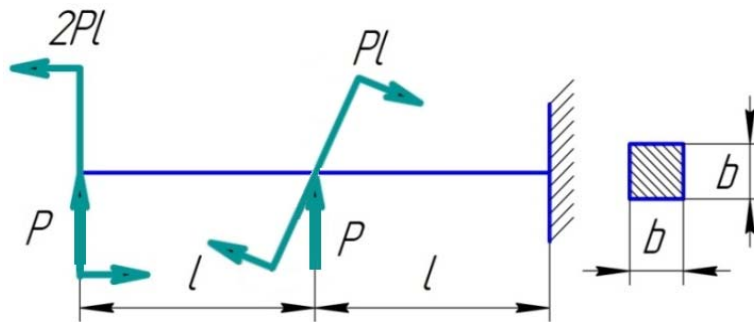
## Вариант 1

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти величину максимального изгибающего момента в опасном сечении.



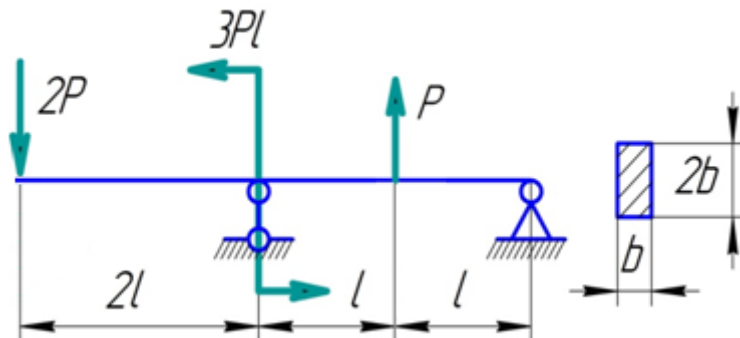
**Задача №2** Вычислить грузоподъемность (величину допускаемой силы  $[P]$ ) стальной консольной балки квадратного поперечного сечения.

*Задано:* размер стороны сечения  $b = 10$  см; длина  $l = 0,5$  м. Допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 200$  МПа.



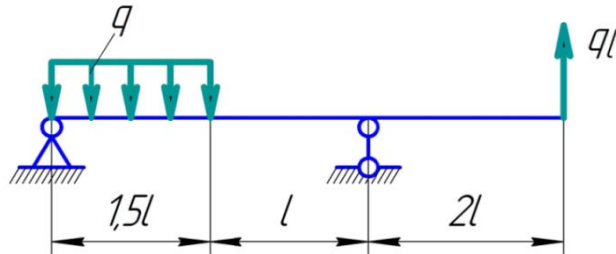
**Задача №3** Определить для двухопорной балки необходимый размер  $b$  прямоугольного поперечного сечения с заданным соотношением сторон. При найденных размерах сечения вычислить угол поворота в шарнирно-неподвижной опоре.

*Исходные данные:* величина силы  $P = 13$  кН; длина  $l = 1$  м. Материал стержня – сталь; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа; модуль продольной упругости  $E = 200$  ГПа.



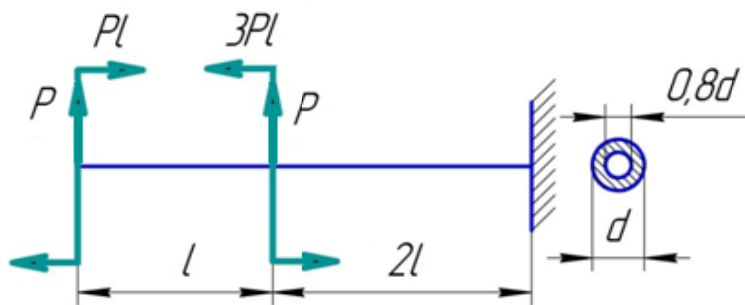
## Вариант 2

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти опасное сечение и величину максимального изгибающего момента в нем.



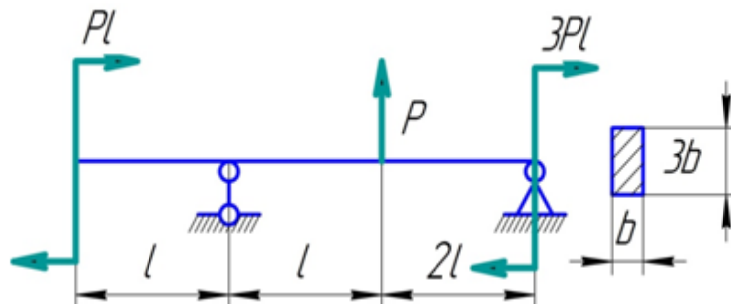
**Задача №2** Определить необходимый диаметр  $d$  стальной консольной балки кольцевого (трубчатого) сечения с заданным соотношением диаметров.

*Задано:* сила  $P = 7$  кН; длина  $l = 0,5$  м. Допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 180$  МПа.



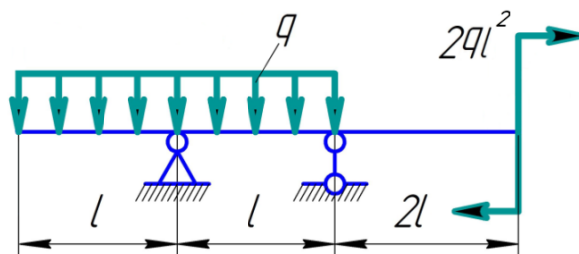
**Задача №3** Проверить прочность двухопорной балки прямоугольного поперечного сечения с заданным соотношением сторон. Вычислить прогиб поперечного сечения балки, в котором применен сосредоточенный момент  $Pl$ .

*Исходные данные:* сила  $P = 15$  кН; размер стороны сечения  $b = 5$  см; длина  $l = 0,8$  м. Материал балки - алюминий; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 100$  МПа; модуль продольной упругости  $E = 70$  ГПа.



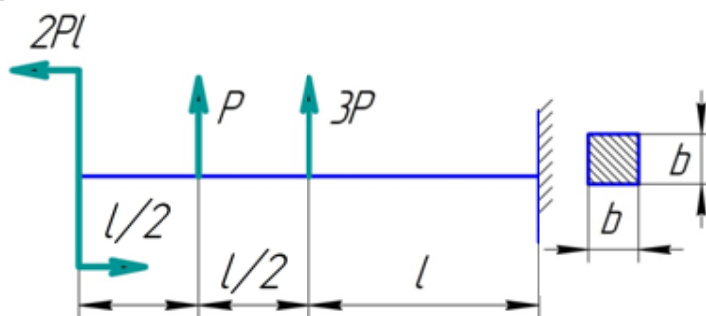
### Вариант 3

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти опасное сечение и величину максимального изгибающего момента в нем.



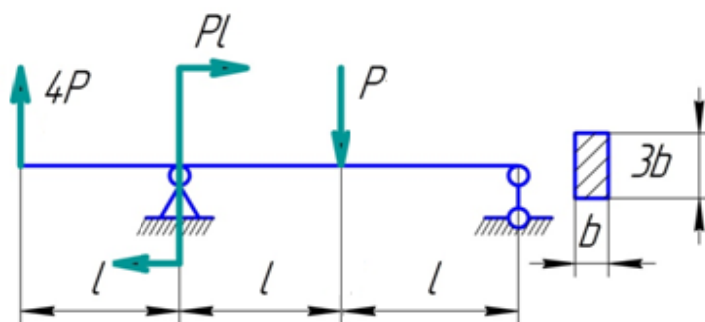
**Задача №2** Вычислить грузоподъемность (величину допускаемой силы  $[P]$ ) стальной консольной балки квадратного поперечного сечения.

*Задано:* сторона сечения  $b = 15$  см; длина  $l = 1,5$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 200$  МПа.



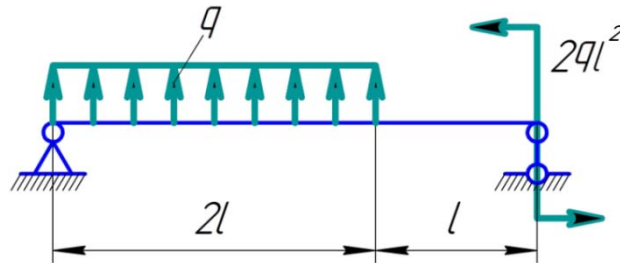
**Задача №3** Для двухопорной балки требуется определить необходимый размер  $b$  прямоугольного поперечного сечения с заданным соотношением сторон. При найденной величине размера вычислить угол поворота среднего сечения пролета балки.

*Исходные данные:* сила  $P = 15$  кН; длина  $l = 0,9$  м; материал – сталь (модуль продольной упругости  $E = 200$  ГПа); допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа.



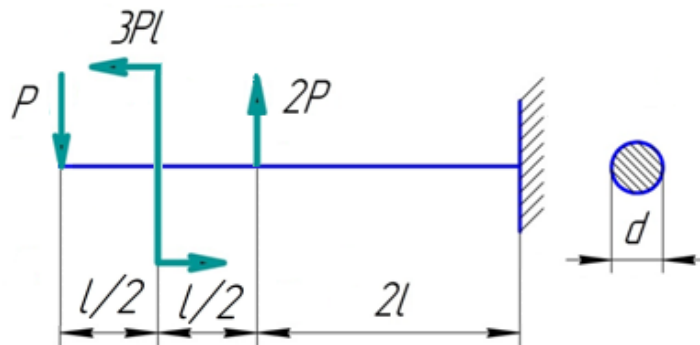
## Вариант 4

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти опасное сечение и величину максимального изгибающего момента в нем.



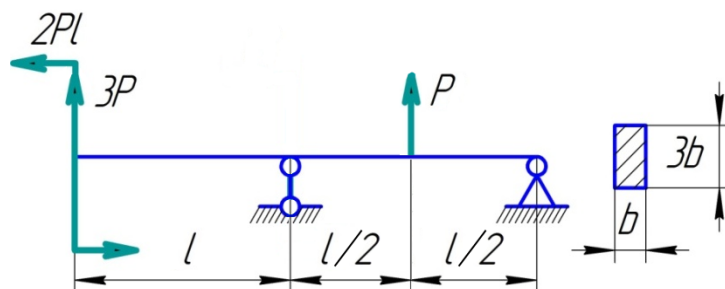
**Задача №2** Проверить прочность стальной консольной балки круглого поперечного сечения.

*Задано:* сила  $P = 11$  кН; диаметр сечения  $d = 15$  см; длина  $l = 0,5$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 200$  МПа.



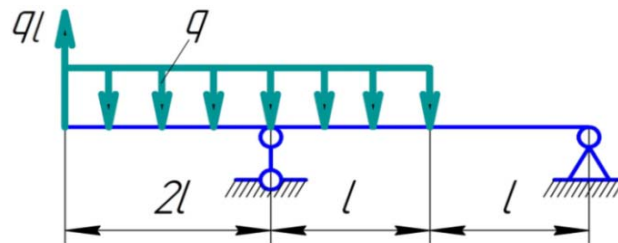
**Задача №3** Для двухопорной балки требуется определить необходимый размер  $b$  прямоугольного поперечного сечения с заданным соотношением сторон. При найденном размере вычислить прогиб среднего сечения пролета балки.

*Исходные данные:* сила  $P = 12$  кН; длина  $l = 1$  м; материал стержня – алюминий (модуль продольной упругости  $E = 70$  ГПа); допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 80$  МПа.



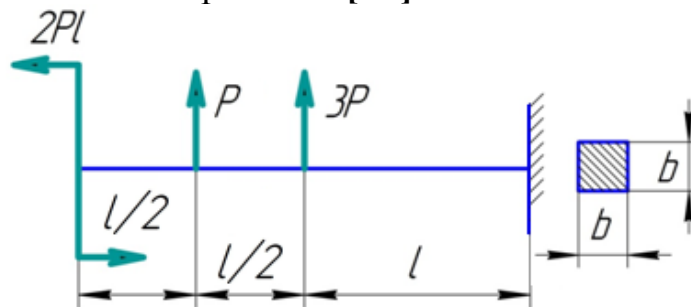
## Вариант 5

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Найти величину максимального изгибающего момента в опасном сечении. Решение и эпюры представить в общем виде в долях  $ql$  и  $ql^2$ .



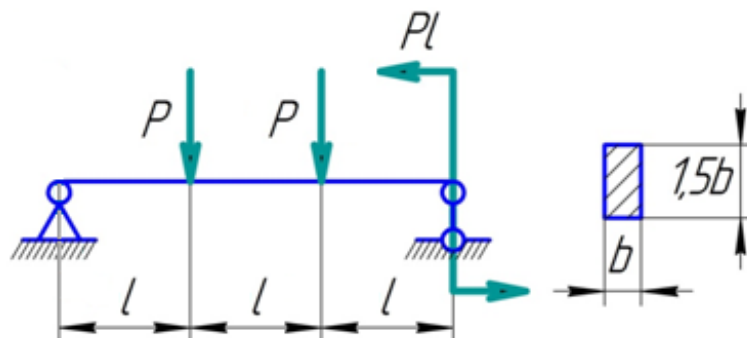
**Задача №2** Определить грузоподъемность (величину допускаемой силы  $[P]$ ) стальной консольной балки квадратного поперечного сечения.

*Задано:* размер поперечного сечения  $b = 10$  см; длина  $l = 0,6$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 240$  МПа.



**Задача №3** Определить для стальной двухопорной балки необходимый размер  $b$  прямоугольного поперечного сечения с заданным соотношением сторон. При найденных размерах вычислить угол поворота сечения в шарнирно-неподвижной опоре.

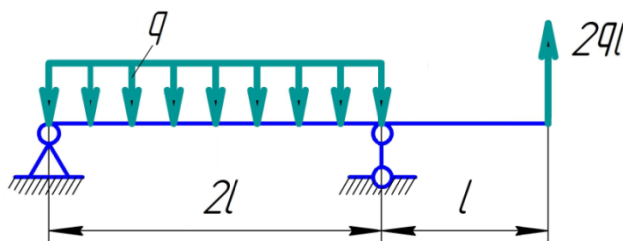
*Исходные данные:* величина силы  $P = 10$  кН; длина  $l = 1,5$  м. Допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 180$  МПа; модуль продольной упругости стали  $E = 200$  ГПа.





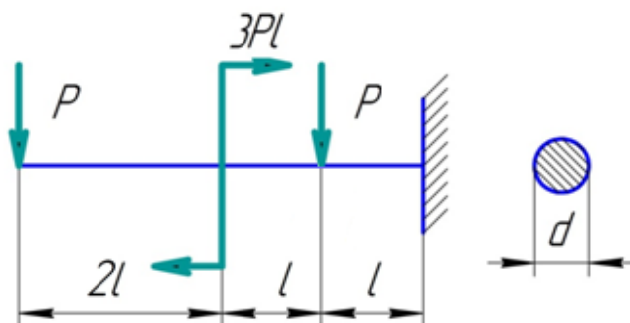
## Вариант 6

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти опасное сечение и величину максимального изгибающего момента в нем.



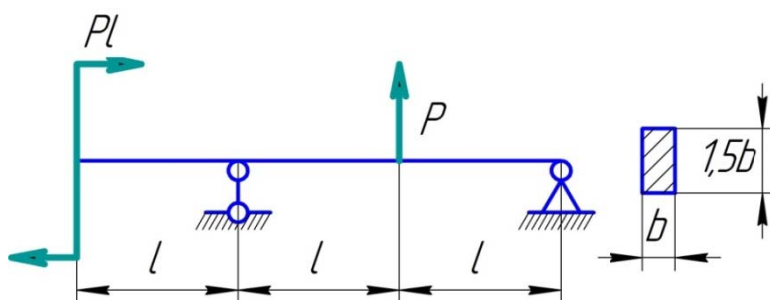
**Задача №2** Определить необходимый диаметр  $d$  стальной консольной балки круглого сечения.

*Задано:* сила  $P = 17$  кН; длина  $l = 0,4$  м; допустимое нормальное напряжение  $[\sigma] = 200$  МПа.



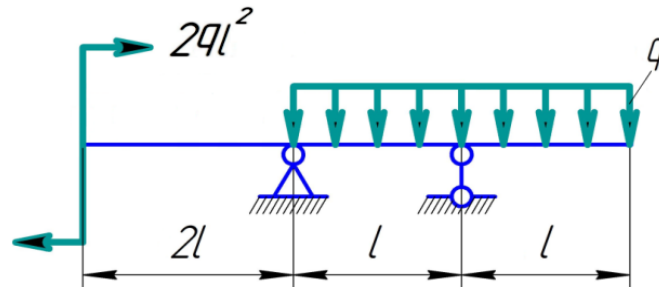
**Задача №3** Проверить прочность двухопорной балки прямоугольного поперечного сечения с заданным соотношением сторон. Определить прогиб среднего сечения пролета балки, в котором приложена сила  $P$ .

*Исходные данные:* величина силы  $P = 15$  кН; размер сечения  $b = 5$  см; длина  $l = 1$  м; материал стержня – дюралюминий с модулем продольной упругости  $E = 71$  ГПа; допустимое нормальное напряжение  $[\sigma] = 100$  МПа.



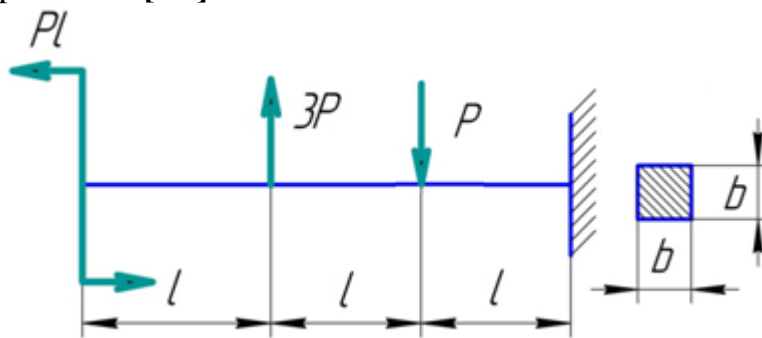
## Вариант 7

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти опасное сечение и величину максимального изгибающего момента в нем.



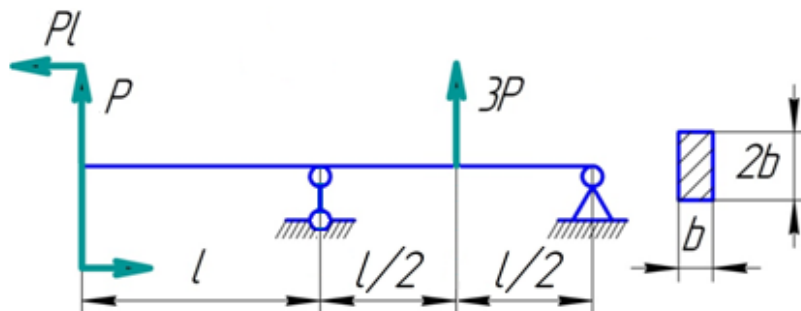
**Задача №2** Определить грузоподъемность (величину допускаемой силы  $[P]$ ) стальной консольной балки квадратного поперечного сечения.

*Задано:* размер стороны сечения  $b = 10$  см; длина  $l = 1,5$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 220$  МПа.



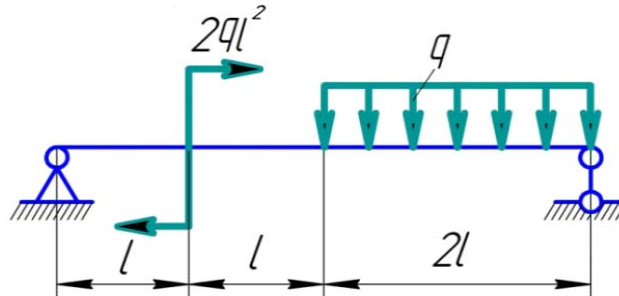
**Задача №3** Для стальной двухопорной балки требуется определить необходимый размер  $b$  прямоугольного поперечного сечения. При найденном размере вычислить угол поворота сечения в шарнирно-неподвижной опоре.

*Исходные данные:* сосредоточенная сила  $P = 10$  кН; длина  $l = 0,6$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 200$  МПа; модуль продольной упругости  $E = 200$  ГПа.



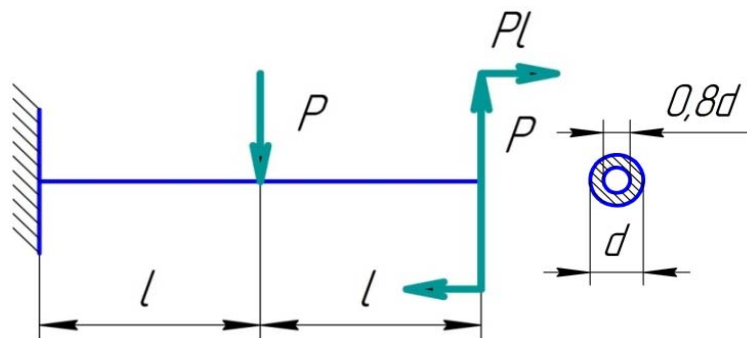
## Вариант 8

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти опасное сечение и величину максимального изгибающего момента в нем.



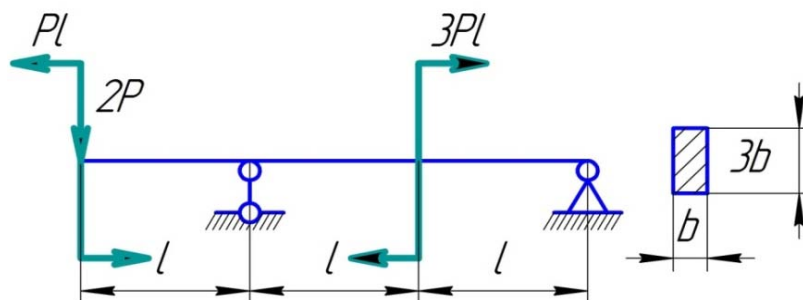
**Задача №2** Проверить прочность консольной балки кольцевого (трубчатого) поперечного сечения с заданным соотношением диаметров.

*Задано:* сила  $P = 12$  кН; диаметр  $d = 12$  см; длина  $l = 0,5$  м; материал стержня - сталь; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа.



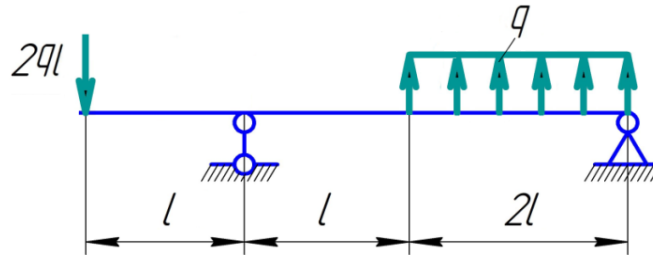
**Задача №3** Для двухопорной балки требуется определить необходимый размер  $b$  прямоугольного поперечного сечения. При найденном размере вычислить прогиб сечения, в котором приложена сосредоточенная сила  $2P$ .

*Исходные данные:* сосредоточенная сила  $P = 9$  кН; длина  $l = 1$  м; материал балки – алюминий (модуль продольной упругости  $E = 70$  ГПа); допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 80$  МПа.



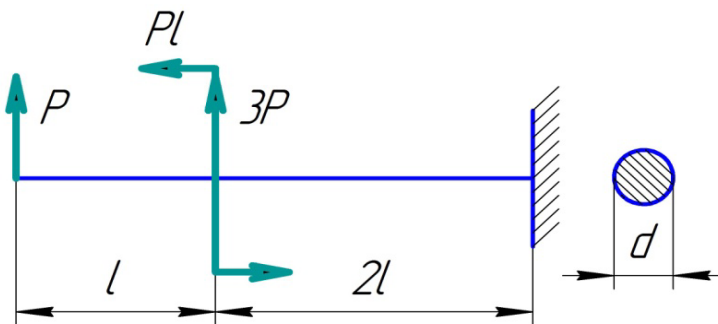
## Вариант 9

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти величину максимального изгибающего момента в опасном сечении.



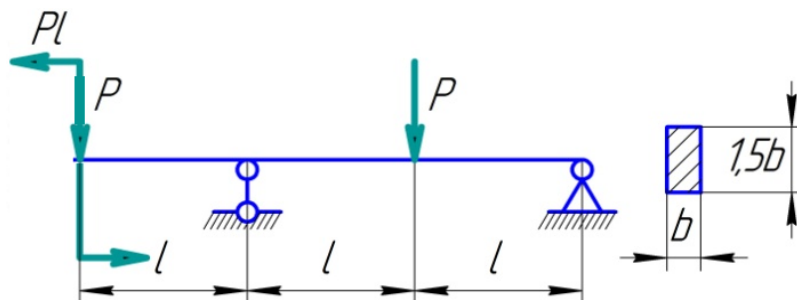
**Задача №2** Вычислить грузоподъемность (величину допускаемой нагрузки  $[P]$ ) стальной консольной балки круглого поперечного сечения.

*Задано:* диаметр сечения  $d = 10$  см; длина  $l = 0,5$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 300$  МПа.



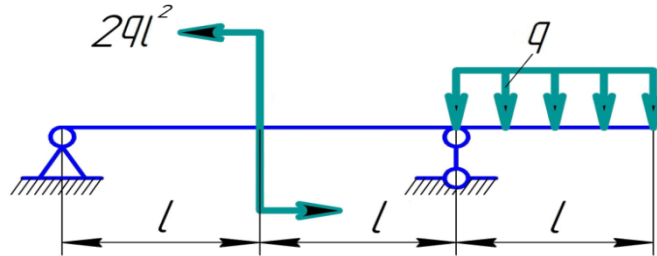
**Задача №3** Определить для двухопорной балки необходимый размер  $b$  прямоугольного поперечного сечения с заданным соотношением сторон. При найденной величине размера вычислить прогиб свободного торцевого сечения стержня (в котором приложены сила и момент).

*Исходные данные:* сила  $P = 13$  кН; длина  $l = 0,6$  м; материал стержня – бронза (модуль продольной упругости  $E = 110$  ГПа); допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 80$  МПа.



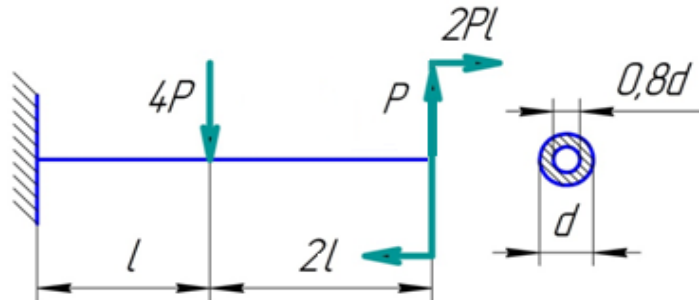
## Вариант 10

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти опасное сечение и величину максимального изгибающего момента.



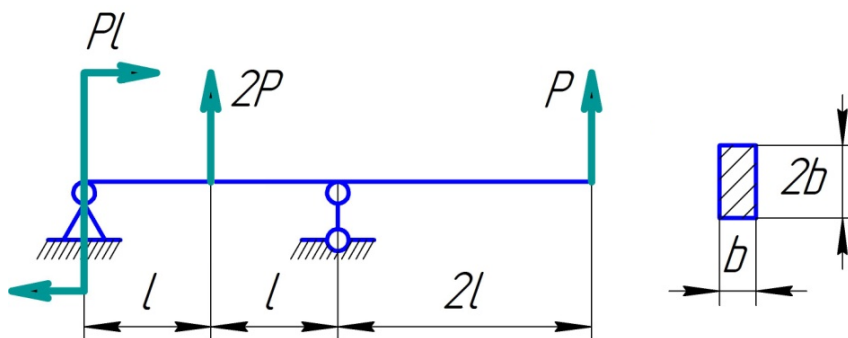
**Задача №2** Определить необходимый диаметр  $d$  стальной консольной балки кольцевого (трубчатого) сечения с заданным соотношением диаметров.

*Задано:* сила  $P = 7$  кН; длина  $l = 0,5$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 180$  МПа.



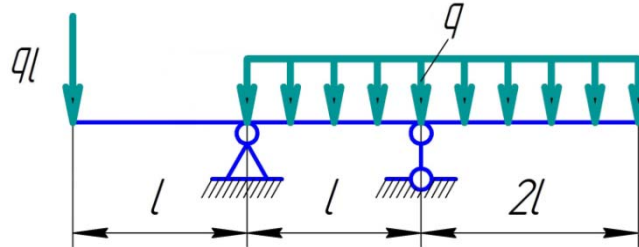
**Задача №3** Проверить прочность двухопорной балки прямоугольного поперечного сечения. Вычислить прогиб торцевого сечения стержня, в котором приложена сила  $P$ .

*Исходные данные:* сила  $P = 8$  кН; размер  $b = 6$  см; длина  $l = 1$  м; материал стержня – бронза (модуль продольной упругости  $E = 110$  ГПа); допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 80$  МПа.



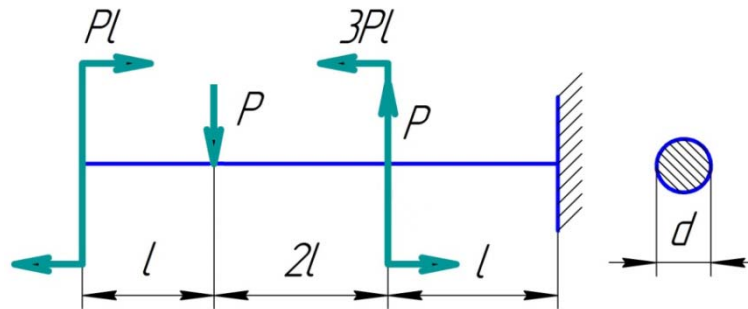
## Вариант 11

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Найти величину максимального изгибающего момента в опасном сечении. Решение представить в общем виде в долях  $ql$  и  $ql^2$ .



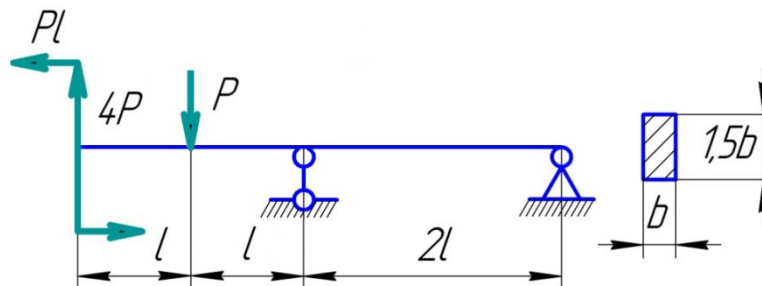
**Задача №2** Вычислить грузоподъемность (величину допускаемой силы  $[P]$ ) стальной консольной балки круглого поперечного сечения

Задано: диаметр сечения  $d = 15$  см; длина  $l = 1,5$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 240$  МПа.



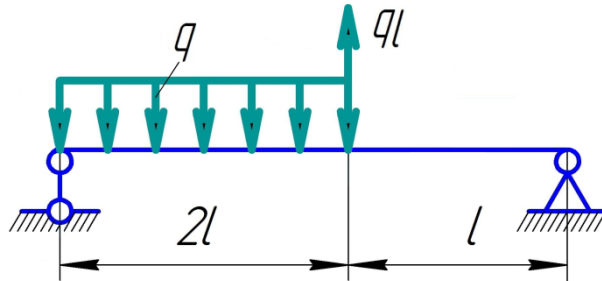
**Задача №3** Для двухопорной балки требуется определить необходимый размер  $b$  прямоугольного поперечного сечения. При найденном размере вычислить угол поворота сечения балки, в котором приложена сила  $4P$  и пара  $Pl$ .

Исходные данные: сила  $P = 12$  кН; длина равна  $l = 0,75$  м. Материал стержня - сталь; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 200$  МПа; модуль продольной упругости  $E = 200$  ГПа.



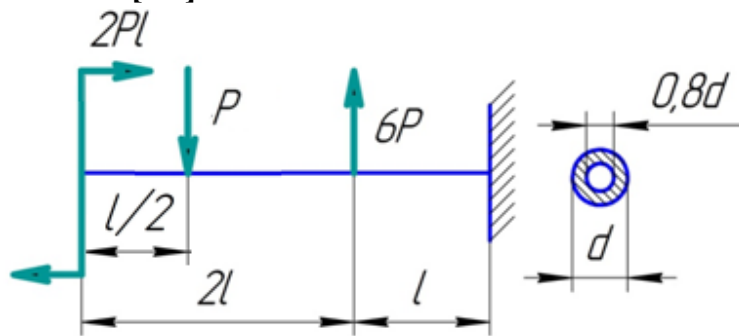
## Вариант 12

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти опасное сечение и величину максимального изгибающего момента в нем.



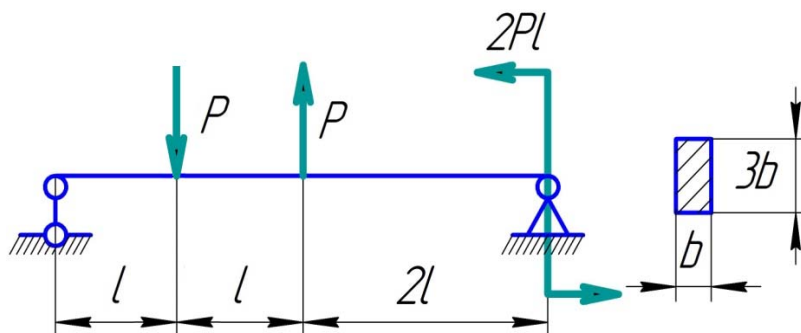
**Задача №2** Проверить прочность стальной консольной балки кольцевого (трубчатого) поперечного сечения.

*Задано:* сила  $P = 15$  кН; диаметр  $d = 10$  см; длина  $l = 0,5$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа.



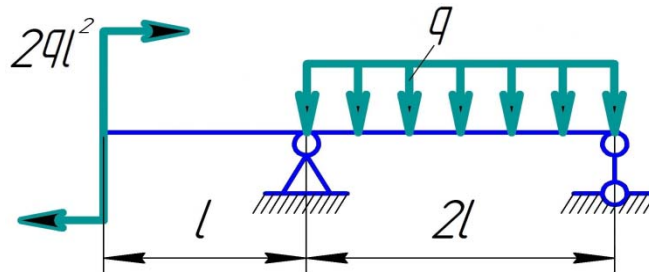
**Задача №3** Для двухопорной балки требуется определить необходимый размер  $b$  прямоугольного поперечного сечения. При найденном размере вычислить угол поворота сечения в шарнирно-подвижной опоре.

*Исходные данные:* сила  $P = 14$  кН; длина  $l = 1$  м; материал стержня – сталь; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 180$  МПа; модуль продольной упругости  $E = 200$  ГПа.



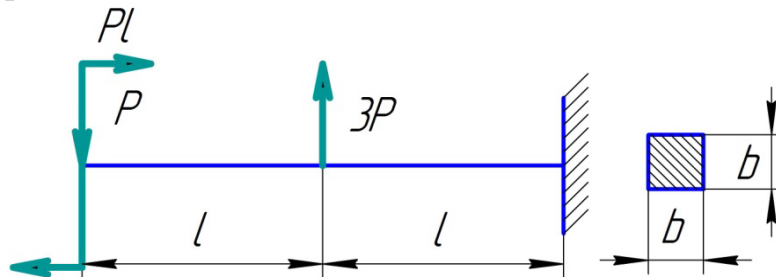
### Вариант 13

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Найти величину максимального изгибающего момента в опасном сечении. Решение представить в общем виде в долях  $ql$  и  $ql^2$ .



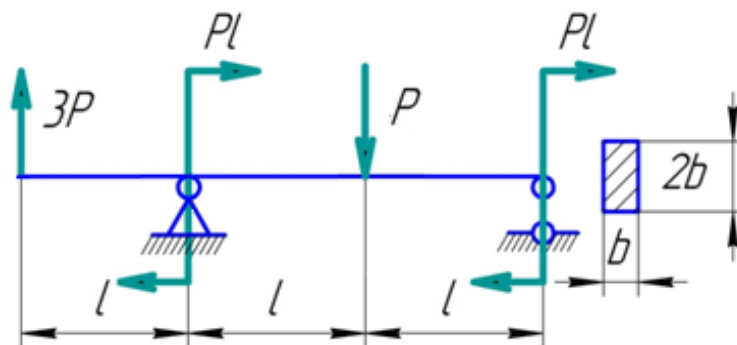
**Задача №2** Определить грузоподъемность (величину допускаемой силы  $[P]$ ) стальной консольной балки квадратного сечения.

*Задано:* размер стороны квадрата  $b = 10$  см; длина  $l = 0,5$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 200$  МПа.



**Задача №3** Определить для двухопорной балки необходимый размер  $b$  прямоугольного поперечного сечения с заданным соотношением сторон. При найденной величине размера вычислить прогиб среднего сечения пролета балки.

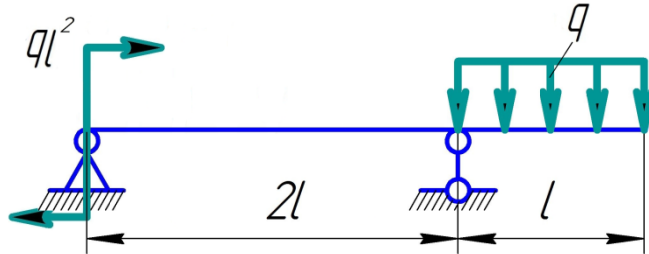
*Исходные данные:* сила  $P = 15$  кН; длина  $l = 1$  м; материал стержня – титан (модуль упругости  $E = 120$  ГПа); допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 300$  МПа.





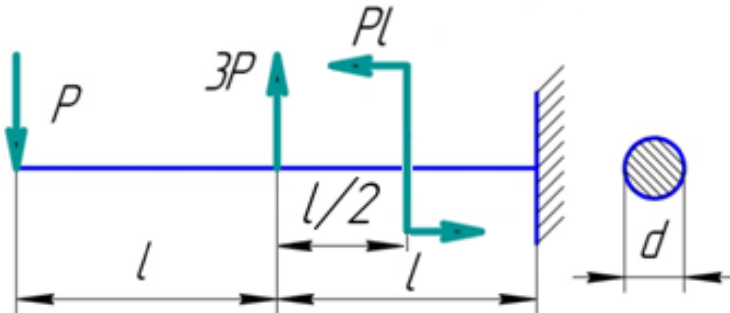
## Вариант 14

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти опасное сечение и величину максимального изгибающего момента в нем.



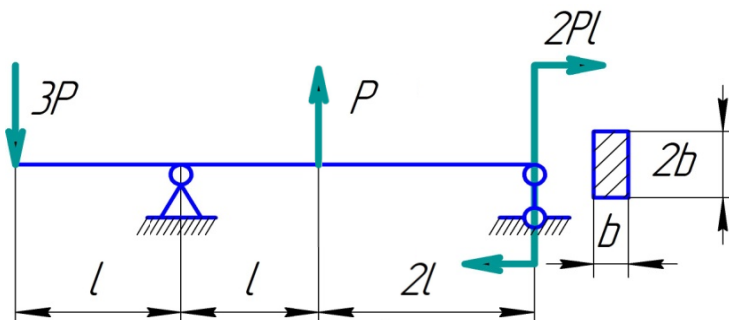
**Задача №2** Определить необходимый диаметр  $d$  стальной консольной балки круглого поперечного сечения.

*Задано:* сила  $P = 15$  кН; длина  $l = 0,5$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 180$  МПа.



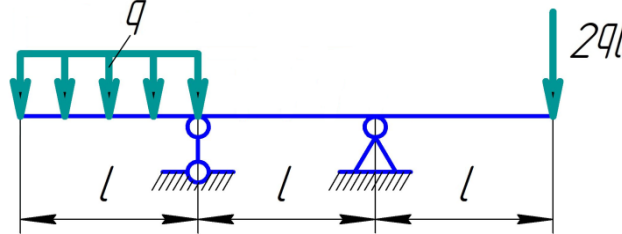
**Задача №3** Проверить прочность двухопорной балки прямоугольного поперечного сечения с заданным соотношением сторон. Определить угол поворота сечения в шарнирно-неподвижной опоре.

*Исходные данные:* сила  $P = 13$  кН; размер  $b = 3$  см; длина  $l = 1$  м; материал стержня – алюминий (модуль продольной упругости  $E = 70$  ГПа); допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 80$  МПа.



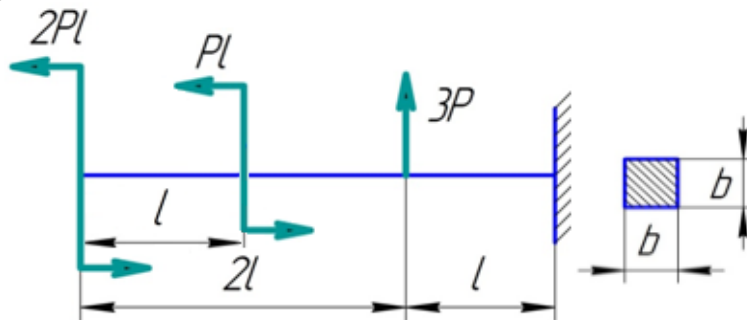
## Вариант 15

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Найти величину максимального изгибающего момента в опасном сечении. Решение представить в общем виде в долях  $ql$  и  $ql^2$ .



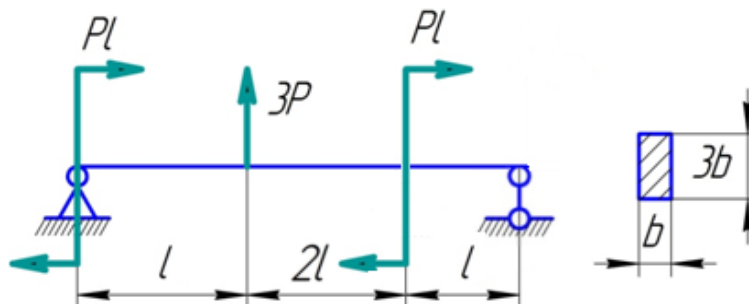
**Задача №2** Определить грузоподъемность (величину допускаемой силы  $[P]$ ) стальной консольной балки квадратного поперечного сечения.

*Задано:* размер стороны квадрата  $b = 15$  см; длина  $l = 1,2$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 200$  МПа.



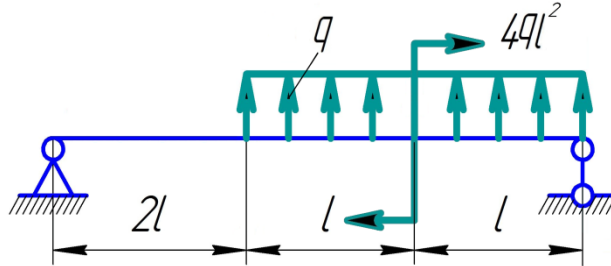
**Задача №3** Для двухопорной балки требуется определить необходимый размер  $b$  прямоугольного поперечного сечения. При найденной величине размера вычислить прогиб сечения в котором приложена сосредоточенная сила  $3P$ .

*Исходные данные:* сила  $P = 8$  кН; длина  $l = 1$  м; материал стержня – бронза (модуль продольной упругости  $E = 110$  ГПа); допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 80$  МПа.



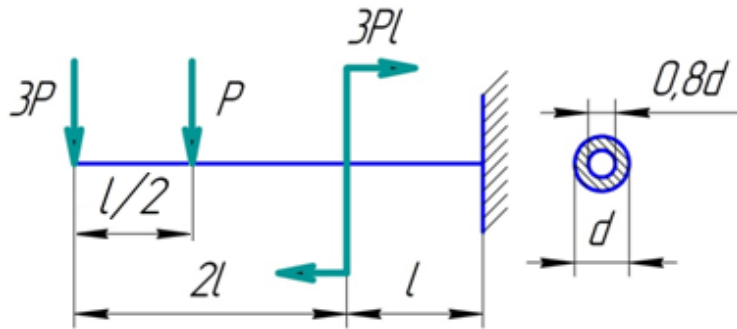
## Вариант 16

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти опасное сечение и величину максимального изгибающего момента в нем.



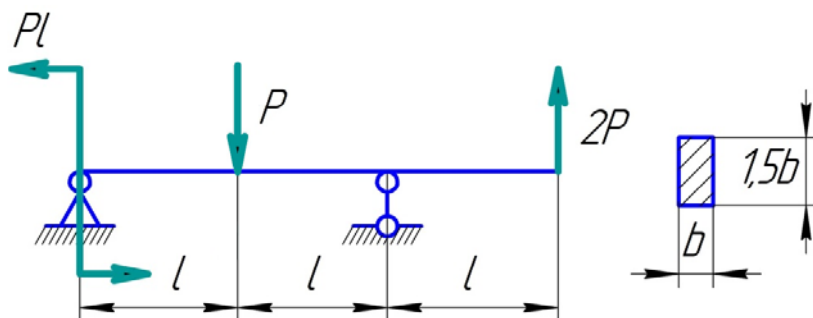
**Задача №2** Проверить прочность стальной консольной балки кольцевого (трубчатого) поперечного сечения с заданным соотношением диаметров.

Дано: сила  $P = 16$  кН; диаметр  $d = 15$  см; длина  $l = 0,5$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 200$  МПа.



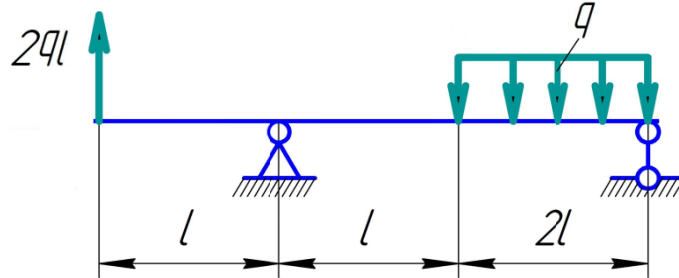
**Задача №3** Для двухопорной балки требуется определить необходимый размер  $b$  прямоугольного поперечного сечения. При найденном размере вычислить угол поворота среднего сечения пролета балки (в котором приложена сила  $P$ ).

Исходные данные: сила  $P = 17$  кН; длина  $l = 0,6$  м; материал – сталь (модуль продольной упругости  $E = 200$  ГПа); допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 180$  МПа.



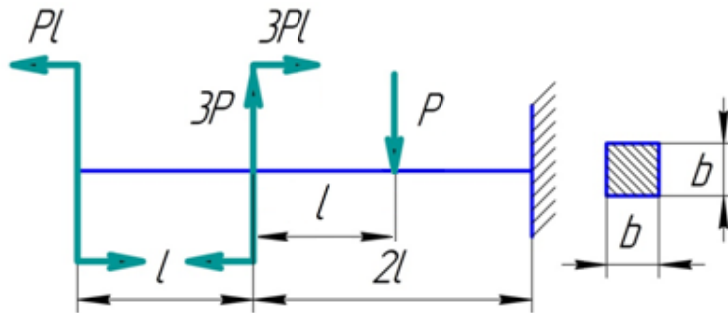
## Вариант 17

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти опасное сечение и величину максимального изгибающего момента в нем.



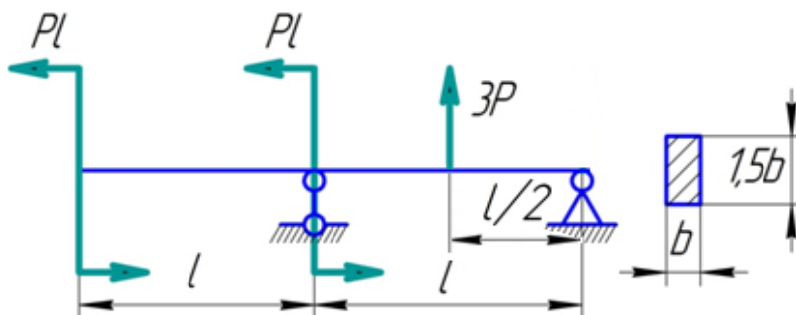
**Задача №2** Определить грузоподъемность (величину допускаемой силы  $[P]$ ) стальной консольной балки квадратного сечения.

*Задано:* размер стороны квадрата  $b = 10$  см; длина  $l = 0,5$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 200$  МПа.



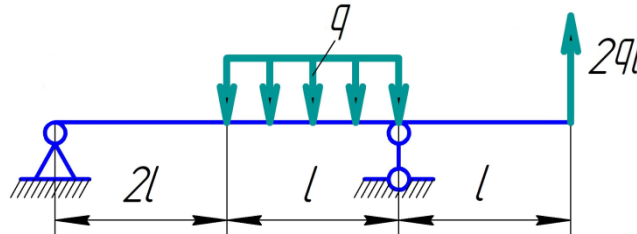
**Задача №3** Определить для двухопорной балки необходимый размер  $b$  прямоугольного поперечного сечения с заданным соотношением сторон. При найденной величине размера вычислить прогиб среднего сечения пролета балки, в котором приложена сила  $3P$ .

*Исходные данные:* сила  $P = 13$  кН; длина  $l = 0,7$  м. Материал стержня – латунь (модуль продольной упругости  $E = 100$  ГПа); допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 60$  МПа.



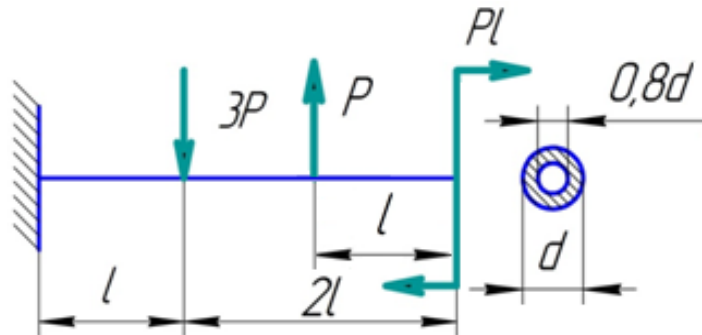
## Вариант 18

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти опасное сечение и величину максимального изгибающего момента в нем.



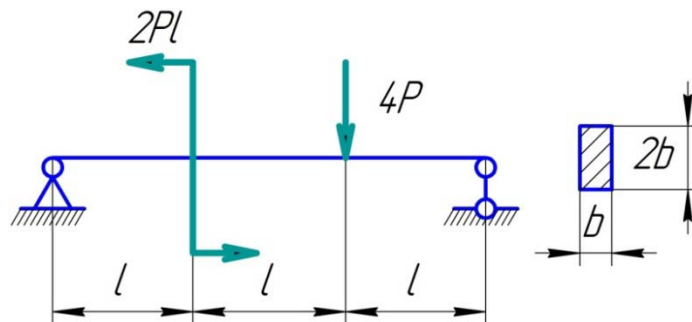
**Задача №2** Определить необходимый размер  $b$  стальной консольной балки кольцевого (трубчатого) поперечного сечения с заданным соотношением диаметров.

*Задано:* сила  $P = 16$  кН; длина  $l = 0,5$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 180$  МПа.



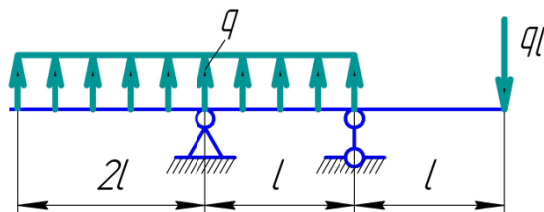
**Задача №3** Проверить прочность двухопорной балки прямоугольного поперечного сечения с заданным соотношением сторон. При найденной величине размера вычислить угол поворота сечения в шарнирно-неподвижной опоре.

*Исходные данные:* сила  $P = 12$  кН; размер стороны сечения  $b = 5$  см; длина  $l = 0,8$  м; материал – сталь (модуль упругости  $E = 200$  ГПа); допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа.



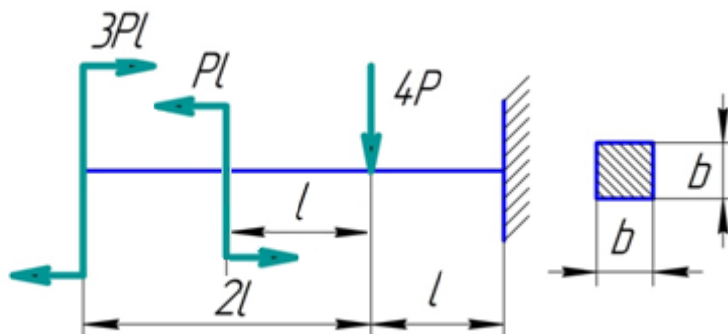
## Вариант 19

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти опасное сечение и величину максимального изгибающего момента в нем.



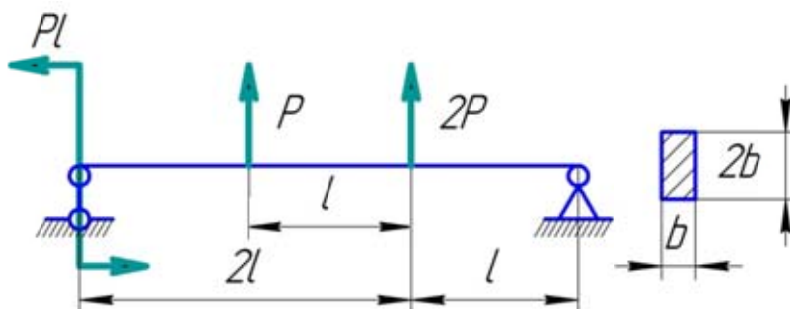
**Задача №2** Определить грузоподъемность (величину допускаемой силы  $[P]$ ) консольной балки квадратного поперечного сечения.

*Задано:* размер стороны квадрата  $b = 15$  см; длина  $l = 1,5$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 200$  МПа.



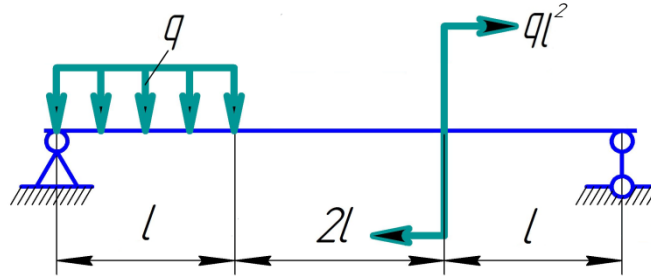
**Задача №3** Для двухопорной балки требуется определить необходимый размер  $b$  прямоугольного поперечного сечения с заданным соотношением сторон. При полученной величине размера найти прогиб сечения балки, в котором приложена сила  $2P$ .

*Исходные данные:* сила  $P = 12$  кН; длина  $l = 0,9$  м; материал стержня – бронза (модуль продольной упругости  $E = 110$  ГПа); допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 80$  МПа.



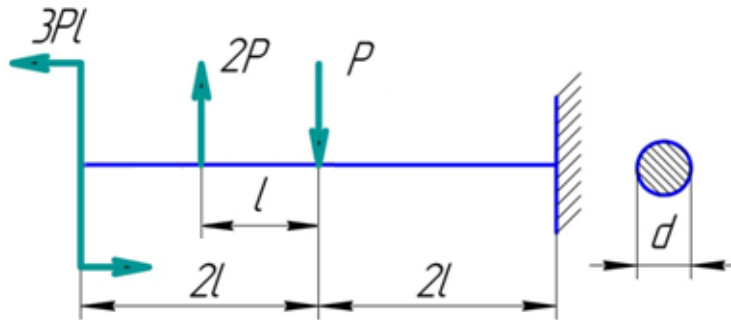
## Вариант 20

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти опасное сечение и величину максимального изгибающего момента в нем.



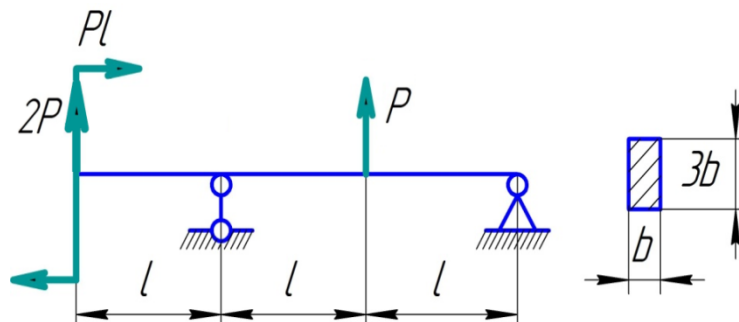
**Задача №2** Проверить прочность стальной консольной балки круглого поперечного сечения.

*Задано:* сила  $P = 18$  кН; диаметр  $d = 12$  см; длина  $l = 0,7$  м; допустимое нормальное напряжение  $[\sigma] = 200$  МПа.



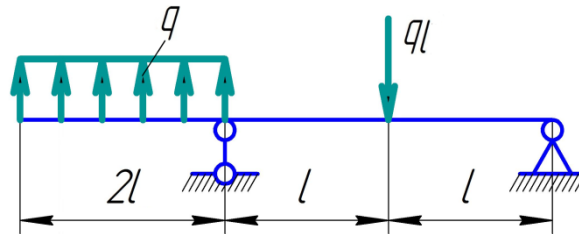
**Задача №3** Для двухопорной балки требуется определить необходимый размер  $b$  прямоугольного поперечного сечения с заданным соотношением сторон. Найти угол поворота среднего сечения пролета балки (сечения, где приложена сосредоточенная сила  $P$ ).

*Исходные данные:* сила  $P = 20$  кН; длина  $l = 0,6$  м; материал стержня – алюминий (модуль продольной упругости  $E = 70$  ГПа); допустимое нормальное напряжение  $[\sigma] = 80$  МПа.



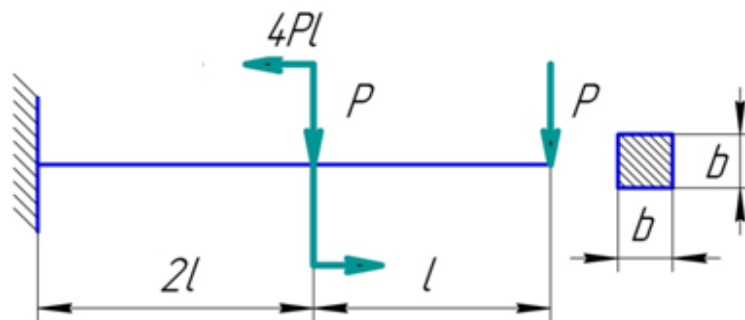
## Вариант 21

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти опасное сечение и величину максимального изгибающего момента в нем.



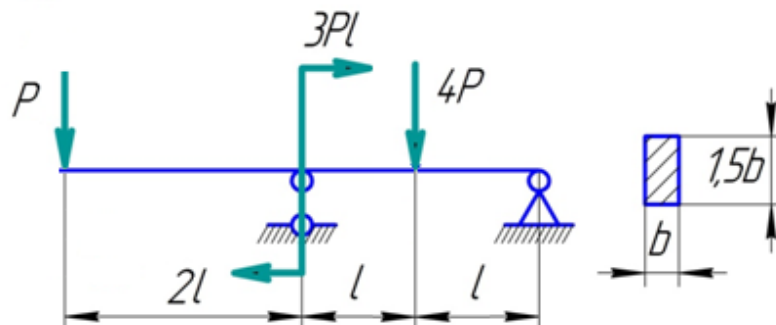
**Задача №2** Определить грузоподъемность (величину допускаемой нагрузки  $[P]$ ) стальной консольной балки квадратного сечения.

*Задано:* размер стороны квадрата  $b = 10$  см; длина  $l = 0,5$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 200$  МПа.



**Задача №3** Определить для двухопорной балки необходимый размер  $b$  прямоугольного поперечного сечения с заданным соотношением сторон. При найденной величине размера вычислить прогиб того сечения, где приложена сила  $P$ .

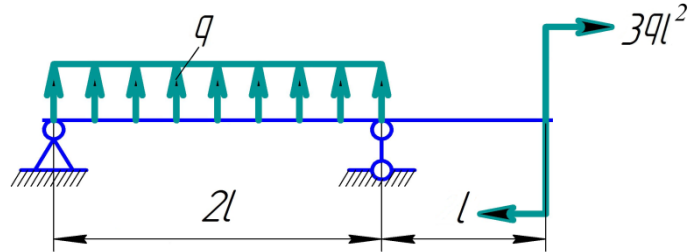
*Исходные данные:* сила  $P = 14$  кН; длина  $l = 1,2$  м; материал – сталь (модуль продольной упругости  $E = 200$  ГПа); допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа.





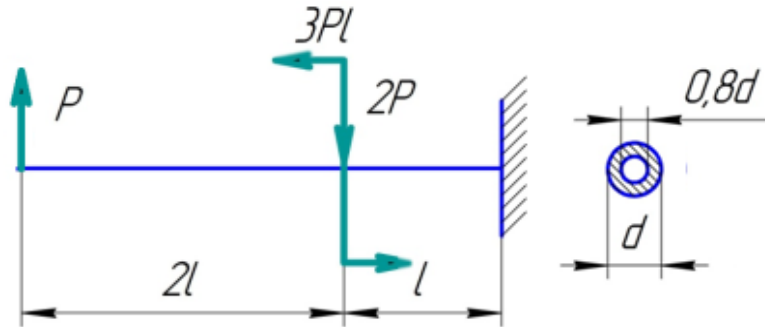
## Вариант 22

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти опасное сечение и величину максимального изгибающего момента в нем.



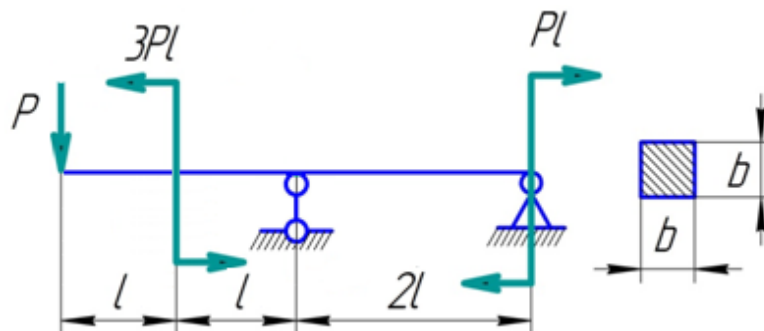
**Задача №2** Определить необходимый диаметр  $d$  стальной консольной балки кольцевого поперечного сечения с заданным соотношением диаметров.

*Задано:* сила  $P = 17$  кН; длина  $l = 0,5$  м; допустимое нормальное напряжение  $[\sigma] = 180$  МПа.



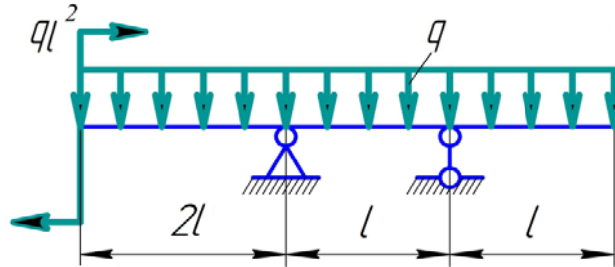
**Задача №3** Проверить прочность двухопорной балки квадратного поперечного сечения. Определить прогиб свободного торцевого сечения стержня (сечения, в котором приложена сила  $P$ ).

*Исходные данные:* сосредоточенная сила  $P = 17$  кН; сторона квадрата  $b = 5$  см; длина  $l = 1$  м; материал стержня – бронза (модуль продольной упругости  $E = 110$  ГПа); допустимое нормальное напряжение  $[\sigma] = 80$  МПа.



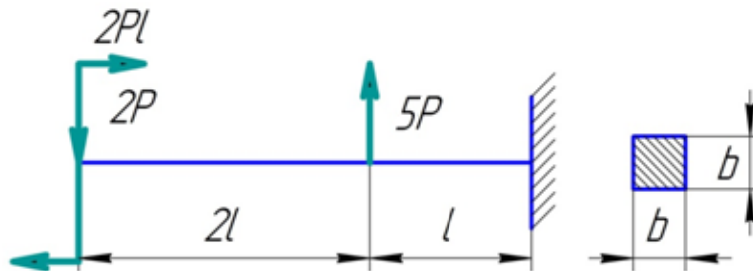
## Вариант 23

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти опасное сечение и величину максимального изгибающего момента в нем.



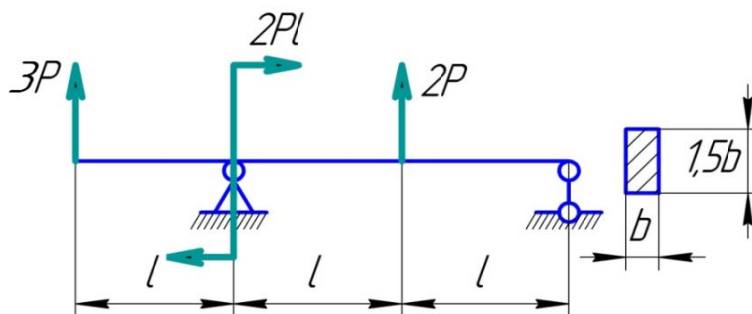
**Задача №2** Определить грузоподъемность (величину допускаемой нагрузки  $[P]$ ) стальной консольной балки квадратного сечения.

*Задано:* размер стороны сечения  $b = 14$  см; длина  $l = 1,6$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 200$  МПа.



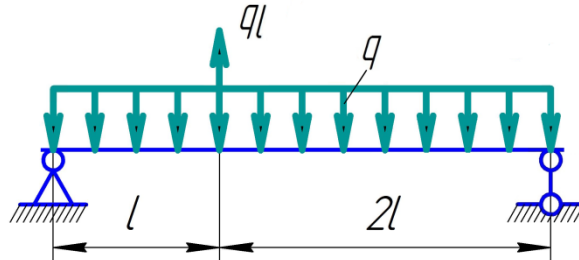
**Задача №3** Для двухопорной балки требуется определить необходимый размер  $b$  прямоугольного поперечного сечения с заданным соотношением сторон. При полученной величине размера найти угол поворота сечения в шарнирно-подвижной опоре.

*Исходные данные:* сила  $P = 13$  кН; длина равна  $l = 0,7$  м. Материал стержня – латунь; модуль продольной упругости  $E = 110$  ГПа. Допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 60$  МПа.



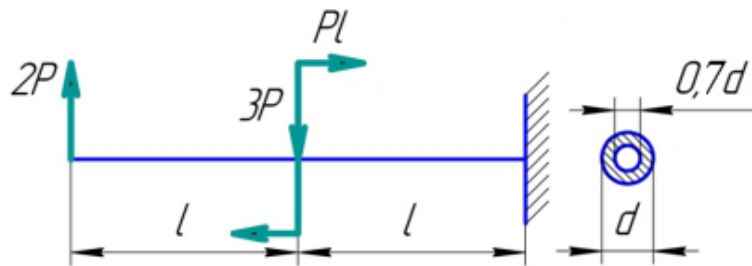
## Вариант 24

**Задача №1** Для балки, нагруженной по указанной схеме, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (в долях  $ql$  и  $ql^2$ ). Найти опасное сечение и величину максимального изгибающего момента в нем.



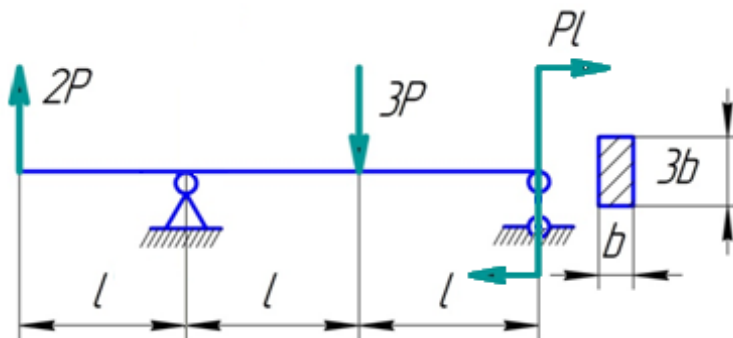
**Задача №2** Проверить прочность стальной консольной балки кольцевого поперечного сечения с заданным соотношением диаметров.

*Задано:* сила  $P = 15$  кН; диаметр  $d = 13$  см; длина  $l = 0,6$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 200$  МПа.



**Задача №3** Для стальной двухопорной балки требуется определить необходимый размер стороны  $b$  прямоугольного поперечного сечения. При найденном размере вычислить прогиб среднего сечения пролета балки (сечения, где приложена сила  $3P$ ).

*Исходные данные:* сила  $P = 16$  кН; длина  $l = 0,9$  м; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 200$  МПа; модуль продольной упругости стали  $E = 210$  ГПа.



Коротовских Валентин Константинович

**РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ  
ПРИ ИЗГИБЕ**

**ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
К РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ №2**  
для студентов очной формы обучения направлений  
151900.62, 150700.62

Редактор А.С. Мокина

---

Подписано в печать 15.07.13	Формат 60×84 1/16	Бумага тип. № 1
Печать трафаретная	Усл. печ. л. 2,25	Уч.- изд. л. 2,25
Заказ 117	Тираж 25	Цена свободная

---

РИЦ Курганского государственного университета.  
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.  
Курганский государственный университет.