МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра математического анализа

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Методические указания и материалы
для проведения практических занятий
со студентами специальности 010101 Математика

Курган 2009

Кафедра математического анализа

Дисциплина: «Вариационное исчисление и методы оптимизации»
(специальность 010101)

Составили: доцент, канд. физ.-мат. наук Гаврильчик М.В., Головина Ю.С.

Утверждены на заседании кафедры «7» октября 2009 г.

Рекомендованы методическим советом университета «15» октября 2009 г.

Тема 1. Решение задач линейного программирования

Литература: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [9], [14], [17].

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.1)$$

и линейная функция

$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$. (1.2)

Требуется найти такое неотрицательное решение

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ..., $x_n \geq 0$

системы (1.1), при котором функция F принимает наименьшее (наибольшее) значение.

п. 1. Графический метод решения задач

Пусть дана задача, состоящая в определении максимального (минимального) значения функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \quad (1.3)$$

при условиях

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, \ (i = \overline{1,k}), \quad (1.4)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2). \quad (1.5)$$

Нахождение решения задачи линейного программирования (1.3) – (1.5) на основе ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

1. Строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях (1.4) и (1.5) знаков неравенств на знаки точных равенств.
2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.
3. Находят многоугольник решений.
4. Строят вектор $\vec{C} = (c_1;c_2)$.
5. Строят прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, проходящую через многоугольник решений.
6. Передвигают прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ в направлении вектора $\vec{C}$, в случае нахождения максимума функции, или в направлении вектора $-\vec{C}$, в случае нахождения минимума функции. В результате чего-либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве решений.
7. Определяют координаты точки максимума (минимума) функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Задача 1. Найти максимальное значение функции $F = 2x_1 + 3x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Решение. Построим многоугольник решений полученной задачи (рис. 1). Как видно из рис. 1, максимальное значение целевая функция задачи принимает в точке C пересечения прямых 1 и 2. Для нахождения координат этой точки, решим систему двух уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 = 6, \end{cases}$$

получаем $x_1^* = 3;\ x_2^* = 4$.

Значение целевой функции есть $F_{max} = 18$.

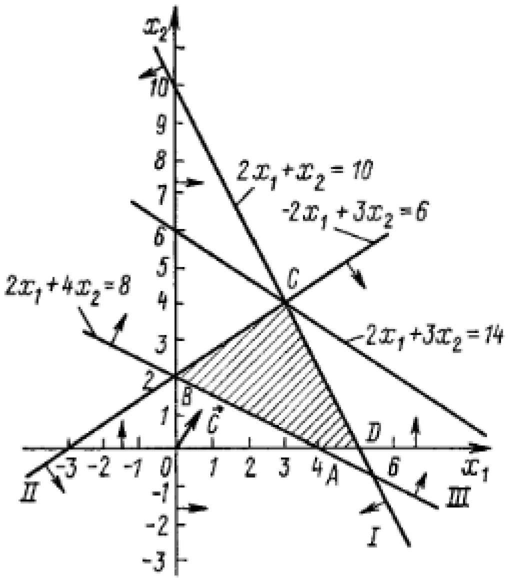


Рис. 1

п. 2. Решение задач симплекс-методом

Задача 2.Найти минимальное значение функции $f(x) = -6x_1 - 8x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 12x_1 + 6x_2 + x_4 = 72, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

БП	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	20	2	5	1	0
x_4	72	12	6	0	1
f	0	6	8	0	0

БП	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	8	0	4	1	$-\frac{1}{6}$
x_1	6	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{12}$
f	-36	0	5	0	$-\frac{1}{2}$

БП	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	2	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{24}$

x_1	5	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{48}$
f	- 46	0	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{7}{24}$

X_{min} =(5; 2), f_{min} = - 46.

п. 2.1. Решение задачи линейного программирования «методом искусственного базиса»

Рассмотрим один из методов нахождения базиса, называемый обычно «методом искусственного базиса».

Пусть система ограничений задана в общем виде:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ .... \\ \alpha_{r1} + ... + \alpha_{rn}x_n = \beta_r \end{cases} \tag{1.6}$$

Числа β_1, …, β_r можно считать неотрицательными; если это не так, например, если $\beta_1 < 0$, то, умножив обе части первого уравнения на - 1, получим уравнение, в котором свободный член будет > 0. Итак, пусть

$$\beta_1 \geq 0, \ …, \ \beta_r \geq 0.$$

Введем вспомогательные, или искусственные, неизвестные y_1, …, y_r, связанные с x_1, …, x_n уравнениями:

$$\begin{cases} y_1 = \beta_1 - (\alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n) \\ .... \\ y_r = \beta_r - (\alpha_{r1}x_1 + ... + \alpha_{rn}x_n) \end{cases} \tag{1.7}$$

Очевидно, решение системы (1.6) эквивалентно решению системы (1.7) при дополнительных условиях $y_1 = 0$, …, $y_r = 0$.

Задача 3. Найти минимальное значение функции

$$f(x) = - 3x_1 + 2x_2 – 2x_3 + 2x_4 – x_5$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_5 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, …, 5.$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 - (x_1 + x_2 - x_3) \\ y_2 = 1 - (-x_2 + x_3 + x_4) \\ y_3 = 2 - (x_2 + x_3 + x_5) \end{cases}$$

$F = y_1 + y_2 + y_3 = 4 – (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$, найти минимальное значение функции.

БП	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3
y_1	1	1	1	-1	0	0	1	0	0
y_2	1	0	-1	1	1	0	0	1	0
y_3	2	0	1	1	0	1	0	0	1

F	4	1	1	1	1	1	0	0	0
f	0	3	-2	2	-2	1	0	0	0

БП	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2
y_1	1	1	1	-1	0	0	1	0
y_2	1	0	-1	1	1	0	0	1
x_5	2	0	1	1	0	1	0	0
F	2	1	0	0	1	0	0	0
f	-2	3	-3	1	-2	0	0	0

БП	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1
y_1	2	1	2	0	1	0	1
x_3	1	0	-1	1	1	0	0
x_5	1	0	2	0	-1	1	0
F	2	1	0	0	1	0	0
f	-3	3	-2	0	-3	0	0

БП	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	2	1	2	0	1	0
x_3	1	0	-1	1	1	0
x_5	1	0	2	0	-1	1
F	0	0	-2	0	0	0
f	- 9	0	-8	0	-6	0

$X_{min} = (2; 0; 1; 0; 1)$, $f_{min} = -9$.

п.2.2. Двойственный симплекс-метод

К двойственному симплекс-методу удобно прибегать тогда, когда в исходной задаче число ограничений значительно больше числа неизвестных.

Пусть дана некоторая задача линейного программирования, которую мы будем в дальнейшем называть исходной задачей или задачей 1. При этом ограничения заданы в форме неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases} \tag{1.8}$$

m линейных неравенств с n неизвестными и линейная функция

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{1.9}$$

Требуется из всех неотрицательных решений системы (1.8) выбрать такое, которое минимизирует функцию (1.9).

С данной задачей мы сейчас свяжем другую задачу, которую назовем двойственной по отношению к исходной или задачей $1'$. Вот ее формулировка: дана система

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \le c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \le c_2 \\ .... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \le c_n \end{cases} \tag{1.10}$$

n линейных неравенств с m неизвестными и линейная функция

$$z = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \, . \tag{1.11}$$

Требуется из всех неотрицательных решений системы (1.10) выбрать такое, которое максимизирует функцию (1.11).

Теорема двойственности. Если исходная задача имеет решение, то и двойственная ей также имеет решение. При этом минимум функции f равен максимуму функции z:

$$\min f = \max z. \tag{1.12}$$

Если в исходной задаче линейная функция не ограничена снизу, то в двойственной задаче система ограничений не имеет ни одного неотрицательного решения.

Задача 4. Найти минимальное значение функции $f(x) = 2x_1 – 3x_2$ при условиях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \ge 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 2. \end{cases}$$

Двойственная к ней задача: найти максимальное значение функции $z(y) = 3y_1 +2y_2$ при условиях:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \le 2 \\ -y_1 - y_2 \le -3 \\ -y_1 + y_2 \le 0. \end{cases}$$

Если мы стали бы решать эту задачу 1 по симплекс-методу, то после нескольких шагов пришли бы к таблице

БП	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_3	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
f	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$

В столбце x_2 последнее число положительно, между тем как все остальные числа столбца отрицательны. Это означает, что функция f не ограничена снизу. По теореме двойственности система ограничений задачи $1'$ не имеет неотрицательных решений.

Задача 5. Найти максимальное значение функции $f(x) = 3x_1 + x_2 + x_3$ при условиях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$$

Двойственная к ней задача: найти минимальное значение функции

$z(y) = 6y_1 + 3y_2$ при условиях:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \ge 3, \\ -y_1 + 2y_2 \ge 1, \\ y_1 - y_2 \ge 1. \end{cases}$$

Эту задачу можно решить графически.

$z = 9y_4 + 15y_5$, $Y_{min} = (3;2)$, $z_{min} = 24$;

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_3	y_4	y_5	y_1	y_2
0	9	15	0	0

$X_{max} = (0; 9; 15)$, $f_{max} = 24$.

Задания для самостоятельного решения

Решить задачи линейного программирования графическим методом:

1. Найти минимальное значение функции $f(x) = x_1 - 2x_2$, при условиях:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 0, \\ 2x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \le 1, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$.

2. Найти минимальное значение функции $f(x) = -2x_1 - x_2$, при условиях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 1, \\ 3x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 - 4x_2 \le 2, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$.

3. Найти максимальное значение функции $f(x) = -x_1 - x_2$, при условиях:

$$\begin{cases} x_1 \le 3, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 1, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$.

4. Найти минимальное значение функции $f(x) = -x_1 - x_2$, при условиях:

$$\begin{cases} 2x_1 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \le 2, \\ x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$.

5. Найти максимальное значение функции $f(x) = 2x_1 + 3x_2$, при условиях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$.

6. Найти максимальное значение функции $f(x) = -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$, при условиях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

Решить задачи линейного программирования симплекс-методом:

7. Найти минимальное значение функции $f(x) = - 5x_1 + 4x_2 – x_3 – 3x_4 – 5x_5$, при условиях:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, 5.$$

8. Найти минимальное значение функции $f(x) = - x_1 – x_2 – x_3 – x_4 + 4x_5$, при условиях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_5 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 10, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, 5.$$

9. Найти максимальное значение функции $f(x) = 4x_1 + 3x_2$, при условиях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ x_2 \leq 2{,}5, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 \geq -2, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

10. Фирма производит два продукта А и В, рынок сбыта которых неограничен. Каждый продукт должен быть обработан каждой из машин 1, 2, 3. Время обработки в часах для каждого из изделий приведено ниже:

	1	2	3
А	0,5	0,4	0,2
В	0,25	0,3	0,4

Время работы машин 1, 2, 3 соответственно 40, 36 и 36 ч в неделю. Прибыль от изделий А и В составляет соответственно 5 и 3 долл. Фирме надо определить недельные нормы выпуска изделий А и В, максимизирующие прибыль. Сформулируйте эту задачу как задачу линейного программирования и решите ее.

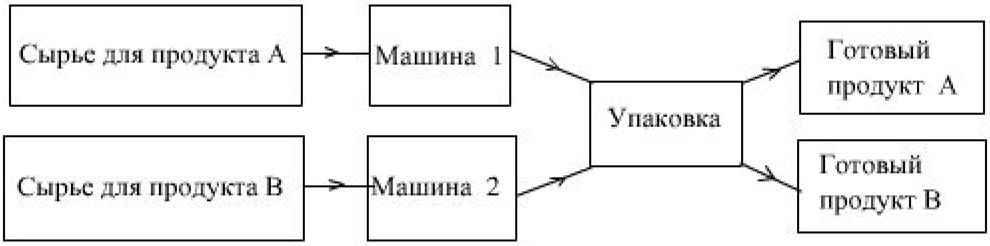
11. Средства очистки пола оценивают по следующим трем показателям: а) очищающие свойства, б) дезинфицирующие свойства, в) раздражающее воздействие на кожу. Каждый из этих показателей измеряется по линейной шкале от 0 до 100 единиц. Продукт на рынке должен иметь по крайней мере 60 единиц очищающих свойств и по крайней мере 60 единиц дезинфицирующих свойств по соответствующей шкале. При этом раздражающее воздействие на кожу должно быть минимальным. Конечный продукт должен быть смесью трех основных очистителей, характеристики которых приводятся в таблице.

Очиститель	Очищающие свойства	Дезинфицирующие свойства	Раздражающее воздействие на кожу.
А	90	30	70

B	65	85	50
C	45	70	10

Сформулируйте задачу нахождения оптимальной смеси как задачу линейного программирования и решите ее.

12. Фирма производит два продукта A и B, продаваемых соответственно по 8 и по 15 центов за упаковку; рынок сбыта для каждого из них практически неограничен. Продукт A обрабатывается на машине 1, продукт B – на машине 2. Затем оба упаковываются на фабрике:



1 кг сырья стоит 6 центов; машина 1 обрабатывает 5000 кг в 1 ч с потерями 10%. Машина 2 обрабатывает 4000 кг в 1 ч с потерями 20 %. Машина 1 доступна 6 ч в день, ее использование стоит 288 долл. в 1 ч. Машина 2 доступна 5 ч в день, и ее использование стоит 336 долл. в 1 ч. Упаковка продукта A весит $\frac{1}{4}$ кг, а упаковка продукта B - $\frac{1}{3}$ кг. Фабрика может работать 10 ч в день, производя в 1 ч продукцию стоимостью 360 долл. За 1 час можно упаковать 12000 продуктов A и 8000 продуктов B. Компания хочет определить такие значения x_1 и x_2 потребления сырья для продуктов A и B (в тысячах килограммов), при которых дневная прибыль максимальна. Сформулируйте задачу как задачу линейного программирования и решите ее.

Решить задачи линейного программирования методом искусственного базиса:

13. Найти минимальное значение функции $f(x) = -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4$, при условиях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

14. Найти минимальное значение функции $f(x) = 3x_1 - 2x_2 + x_3$, при условиях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

15. Найти минимальное значение функции $f(x) = -x_1 - 4x_4$, при условиях:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 13, \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, 5.$$

Решить двойственные задачи, используя решение исходных задач с помощью симплекс таблиц:

16. Найти максимальное значение функции $f(x) = 4x_1 + 2x_2$, при условиях:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 - x_2 \le 15, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

17. Найти минимальное значение функции $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, при условиях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \ge 6, \\ -x_1 + x_3 \le 2, \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \le 8. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

18. Найти максимальное значение функции $f(x) = - 3x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4$, при условиях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 = 50, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 14, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

Тема 2. Решение задач нелинейного программирования. Графический метод решения задач. Градиентные методы

Литература: [4], [7], [8], [9], [10], [12], [18].

п.1. Графический метод решения задач

Пусть дана задача нелинейного программирования, состоящая в определении максимального (минимального) значения функции

$$F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (2.1)$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i, \ (i = \overline{1,k}), \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i, \ (i = \overline{k+1,m}), \end{cases} \qquad (2.2)$$

где f и g_i - функции n переменных, а b_i – заданные числа.

Схема графического метода решения задач.

1. Находят область допустимых решений задачи, определяемую соотношениями (2.2) (если она пуста, то задача не имеет решения).
2. Строят гиперповерхность $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h$.
3. Определяют гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня или устанавливают неразрешимость задачи из-за неограниченности функции (2.1) сверху (снизу) на множестве допустимых решений.
4. Находят точку области допустимых решений, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня, и определяют в ней значение функции (2.1).

Задача 1. Найти максимальное и минимальное значения функции

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 18, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Решение. Областью допустимых решений исходной задачи является многоугольник ABCDE (рис. 2), а линиями уровня – окружности $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = h$ с центром E(4; 3) и радиусом $R = \sqrt{h}$. Из рис. 2 видно, что целевая функция принимает минимальное значение в точке F(4; 3), а максимальное - в точке C(13; 10,5). Следовательно, $F_{min} = 0$ и $F_{max} = 137,25$.

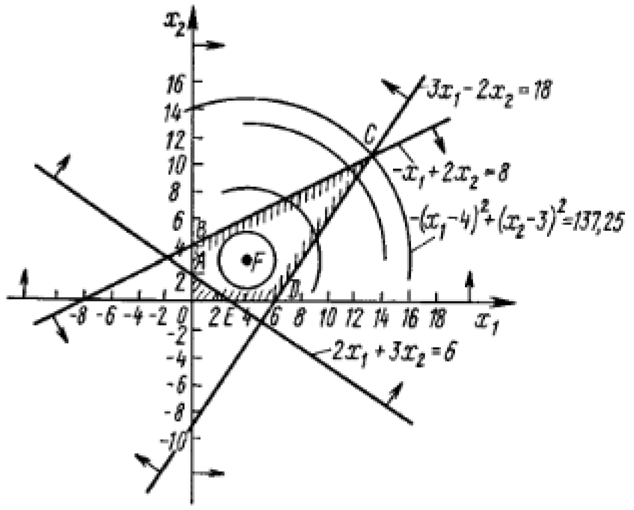


Рис. 2

п.2. Блок-схема метода градиента

1. Находим градиент заданной функции в произвольной точке, т.е. $\overrightarrow{grad}$ f(M).
2. Задаем начальную точку $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ и шаг h.
3. Вычисляем $\overrightarrow{grad}$ f(M_0).
4. Находим $x^1 = x^0 - h \cdot \overrightarrow{grad} f(x^0)$ в случае нахождения минимума или $x^1 = x^0 + h \cdot \overrightarrow{grad} f(x^0)$ в случае нахождения максимума, т.е. находим координаты точки $M_1\left(x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1\right)$.
5. Подсчитываем f(M_1).
6. Сравниваем f(M_0) и f(M_1): если f(M_1) < f(M_0) в случае нахождения минимума и если f(M_1) > f(M_0) в случае нахождения максимума, то переходим к п.3 и повторяем весь цикл для нахождения x^2; если же f(M_1) > f(M_0) в случае поиска минимума или f(M_1) < f(M_0) в случае поиска максимума, то берем шаг $\frac{h}{2}$, возвращаемся к п.4 и снова находим x^1.

Задача 2. Определить градиентным методом минимум функции $z = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 5$. Начальная точка $M_0(1; 0)$, и $z(M_0) = 2$.

Решение. Вычислим $\overrightarrow{grad}$ z(M) = $\begin{pmatrix} 2x_1 - 4 \\ 4x_2 + 2 \end{pmatrix}$, а в начальной точке $\overrightarrow{grad}$ z (M_0)=$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Выберем h = 0,1, тогда $x_1^1 = 1,2$, а $x_2^1 = -0,2$, и $z(M_1) = 1,32 < z(M_0)$.

Вычислим $\overrightarrow{grad}\, z(M_1) = \begin{pmatrix} -1{,}6 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}$. При выбранном h = 0,1 значение $z(M_1)$ близко к $z(M_0)$, т.е. итерационный процесс сходится очень медленно. Для ускорения его примем h = 0,5, тогда $x_1^2 = 2$, и $x_2^2 = -0{,}8$ и $z(M_2)$ = - 4,32, а $\overrightarrow{grad}\, z(M_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}$.

Однако, при h = 0,5 уже на следующем этапе получим, что $x_1^3 = 2;\ x_2^3 = -0{,}2;$ а $z(M_3)$ = - 4,32. Мы видим, что условие $z(M_3) < z(M_2)$ не выполнено, т.е. мы «проскочили» точку минимума. Уменьшим шаг вдвое и снова найдем координаты точки M_3: $x_1^3 = 2,$ а $x_2^3 = -0{,}5$. Получим, что $\overrightarrow{grad}\, z(M_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: z_{min} = - 4,5 в точке M(2; - 0,5).

п.3. Блок-схема метода наискорейшего спуска

1. Находим градиент заданной функции.
2. Задаем точку $M_0(x^0)$.
3. Вычисляем $\overrightarrow{grad}\, f(M_0)$.
4. $x^1 = x^0 - h$ grad $f(x^0)$.
5. Подставив координаты x^1 в исходную функцию, получаем $z_1(h) = f(x_0 - h \cdot \overrightarrow{grad}\, f(x^0))$.
6. Решая уравнение $\frac{dz_1(h)}{dh} = 0,$ находим h, при котором функция $z_1(h)$ имеет минимум.
7. Найденное значение h подставим в формулу п.4.
8. Сравним значение $f(M_0)$ и $f(M_1)$ - необходимо, чтобы $f(M_1) < f(M_0)$.
9. Составим $x^2 = x^1 - h\ \overrightarrow{grad}\, f(x^1)$ и повторяем п. 5-8.

Задача 3. Найти минимум функции z = $2x_1^2 + x_2^2 - 12x_1$.

Решение.

1. Найдем $\overrightarrow{grad}\, z(M) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 12 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$.
2. Выберем начальную точку $M_0(5; 3)$ и вычислим в этой точке $z(M_0)$ = -1.
3. Составим $\overrightarrow{grad}\, z(M_0) = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$.
4. Запишем соотношения $x^1 = x^0 - h$ grad $f(x^0)$ для координат точки M_1: $x_1^1 = 5 - 8h$ и $x_2^1 = 3 - 6h.$
5. Подставим их в исходную функцию $z(h) = 164h^2 - 100h - 1$ и исследуем ее на экстремум $z'(h) = 328h - 100 = 0,$ откуда h =0,31, тогда $M_1(2{,}5; 1{,}1)$, функция $z(M_1)$ = - 17,3 < $z(M_0)$ и $\overrightarrow{grad}\, z(M_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2{,}2 \end{pmatrix}$. Повторяем этот цикл для всех последующих точек: $x_1^2 = 2{,}5 + 2h$ и $x_2^2 = 1{,}1 - 2{,}2h$, а функция $z(h) = 12{,}84h^2 - 8{,}84h - 16{,}3$. Исследуем производную этой функции $z'(h) = 25{,}68h - 8{,}84$, находим, что h = 0,34. Следовательно, $x_1^2 = 3{,}18$, $x_2^2 = 0{,}35$ и $z(M_2)$ = - 17,8, а grad $z(M_2) = \begin{pmatrix} 0{,}72 \\ 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Следующий цикл дает $x_1^3 = 3{,}18 - 0{,}72h$, $x_2^3 = 0{,}35 - 0{,}7h$. Величину шага для этого цикла получим, исследуя на экстремум функцию z(h) = $1{,}53h^2 - 1{,}01h - 17{,}8$, что дает h = 0,33. Тогда $M_3(2{,}94;\ 0{,}12)$, в которой $z(M_3) = -17{,}98 < z(M_2)$ и grad $z(M_3) = \begin{pmatrix} -0{,}24 \\ 0{,}24 \end{pmatrix}$. Выполним еще один цикл. Запишем, что $x_1^4 = 2{,}94 + 0{,}24h$, $x_2^4 = 0{,}12 - 0{,}24h$ и $z(h) = 0{,}17h^2 - 0{,}12h - 17{,}97$. $z'(h) = 0{,}34h - 0{,}12 = 0$ дает h = 0,33. Тогда $M_4(3;\ 0)$, $z(M_4) = -18$, а $\overrightarrow{grad}(M_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ссследовательно, $z_{min} = -18$ в точке M(3; 0).

п.4. Блок-схема метода сопряженных градиентов

1. Составим $\overrightarrow{grad}\, z(M)$.

2. Выберем точку M_0, вычислим $\overrightarrow{grad}\, z(M_0)$ и составим $x^1 = x^0 - h_0$ grad $z(x^0)$. Аналогично методу наискорейшего спуска из уравнения $z'(h_0) = 0$ находим h_0 и получаем координаты x^1.

3. Координаты всех последующих точек будем вычислять по другим формулам: $x^2 = x^1 - h_1 p_1$, где $p_1 = \overrightarrow{grad}\, z(M_1) + \beta_0\, \overrightarrow{grad}\, z(M_0)$ и $\beta_0 = \dfrac{\left\|\overrightarrow{grad} z(M_1)\right\|^2}{\left\|\overrightarrow{grad} z(M_0)\right\|^2}$, здесь p_1 – новое направление поиска. Величину h_1 находим, используя исследование на экстремум функцию $z(x^1 - h_1 p_1) = 0$. Далее повторяем указанную процедуру.

Основные формулы метода сопряженных градиентов для нахождения минимума функции $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: $x^{k+1} = x^k - h_k p_k$, где

$p_k = \overrightarrow{grad}\, z(x^k) + \beta_{k-1}\, \overrightarrow{grad}\, z(x^{k-1})$ и $\beta_{k-1} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{grad} z(x^k)\right\|^2}{\left\|\overrightarrow{grad} z(x^{k-1})\right\|^2}$.

Задача 4. Определить максимум функции $z = 2x_1 - 3x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$.

Решение.

1. Составим $\overrightarrow{grad}\, z(M) = \begin{pmatrix} 2 - 2x_1 \\ -3 - 4x_2 \end{pmatrix}$.

2. Выберем начальную точку $M_0(0;\ 0)$, в которой $\overrightarrow{grad}\, z(M_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ и $z(M_0) = 0$.

3. Используя $x^1 = x^0 + h$ grad $f(x^0)$, запишем $x_1^1 = 2h$ и $x_2^1 = -3h$, тогда $z(h) = -22h^2 + 13h$. Решая $z'(h) = 0$, получим h = 0,3. Следовательно, $M_1(0{,}6;\ -0{,}9)$, в которой $z(M_1) = 1{,}92 > z(M_0)$ и grad $z(M_1) = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$.

4. Для пользования формулами метода сопряженных градиентов найдем $\beta_0 = \dfrac{0{,}64 + 0{,}36}{4 + 9} = 0{,}1$. Тогда $x^2 = x^1 + h_1 p_1$, где $p_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} + 0{,}1\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$ или $x_1^2 = 0{,}6 + h_1$, а $x_2^2 = -0{,}9 + 0{,}3h_1$. Полученные значения x^2 подставим в исходную функцию. $z(h_1) = 2(0{,}6 + h_1) - 3(-0{,}9 + 0{,}3h_1) - (0{,}6 + h_1)^2 - 2(-0{,}9 + 0{,}3h_1)^2$ и из условия $z'(h_1) = 0$ находим, что $h_1 = 0{,}415$. Тогда $M_2(1{,}015;\ -0{,}7755)$, в которой

z(M_2) = 2,1235 > z(M_1) и $\overrightarrow{grad}$ z(M_2) = $\begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,102 \end{pmatrix}$. Повторяем указанный цикл. Находим $\beta_1 = \dfrac{0,09 + 0,0104}{0,64 + 0,36} = 0,1004$ и p_2 = $\begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,102 \end{pmatrix} + 0,1004\begin{pmatrix} 1 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1996 \\ 0,1321 \end{pmatrix}$, тогда $x_1^3 = 1,015 - 1,1996h_2$ и $x_2^3 = -0,7755 + 0,1321h_2$, а z($h_2$) = 2(1,015 – 0,1996$h_2$) – 3(0,1321$h_2$ – 0,7755) – (1,015 – 0,1996h_2)^2 – 2(0,1321h_2 – 0,7755)^2. Из условия $z'(h_2) = 0$ находим h_2 = 0,1325. Следовательно, M_3(0,989; - 0,758), z(M_3) = 2,125 > z(M_2) и $\overrightarrow{grad}$ z(M_3) $=\begin{pmatrix} 0,022 \\ 0,032 \end{pmatrix}$. Еще раз повторим цикл. Находим $\beta_2 = \dfrac{0,000484 + 0,001024}{0,1004} = 0,015$ и $p_3 = \begin{pmatrix} 0,022 \\ 0,032 \end{pmatrix} + 0,015\begin{pmatrix} -0,001024 \\ 0,1321 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,019 \\ 0,034 \end{pmatrix}$, тогда $x_1^4 = 0,989 + 0,019h_3$ и $x_2^4 = -0,758 + 0,034h_3$. Исследование на максимум функции z(h_3) = 2(0,989 +0,019h_3) – 3(- 0,758 + 0,034h_3) – (0,989 + 0,019 h_3)^2 – 2(- 0,758 + 0,034h_3)^2 дает h_3 = 0,278. Тогда M_4(0,994; -0,749). В этой точке z(M_4) = 2,125. Мы видим, что функция практически не растет, а $\overrightarrow{grad}$ z(M_4) = $\begin{pmatrix} 0,012 \\ -0,004 \end{pmatrix}$, т.е. работу можно практически прекратить. Проверяем точку $\overline{M}$ (1; - 0,75). В этой точке z($\overline{M}$) = 2,125, а $\overrightarrow{grad}$ z($\overline{M}$) = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: z_{min} = 2,125 в точке M(1; - 0,75).

п.5. Метод Ньютона

В этом случае приходится вычислять матрицу из частных производных второго порядка от заданной функции

$$H(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \dots\dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \dots\dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_n} & \dots\dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Основная формула блок-схемы метода имеет вид

$$x^{k+1} = x^k - H^{-1}(x^k)\ \overrightarrow{grad}\ z(x^k), \qquad (2.3)$$

где $H^{-1}(x^k)$ – обратная матрица для матрицы $H(x^k)$.

Обычно градиентные методы второго порядка применяются в комбинации с градиентными методами первого порядка.

Для квадратичных форм попадание в точку минимума (максимума) происходит за один шаг, при условии, что $|H(x)| \neq 0$ и H(x) > 0, (H(x) < 0), т.е. матрица H(x) является неособой (невырожденной) и положительно (отрицательно) определенной.

Задача 5. Найти максимум функции z = $6x_1 + 32x_2 - x_1^2 - 4x_2^2$:

1. Составим $\overrightarrow{grad}$ z(M) = $\begin{pmatrix} 6 - 2x_1 \\ 32 - 8x_2 \end{pmatrix}$.

2. Выберем точку $M_0(6; 6)$, в которой $z(M_0) = 48$ и $\overrightarrow{grad}\, z(M_0) = \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix}$.

3. Составим $H(x^0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $|H(x^0)| = 16 \neq 0$ и $H(x^0) < 0$.

4. Получим $H^{-1}(x^0) = \dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Учитывая нахождение максимума, запишем $x^1 = x^0 - H^{-1}(x^0)\ \overrightarrow{grad}\, z(x^0)$ или

$$x^1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ответ: M(3; 4), в которой $z_{max} = 73$.

Задания для самостоятельного решения

19. Найти графическим методом максимальное значение функции $F = x_1x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

20. Найти графическим методом минимальное значение функции
$F = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2$ при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

21. Найти графическим методом максимальное значение функции $F = 4x_1 + 3x_2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \leq 0, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

Методом градиентного спуска найти для функций:

22. $z = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 5$ максимум;

23. $z = 2x_1^2 + x_2^2 - 12x_1$ минимум;

24. $z = 2x_1 - x_1^2 - x_2^2 + 3$ максимум;

25. $z = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2)$ минимум;

Методом наискорейшего спуска найти для функций:

26. $z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$ минимум;

27. $z = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 5$ максимум;

28. $z = 9x_1^2 + 16x_2^2 - 90x_1 - 128x_2$ минимум;

29. $z = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2$ минимум;

Методом сопряженных градиентов найти для функций:

30. $z = 6x_1 + 32x_2 - x_1^2 - 4x_2^2$ максимум;

31. $z = x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2 + x_1 - x_2$ минимум.

Найти минимум для функций, заканчивая вычисления при $\left|\frac{\partial f(x^k)}{\partial x_i}\right| \le 10^{-2}$, i = 1, 2, …, n.

32. $z = x_1 + 2x_2 + 4\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}$;

33. $z = x_1 + 5x_2 + e^{x_1^2 + x_2^2}$;

Найти методом Ньютона для функций:

34. $z = 6x_1 + 32x_2 - x_1^2 - 4x_2^2$ максимум (взять за начальные точки $M_0(0; 0)$; $M_0(7; 4)$; $M_0(3; 10)$);

35. $z = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 11$ минимум (взять за начальную точку M(- 1; - 1; - 1)).

Самостоятельная работа №1

1 вариант

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$f(x) = -2x_1 - x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 - 2x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, 5.$$

2 вариант

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$f(x) = -x_1 - 4x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$f(x) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 - x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, 5.$$

Самостоятельная работа №2

1 вариант

1. Найти глобальные экстремумы функции условиях: $F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

2. Любым градиентным методом первого порядка найти минимум функции:

$$z = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2.$$

3. Методом Ньютона найти максимум функции:

$$z = 4(x_1 - 3)^2 - 2(x_2 - 1)^2 - (x_3 - 2)^2.$$

2 вариант

1. Найти глобальные экстремумы функции $F = (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 7)^2$ при условиях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 18, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 24, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

2. Любым градиентным методом первого порядка найти максимум функции:

$$z = 4x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 + 2.$$

3. Методом Ньютона найти минимум функции:

$$z = 5(x_1 - 3)^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3(x_3 + 1)^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1986. - 319 с.

2. Банди Б. Основы линейного программирования. – М.: Радио и связь,1989. - 176 с.

3. Васильев Ф. П. Линейное программирование. – М.: Факториал, 1998. – 176с.

4. Габасов Р. Ф. Методы оптимизации. –Минск: Издательство БГУ, 1975– 279с.

5. Гасс С. И. Линейное программирование. – М.: Физматгиз, 1961. – 303 с.

6. Данцинг Джордж Б. Линейное программирование, его применение и обобщение. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.

7. Ефимова А. В. Методы оптимизации, уравнения в частных производных. Интегральные уравнения: Сборник задач по математике для втузов. – М.: Наука, 1990. - 303 с.

8. Зингвилл Уиллард И. Нелинейное программирование. – Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1981. – 183 с.

9. Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высшая школа, 1975. – 270 с.

10. Кюнци Ганц Пауль. Нелинейное программирование. – М.: Советское радио, 1965. – 303 с.

11. Пантелеев А. В. Оптимальное управление в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Московский авиационный институт, 1992. - 124 с.

12. Питерцева Г. А. Учебное пособие по решению задач нелинейного программирования. – М.: Московский авиационный институт, 1979. - 28 с.

13. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969. – 384 с.

14. Солодовников А.С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование. – М.: Просвещение, 1966. – 183 с.

15. Тихомиров В. М. Оптимальное управление: Учебное пособие для математических спец. вузов. – М.: Наука, 1979. – 427 с.

16. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука,1986. – 192 с.

17. Фергюсон Роберт О. Линейное программирование: методы и применение. – М.: Госстаиздат, 1962. – 361 с.

18. Щитов И. Н. Лекции по методам оптимизации. – Днепропетровск: ДГУ, 1981.-132с.

Гаврильчик Марина Викторовна
Головина Юлия Сергеевна

Методы оптимизации

Методические указания и материалы для проведения практических занятий со студентами специальности 010101 Математика

Редактор Н.А.Леготина

Подписано к печати	Формат 60х84 1/16	Бумага тип.№1
Печать трафаретная	Усл.печ. л.1,25	Уч.-изд.л.1,25
Заказ	Тираж 50	Цена свободная

РИЦ Курганского государственного университета.

640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.

Курганский государственный университет.