

*МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ*

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

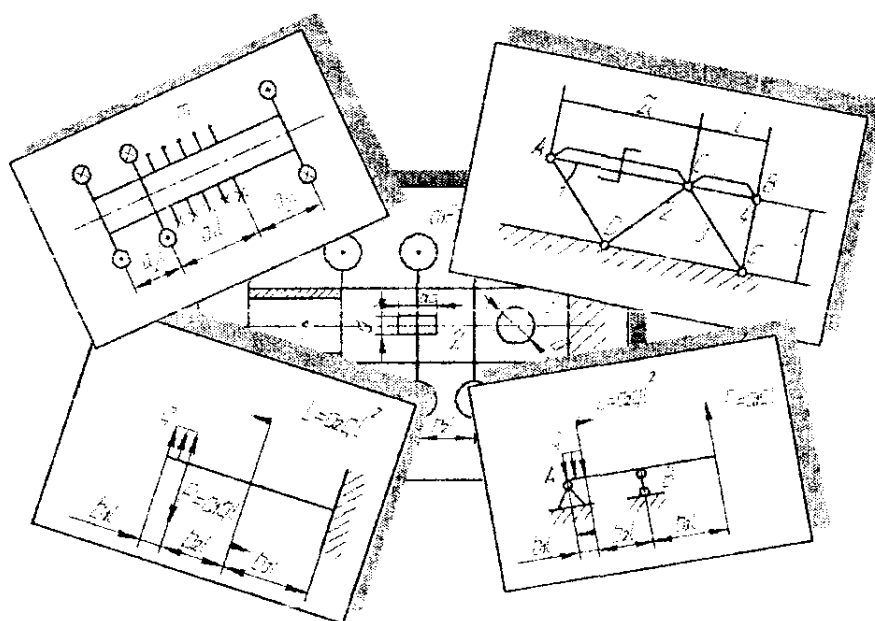
КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

**РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ  
ПРИ РАСТЯЖЕНИИ - СЖАТИИ, КРУЧЕНИИ И ИЗГИБЕ**

**КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И  
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

для студентов заочной формы обучения специальностей  
151001, 150202, 190201, 190601, 190603, 190702, 280101



Курган 2008

Кафедра: «Теоретическая механика и сопротивление материалов»

Дисциплина: "Сопротивление материалов"  
(специальности 151001, 150202, 190201, 190601, 190603, 190702, 280101)

Составили: канд. техн. наук, доц. В.К. Коротовских (методические рекомендации и содержание контрольных заданий);  
канд. техн. наук, доц. С.Г. Костенко (варианты условий и схем контрольных заданий)

Составлены на основе переработанных и дополненных контрольных заданий и методических указаний по сопротивлению материалов / Макаров В.И., Тютрин С.Г. – Курган: Изд-во КГУ, 1997.

Утверждены на заседании кафедры 26 июня 2008 г.

Рекомендованы методическим советом университета 27 июня 2008 г.

## ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов – базовая дисциплина инженерной подготовки по механическим, машиностроительным, транспортным и другим специальностям высших технических учебных заведений. В курсе сопротивления материалов рассматриваются способы решения трех основных задач: расчет на прочность, жесткость и устойчивость.

Контрольная работа предназначена для усвоения студентами метода сечений при определении внутренних силовых факторов, построения их эпюр; основных видов расчета на прочность и жесткость при растяжении (сжатии), кручении и изгибе.

Методические указания составлены с учетом рабочей программы курса сопротивления материалов для указанных специальностей применительно к методическим разработкам кафедры теоретической механики и сопротивления материалов Курганского государственного университета.

Изучение курса «Сопротивление материалов» представляет для начинающего определенные трудности и требует большого объема самостоятельной работы над его овладением. Рекомендуется предварительно ознакомиться с учебным материалом по учебникам и учебным пособиям, разбив их на отдельные темы. При этом основное внимание следует обратить на понимание физической сущности явлений, принимаемые допущения и ограничения. Затем, для закрепления полученных сведений, требуется самостоятельно решить несколько задач, относящихся к изучаемой теме и задачи, приведенные в данной методической разработке.

В методических указаниях приведены основные положения, формулы (опорный конспект) по вопросам прочности и жесткости при растяжении, сжатии, кручении и изгибе, имеется план решения каждой задачи.

Задания содержат 10 вариантов, в каждом из которых по 8 задач. Номера вариантов выбираются в соответствии с последней цифрой личного номера студента (шифра). Количество задач и их номера назначаются преподавателем на первой установочной лекции.

## 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Для успешного решения задач контрольной работы и сдачи экзамена необходимо ознакомиться с учебным материалом по следующим темам:

### Тема 1. Основные понятия

При изучении темы обратите внимание на основные понятия: задачи курса сопротивления материалов; виды элементов конструкций; гипотезы и допущения; силы внешние и внутренние; метод сечений; внутренние силовые факторы; напряжения (полное, нормальное и касательное); реальный объект и расчетная схема.

Прочность и жесткость любой конструкции определяется величиной прикладываемых нагрузок (сил или моментов: активных, реактивных, сосредоточенных или распределенных). Под их воздействием в рассчитываемых элементах конструкций (в сопротивлении материалов основным элементом является стержень) возникают внутренние силы и, соответственно, напряжения. Определение внутренних сил осуществляется с помощью основного метода сопротивления материалов – *метода сечений*. Его сущность заключается в следующем:

1. *Рассекают* (мысленно) сечением стержень в изучаемом месте.

2. *Отбрасывают* одну из частей стержня, другую, естественно, оставляют для дальнейшего расчета.

3. *Заменяют* действие отброшенной части стержня на оставшуюся, системой внутренних сил, которые при этом переходят в разряд внешних. Произвольная система внутренних сил приводится к центру тяжести поперечного сечения с появлением главного вектора и главного момента. Принимается прямоугольная система координатных осей  $x, y, z$  (пусть ось  $x$  – нормальна к данному сечению, оси  $y, z$  – лежат в плоскости этого сечения). Проекции главного вектора сил на координатные оси –  $N, Q_y, Q_z$  и главного момента –  $M_x, M_y, M_z$  называются *внутренними силовыми факторами* в сечении (рис. 1а):

сила  $N$  – нормальная к сечению и совпадающая с продольной осью, называется *нормальной* или *продольной силой*;

-  $Q_y$  и  $Q_z$ , перпендикулярные к продольной оси, называются *поперечными*;

момент  $M_x$  или  $M_k$ , действующий вокруг продольной оси, называется *крутящим моментом*;

-  $M_y, M_z$  – *изгибающие моменты*.

4. *Уравновешивают* оставшуюся часть, используя уравнения статики:  $\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0; \sum M_x = 0; \sum M_y = 0; \sum M_z = 0$ . С их помощью находят величину и направление внутренних силовых факторов.

В зависимости от возникающих внутренних силовых факторов стержень будет испытывать растяжение (сжатие), срез, кручение и изгиб (рис. 1б).

Такой вид нагружения стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила, называется *растяжением (сжатием)*. Соответственно, если только поперечная сила,

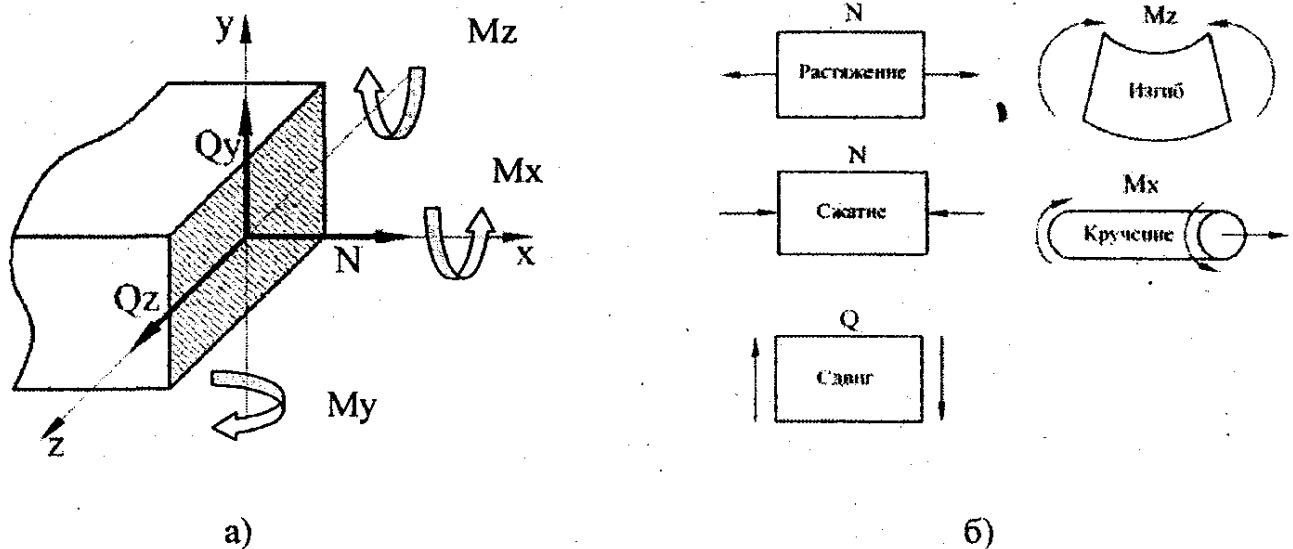


Рис. 1. Внутренние силовые факторы и виды нагружения  
 а) внутренние силовые факторы;  
 б) виды нагружения

то – *срезом (сдвигом)*. Если в поперечных сечениях стержня появляется один крутящий момент, то это *кручение*. А нагружение, при котором действуют лишь изгибающие моменты, называется *изгибом* (точнее *чистым изгибом*). Изгиб, при котором в сечениях возникают и изгибающие моменты, и поперечные силы называется *поперечным*.

Критерием прочности являются *напряжения* – интенсивность распределения внутренних силовых факторов по сечению. В расчетах на прочность используются *нормальные  $\sigma$*  и *касательные  $\tau$*  напряжения. С возникновением продольной силы и изгибающих моментов связаны нормальные напряжения, а крутящего момента и поперечных сил – касательные. Направление напряжений совпадает с направлением внутренних силовых факторов.

## Тема 2. Растяжение, сжатие (задачи № 1-3)

Внутренний силовой фактор – продольная сила. Определение величины и направления продольной силы, построение эпюры. Напряжения, действующие в поперечных сечениях стержней. Деформации стержня, закон Гука. Потенциальная энергия деформации. Опытное изучение свойств материалов при растяжении, сжатии. Диаграмма растяжения, ее основные параметры: пределы пропорциональности, упругости, текучести, прочности (временное сопротивление). Расчеты на прочность и жесткость при растяжении, сжатии. Предельное состояние. Критерии предельного состояния. Расчет по допускаемым напряжениям. Коэффициент запаса. Условие прочности. Виды расчетов на прочность (проектировочный, определение допускаемой нагрузки или грузоподъемности, проверочный).

Продольная сила  $N$  считается *положительной* при растяжении, т.е. когда она направлена от сечения и *отрицательной* при сжатии (к сечению). Численная величина продольной силы в рассматриваемом сечении равна алгебраической сумме составляющих всех внешних сил, действующих на оставленную часть параллельно продольной оси стержня.

При растяжении-сжатии в поперечных сечениях стержня возникают нормальные (перпендикулярные к сечению) напряжения  $\sigma$ . В каждой точке сечения они имеют одинаковую величину и направление, т.е. все точки одинаково опасны (рис. 2) и поэтому определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F}, \quad (1)$$

где  $F$  - площадь поперечного сечения стержня.

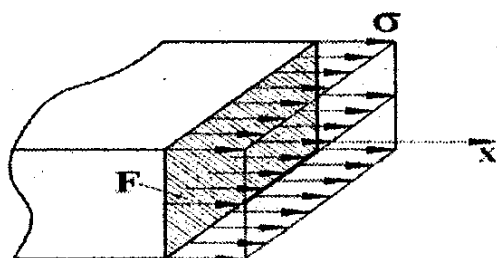


Рис. 2. Распределение нормального напряжения по сечению при растяжении, сжатии

Для обеспечения прочности конструкции, т.е. работы без разрушения, без появления значительных пластических деформаций, величина максимальных напряжений, возникающих в ней (рабочих или расчетных) не должна превышать

допускаемых напряжений. Рабочие напряжения прямо пропорциональны величине прикладываемой нагрузки и обратно пропорциональны размерам и форме поперечного сечения. Учет нагрузки осуществляется с помощью эпюр внутренних силовых факторов и нахождения *опасного сечения* – сечения, в котором они достигают наибольшего значения. Для этого строится *эюра* – график, показывающий изменение внутреннего силового фактора по длине стержня. Размеры и форма поперечного сечения учитываются с помощью его *геометрических характеристик*. Одновременный учет нагрузки и геометрической характеристики поперечного сечения позволяет найти максимальные напряжения – в опасном сечении и в его опасных точках.

*Допускаемое напряжение*  $[\sigma]$  – такая величина напряжения, которая гарантирует надежную, безопасную работу элемента конструкции в течение предусмотренного срока эксплуатации:

$$[\sigma] = \sigma_{пред} / n, \quad (2)$$

где  $\sigma_{пред}$  — предельное напряжение;  
 $n$  — коэффициент запаса.

Для *пластичных* материалов предельным (опасным) напряжением считается *предел текучести*  $\sigma_T$ . Его превышение приведет к недопустимому изменению первоначальных размеров или формы элементов конструкций. Для *хрупких* материалов — *предел прочности*  $\sigma_B$ . Это напряжение ограничивает конструкции от разрушения. Пластичные материалы одинаково работают на растяжение и на сжатие. Поэтому для них допускаемые напряжения на растяжение  $[\sigma_p]$  принимаются равными по величине сжимающим напряжениям  $[\sigma_c]$ :

$$[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}. \quad (3)$$

Здесь  $n_T$  — коэффициент запаса по текучести.

Таким образом, с учетом формул (1) и (3) *условие прочности* при растяжении-сжатии стержня переменного сечения из пластичных материалов будет иметь вид:

$$\max \sigma = \max \left| \frac{N}{F} \right| \leq [\sigma]. \quad (4)$$

Хрупкие материалы по-разному сопротивляются растяжению и сжатию, имеют разные величины соответствующих допускаемых напряжений  $[\sigma_p]$  и  $[\sigma_c]$  и, соответственно, рассчитываются и на растяжение и на сжатие.

О *жесткости* судят по величине деформаций (перемещений поперечных сечений). Перемещения  $\delta$  поперечных сечений в пределах упругих деформаций при растяжении-сжатии могут быть рассчитаны с помощью закона Гука:

$$\delta = \Delta l = \frac{Nl}{EF}, \quad (5)$$

где  $\Delta l$  — абсолютная продольная деформация;

$l$  — длина участка стержня;

$E$  — модуль продольной упругости (модуль Юнга), характеризующий жесткость материала при растяжении-сжатии.

Алгебраически суммируя значения абсолютных деформаций участков стержня с постоянными продольной силой и жесткостью сечений ( $N, EF = \text{const}$ ), появляется возможность построить эпюру осевых перемещений поперечных сечений стержня.

*Условие жесткости* выполняется, если:

$$\max \delta \leq [\delta], \quad (6)$$

где  $\max \delta$  – максимальное перемещение поперечных сечений;  
 $[\delta]$  – допускаемое перемещение.

Исходя из цели, могут быть выполнены три вида расчетов на прочность и жесткость:

- 1) *проектировочный* (подбор размеров поперечных сечений);
- 2) *определение грузоподъемности или допускаемой нагрузки*;
- 3) *проверочный* (проверка выполнения условия прочности или вычисление фактического коэффициента запаса прочности).

### Тема 3. Кручение (задачи № 4-5)

**Сдвиг и кручение.** Чистый сдвиг. Закон Гука для сдвига. Связь между тремя упругими постоянными для изотропных материалов. Кручение стержня круглого поперечного сечения. Внутренний силовой фактор при кручении - крутящий момент, построение его эпюры. Определение напряжений и деформаций при кручении. Абсолютный и относительный угол закручивания. Расчеты на прочность и жесткость при кручении. Кручение стержней с некруглым поперечным сечением.

*Кручение* – такой вид нагружения стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент  $M_x$  и, как следствие, касательные напряжения  $\tau$ .

При построении эпюры крутящего момента принято следующее *правило знака*: крутящий момент считается положительным, если внешний скручивающий момент вращает оставшуюся часть вокруг продольной оси, при взгляде на оставшуюся часть со стороны сечения, по часовой стрелке. И отрицательным – против хода часовой стрелки.

*Касательные напряжения  $\tau$*  в любой точке поперечного сечения стержня могут быть рассчитаны по формуле:

$$\tau = \frac{M_x \rho}{J_p}, \quad (7)$$

где  $\rho$  – расстояние от точки, в которой вычисляется напряжение, до центра тяжести сечения;

$J_p$  – полярный момент инерции поперечного сечения.

Касательные напряжения равны нулю в центре тяжести сечения и максимальны в точках контура. Они перпендикулярны радиусу, в пределах сечения изменяются по линейному закону и направлены в ту же сторону, что и крутящий момент (рис. 3а).

*Максимальные напряжения  $\tau_{max}$*  в точках контура сечения или опасных точках (при  $\rho = \rho_{max}$ ) равны:



$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_p}, \quad (8)$$

где  $W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}}$  — полярный момент сопротивления сечения, являющийся геометрической характеристикой прочности стержня круглого сечения при кручении.

Для стержня *круглого сплошного* поперечного сечения полярный момент инерции  $J_p$  и сопротивления  $W_p$  определяются по формулам:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}. \quad (9)$$

Соответственно для *кольцевого* (трубчатого) поперечного сечения с соотношением внутреннего и внешнего диаметров  $\alpha$ :

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} (1 - \alpha^4); \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} (1 - \alpha^4). \quad (10)$$

Условие прочности стержня круглого (кольцевого) поперечного сечения при кручении имеет вид:

$$\max \tau = \max \left| \frac{M_x}{W_p} \right| \leq [\tau]. \quad (11)$$

Перемещения поперечных сечений стержня при кручении могут быть выражены через абсолютные и относительные углы закручивания. Величина *абсолютного* угла закручивания  $\varphi$  стержня, состоящего из нескольких участков, в пределах которых  $M_x$ ,  $G$ ,  $J_p$  постоянны, находится с помощью закона Гука при кручении:

$$\varphi = \Delta\varphi = \frac{M_x l}{G J_p}, \quad (12)$$

где  $l$  — длины участков;

$G$  — модуль сдвига материала стержня;

$J_p$  — полярный момент инерции поперечного сечения.

*Относительный* (погонный) угол закручивания  $\theta$  — это абсолютный угол, приходящийся на единицу длины:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GJ_p}. \quad (13)$$

Условие жесткости при кручении обеспечивается в основном ограничением на относительные углы закручивания:

$$\max \theta = \max \left| \frac{M_x}{GJ_p} \right| \leq [\theta]. \quad (14)$$

Здесь  $[\theta]$  - допускаемый относительный угол закручивания.

При скручивании стержня *прямоугольного* поперечного сечения используются формулы теории упругости и опытные данные. Геометрические характеристики при этом выражаются с помощью моментов сопротивления  $W_k$  и инерции  $J_k$ . Максимальное напряжение  $\tau_{max}$  возникает на середине больших сторон прямоугольника:

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_k} = \frac{M_x}{ahb^2}, \quad (15)$$

где  $h, b$  - большая и меньшая сторона, соответственно;

-  $\tau'_{max}$  на середине меньших сторон (рис. 3б):

$$\tau'_{max} = \gamma \tau_{max}.$$

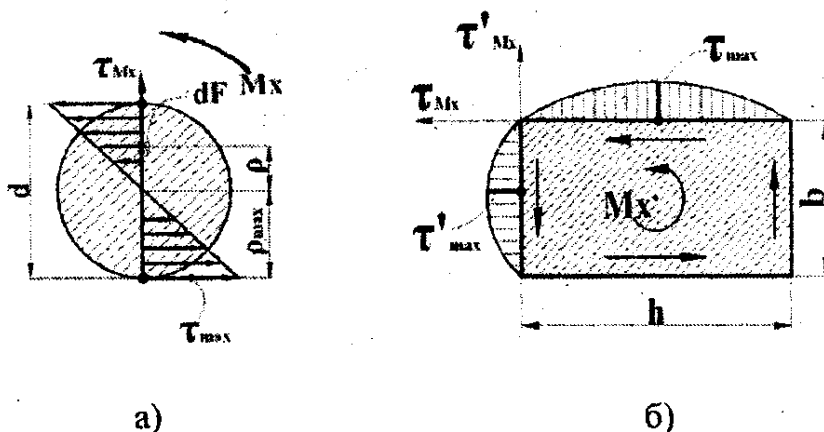


Рис. 3. Распределение касательного напряжения по сечению при кручении  
 а) круглого сечения;  
 б) прямоугольного сечения

Момент инерции  $J_k$  при закручивании прямоугольного сечения

$$J_k = \beta h b^3. \quad (16)$$

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  – опытные коэффициенты, определяемые по таблице 1, в зависимости от соотношения сторон прямоугольника.

Таблица 1

Значения опытных коэффициентов  $\alpha, \beta, \gamma$

Коэффициент	Отношение большей стороны $h$ к меньшей $b$								
	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0
$\alpha$	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313
$\beta$	0,141	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313
$\gamma$	1,000	0,859	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742

Напряжения  $\tau_{max}$ , абсолютные  $\varphi$  и относительные  $\theta$  углы закручивания стержней прямоугольного сечения рассчитываются по формулам (7), (12) и (13) при соответствующей замене полярных моментов инерции и сопротивления  $J_p, W_p$  на моменты  $J_k$  и  $W_k$ .

#### Тема 4. Изгиб (задачи № 6-8)

Изгиб. Чистый и поперечный изгиб. Определение напряжений при чистом изгибе. Касательное напряжение при поперечном изгибе (формула Журавского). Расчеты на прочность при изгибе. Особенности расчета на прочность балок из пластичных и хрупких материалов. Рациональная форма сечений. Перемещение поперечных сечений стержня при изгибе. Определение перемещений поперечных сечений с помощью интеграла Мора. Определение перемещений по способу Верещагина.

В общем случае при изгибе в поперечных сечениях стержня появляется два внутренних силовых фактора – изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ . Вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только один внутренний силовой фактор – изгибающий момент называется *чистым изгибом*. Если, кроме изгибающего момента имеется и поперечная сила, то это *поперечный изгиб*. Таким образом, обязательным внутренним силовым фактором при изгибе является изгибающий момент. Стержень, работающий на изгиб, называется *балкой*. С геометрической точки зрения изгиб характеризуется тем, что первоначально прямолинейная ось стержня обращается в криволинейную.

Если *силовая плоскость*, т.е. плоскость действия нагрузок, совпадает с одной из главных плоскостей, то имеет место *прямой изгиб*. Плоскость, проходя-

щая через продольную ось стержня и одну из главных центральных осей его поперечного сечения, называют *главной*. Любая ось симметрии является главной центральной. Главные оси между собой взаимно перпендикулярны, т.е. вторая главная ось будет перпендикулярна первой и проходить через центр тяжести сечения. При прямом изгибе ось изогнутого стержня совпадает с силовой плоскостью. Если силовая плоскость проходит через продольную ось стержня и не совпадает ни с одной из главных плоскостей, то это *косой* изгиб. При косом изгибе направление прогиба не совпадает с направлением силовой плоскости.

При построении эпюр поперечной силы и изгибающего момента приняты следующие правила знаков. Поперечная сила  $Q$  берется со знаком «плюс», если внешняя сила *вращает* отсеченную часть стержня относительно центра тяжести проведенного сечения по ходу часовой стрелки, и «минус» – против часовой стрелки. Знак изгибающих моментов определяется деформацией стержня: эпюра  $M$  строится со стороны *сжатых* волокон. При этом момент считается положительным – если сжаты верхние волокна, отрицательным – если сжатые волокна расположены внизу.

Основные свойства эпюр поперечных сил и изгибающих моментов:

1. На участке балки, где отсутствует распределенная нагрузка, эпюра  $Q$  представляет собой прямую линию, параллельную оси эпюры, а эпюра  $M$  – наклонную прямую.
2. На участке с равномерно распределенной нагрузкой поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент – по закону квадратной параболы с выпуклостью параболы на нагрузку.
3. На участке, где поперечная сила равна нулю, изгибающий момент постоянен (чистый изгиб).
4. В том сечении, где поперечная сила пересекает ось эпюры ( $Q = 0$ ), изгибающий момент  $M$  достигает экстремального значения (максимума или минимума).
5. В сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре  $Q$  должен быть скачок, равный по абсолютной величине этой силе.
6. В том сечении, где имеется сосредоточенный изгибающий момент (пара сил), на эпюре  $M$  будет скачок, равный по абсолютной величине данному моменту.

Нормальные напряжения  $\sigma$  в любой точке (по высоте) поперечного сечения стержня при изгибе определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{M}{J_{н.о.}} \cdot y, \quad (17)$$

где  $M$  – изгибающий момент в рассматриваемом сечении;

$y$  – расстояние от точки, в которой вычисляется напряжение до нейтральной оси;

$J_{н.о.}$  – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси.

Так как пластичные материалы одинаково работают на растяжение и сжатие, то балки из таких материалов, как правило, выполняются симметричного

сечения относительно нейтральной оси. При этом абсолютные величины наибольших нормальных растягивающих  $\max\sigma_p$  и сжимающих  $\max\sigma_c$  напряжений одинаковы (рис. 5):

$$\max\sigma_p = \max\sigma_c = \max\sigma = \frac{M}{J_{н.о.}} \cdot y_{\max}, \quad (18)$$

где  $y_{\max}$  - расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленных от нее точек сечения.

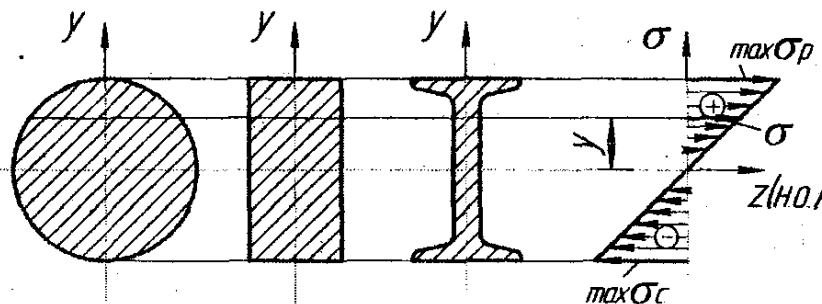


Рис. 5. Изменение нормального напряжения по высоте поперечного сечения

Для балок, размеры и форма которых по длине не меняются, опасным сечением является то, в котором возникает наибольший по абсолютной величине изгибающий момент  $\max M$ . Таким образом, условие прочности при изгибе стержней из пластичных материалов имеет вид:

$$\max\sigma = \left| \frac{\max M}{W_{н.о.}} \right| \leq [\sigma], \quad (19)$$

где  $W_{н.о.} = J_{н.о.} / y_{\max}$  - осевой момент сопротивления сечения относительно нейтральной оси;

$[\sigma]$  - допускаемое нормальное напряжение, величина которого определяется так же как при растяжении-сжатии.

Хрупкие материалы (например, чугун) по-разному сопротивляются растяжению и сжатию, имеют разные допускаемые напряжения. Поэтому при расчетах на прочность балок, выполненных из хрупких материалов, составляется два условия прочности для опасных точек опасного сечения – на растяжение и на сжатие.

При поперечном изгибе в сечениях балки возникают не только нормальные напряжения  $\sigma$ , но и касательные -  $\tau$ . Касательные напряжения  $\tau$  рассчитываются по формуле Д.И.Журавского:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{н.о.}^{отс.}}{J_{н.о.} \cdot b_y} \quad (20)$$

где  $Q$  – поперечная сила в рассматриваемом поперечном сечении;  
 $S_{н.о.}^{отс.}$  – статический момент отсеченной части относительно нейтральной оси;  
 $J_{н.о.}$  – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси;  
 $b_y$  – ширина поперечного сечения на том уровне, где вычисляется напряжение.

Касательные напряжения изменяются по высоте поперечного сечения по закону квадратной параболы. На поверхности сечения они равны нулю и достигают наибольшей величины на нейтральной оси и направлены в ту же сторону, что и поперечная сила (рис. 6). Для прямоугольного поперечного сечения максимальные касательные напряжения равны:

$$\max \tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{\sigma h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F} \quad (21)$$

где  $F = \sigma h$  - площадь поперечного сечения.

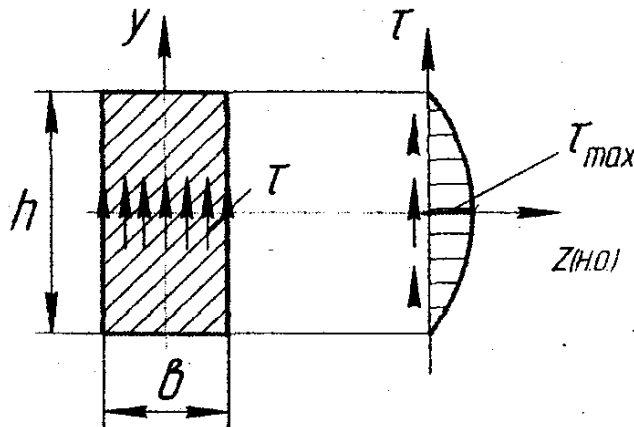


Рис. 6. Распределение касательных напряжений по высоте поперечного сечения

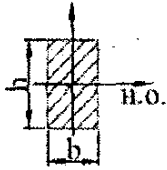
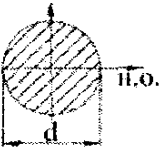
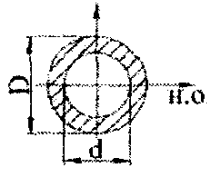
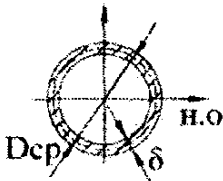
Расчет на прочность при изгибе осуществляется в основном по нормальным напряжениям. Касательные напряжения в расчетах на прочность учитываются в некоторых случаях, которые отдельно оговариваются.

Значения осевых моментов инерции и сопротивления  $J_{н.о.}$ ,  $W_{н.о.}$  и наибольших касательных напряжений  $\tau_{max}$  для наиболее часто встречающихся в практике поперечных сечений балок, приведены в таблице 2.

Для прокатных профилей типа двутавра, швеллера, равнобоких и неравнобоких уголков значения  $J_{н.о.}$ ,  $W_{н.о.}$  и другие размеры поперечных сечений регламентируются ГОСТ и приводятся в таблице сортамента [1, 8].

Таблица 2

Формулы для вычисления  $J_{н.о.}$ ,  $W_{н.о.}$  и  $\tau_{max}$

Поперечное сечение	Площадь	$J_{н.о.}$	$W_{н.о.}$	$\tau_{max}$
1. Прямоугольник 	$bh$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{3}{2} \frac{Q}{bh}$
2. Круг 	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{4}{3} \frac{Q}{\pi \cdot r^2}$
3. Кольцо 	$\frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$	$\frac{\pi D^4}{64} (1 - k^4)$ , где $k = \frac{d}{D}$	$\frac{\pi D^3}{32} (1 - k^4)$ , где $k = \frac{d}{D}$	$\frac{Q \cdot S^*}{J_{н.о.} \cdot b}$ , где $S^* = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^3 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3$ , $b = D - d$
4. Тонкостенный контур 	$\pi \cdot D_{cp} \cdot \delta$	$\pi \cdot R_{cp}^3 \cdot \delta$	$\frac{\pi \cdot \delta \cdot D_{cp}^2}{4}$	$\frac{2 \cdot Q}{\pi \cdot \delta \cdot D_{cp}^2}$

Расчет на жесткость предполагает определение перемещений поперечных сечений балки. Под действием внешних сил, вызывающих плоский изгиб балки, ее первоначально прямая ось искривляется, превращаясь в кривую линию, которая называется изогнутой осью балки.

Вследствие искривления оси балки центры тяжести поперечных сечений получают линейные перемещения, перпендикулярные к первоначальной, недеформированной оси, которые называются прогибом "у". Кроме того, поперечные сечения, оставаясь плоским и нормальным к изогнутой оси балки, поворачиваются вокруг нейтральной оси на угол "θ", называемым углом поворота.

Наибольшее распространение в инженерной практике при определении перемещений при изгибе получили собственно интеграл О. Мора и интеграл Мора, вычисленный по правилу А.К. Верещагина.

Формула интеграла О. Мора имеет вид:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_p M_l}{EJ_{н.о.}} dx \quad (22)$$

где δ – искомое перемещение (прогиб у или угол поворота θ);

$M_p$  – аналитическое выражение изгибающего момента в произвольном сечении балки от заданной нагрузки (грузовое состояние);

$M_l$  – аналитическое выражение изгибающего момента в произвольном сечении от единичной нагрузки (единичное состояние);

$EJ_{н.о.}$  – жесткость поперечного сечения балки при изгибе;

n – число слагаемых, каждое из которых имеет свой закон изменения изгибающих моментов от заданной и единичной нагрузок.

Интегрирование производится в пределах длины слагаемого (участка).

Для прямолинейных стержней постоянной жесткости, наиболее эффективным для вычисления перемещений является способ А.К. Верещагина (называемый также способом перемножения эпюр):

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{\omega \pm M_c^l}{EJ_{н.о.}}, \quad (23)$$

ω – площадь эпюры изгибающего момента от заданной нагрузки;

$M_c^l$  – ордината изгибающего момента от единичной нагрузки, взятая под центром тяжести площади ω эпюры моментов от заданной нагрузки;

n – число слагаемых, в пределах которых должны выполняться три условия:

1) жесткость балки должна быть постоянной;



2) эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки должна быть расположена по одну сторону от оси эпюры, т.е. либо внизу, либо вверху;

3) эпюра изгибающих моментов от единичной нагрузки должна очерчиваться одной прямой линией, без изломов, скачков.

Суммирование производится по всем *n* участкам. Знак «плюс» берется, когда обе эпюры моментов (грузовая и единичная) расположены по одну сторону осей эпюр, например - обе внизу. Знак «минус» - когда эпюры находятся по разные стороны.

Единичная нагрузка прикладывается в том сечении и в том направлении, в котором определяется перемещение. Причем, при вычислении *прогиба u* в качестве единичной нагрузки используется сосредоточенная безразмерная сила равная единице, а при расчете *угла поворота  $\theta$*  - единичный сосредоточенный момент.

Таким образом, при нахождении перемещений по способу Верещагина необходимо:

1) построить эпюру изгибающего момента от заданной нагрузки (грузовую эпюру);

2) снять заданную нагрузку и приложить единичную (силу или момент) в сечении, перемещение которого определяется. Построить от нее соответствующую эпюру изгибающего момента (единичную эпюру);

3) перемножить эпюры (грузовую и единичную).

## 2. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебник для технических вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 592 с.

2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.

3. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: Учебное пособие для вузов / Под ред. Л.С. Минина. – М.: Высш. шк., 2001. – 592 с.

4. Ицкович Г.М. Сопротивление материалов: Учебник для учащихся машиностроит. техникумов. – М.: Высш. шк., 1986. – 352 с.

5. Сопротивление материалов: Учебное пособие / Н.А. Костенко, С.В. Баласникова, Ю.В. Волошановская и др.; Под ред. Н.А. Костенко. – М.: Высш. шк., 2000. – 430 с.

6. Бубнов В.А., Тютрин С.Г. Определение перемещений поперечных сечений балок при изгибе: Методические указания по сопротивлению материалов для индивидуальной работы. – Курган: Изд-во Курганского гос. ун-та, 1995. – 28 с.

7. Костенко С.Г. Расчеты на прочность и жесткость при изгибе: Учебное пособие. – Курган: Изд-во Курганского гос. ун-та, 1999. – 53 с.

8. Костенко С.Г. Расчеты на прочность элементов машиностроительных инструкций при изгибе и сложном сопротивлении: Учебное пособие. – Курган: Изд-во Курганского гос. ун-та, 2005. – 106 с.

9. Тютрин С.Г. Построение эпюр внутренних силовых факторов: Учебное пособие. – Курган: Изд-во Курганского гос. ун-та, 1997. – 51 с.

10. Тютрин С.Г. Геометрические характеристики плоских сечений и расчеты на прочность: Учебное пособие. – Курган: Изд-во Курганского гос. ун-та, 2000. – 70 с.

### 3. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Задача №1** (таблица 3). Для прямого стержня постоянного поперечного сечения, испытывающего растяжение или сжатие, найти с помощью метода сечений величины внутреннего силового фактора - продольной силы  $N$  построить ее эпюру.

Определить из расчета на прочность допускаемую нагрузку  $[P]$ , если площадь поперечного сечения стержня  $F = 10 \text{ см}^2$ , предел текучести материала стержня  $\sigma_T = 300 \text{ МПа}$ , необходимый коэффициент запаса по текучести  $n_T = 2$ .

**Задача №2** (таблицы 3, 4). Для стержневой системы выполнить проекторочный расчет на прочность, определив необходимые площади поперечных сечений  $F_i$  стержней.

Принять величину сосредоточенной силы  $P = 50 \text{ кН}$ ; материал стержней – сталь; допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$ . Углы наклона стержней  $\alpha, \beta$  и соотношения площадей их поперечных сечений  $F_i/F_1$  приведены в таблице 4 (принять  $F_5 = F_1$ ).

**Задача №3** (таблицы 3, 4). Осуществить проверочный расчет на прочность и жесткость ступенчатого бруса. Построить эпюры продольных сил  $N$ , нормальных напряжений  $\sigma$  и осевых перемещений поперечных сечений  $\delta$ . Материал бруса, допускаемое напряжение  $[\sigma]$ , модуль продольной упругости  $E$  и соотношение площадей поперечных сечений  $F_i/F_1$  указаны в таблице 4.

Исходные данные: площадь поперечного сечения первого стержня  $F_1 = 10 \text{ см}^2$ ; сила  $P = 10 \text{ кН}$ ; длина  $l = 1 \text{ м}$ ; допускаемое перемещение  $[\delta] = 50 \text{ мкм}$ .

**Задача №4** (таблица 3). Для стержня круглого поперечного сечения, нагруженного скручивающими моментами (такой стержень называется валом), найти величины внутреннего силового фактора - крутящего момента  $M_x$  и построить его эпюру.

Проверить прочность вала, если его диаметр равен  $d = 20 \text{ см}$ , скручивающий момент  $L = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$  и допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$ .

**Задача №5** (таблица 3). Выполнить проекторочный расчет на прочность и жесткость (подобрать необходимый размер  $d$ ) для стержня, испытывающего кручение. Построить эпюры крутящего момента  $M_x$ , касательных напряжений  $\tau$  и абсолютных углов закручивания  $\phi$  поперечных сечений. На участке 1 стержня

жень имеет сплошное круглое сечение диаметром  $d$ , на участке 2 - кольцевое поперечное сечение с наружным диаметром  $d$  и внутренним диаметром  $d_0 = 0,7d$ ; на участке 3 – поперечное сечение прямоугольной формы со сторонами  $d$  и  $a, d$ . Материал стержня – сталь с модулем сдвига  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа. Допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 80$  МПа; допускаемый относительный угол закручивания  $[\theta] = 0,3$  град/м; величина силы  $P = 100$  кН и длины  $l = 0,5$  м.

**Задача №6** (таблица 3). Для стержня, испытывающего плоский прямой изгиб (консольной балки), требуется найти величины внутренних силовых факторов – поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$  и построить их эпюры.

Определить допускаемую величину интенсивности равномерно распределенной нагрузки  $[q]$ , если консольная балка имеет квадратное поперечное сечение со стороной  $a = 10$  см; материал - сталь с допускаемым нормальным напряжением  $[\sigma] = 180$  МПа; длина  $l = 1$  м.

**Задача №7** (таблицы 3, 4). Для двухопорной балки необходимо построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .

Используя эпюру изгибающих моментов, найти опасное сечение балки.

1. Выполнить проектировочный расчет на прочность при заданной схеме нагружения:

- вычислить необходимый диаметр  $d$  сплошного круглого сечения;
- определить наружный  $d$  и внутренний  $d_0$  диаметры кольцевого сечения с соотношением диаметров  $d_0/d = 0,7$ ;
- найти требуемые размеры  $h$  и  $b$  прямоугольного сечения с отношением сторон  $h/b = 2$ ;
- подобрать, используя ГОСТ 8239 – 89, необходимый номер двутавра.

2. Начертить (в масштабе) поперечные сечения. Сравнить экономичность сечений, определив соотношение расхода материала на единицу длины балки (путем сопоставления площадей поперечных сечений по отношению к площади двутавра).

3. Построить эпюры изменения нормального  $\sigma$  и касательного  $\tau$  напряжений по высоте прямоугольного поперечного сечения, указав их максимальные численные значения и направление.

Материал балки – сталь с допускаемым нормальным напряжением  $[\sigma] = 160$  МПа. Длина  $l = 0,5$  м. Численные значения интенсивности равномерно распределенной нагрузки  $q$  приведены в таблице 4 (столбец 8).

**Задача №8** (таблицы 3, 4). Для приведенной балки с постоянной жесткостью поперечного сечения ( $EJ_{н.о} = \text{const}$ ) построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента.

Определить с помощью правила Верещагина прогиб  $y$  и угол поворота  $\theta$  поперечных сечений, указанных в таблице 4 (столбец 9). Решение представить в общем виде (в долях  $ql$ ).

Таблица 3

Данные для задач 1 - 8

№ строки (цифра шифра)	№ варианта	Численные величины коэффициентов					
		нагрузок			длин участков		
		$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	3	- 0,5	1	0,5	0,5	3
2	2	- 2,5	1	- 1,5	1	1	2
3	3	2	- 1,5	2	1,5	2	1
4	4	- 1,5	2	- 1	2	3	0,5
5	5	1	- 2,5	1,5	2,5	0,5	0,5
6	6	- 0,5	3	- 2	3	1,5	1
7	7	1	- 2,5	1	0,5	2,5	2
8	8	- 1,5	2	- 1,5	1	1	3
9	9	2	- 1,5	2	1,5	2	2,5
0	10	- 2,5	1	- 3	2	3	2
	$e$	$d$	$e$	$z$	$e$	$d$	$e$

Направление нагрузок, имеющих знак *минус* перед коэффициентами, должно быть изменено на противоположное указанному на схеме. Затем в расчетах знак минус не учитывать.

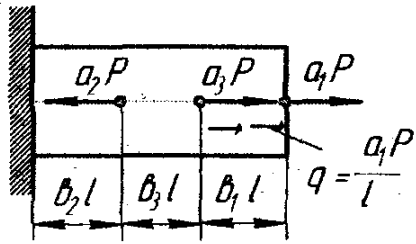
Таблица 4

Данные к задачам 2, 3, 7, 8

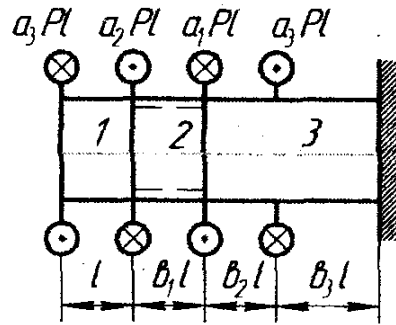
№ строки (цифра шифра)	Задача №2		Задачи №2, 3			Задача №3	Задача №7	Задача №8
	Углы, град		Соотношение площадей			Материал, допускаемое напряжение $[\sigma]$ , модуль продольной упругости $E$ , МПа	Интенсивность $q$ , кН/м	Искомое перемещение (прогиб $U$ и угол поворота $\theta$ )
	$\alpha$	$\beta$	$\frac{F_2}{F_1}$	$\frac{F_3}{F_1}$	$\frac{F_4}{F_1}$			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	70	25	3	2,5	0,5	(сталь) $[\sigma] = 160$ ; $E = 2 \cdot 10^5$	10	$U_C, \theta_A$
2	65	30	2,5	2,25	0,8	(сталь) $[\sigma] = 200$ ; $E = 2 \cdot 10^5$	15	$U_D, \theta_B$
3	60	35	2	2	1	(титан) $[\sigma] = 330$ ; $E = 1,2 \cdot 10^5$	20	$U_C, \theta_B$
4	55	40	1,5	1,75	1,2	(алюминий) $[\sigma] = 80$ ; $E = 7 \cdot 10^4$	25	$U_D, \theta_A$
5	50	45	1	1,5	1,5	(латунь) $[\sigma] = 60$ ; $E = 1 \cdot 10^5$	30	$U_C, \theta_D$
6	45	50	0,5	1,25	1,8	(сталь) $[\sigma] = 250$ ; $E = 2 \cdot 10^5$	25	$U_D, \theta_D$
7	40	55	1	1	2	(медь) $[\sigma] = 60$ ; $E = 1,2 \cdot 10^5$	20	$U_C, \theta_C$
8	35	60	1,5	0,75	2,2	(бронза) $[\sigma] = 80$ ; $E = 1,1 \cdot 10^5$	15	$U_C, \theta_A$
9	30	65	2	0,5	2,5	(титан) $[\sigma] = 330$ ; $E = 1,2 \cdot 10^5$	10	$U_D, \theta_B$
0	40	70	2,5	0,25	3	(дюралюминий) $[\sigma] = 100$ ; $E = 7,1 \cdot 10^4$	5	$U_D, \theta_A$
	$e$	$\vartheta$	$e$	$z$	$\vartheta$	$e$	$z$	$e$

# Вариант 1

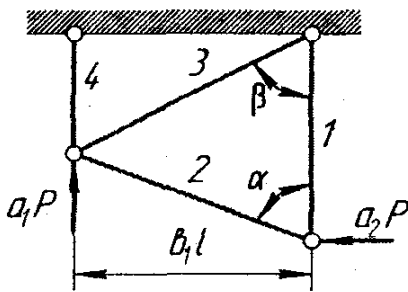
Задача №1



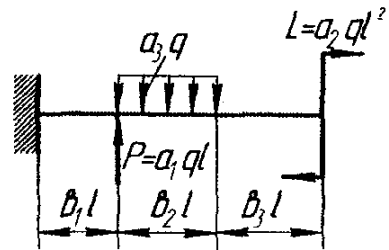
Задача №5



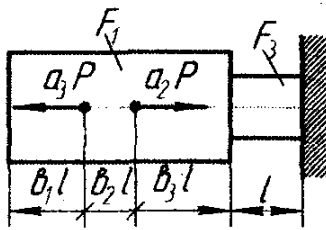
Задача №2



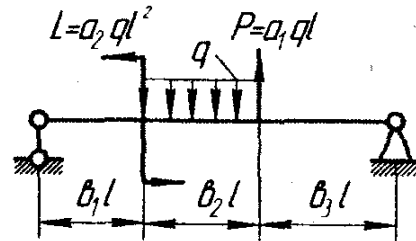
Задача №6



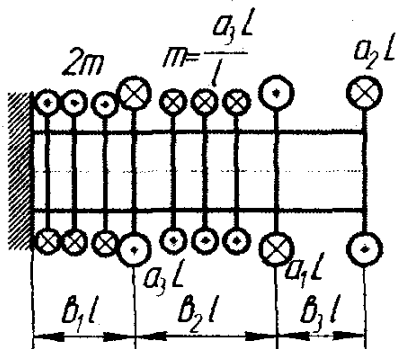
Задача №3



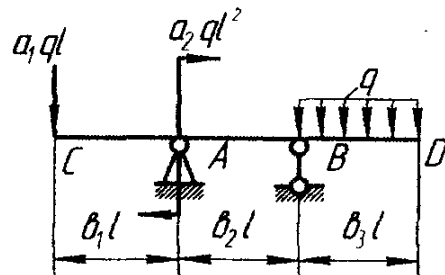
Задача №7



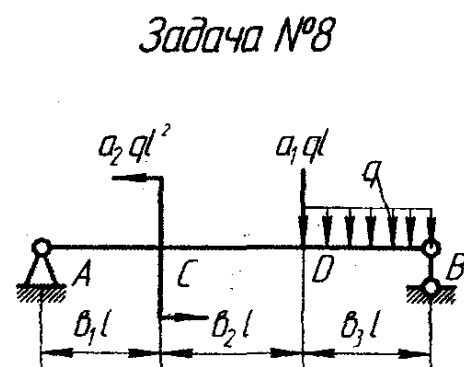
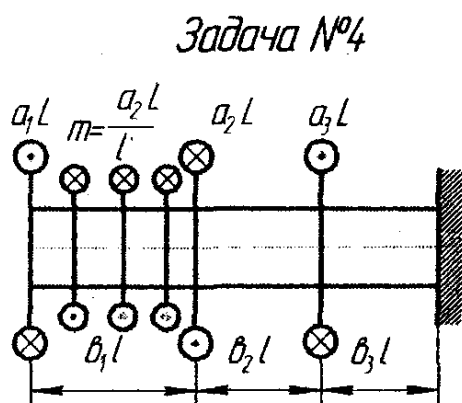
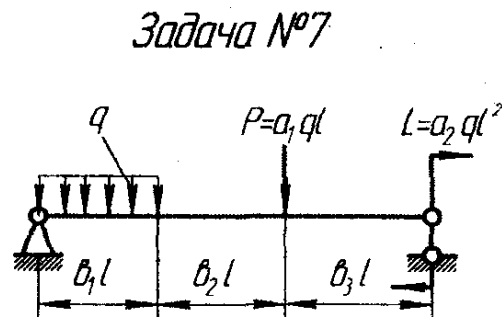
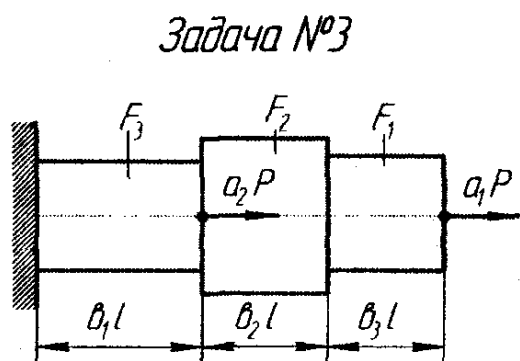
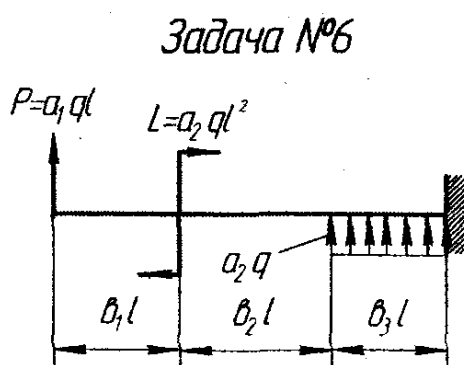
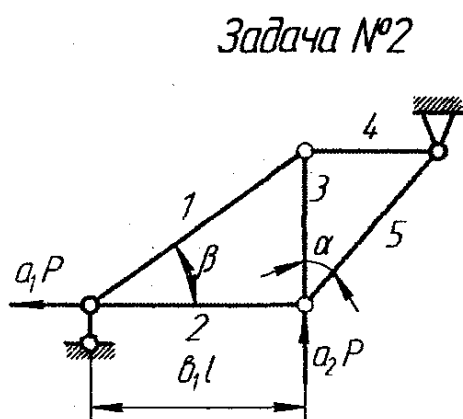
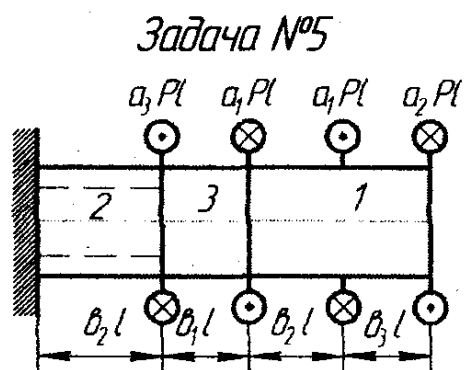
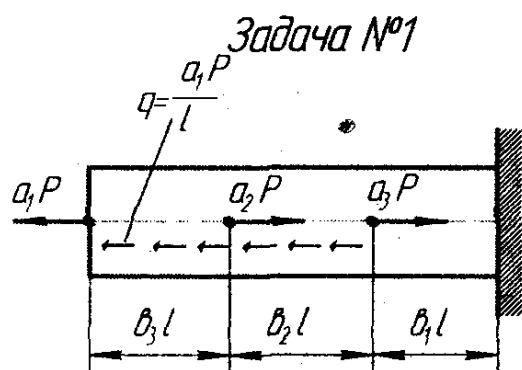
Задача №4



Задача №8

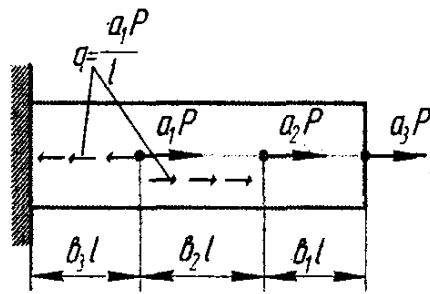


## Вариант 2

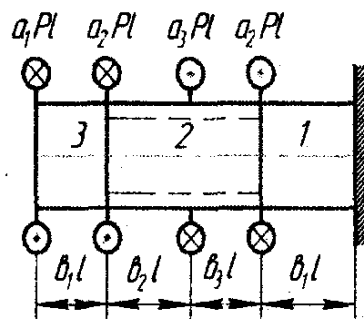


# Вариант 3

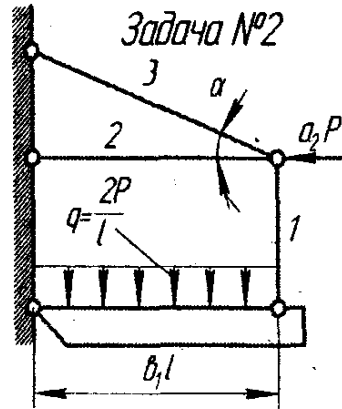
Задача №1



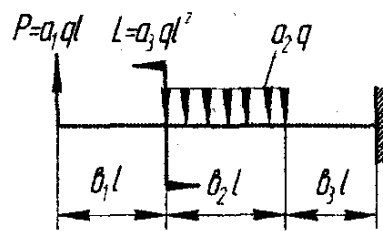
Задача №5



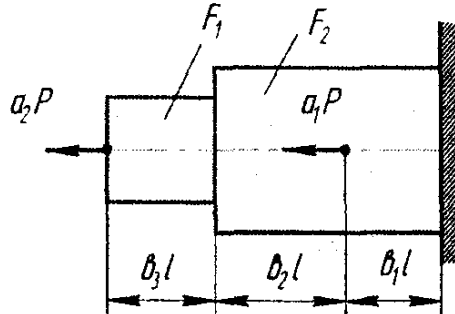
Задача №2



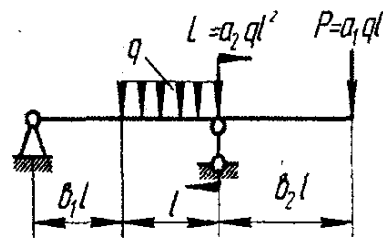
Задача №6



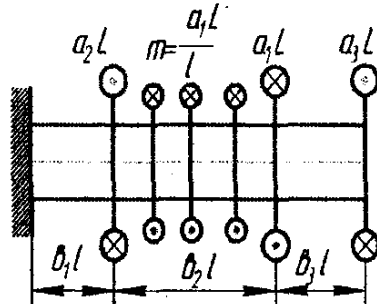
Задача №3



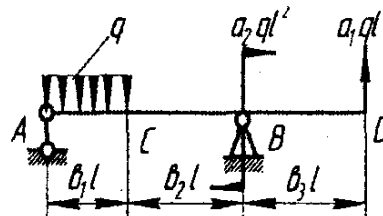
Задача №7



Задача №4



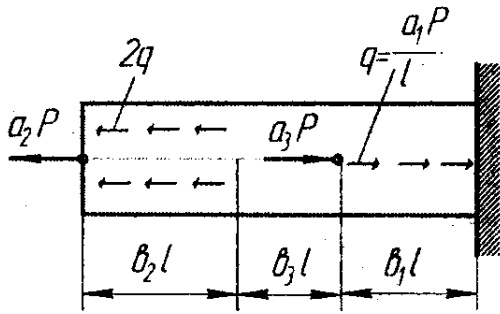
Задача №8



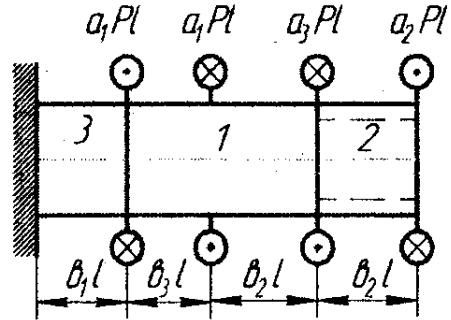


# Вариант 4

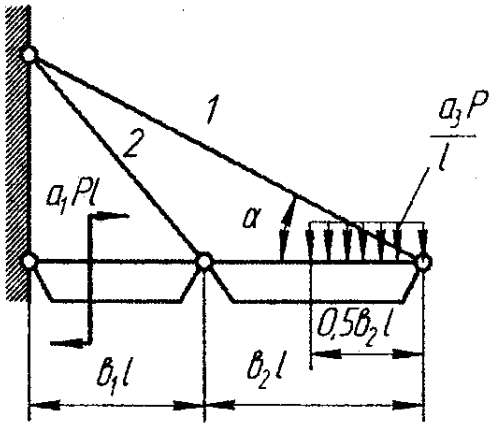
Задача №1



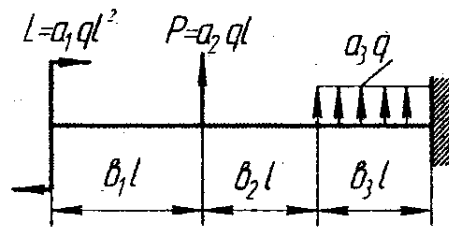
Задача №5



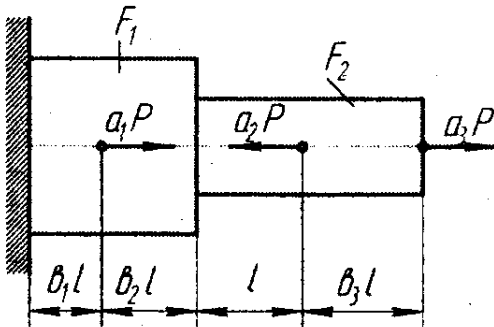
Задача №2



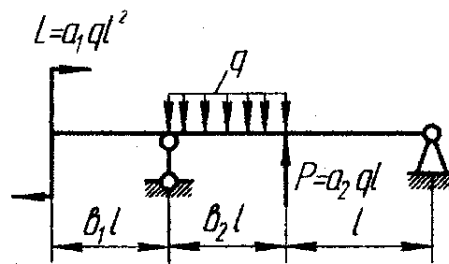
Задача №6



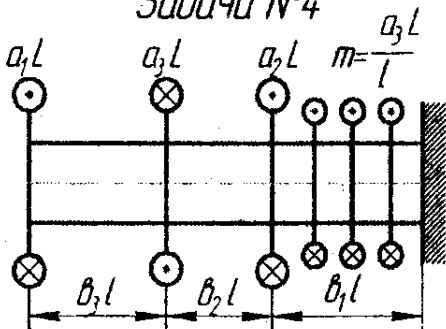
Задача №3



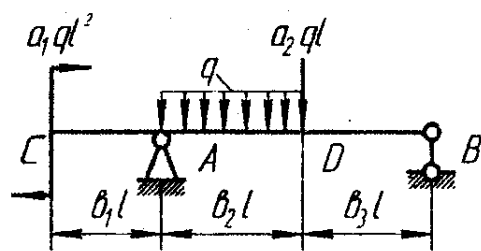
Задача №7



Задача №4

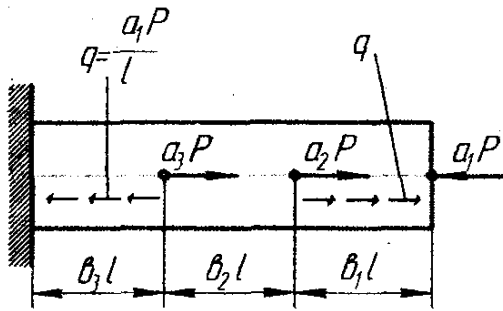


Задача №8

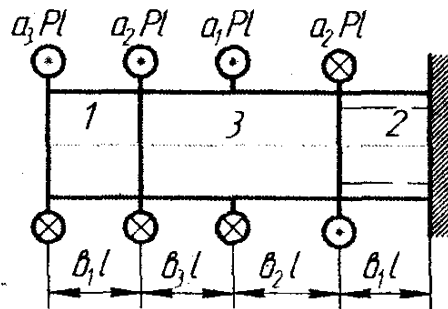


# Вариант 5

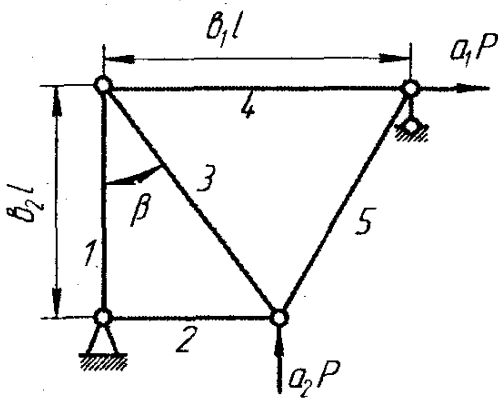
Задача №1



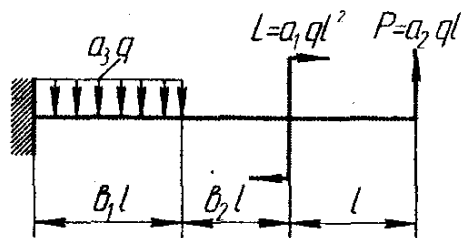
Задача №5



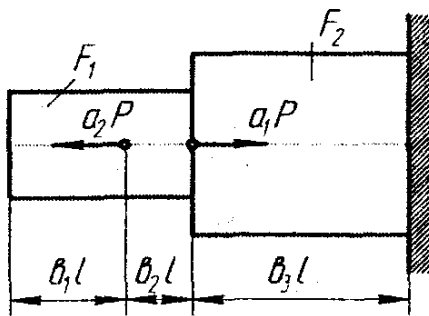
Задача №2



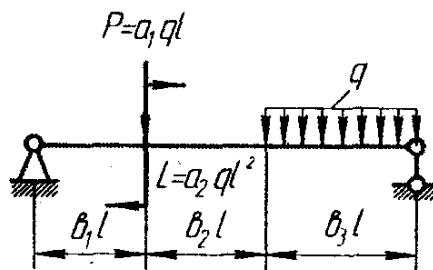
Задача №6



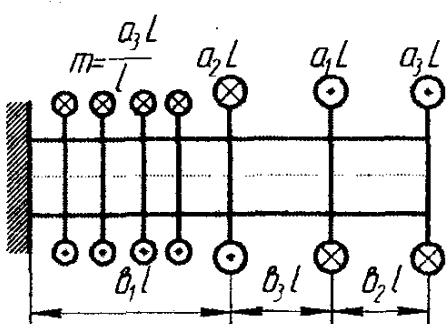
Задача №3



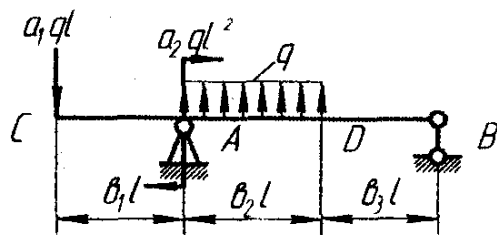
Задача №7



Задача №4

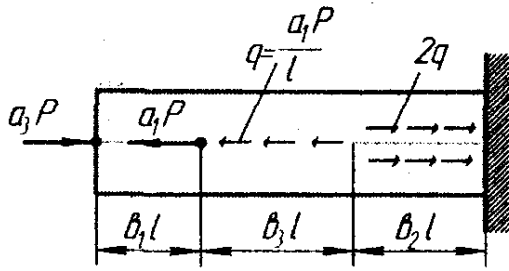


Задача №8

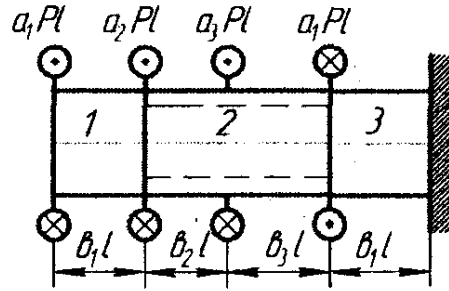


# Вариант 6

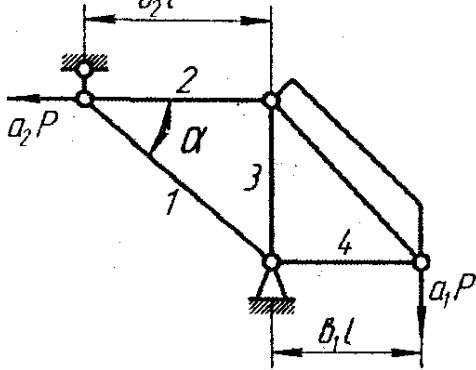
Задача №1



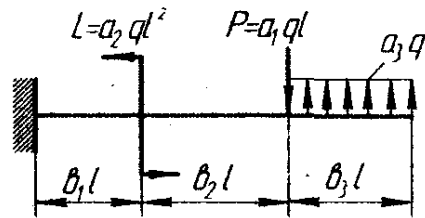
Задача №5



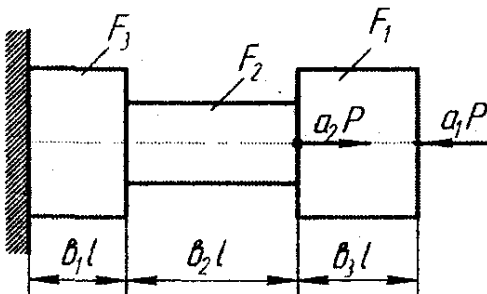
Задача №2



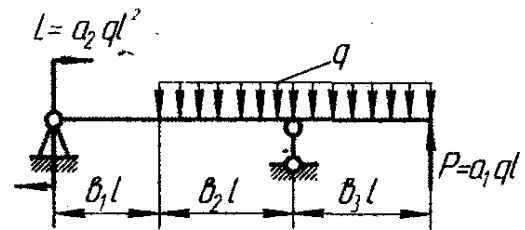
Задача №6



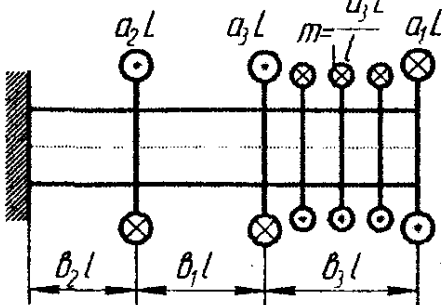
Задача №3



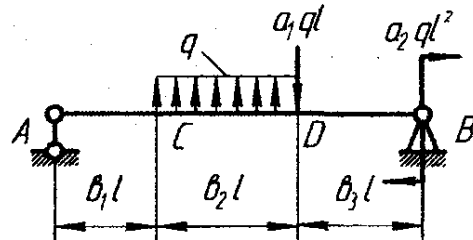
Задача №7



Задача №4

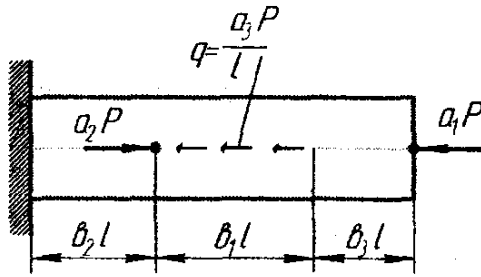


Задача №8

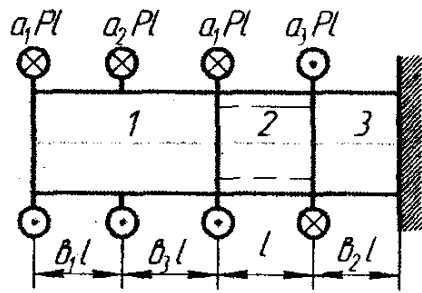


# Вариант 7

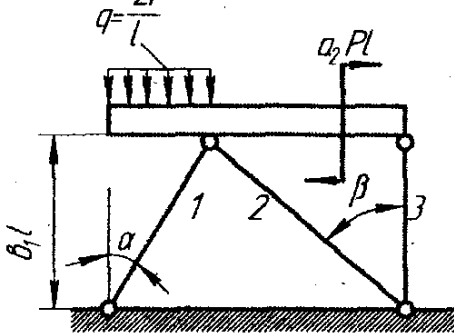
Задача №1



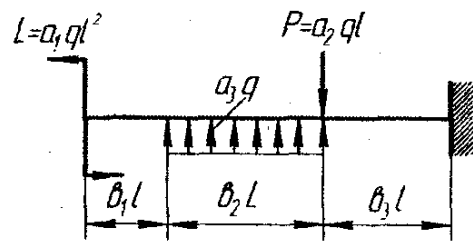
Задача №5



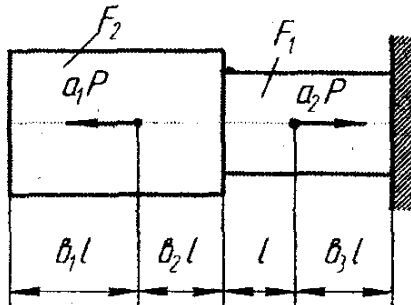
Задача №2



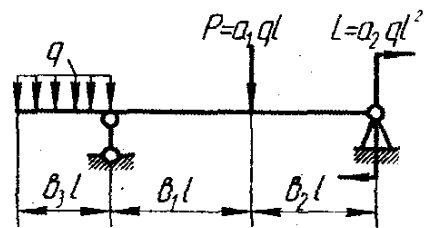
Задача №6



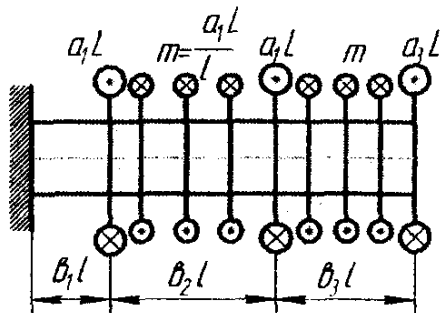
Задача №3



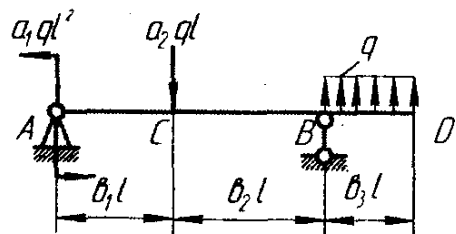
Задача №7



Задача №4

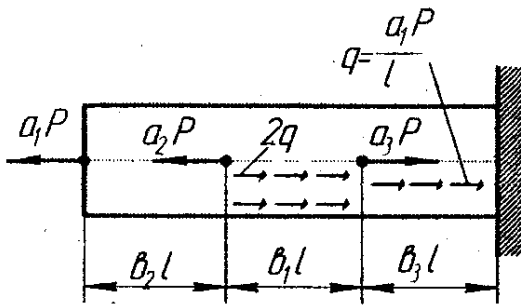


Задача №8

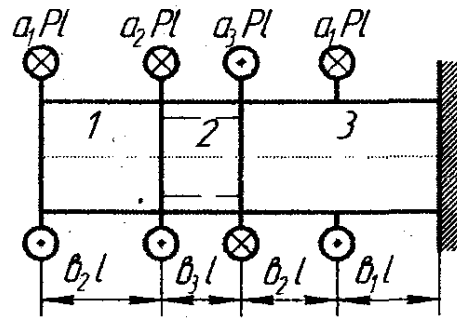


# Вариант 8

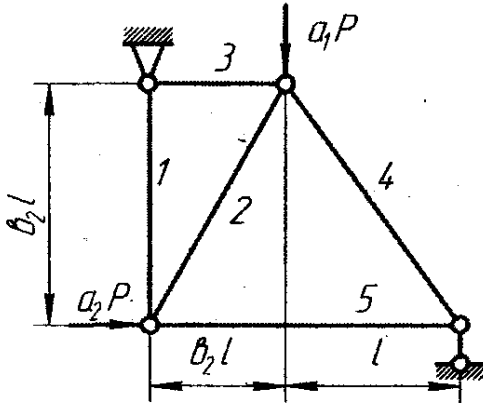
Задача №1



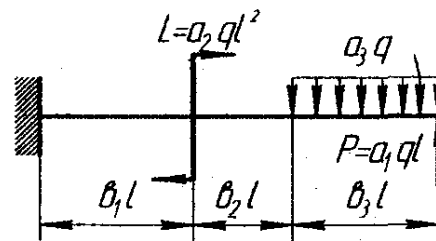
Задача №5



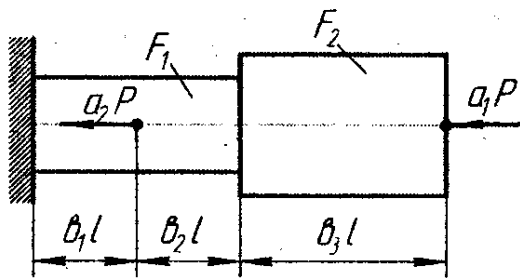
Задача №2



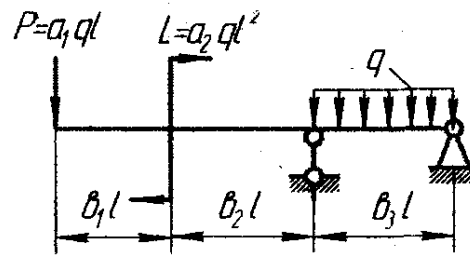
Задача №6



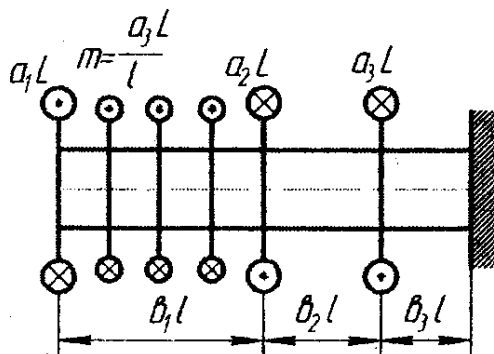
Задача №3



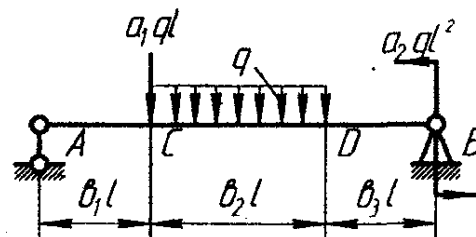
Задача №7



Задача №4

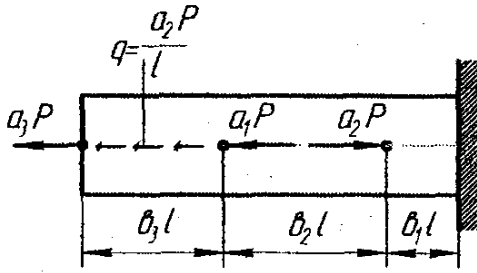


Задача №8

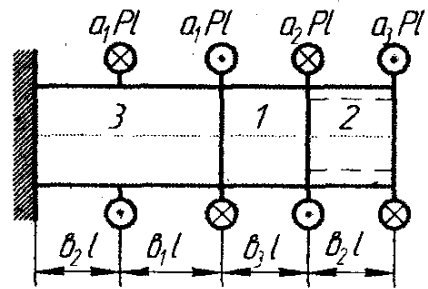


# Вариант 9

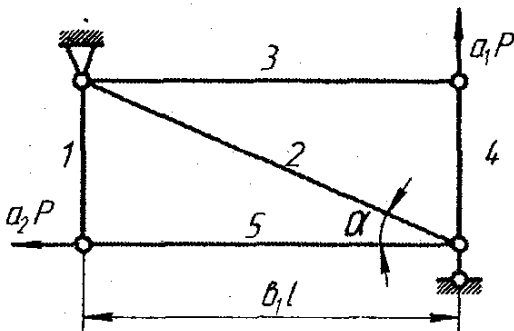
Задача №1



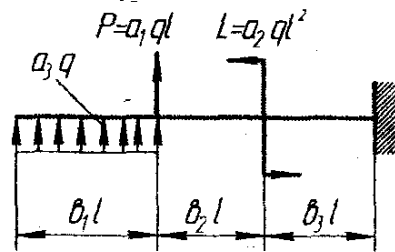
Задача №5



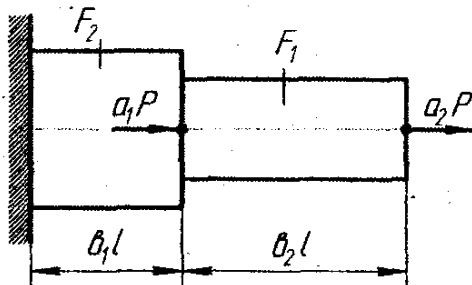
Задача №2



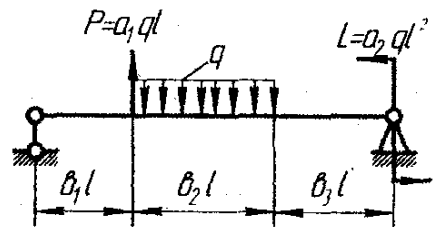
Задача №6



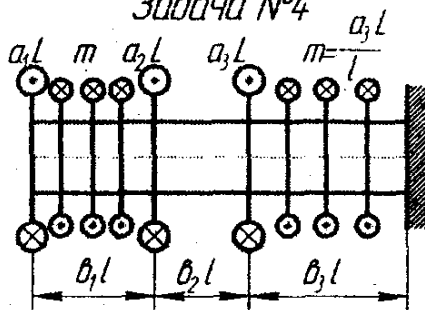
Задача №3



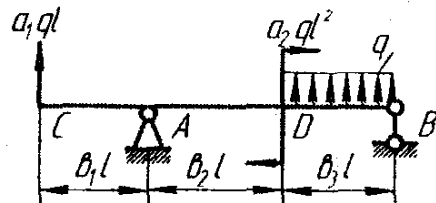
Задача №7



Задача №4

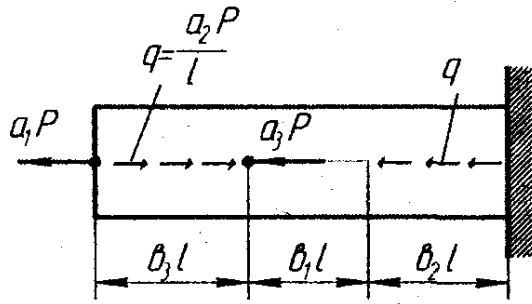


Задача №8

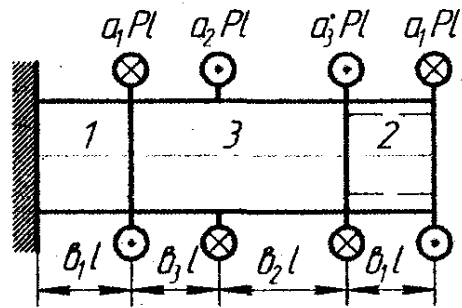


# Вариант 10

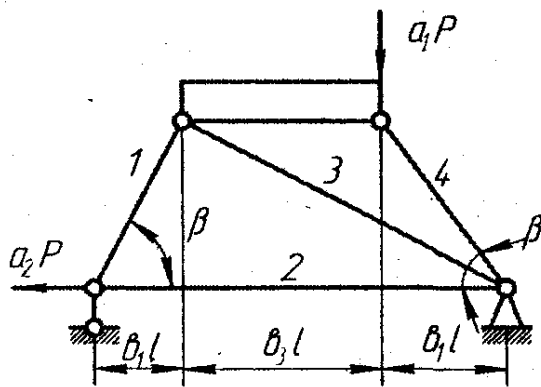
Задача №1



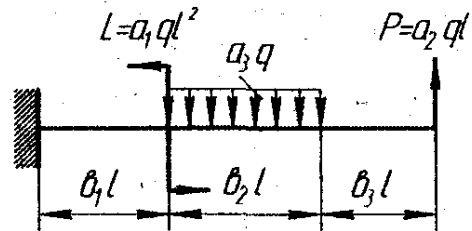
Задача №5



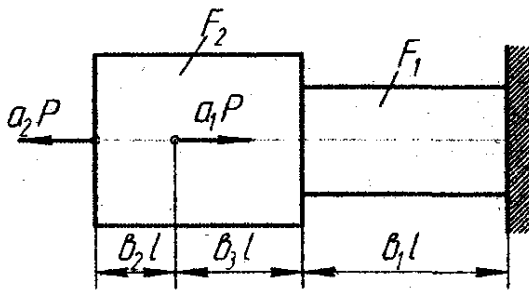
Задача №2



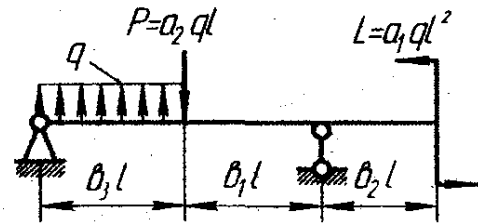
Задача №6



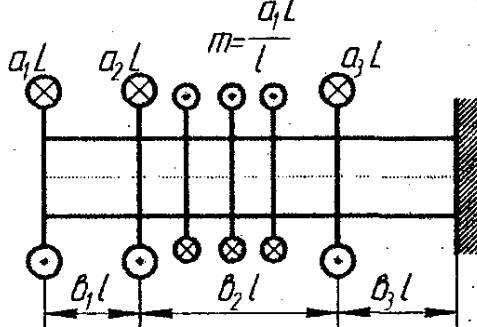
Задача №3



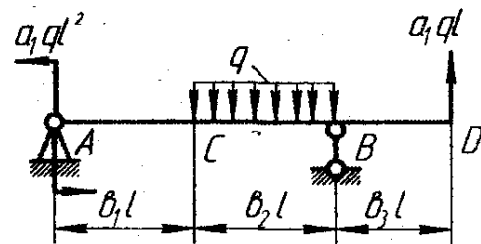
Задача №7



Задача №4



Задача №8



#### 4. ВЫБОР ВАРИАНТА И ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Вариант и исходные данные для выполнения задач контрольной работы выбираются из таблиц 3 и 4 в соответствии с учебным шифром студента (№ студенческого билета или зачетной книжки) и первыми шестью буквами русского алфавита, которые следует расположить под цифрами шифра. Предположим учебный шифр – 386054:

шифр (номер строки) -	3	8	6	0	5	4
буквы (номер столбца) -	а	б	в	г	д	е

Из каждого вертикального столбца таблиц, обозначенного внизу буквой, надо взять число, стоящее в горизонтальной строке, соответствующей цифре шифра. Так например, для таблицы 1 столбцы обозначены буквами е, д, г. Тогда, при указанном выше шифре 386054, студент должен взять из столбца е строку номер 4 (вариант №4), из столбца д – строку 5 ( $a_1 = 1$ ), из столбца г - строку номер 0 ( $a_3 = -1$ ).

Если числовые коэффициенты  $a_1, a_2, a_3$  имеют отрицательный знак, то на расчетной схеме следует изменить направление нагрузки на противоположное, затем в расчетах знак минус не принимать во внимание.

Работы, выполненные с нарушением этих требований, не засчитываются.

#### 5. ОФОРМЛЕНИЕ РАБОТЫ

1. Каждая контрольная работа выполняется в отдельной ученической тетради с полями для замечаний рецензента, пронумерованными страницами. Допускается применение листов писчей бумаги формата А4 (297x210), скрепленных в виде альбома.

2. В заголовке контрольной работы следует указать: наименование учебного заведения и кафедры; номер контрольной работы; название дисциплины; фамилию, имя и отчество студента (полностью); учебный шифр; номер группы; название факультета и специальности; фамилию и инициалы преподавателя; год; почтовый адрес; отметку деканата.

3. Каждая задача должна содержать формулировку (полностью выписать ее условие), исходные данные и две расчетные схемы. Одна схема должна полностью соответствовать рисунку задания варианта, вторая – схеме с конкретными значениями выбранных из таблиц коэффициентов и истинным направлением нагрузок.

4. Решение следует сопровождать краткими, последовательными, без сокращения (кроме общепринятых) слов, пояснениями и чертежами, на которых все входящие в расчет величины должны быть показаны в буквенном выражении. Следует избегать многословных пояснений и пересказа учебника. При использовании формул или данных, отсутствующих в рекомендованных учебниках, требуется указать использованный источник (автора, название, год издания, страницу, номер формулы).

5. Необходимо представить размерность всех окончательно полученных величин в соответствии с международной системой единиц.



6. При возвращении контрольной работы для доработки, студент должен учесть все замечания и предложения и представить работу над ошибками в тетради или на листах, вложенных в нее. Отдельно от тетради с выполненной работой исправления не рассматриваются.

7. Настоятельно рекомендуется выполнять контрольную работу самостоятельно. Это позволит в большей степени усвоить изучаемый материал и существенно увеличить шанс сдачи экзамена по сопротивлению материалов.

8. Студент допускается к сдаче экзамена по курсу при выполнении графика контрольных мероприятий – после защиты предлагаемой контрольной работы и, предусмотренных учебным планом, лабораторных работ.

## 6. ПЛАН РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задачи контрольной работы целесообразно выполнять по определенному плану.

Напоминаем: для каждой задачи необходимо выписать ее условие; представить исходные данные и две схемы (заданную и конечную) в выбранном масштабе с приложенными нагрузками.

### *План решения задачи №1*

1. Построить с помощью метода сечений эпюру продольной силы  $N$ .

Построение эпюр внутренних силовых факторов рекомендуется осуществлять ускоренным способом (с помощью сечений, проводимых на бесконечно близких расстояниях от начала и конца каждого силового участка [ 9 ].

На примере первых двух сечений и оставшихся частей покажите, как вы находите величину и направление продольной силы.

*В задачах подобного типа со свободным концом и жесткой заделкой (смотри задачи № 3, 4, 5, 6) опорные реакции в заделке можно предварительно не определять. Для этого стройте эпюры со свободного торца стержня, всегда отбрасывая ту часть стержня, где имеется заделка.*

2. Найти опасное сечение, т.е. сечение, где действует наибольшая по модулю продольная сила. Выписать значение этой силы -  $\max N$ .

3. Учитывая материал стержня, величину предельного напряжения и коэффициента запаса, вычислить численное значение допускаемого нормального напряжения  $[\sigma]$ .

4. Записать условие прочности. Для стержня с постоянным по длине поперечным сечением опасным будет то сечение, где продольная сила достигает максимального значения, т.е. условие прочности будет иметь вид:

$$\max \sigma = \left| \frac{\max N}{F} \right| \leq [\sigma].$$

5. Исходя из приведенного условия прочности, рассчитать величину допускаемой нагрузки  $[P]$ .

### План решения задачи № 2

1. Используя уравнения статики, определить, если это необходимо, опорные реакции в опорах.

2. С помощью метода сечений найти продольные силы  $N_1, N_2, \dots, N_n$ , возникающие в каждом из стержней.

При решении задачи покажите оставшиеся части, внутренние силовые факторы –  $N_i$ . Составьте уравнения равновесия и вычислите неизвестные продольные силы. Укажите их направление и численную величину, вид нагружения (растяжение или сжатие).

3. При найденных продольных силах и заданных соотношениях между площадями поперечных сечений стержней  $F_i/F_1$ , рассчитать нормальные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ . Величину напряжений рекомендуется представить в общем виде, выразив через  $F_1$ .

4. Найти опасный стержень, т.е. стержень, в котором возникает наибольшее по модулю напряжение  $\max\sigma$ .

5. Записать условие прочности и вычислить площадь сечения  $F_1$  первого стержня. Используя заданные соотношения площадей, определить остальные площади поперечных сечений стержней.

### План решения задачи № 3

1. Построить с помощью метода сечений эпюру продольной силы. Обращаем внимание на то, что любой внутренний силовой фактор зависит только от прикладываемой нагрузки.

2. Вычислить численную величину нормальных напряжений, возникающих в поперечных сечениях (в качестве размерности напряжения рекомендуются – МПа, т.е. мегапаскали). При нахождении напряжений учитывается не только нагрузка, но и размеры поперечного сечения (площадь).

3. Найти опасный участок бруса, на котором возникают наибольшие по абсолютной величине нормальные напряжения  $\max\sigma$ .

4. Сформулировать условие прочности. Сравнить между собой величины максимального рабочего и допускаемого напряжения. Сделать вывод о прочности данного стержня.

5. Построить эпюру осевых перемещений поперечных сечений стержня (в микрометрах). Найти наибольшее перемещение сечения.

6. Записать условие жесткости и сделать вывод о жесткости данного стержня.

### План решения задачи № 4

1. Построить, используя метод сечений, эпюру внутреннего силового фактора при кручении - крутящего момента  $M_x$ .

2. Найти значение максимального по модулю крутящего момента  $\max M_x$ .

3. Вычислить величину наибольшего касательного напряжения. Так как стержень имеет постоянное по длине круглое поперечное сечение, то опасным будет то сечение, где действует наибольший внутренний силовой фактор -  $\max M_x$ :

$$\max \tau = \left| \frac{\max M_x}{W_p} \right| \leq [\tau].$$

4. Сравнить между собой величины расчетного и допускаемого напряжений. Сделать вывод о прочности стержня.

#### **План решения задачи № 5**

1. Построить эпюру крутящего момента  $M_x$ .
  2. Рассчитать касательные напряжения в опасных точках сечений, на каждом участке, учитывая нагрузку (выраженную через  $M_x$ ) и форму поперечного сечения, определяемую моментами сопротивления  $W_p$  и  $W_k$ . Для участков с прямоугольным сечением при вычислении  $W_k$  используйте значения коэффициентов (табл. 1).
  3. В целом для стержня определить максимальное значение касательного напряжения, и из условия прочности вычислить требуемый размер  $d$  поперечного сечения.
  4. Рассчитать в пределах каждого участка относительные (погонные) углы закручивания  $\theta$ . Выявить опасный участок стержня.
  5. Найти необходимый размер сечения  $d$ , исходя из условия жесткости. *Обратите внимание на то, что размерность допускаемого угла задана в градусах на метр. В условии жесткости размерности расчетных и допускаемых величин должны совпадать.*
- Окончательно установить величину  $d$ , удовлетворяющую условию и прочности и жесткости.
6. Построить эпюру абсолютного угла закручивания  $\phi$  поперечных сечений. С учетом найденного значения диаметра угол закручивания рекомендуется вычислить в градусах.

#### **План решения задачи № 6**

1. Построить с помощью метода сечений, «двигаясь» от свободного конца стержня к заделке, эпюры поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ .
2. Исходя из анализа эпюры изгибающего момента, установить опасное сечение балки (найти значение максимального по модулю изгибающего момента  $\max M$ ).
3. Сформулировать условие прочности при изгибе и найти из него величину допускаемой нагрузки, которая для данной балки выражена через интенсивность равномерно распределенной нагрузки  $[q]$ .

### План решения задачи № 7

1. Определить реакции связей.
2. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента.
3. Используя эпюру изгибающего момента, найти опасное сечение балки.
4. Записать условие прочности при изгибе и выразить из него расчетную величину осевого момента сопротивления относительно нейтральной оси

$$W_{н.о.}^{расч.}$$

5. Используя расчетные зависимости, по определению  $W_{н.о.}$  для различных типов поперечных сечений (табл. 2), найти:
  - а) диаметр  $d$  сплошного круглого сечения;
  - б) наружный  $d$  и внутренний  $d_0$  диаметры кольцевого сечения;
  - в) размеры сторон  $h$  и  $b$  прямоугольника.
  - г) из таблицы сортамента прокатной стали ГОСТ 8239-89 (табл. 5) выбрать необходимый номер двутавра с ближайшим большим значением момента со-

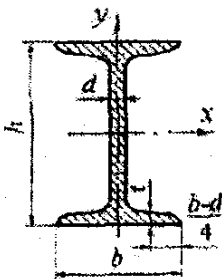
противления  $W_{н.о.}$  по отношению к  $W_{н.о.}^{расч.}$

6. Сравнить рациональность рассмотренных сечений, определив соотношение расхода материала на единицу длины балки.

7. Построить эпюры изменения нормального  $\sigma$  и касательного  $\tau$  напряжений по высоте поперечного прямоугольного сечения, указав их численную величину.

### План решения задачи №8

1. Определить опорные реакции для данной балки.
2. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для заданного нагруженного состояния.
3. Найти требуемые по условию задачи прогиб и угол поворота поперечных сечений:



- $F$  — площадь поперечного сечения;
- $W$  — момент сопротивления;
- $I$  — момент инерции;
- $S$  — статический момент полусечения;
- $i$  — радиус инерции;
- $m$  — масса одного погонного метра.

- построить, если необходимо, эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки в расслоенном виде, т.е. от каждой силы или момента по отдельности;
- снять с балки всю заданную нагрузку и по направлению каждого перемещения приложить безразмерную единичную нагрузку (при вычислении прогиба прикладывается безразмерная единичная сила, а при нахождении угла поворота — безразмерный единичный момент);

Таблица 5

## Двутавры стальные горячекатаные (ГОСТ 8239-89)

№	$h$ , мм	$b$ , мм	$d$ , мм	$t$ , мм	$F$ , см <sup>2</sup>	$m$ , кг	$I_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	19,90	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	23,60	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	25,80	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	29,40	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	33,90	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,5	39,20	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138,0	108,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

- определить реакции связей для вспомогательной балки от единичной нагрузки;

- построить эпюру изгибающих моментов от единичной нагрузки;

- вычислить прогиб и угол поворота поперечных сечений балки, перемножив эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки на эпюру изгибающих моментов от единичной нагрузки.

Коротовских Валентин Константинович

Костенко Сергей Григорьевич

**РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ  
ПРИ РАСТЯЖЕНИИ - СЖАТИИ, КРУЧЕНИИ И ИЗГИБЕ**

**КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И  
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

для студентов заочной формы обучения специальностей  
151001, 150202, 190201, 190601, 190603, 190702, 280101

Редактор Н.М. Кокина

---

Подписано к печати 15.07.08	Формат 60×84 1/16	Бумага тип. №1
Печать трафаретная	Усл. печ. л. 2,5	Уч.- изд. л. 2,5
Заказ 132	Тираж 200	Цена свободная

---

РИЦ Курганского государственного университета.  
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.  
Курганский государственный университет.