МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра «Прикладная математика и компьютерное моделирование»

РЯДЫ

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ
УКАЗАНИЯ К ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ
по курсу математики
для студентов специальностей
190109, 190110, 140400, 190600, 190700, 151900,
150700, 220700, 220400, 280700, 221700, 220601

Курган 2013

Кафедра прикладной математики и компьютерного моделирования

Дисциплина: «Высшая математика»

Специальности: 190109, 190110, 140400, 190600, 190700, 151900, 150700, 220700, 220400, 280700, 221700, 220601

Составил: доцент В.Н. Агафонова

Утверждены на заседание кафедры «30» октября 2011 г.

Рекомендованы методическим советом университета «7» марта 2013 г.

ВВЕДЕНИЕ

Контрольные задания составлены в соответствии с программой по курсу «Математика» для студентов специальностей 190109, 190110, 140400, 190600, 190700, 151900, 150700, 220700, 220400, 280700, 221700, 220601 дневной формы обучения.

В контрольные задания включены типовые задачи из разделов «Числовые ряды», «Функциональные ряды», «Ряды Фурье». Для их выполнения нужно знать основные понятия и формулы из указанных разделов. Контрольные задания содержат 25 вариантов по 13 задач в каждом. Составленные задачи охватывают все основные вопросы изучаемого курса.

Вариант 1

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\cos^2 n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n\sqrt{n}+n}$; г) $\frac{2!}{10}+\frac{3!}{10^2}+\frac{4!}{10^3}+\dots$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{2}{n^2}\cdot tg\frac{3}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n\times\sin\alpha}{2^n}$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\frac{x}{1+\sqrt{1}}+\frac{x^2}{2+\sqrt{2}}+\frac{x^3}{3+\sqrt{3}}+\dots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{3^n\cdot n}$.

4 Разложить в степенной ряд по степеням x функцию $y=e^{\frac{x}{2}}$.

5 Вычислить $\sqrt{50}$ с точностью 0,001.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_{0,5}^{1}\frac{\sin x}{x}dx$ с точностью до 0,001.

7 Найти четыре первых члена разложения в степенной ряд решения y(x) дифференциального уравнения $y'=x^2y^2-e^x$, удовлетворяющего начальным условиям: y(0)=1.

8 Разложить в ряд Фурье функцию $y=x+3$ в интервале $(-\pi,\pi)$, продолжая на всю числовую ось. $f\left(x+2\pi\right)=f\left(x\right)$. Сделать чертеж.

Вариант 2

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{ln^n n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^2+5n+1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^{n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{ln(n)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n tg\frac{1}{4n}$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-4)^n}{2n+1}$.

4 Разложить в степенной ряд по степеням x функцию $y = e^{-2x}$.

5 Вычислить $\sqrt[4]{e}$ с точностью до 0,0001.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sin x^2 dx$ с точностью до 0,001.

7 Найти разложение в степенной ряд решения y(x) дифференциального уравнения $y'' = xy$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

8 Разложить в ряд Фурье функцию f(x)=x–1 в интервале $(0;2\pi)$, периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 3

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+\sqrt{n}}{2n^3+n\sqrt[5]{n}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{n-1}{n}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+n}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{2n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{n}$.

4 Разложить в степенной ряд функцию $y=\sqrt{x}$ по степеням (x-1).

5 Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 0,0001.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\ln(1-x^3)dx$ с точностью до 0,001.

7 Найти три первых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'-xy-e^{xy}=0$, удовлетворяющего начальным условиям: y(0)=2.

8 Разложить в ряд Фурье функцию f(x)=$\begin{cases}4, \text{при } 0<x<\pi,\\ -2, \text{при } \pi\le x<2\pi,\end{cases}$ в интервале $(0;2\pi)$, периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 4

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(2n+1)^2}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)ln(n+4)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^3+1}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{e^{2n}}$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n}$.

4 Разложить в степенной ряд по степеням х функцию $y=\ln(1+2x)$.

5 Найти значение девятой производной от функции $y=x^7e^{2x}$ при $x=0$, пользуясь разложением ее в ряд Маклорена.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,001.

7 Найти пять первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''+yy'-2=0$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=1,\ y'(0)=1.$

8 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|$ в интервале $(-2;2)$, периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+4)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 5

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^{2}+3}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}-\sin^{2}n}{(3n)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{3}{n^{3}}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{2^{n}\sqrt{n+1}}$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{3^{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x+3)^{n}}{n\sqrt{n}}$.

4 Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-4)$ функцию $y=\ln x$.

5 Вычислить $\frac{1}{\sqrt{e}}$ с точностью до 0,001.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\cos x^{3}dx$ с точностью до 0,0001.

7 Найти четыре первых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''=y'+x$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(1)=1, y'(1)=1$.

8 Разложить в ряд Фурье функцию f(x)=$\frac{1}{5}x$ в интервале $(0;2\pi)$, периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 6

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n}{n^2+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(3n+2)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n^2}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln^3 n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{5n+2}\right)^n$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n(n+1)}}$.

4 Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $y=\frac{1}{x+3}$. Найти интервал сходимости полученного ряда.

5 Вычислить $\sqrt[3]{30}$ с точностью до 0,001.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3} dx$ с точностью до 0,001.

7 Найти первые три члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' + y^2 \cos x - 3e^x = 0$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=1$.

8 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = 2+|x|$ в интервале $(-\pi;\pi)$, периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 7

1 Исследовать на сходимость ряды :

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n}{3n-1}\right)^{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(3n)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2\dfrac{\pi}{3}}{3^n+2}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{3n}{7n+1}\right)^{n}$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(3x-4)^n}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n-1)}$.

4 Разложить в степенной ряд функцию $y=e^{-x^2}$ по степеням x.

5 Вычислить $\sqrt{65}$ с точностью до 0,0001.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x^{10}\sin x dx$ с точностью до 0,001.

7 Найти четыре первых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=1+x-\dfrac{y^3}{6}$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=1$.

8 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x$ в интервале $(-\pi;\pi)$, периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 8

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{n(n+1)}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^3}$; г) $\sum_{n=2}^{\infty} \arcsin\frac{1}{(n-1)\sqrt{n^2+1}}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)^2}{(2n)^6}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)^n$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}(x+1)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

4 Разложить по степеням $(x-3)$ функцию $y=\frac{1}{x}$. Найти интервал сходимости ряда.

5 Найти значение десятой производной от функции $y=x^8e^x$ при $x=0$, пользуясь разложением ее в ряд Маклорена.

6 Вычислить путём разложения подынтегральной функции в ряд $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^3}$ с точностью до 0,001.

7 Найти четыре члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''-xy=0$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

8 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|-1$ в интервале ($-\pi;\pi$), периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 9

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+\cos\frac{\pi}{n})$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{n^3+1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(2n)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg\,\frac{5}{n}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{2\pi}{3^n}$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln^2 n}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n2^n}$.

4 Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ функцию $y=\ln x$.

5 Вычислить $\cos 62°$ с точностью до 0,001.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x e^{x^3} dx$ с точностью до 0,001.

7 Найти четыре члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = y^3 - x$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=1$.

8 Разложить в ряд Фурье функцию f(x)=2x в интервале $(0;2\pi)$, периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 10

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{2^n n!}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n}3^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{2n^2+3}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+5}{7n^2-3n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin^n\frac{1}{n}$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-4)^n}{2n-1}$.

4 Разложить в степенной ряд по степеням х функцию $y=\ln(1+x^2)$

5 Используя разложение в биномиальный ряд, вычислить с точностью до 0,01 $\frac{1}{\sqrt[3]{123}}$.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^1\cos x^3dx$ с точностью до 0,001.

7 Найти четыре члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''=yy'-x^2$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

8 Разложить в ряд Фурье функцию f(x)=x в интервале ($-\pi;\pi$), периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 11

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{n\sqrt[4]{n^3+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3n!}$;

в) $\frac{1}{2\cdot 1-1}+\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2-1}+\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3-1}+\frac{\sqrt{4}}{2\cdot 4-1}+\ldots$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{5n+1}\right)^n$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n7^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4^n}$.

4 Разложить по степеням x функцию $y=sin^2 x$.

5 Вычислить $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ с точностью до 0,00001.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^4 \sin x^2 dx$ с точностью до 0,0001.

7 Найти пять членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''=xy'$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

8 Разложить функцию f(x)=2+x в ряд Фурье в интервале $(-\pi;\pi)$, периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 12

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n-1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1+\sqrt[3]{n}}{n^2-\sqrt{n}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{3^n(2n+1)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{3^n}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^3}{e^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+2}$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cdot x^n}{\ln^2 n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n}(x-1)^n$.

4 Разложить в степенной ряд по степеням х функцию $y=e^{3x}$.

5 Вычислить $\ln 1{,}04$ с точностью до 0,0001.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^2\sin x^2dx$ с точностью до 0,0001.

7 Найти четыре члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=x^2-y^2$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=1$.

8 Разложить функцию f(x)=1-2x в ряд Фурье в интервале $(-\pi;\pi)$, периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 13

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\frac{\pi}{4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 arctg^3\frac{2}{3n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}+1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^n$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{3^n\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^3 tg^5\frac{\pi}{n}$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{2^n\sqrt{3n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n}$.

4 Разложить по степеням x функцию y=ln(3x+4) и указать интервал сходимости полученного ряда.

5 Вычислить $\cos 36^0$ с точностью до 0,0001.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}}\cos x^2 dx$ с точностью до 0,0001.

7 Найти четыре члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' - 2xy^2 + y\cdot\cos x^2 = 0$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=1$.

8 Разложить функцию $f(x)$=1-x в ряд Фурье в интервале (-π;π), периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 14

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{n\sqrt{n}+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^{n}(a>0)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,tg\,\frac{1}{5^n}}{(2n)!}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n}$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{3n^3+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{n}$.

4 Разложить в ряд Тейлора функцию y=$\ln x$ по степеням (x - 1). Найти интервал сходимости полученного ряда.

5 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}x^2e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,001.

6 Вычислить $\sqrt{84}$ с точностью до 0,001.

7 Найти первые пять членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''-x^2y=0$, удовлетворяющего начальным условиям: y(1)=1, y'(1)=1.

8 Разложить функцию $f(x)=2x+3$ в ряд Фурье в интервале (-π;π), периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 15

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n+1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1} \right)^n$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{(3n+1)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \sin \frac{\pi}{3^n} \cdot (-1)^{n-1}$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln^2 n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} (x+1)^n$.

4 Разложить в ряд Маклорена функцию $y = e^{-\frac{x}{2}}$.

5 Вычислить $\sqrt[3]{8{,}05}$ с точностью до 0,0001.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^2 \cos x^2 dx$ с точностью до 0,0001.

7 Найти первые четыре члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' - xy^2 = 0$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

8 Разложить функцию $f(x) = x + 5$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi; \pi)$, периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x + 2\pi) = f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 16

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(2n-1)^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arcsin\,\frac{n}{n^2+3}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+5)}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n^4+3}}$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)\cdot x^n}{\sqrt{n^2+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}(x+3)^n$.

4 Разложить по степеням x функцию $y=\sin^2 x$.

5 Вычислить $\sqrt[3]{1{,}06}$ с точностью до 0,0001.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x\cdot e^{-x^3}dx$ с точностью до 0,001.

7 Найти первые 5 членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''=yy'+x$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

8 Разложить функцию $f(x)=|x|+1$ в ряд Фурье, в интервале $(-2;2)$, периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+4)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 17

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{(3n+5)}\cdot\frac{1}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+1}{n^3+n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{1}{n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4n+3}\right)^{n^2}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{arctg}\frac{\pi}{3n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^n}{3n^2+2}$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{(2n+1)^2}x^n$.

4 Разложить по степеням х функцию $y=\frac{1}{x-1}$.

5 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}dx$ с точностью до 0,001.

6 Вычислить $\ln 1{,}6$ с точностью до 0,0001.

7 Найти четыре члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''=1+xy$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

8 Разложить в ряд Фурье функцию f(x)=$\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ 2x, & 0\le x<\pi;\end{cases}$, периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 18

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2n+1}}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n(n+1)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)^n}{n^{n+1}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{(2n-1)^2\,3^{n-1}}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\cdot 2^{2n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{\sqrt[3]{n^5}}$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n\sqrt{2n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n^2+1)(x-2)^n}{3^n}$.

4 Разложить по степеням $(x-4)$ функцию $y=\sqrt{x}$.

5 Пользуясь разложением функции в ряд Маклорена, найти значение седьмой производной от функции $y=\dfrac{x}{1+x^2}$, при $x=0$.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^4}\,dx$ с точностью до 0,001.

7 Найти первые четыре члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=x+2y+3x^2y^2$, удовлетворяющего начальным условиям: y(0)=1.

8 Разложить функцию f(x)=$\begin{cases}1, & 0<x<\pi,\\ -1, & \pi\le x<2\pi,\end{cases}$ в ряд Фурье, периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 19

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{3n+2}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n^3+1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2+3}{n^2}\right)^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n+1)!}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3^n}{2^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n-1}{3n}$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^n}x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2x-3)^n\ln n}{n}$.

4 Разложить в степенной ряд по степеням (x-1) функцию $y=\ln x$.

5 Вычислить $\sqrt[4]{19}$ с точностью до 0,0001.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3}dx$ с точностью до 0,001.

7 Найти первые три ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''+xy'+y=0$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

8 Разложить функцию $f(x)=4-x$ в ряд Фурье в интервале $(0;2\pi)$, периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 20

1 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,tg\,\dfrac{\pi}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{(n+1)\sqrt{n}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n^2+3n}{n^2+1}\right)^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n+3}{\sqrt{n^3+2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}+1}{n^2} x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2x-3)^n}{5^n}$.

4 Разложить в степенной ряд функцию $y = \sin x^3$ по степеням x.

5 Вычислить $\sqrt[5]{40}$ с точностью до 0,0001.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{dx}{1+x^4}$ с точностью до 0,001.

7 Найти первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' + y' + xy = 0$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

8 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 1$ в интервале $(0; 2\pi)$, периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x + 2\pi) = f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 21

1 Исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{3n^2+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{3}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{2^n(2n)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot tg\,\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n\cdot\sin\frac{\pi}{5^n}$; б) $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{9}-\frac{4}{27}+\ldots$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$.

4 Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-3)$, функцию $y=\sqrt{x+1}$.

5 Пользуясь разложением функции в ряд Маклорена, найти значение шестой производной от функции $y=\frac{1}{1+x^2}$ при $x=0$.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{1+x^2}\,dx$ с точностью до 0,001.

7 Найти первые четыре члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=y^2+x^2$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=1$.

8 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\frac{1}{2}x$ в интервале $(0;2\pi)$, периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 22

1 Исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n} \quad (a \succ 1)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+1}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3n+1)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{3n^3+1}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{arctg\frac{1}{n}}{1+n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n^3}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$.

4 Разложить в ряд Маклорена: $y = \ln(1+x^2)$.

5 Пользуясь разложением функции в ряд Маклорена, найти значение девятой производной от функции $y = \frac{x}{1+x^2}$ при $x = 0$.

6 Разложив подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \cos x^3 dx$ с точностью до 0,001.

7 Найти первые четыре члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' = e^y + x$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

8 Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{3}x$ в ряд Фурье в интервале (-π,π), периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi) = f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 23

1 Исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - cos \frac{\pi}{n}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$;   г) $\sum \frac{7^{2n}}{(2n-1)}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $1 - \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!} + \ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(n^2+1)}$.

3 Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n tg \frac{2}{3n}$;   б) $\sum\limits_{n}^{\infty} 2^n (x+2)^n$.

4 Разложить в ряд Тейлора функцию $\frac{1}{x}$ по степеням (x-2) и найти интервал сходимости полученного ряда.

5 Пользуясь разложением функции в ряд Маклорена, найти значение четвертой производной функции $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ при $x = 0$.

6 Разложив подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} x e^{-x^3} dx$ с точностью до 0,0001.

7 Найти пять первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' = x^2 y - y'$, удовлетворяющего начальным условиям: y(0)=1, y$'$(0)=1.

8 Разложить функцию f(x)=3x в ряд Фурье в интервале $(0; 2\pi)$, периодически продолжая на всю числовую ось. $f\left(x+2\pi\right) = f\left(x\right)$. Сделать чертеж.

Вариант 24

1 Исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n^2}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+5}}\cdot\sin\dfrac{1}{n-1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2+3}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}$.

3 Найти области сходимости рядов.

а) $\sum\dfrac{2^n\cdot x^n}{\sqrt{n^2+4}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{5^n}$.

4 Разложить в ряд Маклорена функцию $y=\ln(1+2x)$.

5 Пользуясь разложением функции в ряд Маклорена найти значение шестой производной функции

$$y=\frac{x^2}{1+x},\ \text{при}\ x=0.$$

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^1\sin x^2dx$ с точностью до 0,001.

7 Найти 4 члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''+xy'-x^2y=0$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(1)=1,\quad y'(1)=1$.

8 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1$ в интервале $(-\pi;\pi)$, периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi)=f(x)$. Сделать чертеж.

Вариант 25

1 Исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \sin\frac{\pi}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{5^n}$.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+\cos^2 n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{2^{n+1}}$.

3 Найти области сходимости рядов.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^n}$.

4 Разложить в ряд Тейлора функцию $y=\frac{1}{x}$ по степеням $(x-3)$. Найти интервал сходимости полученного ряда.

5 Пользуясь разложением функции в ряд Маклорена, найти значение шестой производной функции

$y=x^2\cdot e^x$, при $x=0$.

6 Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \cos x^2 dx$ с точностью до 0,001.

7 Найти пять первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''-3yy'+2=0$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=0,\quad y'(0)=1$.

8 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x+2$ в интервале $(-\pi;\pi)$, периодически продолжая на всю числовую ось. $f(x+2\pi)=f(x)$. Сделать чертеж.

Решение задач варианта 26

1 Исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{3^n\cdot n}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{2n+1}{n^2}}$;

в) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n-2}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n-2}}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.

Решение.

При исследовании любых рядов нужно обязательно проверить необходимый признак сходимости ряда, т.е. вычислить предел n-го члена ряда при $n\to\infty$. Если $\lim\limits_{u\to\infty}u_n=0$, то применить достаточный признак сходимости. Если необходимый признак нарушен, т.е. $\lim\limits_{u\to\infty}u_n\neq 0$, то ряд расходится, и достаточный признак не применяется.

При исследовании рядов с помощью достаточных признаков Даламбера, радикального и интегрального признаков сходимости Коши необходимый признак сходимости можно не проверять, так как достаточный признак сходимости сильнее. Если он выполнен и ряд сходится, то необходимый признак будет выполнен, а если по достаточному признаку ряд расходится, то неважно, выполнен необходимый признак или нет.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{3^n\cdot n}$.

Так как n-й член ряда содержит показательные функции, то удобно применить достаточный признак сходимости Даламбера (см. [5] п. 8.6). Вычисляем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$.

$$U_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)},\qquad U_n=\frac{2^n}{3^n\cdot n}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot 3^n\cdot n}{3^{n+1}\cdot(n+1)\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n}{3\cdot(n+1)}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n'}{(n+1)'}=\frac{2}{3}<1$$

. Так как вычисляемый предел <1, то по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пояснение. При вычислении предела применить правило Лопиталя (см. [6] п. 3.5).

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{2n+1}{n^2}}$.

Проверим необходимый признак сходимости ряда.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{n^2}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)'}{(n^2)'}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2n}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\sqrt{0}=0.$$

Необходимый признак выполнен, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$, ряд может сходиться или расходиться. Чтобы сделать конкретный вывод, применим достаточный признак – третью теорему сравнения (см.[5] п. 8.4, теорема 8.7, п. 8.5). Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, который расходится, т.к. это обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, в котором $\alpha=\frac{1}{2}<1$, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Находим предел отношения n-го члена исследуемого ряда к n-му члену того ряда, с которым сравниваем.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}\cdot\sqrt{n}}{n\cdot 1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{2}}{n}=\sqrt{2}\neq 0.$$

$$\sqrt{2n^2+n}\underset{n\to\infty}{\sim}\sqrt{2n^2}.$$

По предельному признаку сравнения предел отношения n-ых членов двух рядов есть константа $\neq 0$, следовательно, оба ряда ведут себя одинаково.

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{n^2}}$ тоже будет расходиться.

в) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{n-2}}$. Проверим необходимый признак сходимости.

Имеем произведение двух бесконечно малых, пределом которых является 0.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n-2)}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{n-2}}\right]=(\text{б.м.})\cdot(\text{б.м.})=0$. Так как необходимый признак выполнен, применяем достаточный признак (см. [5] п. 8.4, п. 8.5).

Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$.

Это обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, который сходится, т.к. $\alpha=\frac{4}{3}>1$.

Находим предел отношения n-х членов этих рядов.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n-2)}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{n-2}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\sqrt[3]{n^4}}{(n-2)\cdot\sqrt[3]{n-2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt[3]{(n-2)^4}}=$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{n-2}}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt[3]{n-2}}.$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\left(\frac{n}{n-2}\right)^4}=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-2}\right)^4}=\sqrt[3]{\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-2}\right)^4}=\sqrt[3]{1^4}=1\neq 0.$$

По предельному признаку сравнения ряд сходится.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.

Проверим необходимый признак сходимости ряда.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}=\infty\neq 0$.

Пояснение. В основании степени находится ограниченная функция, больше единицы, т.к. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}=2$, которая при возведении в положительную бесконечно большую степень становится бесконечно большой.

Так как нарушен необходимый признак сходимости ряда $\lim_{n\to\infty}U_n\neq 0$, данный ряд расходится.

2 Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся.

а) $\frac{2}{2^3+1}-\frac{3}{3^3+2}+\frac{4}{4^3+3}-\frac{5}{5^3+4}+\dots$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{11}}+\dots$

$+(-1)^n\arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots$.

Решение.

Знакопеременный ряд будет абсолютно сходящимся, если сам он сходится и сходится ряд из его модулей, и будет условно (или неабсолютно) сходящимся, если он сам сходится, а ряд из его модулей расходится.(см. [5], п. 9.1, 9.2, 9.3, 9.4).

а) $\frac{2}{2^3+1}-\frac{3}{3^3+2}+\frac{4}{4^3+3}-\frac{5}{5^3+4}+\dots$.

Составим формулу n-го члена ряда. $U_n=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)}{(n+1)^3+n}$.

Имеем знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)}{(n+1)^3+n}=\frac{2}{2^3+1}-\frac{3}{3^3+2}+\frac{4}{4^3+3}-\frac{5}{5^3+4}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)}{(n+1)^3+n}+\dots.$$

<u>**Замечание.**</u> При исследовании знакочередующихся и знакопеременных рядов можно сразу проверять достаточный признак абсолютной сходимости, т.е. исследовать ряд из модулей знакопеременного ряда. Если он сходится, то это гарантирует <u>абсолютную сходимость</u> знакопеременного ряда. Но если ряд из модулей расходится, то нужно для знакочередующегося ряда проверить признак Лейбница, так как ряд может сходиться <u>условно</u>. Исключение составляют те ряды, для которых ряд из модулей исследовался с помощью признаков Даламбера или Коши. В этом случае из расходимости ряда из модулей следует <u>расхо-</u>

димость знакопеременного или знакочередующегося ряда, т.е. условной сходимости у них быть не может (см. [7] п. 377).

Составим ряд из модулей:

$$\frac{2}{2^3+1}+\frac{3}{3^3+2}+\frac{4}{4^3+3}+\ldots+\frac{n+1}{(n+1)^3+n}+\ldots.$$

Это знакоположительный ряд. Исследуем его с помощью теоремы сравнения.

Сравним этот ряд с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, он сходится, т.к. $\alpha=2>1$.

Найдем предел отношения общих членов этих рядов.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot n^2}{\left[(n+1)^3+n\right]\cdot 1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2}{n^3+3n^2+4n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3}=1\neq 0.$$

$$n^3+n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} n^3,$$

$$n^3+3n^2+4n+1 \underset{n\to\infty}{\sim} n^3.$$

По предельному признаку сравнения ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+1)^3+n}$ сходится (см. [5] п. 8.4, п. 8.5).

По достаточному признаку абсолютной сходимости знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n+1)}\cdot(n+1)}{(n+1)^3+n}$ будет сходиться и притом абсолютно (см. [5], п. 9.2).

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{11}}+\ldots$

$+(-1)^n\arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\ldots.$

Ряд знакочередующийся. Составим ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{11}}+\ldots+\arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots.$$

Исследуем его с помощью теоремы сравнения.

Сравним его с рядом из аргументов арксинуса $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$. Этот ряд расходится, так как при сравнении его с расходящимся простым гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, предел отношения их общих членов этих рядов равен константе $1\neq 0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot n}{\sqrt{n^2+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1\neq 0.$$

При вычислении предела пользуемся эквивалентными бесконечно малыми.

$$\sqrt{n^2+2}\underset{n\to\infty}{\sim}\sqrt{n^2}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$ из аргументов арксинуса расходится.

Применим предельный признак сравнения к ряду из модулей. Сравним ряд из модулей с расходящимся рядом из аргументов (см. [5], п. 8.4).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}}{\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{n^2+2}}=1\neq 0.$$

$$\arcsin_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}.$$

По предельной теореме сравнения ряд из модулей расходится. Так как исследуемый ряд знакочередующийся, он может сходиться условно, поэтому проверим признак Лейбница. Вычисляем $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}=\arcsin\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}=0$. (по правилу предельного перехода). Покажем, что члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине, т.е. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}>\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}>\arcsin\frac{1}{\sqrt{11}}>...>\arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}>...$.

Находим производную от арксинуса. И покажем, что она отрицательна.

$$\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2+2}}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\right)'=\frac{1\cdot\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{n^2+1}}\cdot\left[-\frac{1}{n^2+2}\cdot\left(\sqrt{n^2+2}\right)'\right]=$$

$$=-\frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{n^2+1}}\cdot\frac{1}{\left(n^2+2\right)}\cdot\frac{1\cdot 2n}{2\cdot\sqrt{n^2+2}}=-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\cdot\frac{n}{\left(n^2+2\right)}<0.$$

При любом значении n производная функции отрицательна, следовательно, функция убывает.

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}>\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}>\arcsin\frac{1}{\sqrt{11}}>...>\arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}>... .$$

Члены ряда убывают по абсолютной величине, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, то по признаку Лейбница знакочередующийся ряд сходится. Так как ряд из его модулей расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$ сходится условно.

3 Найти области сходимости рядов.

а) $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+...+\frac{x^n}{\sqrt{n}}+...;$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$.

Решение.

Областью сходимости функционального ряда называется совокупность всех значений аргумента, при которых этот ряд сходится (см. [5], п. 10.1).

Для нахождения области сходимости произвольного функционального ряда нужно составить ряд из модулей и к нему применить признак Даламбера или радикальный признак сходимости Коши. Так как для сходимости ряда вычисляемый предел должен быть строго меньше 1, решить это неравенство. Множество его решений будет областью сходимости ряда. Те значения *x*, при которых вычисляемый предел равен 1, проверяются дополнительно и включаются в область сходимости, если в них ряд сходится. Для степенного ряда вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ не нужно решать неравенство, так как по теореме Абеля областью сходимости является интервал с центром в начале координат (-R;R), к которому могут быть добавлены концевые точки (-R) и R. При x=R и при x=-R ряды исследуются дополнительно. Во всех внутренних точках интервала теорема Абеля гарантирует абсолютную сходимость.

Половина интервала сходимости называется радиусом сходимости. Радиус сходимости можно находить по формуле Даламбера или по формуле Коши (если коэффициент общего члена ряда представляет точную n-ю степень).

Формула радиуса сходимости по Даламберу имеет вид: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, где a_n и a_{n+1} – коэффициенты n-го и (n+1)-го членов ряда.

Формула радиуса по Коши: $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$, где a_n – коэффициент n-го члена ряда (см. [5], п. 11.1, 11.2).

а) $x + \dfrac{x^2}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{x^n}{\sqrt{n}} + \ldots$.

Так как ряд степенной, найдем радиус сходимости по Даламберу: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}; \qquad a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}};$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{1} = 1.$$

По теореме Абеля в интервале $(-1;1)$ ряд сходится абсолютно.

Исследуем границы интервала.

При $x = -1$ имеем ряд: $-1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$.

Этот ряд знакочередующийся. По признаку Лейбница данный ряд сходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ и $1>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>...>\frac{1}{\sqrt{n}}...$ члены убывают по абсолютной величине, т.е. в область сходимости $x=-1$ будет входить.

При x = 1 имеем ряд: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+....$ Это знакоположительный ряд, который расходится, т.к. является обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, в котором $\alpha=\frac{1}{2}<1$. Поэтому $x=1$ в область сходимости не входит. Областью сходимости данного ряда является $[-1;1)$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2-x)^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$.

Введем замену: $(2-x)=y$. Получим степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$. Найдем радиус сходимости по Даламберу $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, где $a_n=\sin\frac{\pi}{2^n}$; $a_{n+1}=\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$, т.к. синусы в первой четверти положительны, то модули можно опустить.

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\cdot 2^{n+1}}{2^n\cdot\pi}=2.$$

При вычислении предела пользуемся эквивалентными бесконечно малыми: $\sin\frac{\pi}{2^n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\pi}{2^n}$; $\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

В интервале $(-2;2)$ по теореме Абеля степенной ряд из y сходится абсолютно. Исследуем границы интервала.

При y= –2 имеем ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot 2^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$. Он знакочередующийся. Проверим необходимый признак.

$$\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n\cdot 2^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n\cdot 2^n\cdot\frac{\pi}{2^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n\cdot\pi\right]\neq 0.$$

$$\sin\frac{\pi}{2^n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\pi}{2^n}.$$

n-й член ряда не стремится к нулю.

Нарушен необходимый признак сходимости, поэтому ряд расходится. Левая граница не входит в область сходимости.

При y=2 имеем ряд знакоположительный $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$.

Проверим необходимый признак. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[2^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[2^n\cdot\frac{\pi}{2^n}\right]=\pi\neq 0.$

$$\sin\frac{\pi}{2^n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\pi}{2^n}.$$

Ряд расходится, т.к. нарушен необходимый признак сходимости ряда.
$y=2$ в область сходимости не входит.

Областью сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$ является интервал $-2<y<2$. Подставим в неравенство $y=2-x$. Решаем неравенство, из которого находим x.
$-2<2-x<2\Rightarrow -4<-x<0\Rightarrow 4>x>0$ или $0<x<4$. Областью сходимости ряда является интервал (0;4).

Пояснение. Неравенство умножили на (-1).

4 Разложить в ряд Маклорена $y=e^{-x^3}$.

Решение.

Воспользуемся разложением e^x в ряд Маклорена:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots.$$

В этот ряд вместо x подставим $(-x^3)$: $e^{-x^3}=1-\frac{x^3}{1!}+\frac{x^6}{2!}-\frac{x^9}{3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{3n}}{n!}+\ldots$

Разложение имеет место в интервале $(-\infty;\infty)$.

5 Пользуясь разложением функции в ряд Маклорена, найти значение пятой производной от функции $y=x^2\cdot\sqrt[4]{1+x}$ при $x=0$.

Решение.

Ряд Маклорена имеет вид:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)\cdot x}{1!}+\frac{f''(0)\cdot x^2}{2!}+\frac{f'''(0)\cdot x^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(0)\cdot x^4}{4!}+\frac{f^{(5)}(0)\cdot x^5}{5!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}+\ldots.$$

Член ряда, содержащий пятую производную, имеет вид: $\frac{f^{(5)}(0)\cdot x^5}{5!}$.

Для разложения данной функции $y=\sqrt[4]{1+x}$ в ряд Маклорена используем биномиальный ряд:

$$(1+x)^m=1+\frac{m\cdot x}{1!}+\frac{m(m-1)x^2}{2!}+\frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!}+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n}{n!}+\ldots.$$

В биномиальный ряд подставляем $m=\frac{1}{4}$

$$(1+x)^{\frac{1}{4}}=1+\frac{x}{4}-\frac{1\cdot 3\cdot x^2}{4^2\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot x^3}{4^3\cdot 3!}-\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot x^4}{4^4\cdot 4!}+\ldots.$$

Затем все члены биномиального ряда домножаем на x^2.

$$x^2\cdot\sqrt[4]{1+x}=x^2+\frac{x^3}{4}-\frac{1\cdot 3\cdot x^4}{4^2\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot x^5}{4^3\cdot 3!}-\dots.$$

Так как $f^{(5)}(0)$ входит в слагаемое, содержащее x^5, то приравниваем слагаемые с x^5, входящие в ряд Маклорена и в полученный ряд $\frac{f^{(5)}(0)\cdot x^5}{5!}=\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot x^5}{4^3\cdot 3!}$.

Из полученного равенства находим $f^{(5)}(0)$.

$$f^{(5)}(0)=\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 5!}{4^3\cdot 3!}=\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 120}{64\cdot 6}=\frac{105}{16}.$$

(см. [5] п. 12.2, задача 12.18).

6 Разложив подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}dx$ с точностью до 0,001.

Решение.

Подынтегральную функцию разлагаем в ряд с помощью биномиального ряда, в который подставляем $m=-\frac{1}{2}$, а вместо x подставляем x^3, получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}=\left(x^3+1\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot x^6}{2^2\cdot 2!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5x^9}{2^3\cdot 3!}+\dots .$$

Интегрируя полученный ряд, получаем:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}dx=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^3}{2}+\frac{3}{8}x^6-\frac{5}{16}x^9+\dots\right)dx=\left(x-\frac{x^4}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{x^7}{7}-\frac{5}{16}\cdot\frac{x^{10}}{10}+\dots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{16\cdot 8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{128}-\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{128\cdot 8}+\dots\right)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot\frac{1}{7}-\frac{5}{16}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\frac{1}{10}+\dots=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{16\cdot 8}+\frac{3}{8\cdot 128\cdot 7}-\frac{5}{16\cdot 128\cdot 8\cdot 10}+\dots=\frac{1}{2}-\frac{1}{128}+\frac{3}{7168}-\frac{5}{163840}=$$

$$=0{,}5-0{,}00781+0{,}00042-0{,}00003\approx 0{,}5-0{,}0078\approx 0{,}4922.$$

Пояснения. После интегрирования берём разность первообразных от верхнего и нижнего пределов интегрирования. Так как нижний предел равен нулю, остается первообразная только от верхнего предела при $x=\frac{1}{2}$. Для заданной точности достаточно оставить два первых слагаемых. По признаку Лейбница погрешность, получаемая при замене суммы знакочередующегося ряда суммой первых n членов, не превосходит по абсолютной величине первого отбрасываемого члена ряда. Т.к. 0,00042<0,001, то его и все остальные слагаемые можно отбросить. Вычисляемый интеграл с точностью до 0,001 равен:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} \approx 0{,}4922.$$

(см. [5] п. 12.3).

7 Найти пять первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''-(1+x^2)y=0$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=-2, \quad y'(0)=2$.

Решение.

Пусть требуется проинтегрировать дифференциальное уравнение второго порядка $y''=F(x,y,y')$.

Если его решение не выражается через элементарные функции в конечном виде или обычные способы решения слишком трудоемки, то его частное решение или общее можно отыскать в виде некоторого степенного ряда. Одним из способов является последовательное дифференцирование, когда требуется найти частное решение $y=f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям: $f(x_0)=A_0, \quad f'(x_0)=A_1$. Если в окрестности начальных условий уравнение удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения для дифференциального уравнения второго порядка, то можно искать его частное решение в виде ряда Тейлора или Маклорена (если $x_0=0$).

Ряд Тейлора имеет вид:

$$y(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!}+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!}+\dots$$

$$\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}+\dots \quad .$$

Из начальных условий видно, что решение нужно искать в виде разложения его в ряд Маклорена, положив в ряде Тейлора $x_0=0$.

$$y(x)=f(0)+\frac{f'(0)\cdot x}{1!}+\frac{f''(0)\cdot x^2}{2!}+\frac{f'''(0)\cdot x^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!}+\dots \; .$$

Первый член ряда и коэффициент при втором известны из начальных условий $y(0)=-2, \quad y'(0)=2$. Находим $y''(0)$.

$y''=(1+x^2)y. \quad y''(0)=(1+0)\cdot(-2)=-2.$

Следующие коэффициенты ряда находим последовательным дифференцированием вторых, третьих и т.д. производных и вычислением их при заданных начальных условиях.

$y'''(x)=(1+x^2)'\cdot y+(1+x^2)\cdot y'=2xy+y'+x^2y'.$

$y'''(0)=2\cdot 0\cdot(-2)+2+0\cdot 2=2.$

$y^{(4)}(x)=2(y+xy')+y''+2xy'+x^2y''=2y+2xy'+y''+2xy'+x^2y''=2y+4xy'+y''+x^2y''.$

$y^{(4)}(0)=2\cdot(-2)+4\cdot 0\cdot 2-2=-6.$

Решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(x) = -2 + \frac{2\cdot x}{1!} - \frac{2\cdot x^2}{2!} + \frac{2\cdot x^3}{3!} - \frac{6\cdot x^4}{4!} + \ldots = -2 + 2x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

(см. [5] п. 12.4).

8 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x+1$ в промежутке $(-\pi;\pi)$, периодически продолжая на всю числовую ось с периодом 2π. Коротко периодичность можно записать $f(x+2\pi) = f(x)$.

Решение.

Функция периодична с периодом 2π. Она непрерывна на $(-\pi;\pi)$. Так как на концах интервала её значения не определены, то при продолжении её на всю числовую ось она имеет точки разрыва 1 рода. Условия разложения функции в ряд Фурье (условия Дирихле) выполнены, поэтому её можно разлагать в ряд Фурье (рисунок 1).

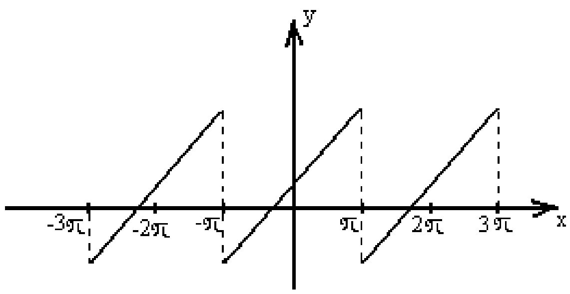

Рисунок 1 – график функции $f(x) = x+1$ с периодическим продолжением

Функция не относится к четным, график её не симметричен относительно оси OY, она не относится к нечетным, т.к. график не симметричен относительно начала координат.

Поэтому ряд Фурье для нее имеет вид: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

Коэффициенты ряда Фурье находятся по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx; \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

(см. [5] п. 13.1, 13.3, 13.4, 13.5).

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)dx = \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_{-\pi}^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(\pi+1)^2}{2} - \frac{(-\pi+1)^2}{2}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2+2\pi+1}{2} - \frac{\pi^2-2\pi+1}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi = 2.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left[\left.(x+1)\cdot\frac{1}{n}\sin nx\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right] =$$

Интегрируем по частям.

$$\left.\begin{array}{l} x+1=u \\ \cos nx dx = dv \end{array}\right| \begin{array}{l} dx = du \\ v=\int \cos nx dx = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[(\pi+1)\cdot\frac{1}{n}\sin n\pi-(-\pi+1)\frac{1}{n}\sin(-n\pi)+\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]=\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{1}{n^2}\cos(-n\pi)=$$

$$=\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{1}{n^2}\cos n\pi=0.$$

Пояснение. $\cos(n\pi)=\cos(-n\pi)$ в силу четности функции косинуса.

$\sin(n\pi)=0, \quad \sin(-n\pi)=0$, поэтому первое слагаемое равно нулю.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\left[-(x+1)\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right]=$$

Интегрируем по частям.

$$\left.\begin{array}{l} x+1=u \\ \sin nx dx = dv \end{array}\right| \begin{array}{l} dx = du \\ v=\int \sin nx dx = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-(\pi+1)\cdot\frac{1}{\mathrm{n}}\cos \mathrm{n}\pi+(-\pi+1)\frac{1}{\mathrm{n}}\cos(-\mathrm{n}\pi)+\frac{1}{\mathrm{n}^2}\sin \mathrm{nx}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\mathrm{n}}\cos \mathrm{n}\pi\cdot(-\pi-1-\pi+1)+\frac{1}{\mathrm{n}^2}\sin \mathrm{n}\pi-\frac{1}{\mathrm{n}^2}\sin(-\mathrm{n}\pi)\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\mathrm{n}}\cos \mathrm{n}\pi\cdot(-2\pi)\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{\mathrm{n}}\cos \mathrm{n}\pi=(-2)\frac{1}{\mathrm{n}}\cos \mathrm{n}\pi=(-2)\cdot\frac{1}{\mathrm{n}}\cdot(-1)^{\mathrm{n}}=2\cdot(-1)^{\mathrm{n}+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{n}}=\begin{cases}\frac{2}{\mathrm{n}}, \text{ при n неч.;}\\ -\frac{2}{\mathrm{n}}, \text{ при n четн..}\end{cases}$$

Пояснение. $\cos \mathrm{n}\pi=(-1)^{\mathrm{n}}$, $\cos(-\mathrm{n}\pi)=\cos \mathrm{n}\pi$ в силу четности

$\sin \mathrm{n}\pi=0, \sin(-\mathrm{n}\pi)=0.$

$$a_0=2; \quad a_n=0; \quad b_n=\begin{cases}\frac{2}{\mathrm{n}}, \text{ при n неч.;}\\ -\frac{2}{\mathrm{n}}, \text{ при n четн..}\end{cases}.$$

Ряд Фурье для функции $f(x)=x+1$ имеет вид:

$$x+1=1+2\sin x-\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{2}{5}\sin 5x-\frac{1}{3}\sin 6x+\ldots.$$

Список литературы

1 Берман, Г.И. Сборник задач по курсу математического анализа [Текст]/ Г.И. Берман. - М. : Наука, 1985.

2 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] / П.Е. Данко, А.Г.Попов. М. : Высшая школа, 1980.

3 Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) [Текст] / Л.А. Кузнецов. - М. : Высшая школа, 1983.

4 Шмелев, П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях [Текст] / П.А. Шмелев. М. : Высшая школа, 1983.

5 Агафонова, В.Н. Высшая математика в задачах. Ряды [Текст] / В.Н. Агафонова. - Курган: Изд-во КГУ, 2004.

6 Агафонова В.Н. Методические указания и контрольные задания по математике для студентов заочной формы обучения I курса I семестра [Текст] / В.Н. Агафонова. - Курган: Изд-во КГУ, 2012.

7 Фихтенгольц Т.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления [Текст] / Т.М. Фихтенгольц. - М. : Наука, 1966.

СОДЕРЖАНИЕ

Агафонова Валентина Николаевна

РЯДЫ

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ
УКАЗАНИЯ К ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ
по курсу высшей математики
для студентов специальностей
190109, 190110, 140400, 190600, 190700, 151900,
150700, 220700, 220400, 280700, 221700, 220601

Редактор А.С. Мокина

Подписано в печать	Формат 60×84 1/16	Бумага тип. № 1
Печать трафаретная	Усл. печ. л. 2,75	Уч.-изд.л. 2,75
Заказ	Тираж 37	Цена свободная

РИЦ Курганского государственного университета.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет,