МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА «ИНФОРМАТИКА»

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Методические указания
для выполнения лабораторной работы
по курсу «Методы вычислений»
для студентов
специальности 010101(010100)

Курган 2009

Кафедра: «Информатика»

Дисциплина: «Методы вычислений»
(специальность: 010101(010100))

Составили:

старший преподаватель М.Б. Бекишева
ассистент Л.Г. Катюхина

Утверждены на заседании кафедры «12» ноября 2009 г.
Рекомендованы методическим советом Курганского государственного университета «23» ноября 2009 г.

ТЕМА: ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Постановка задачи интерполирования

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n).$$

Задача интерполирования ставится обычно в следующей форме: *найти многочлен* $P(x)=P_n(x)$ *степени не выше n, значения которого в точках* x_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ *совпадают со значениями данной функции, т.е.* $P(x_i) = y_i$.

Геометрически это означает, что нужно найти алгебраическую кривую вида $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_n$, проходящую через заданную систему точек $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ (рис. 1).

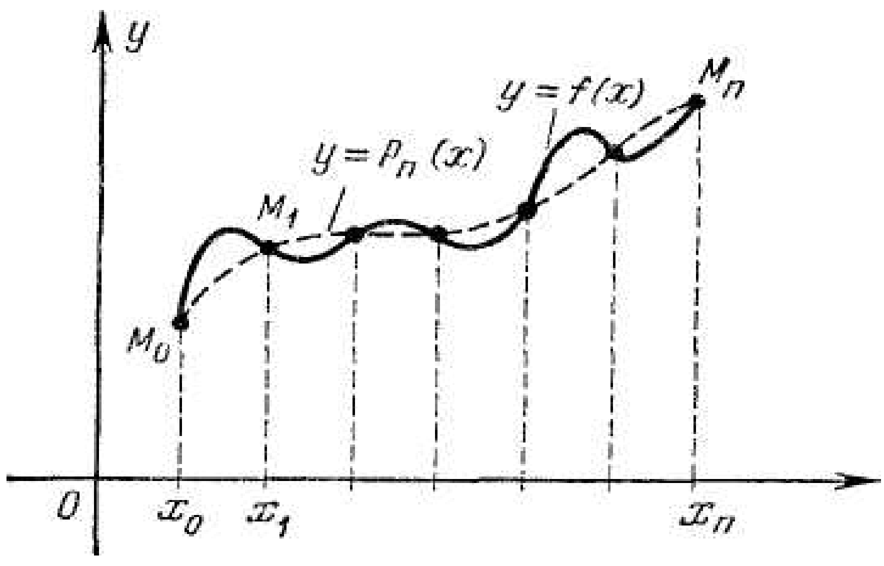


Рис. 1. Геометрическая интерпретация интерполирования

В такой постановке задача интерполирования называется *параболической.*

Многочлен $P(x)$ называется *интерполяционным многочленом.* Точки x_i $(i = 0, \ldots, n)$ называются *узлами интерполяции.*

Доказано, что в указанной постановке задача интерполирования всегда имеет единственное решение. Интерполяционные формулы обычно используются при нахождении неизвестных значений $f(x)$ для промежуточных значений аргумента. При этом различают *интерполирование в узком смысле,* когда x находится между x_0 и x_n, и *экстраполирование,* когда x находится вне отрезка $[x_0, x_n]$.

При оценке погрешности результатов должны учитываться как погрешность метода интерполяции (остаточный член), так и погрешности округления при вычислениях.

Лабораторная работа №1

Интерполяционная формула Лагранжа. Схема Эйткена

Краткие теоретические сведения

Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть x_i $(i = 0,1, \ldots, n)$ — произвольные узлы, а $y_i = f(x_i)$ — значения функции $f(x)$. Многочленом степени n, принимающим в точках x_i значения y_i является *интерполяционный многочлен Лагранжа*

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \qquad (1.1)$$

Остаточный член равен

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), \qquad (1.2)$$

где ξ есть некоторая точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы x_i $(i = 0,1, \ldots, n)$ и точку x.

Выражения

$$L_i^{(n)}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \qquad (1.3)$$

называются *коэффициентами Лагранжа.*

Для вычисления $L_i^{(n)}(x)$ удобно применить следующее расположение разностей, подчеркнув разности, расположенные на главной диагонали:

$$\begin{cases} \underline{x-x_0} & x_0-x_1 & x_0-x_2 & \cdots & x_0-x_n \\ x_1-x_0 & \underline{x-x_1} & x_1-x_2 & \cdots & x_1-x_n \\ x_2-x_0 & x_2-x_1 & \underline{x-x_2} & \cdots & x_2-x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n-x_0 & x_n-x_1 & x_n-x_2 & \cdots & \underline{x-x_n} \end{cases} \qquad (1.4)$$

Обозначим произведение элементов i-й строки через D_i, произведение элементов главной диагонали через $\Pi_{n+1}(x)$, т. е.

$\Pi_{n+1}(x) = = (x - x_0)(x-x_1)\ldots(x - x_n)$. Тогда

$$L_i^{(n)}(x) = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{D_i} \qquad (i=0,1,\cdots,n) \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.1), получим:

$$L_n(x) = \Pi_{n+1}(x) \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{D_i} \tag{1.6}$$

В Excel удобно пользоваться этой формулой, добавив в (1.4) столбцы для

x_i, y_i, D_i, $\frac{y_i}{D_i}$ (*x_i, y_i, в начале таблицы, D_i*, $\frac{y_i}{D_i}$ - в конце).

Иногда бывает полезным для упрощения вычислений использовать инвариантность коэффициентов Лагранжа относительно линейной подстановки:
если $x = at + b$, $x_j = at_j + b$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$, то

$$L_i^{(n)}(x) = L_i^{(n)}(t) \tag{1.7}$$

В случае равноотстоящих узлов имеются таблицы для лагранжевых коэффициентов и процесс вычисления значительно облегчается.

Интерполяционная схема Эйткена

Если требуется найти не многочлен $L_n(x)$, а лишь его значения при конкретных значениях X, причем заранее трудно оценить степень интерполяционного многочлена, требуемого для достижения заданной точности (например, при интерполировании таблиц), то прибегают к использованию *схемы* ***Эйткена***, по которой интерполяционные многочлены все более высокой степени строятся последовательно, что позволяет контролировать точность в процессе вычислений.

Согласно этой схеме последовательно вычисляются значения многочленов:

$$L_{(i,i+1)}(x) = \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)} \begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x \end{vmatrix}, \tag{1.8}$$

$$L_{(i,i+1,i+2)}(x) = \frac{1}{(x_{i+2} - x_i)} \begin{vmatrix} L_{(i,i+1)}(x) & x_i - x \\ L_{(i+1,i+2)}(x) & x_{i+2} - x \end{vmatrix}, \tag{1.9}$$

$$L_{(i,i+1,i+2,i+3)}(x)=\frac{1}{(x_{i+3}-x_i)}\begin{vmatrix} L_{(i,i+1,i+2)}(x) & x_i-x \\ L_{(i+1,i+2,i+3)}(x) & x_{i+3}-x \end{vmatrix} \text{ и т.д.} \qquad (1.10)$$

$L_{(i,i+1,i+2,\ldots n)}(x)$ - интерполяционный многочлен с узлами интерполяции $x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+2},\ldots,\ x_n$.

Интерполяционный многочлен *n-ой* степени, принимающий в точках значения $y_i\ (i = 0, 1, 2,\ldots,n)$, запишется следующим образом:

$$L_{(0,1,\cdots,n)}(x)=\frac{1}{(x_n-x_0)}\begin{vmatrix} L_{(0,1,\cdots,(n-1))}(x) & x_i-x \\ L_{(1,2,\cdots,n)}(x) & x_n-x \end{vmatrix} \qquad (1.11)$$

Вычисления по *схеме Эйткена* удобно расположить в таблице.

i	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{y_i}$	$\mathbf{x_i - x}$	$\mathbf{L_{i-1,i}}$	$\mathbf{L_{i-2,i-1,i}}$	$\mathbf{L_{i-3,i-2,i-1,i}}$	…
0	x_0	y_0	$x_0 - x$				
1	x_1	y_1	$x_1 - x$	$L_{01}(x)$			
2	x_2	y_2	$x_2 - x$	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$		
3	x_3	y_3	$x_3 - x$	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$	…
4	x_4	y_4	$x_4 - x$	$L_{34}(x)$	$L_{234}(x)$	$L_{1234}(x)$	…
…	…	…	…	…	…	…	…

Вычисления по схеме Эйткена можно закончить тогда, когда последовательные значения $L_{01\ldots n}(x)$ и $L_{01\ldots n,(n+1)}(x)$ не совпадут в пределах заданной точности.

Схему Эйткена удобно использовать для интерполяции таблично заданной функции, перенумеровав узлы интерполяции в порядке возрастания.

Основные вопросы теории

1. Постановка задачи интерполирования. Как связана степень интерполяционного многочлена с количеством узлов интерполяции?
2. Интерполяционный многочлен Лагранжа (вывод формулы). Различные формы записи многочлена Лагранжа.
3. Схема вычисления Лагранжевых коэффициентов.
4. Оценка погрешности интерполирования (погрешности метода). Дополнительный член формулы Лагранжа. С какой точностью можно вычислить по формуле Лагранжа ***ln 100,3*** по известным значениям ***ln100, ln 101, ln 103***?

5. Схема Эйткена.
6. Обратное интерполирование.

Задания для лабораторной работы № 1

Задание 1.

Пусть известные значения некоторой функции f образуют таблицу

x	x_0	x_1	x_2
$y = f(x)$	y_0	y_1	y_2

По заданной таблице найти интерполяционный многочлен Лагранжа, построить его график и отметить на нем точки $M_i\ (x, y),\ i = 0,\ 1,\ 2.$

Вариант	x_0	x_1	x_2	Y_0	y_1	y_2
1	-1	2	3	3	2	-1
2	2	-2	0	3	5	3
3	1	3	-1	2	8	4
4	-1	2	1	5	2	1
5	-1	2	3	1	0	-3
6	2	-2	0	1	0	-3
7	1	3	-1	3	9	5
8	-1	2	1	2	-1	-2
9	-1	2	1	3	0	-1
10	-1	2	1	3	0	-1
11	-1	0	3	-3	5	2
12	2	-1	0	7	1	5
13	0	3	2	1	10	3
14	-4	-2	0	2	8	5
15	-2	-1	2	-4	0	0
16	2	-1	0	5	-1	3
17	-2	-1	2	-3	1	1
18	2	3	1	1	6	0
19	0	1	2	1	-2	1
20	-2	-1	2	-2	2	2
21	2	3	1	-2	7	1
22	2	3	5	4	7	1
23	0	3	2	4	-7	1
24	-3	-1	2	7	-1	4
25	1	2	4	-3	-7	2
26	-3	-2	2	6	-1	4

Замечание: Решение задания 1 (получение многочлена Лагранжа и построение графика) в Mathcad рассмотрено дальше (см. стр. 11).

Задание 2.

Вычислить значение заданной функции для значения аргумента X, используя:

1) интерполяционный многочлен Лагранжа (решение в Mathcad рассмотрено на стр. 13);

2) схему Эйткена.

В задачах все заданные значения аргументов будем считать точными числами, значения функций - приближенными, содержащими лишь верные цифры.

Замечание. Номер таблицы и при каких значениях X вычислить многочлен Лагранжа согласовать с преподавателем.

Таблица 1.1

x	1,00	1,08	1,13	1,20	1,27	1,31	1,38
y	1,17529	1,30254	1,38631	1,50946	1,21730	1,22361	1,23470

Значения X:

а) 1,0134; б) 1,139; в) 1,143; г) 1,151; д) 1,175;
е) 1,0138; ж) 1,145; з) 1,166; и) 1,315; к) 1,185;
л) 1,0139; м) 1,142; н) 1,176; п) 1,174; р) 1,125.

Таблица 1.2

x	0,43	0,48	0,55	0,62	0,70	0,75	0,82	0,89
y	1,6360	1,7323	1,8769	2,0335	2,2285	2,3597	2,5566	2,7699

Значения X:

а) 0,70200; б) 0,70600; в) 0,71345; г) 0,71900;
д) 0,70237; е) 0,70764; ж) 0,71562; з) 0,72218.

Таблица 1.3

x_i	1,03	1,08	1,16	1,23	1,26	1,33	1,39
y_i	2,80107	2,94468	3,18993	3,42123	3,52542	3,78104	4,01485

Значения X:

а) 1,20400; б) 1.20911; в) 1,22609; г) 1,27444;
д) 1,20678; е) 1,21555; ж) 1,23709; з) 1,27700;
и) 1,22374; к) 1,25235; л) 1,26000; м) 1,26861.

Таблица 1.4

x_i	0,35	0,41	0,47	0,51	0,56	0,64
y_i	2,73951	2,30080	1,96864	1,78776	1,59502	1,34310

Значения X:

а) 0,54030; б) 0,54073; в) 0,54090; г) 0,54147;
д) 0,54039; е) 0,54060; ж) 0,54096; з) 0,54120.

Таблица 1.5

x_i	0,41	0,46	0,52	0,60	0,65	0,72
y_i	2,57418	2,32513	2,09336	1,86203	1,74926	1,62098

Значения X:

а) 0,61610; б) 0,61654; в) 0,61703; г) 0,61809;
д) 0,61682; е) 0,61750; ж) 0,61890; з) 0,61921.

Таблица 1.6

x_i	0,68	0,73	0,8	0,88	0,93	0,99
y_i	0,80866	0,89492	1,02964	1,20966	1,34087	1,52368

Значения X:

а) 0,89600; б) 0,89670; в) 0,89703; г) 0,89831;
д) 0,89622; е) 0,89724; ж) 0,89907; з) 0,89920.

Таблица 1.7

x_i	1,50	1,54	1,56	1,60	1,63	1,70
y_i	3,873	3,924	3,950	4,000	4,037	4,123

Значения X:

а) 1,52; б) 1,55; в) 1,57; г) 1,61; д) 1,67;
е) 1,53; ж) 1,58; з) 1,59; и) 1,62; k) 1,69.

Таблица 1.8

x_i	2,0	2,3	2,5	3,0	3,5	3,8	4,0
y_i	5,848	6,127	6,300	6,694	7,047	7,243	7,368

Значения X:
а) 2,22; б) 2,41; в) 2,78; г) 3,34; д) 3,75; е) 3,88;
ж) 2,23; з) 2,43; и) 2,79; к) 3,42; л) 3,76; м) 3,98.

Таблица 1.9

x	0,62	0,67	0,74	0,80	0,87	0,96
y	0,53794	0,51171	0,47711	0,44932	0,41895	0,38289

Значения X:
а) 0,801000; б) 0,806695; в) 0,812456; г) 0,818560;
д) 0,823440; е) 0,825561; ж) 0,845700; з) 0,848864;
и) 0,850425; к) 0,860989; л) 0,864742; м) 0,864000.

Таблица 1.10

x	0,40	0,44	0,51	0,56	0,62	0,67
y	0,379949	0,413644	0,469945	0,507977	0,551128	0,584980

Значения X

а) 0,605200; б) 0,605898; в) 0,606220; г) 0,607400;
д) 0,605328; е) 0,60660l; ж) 0,606834; з) 0,607753.

Таблица 1.11

x	0,05	0,10	0,17	0,25	0,30	0,36
y	0,050042	0,100335	0,171657	0,255342	0,309336	0,376403

Значения X

а) 0,207800; б) 0,208063; в) 0,208320 г) 0,209157;
д) 0,207700; е) 0,208068; ж) 0,208813 з) 0,209100.

Таблица 1.12

x	0,11	0,15	0,21	0,29	0,35	0,40
y	9,05421	6,61659	4,69170	3,35106	2,73951	2,36522

Значения X

а) 0,31400; б) 0,31452; в) 0,31520; г) 0,31570;
д) 0,31413; е) 0,31476; ж) 0,31533; з) 0,31583.

Таблица 1.13

x	0,025	1,327	2,834	3,576	4,396
y	-3,298	0,386	2,935	4,129	1,637

Значения X

а) 0,31400; б) 0,31452; в) 0,31520; г) 0,31570;
д) 0,31413; е) 0,31476; ж) 0,31533; з) 0,31583.

Выполнение заданий в Mathcad.

Выполнение *первого* задания в Mathcad**.**

Задание 1. По заданной таблице найти интерполяционный многочлен Лагранжа, построить его график и отметить на нем точки $M_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2$.

Решение.

Создаем два вектора с координатами точек:

$$x := \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Указываем количество узлов

$$kol\_uzl := 3 \qquad i := 0 .. kol\_uzl - 1$$

Записываем по формуле интерполяционный многочлен Лагранжа *L(x)*

$$L(X) := y_0 \cdot \frac{(X - x_1) \cdot (X - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} + y_1 \cdot \frac{(X - x_0) \cdot (X - x_2)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} + y_2 \cdot \frac{(X - x_0) \cdot (X - x_1)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)}$$

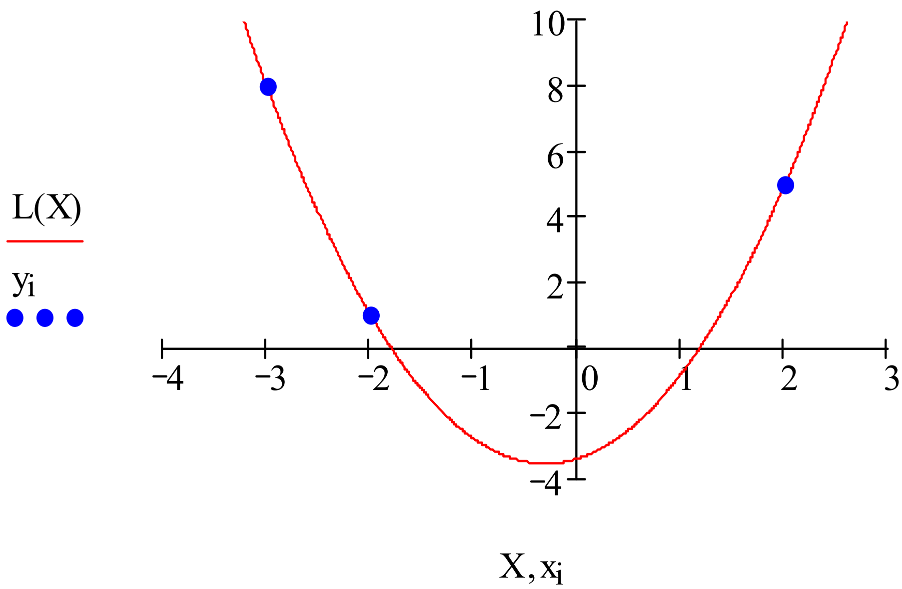
Используем символьные операции в Mathcad (→, simplify)

$$L(X) \rightarrow \frac{8}{5} \cdot (X - 2) \cdot (X + 2) - \frac{1}{4} \cdot (X + 3) \cdot (X - 2) + \frac{1}{4} \cdot (X + 3) \cdot (X + 2)$$

$$L(X) \text{ simplify} \rightarrow \frac{8}{5} \cdot X^2 - \frac{17}{5} + X$$

$$L(X) := \frac{8}{5} \cdot X^2 - \frac{17}{5} + X$$

Строим график *L(X)* и график из точек $M_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2$ в одной системе координат



Выполнение второго задания в Mathcad**.**

Задание 2

Значения некоторой функции *y=f(x)* образуют таблицу.

Вычислить значение заданной функции для указанных значений аргумента X, используя интерполяционный многочлен Лагранжа.

Решение

Рассмотрим два способа решения в MathCad.

1-й способ

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 25 \\ 39 \\ 65 \end{pmatrix}$$

Âåêòîðû **x** è **y** çàäàþò òàáëèöó èíòåðïîëèðóåìîé ôóíêöèè äëÿ ïîñëåäóþùåé èíòåðïîëÿöèè ìåòîäîì Ëàãðàíæà

$n := \text{length}(x) - 1 \qquad n = 4$

$n\_uzl := n \qquad i := 0 .. n\_uzl \qquad j := 0 .. n\_uzl$

$x^T = (1\ \ 2\ \ 5\ \ 7\ \ 10) \qquad y^T = (1\ \ 4\ \ 25\ \ 39\ \ 65)$

$$L1(X) := \sum_i y_i \cdot \prod_j \text{if}\left(i = j, 1, \frac{X - x_j}{x_i - x_j}\right)$$

Îáùàÿ ôîðìóëà èíòåðïîëÿöèè

Вычислим значение функции L1(X) при нескольких значениях X

$L1(1.15) = 1.1742 \qquad L1(1.25) = 1.3517 \qquad L1(1.45) = 1.8432$

2-й способ - используем программирование в Mathcad

Создадим два вектора ***x*** и ***y*,** используя данные таблицы интерполируемой функции для последующей интерполяции:

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 25 \\ 39 \\ 65 \end{pmatrix} \qquad n := \text{length}(x) - 1 \qquad n = 4$$

Создаем функцию $L2(x)$, используя элементы программирования

$$L2(X) := \begin{array}{|l} s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad \begin{array}{|l} PR \leftarrow 1 \\ \text{for } j \in 0..n \\ \quad PR \leftarrow PR \cdot \dfrac{X - x_j}{x_i - x_j} \text{ if } i \neq j \\ s \leftarrow s + PR \cdot y_i \end{array} \\ \text{return } s \end{array}$$

Вычислим значение функции ***L2(X)*** при нескольких значениях X

$L2(1.139) = 1.158 \quad L2(5.243) = 26.796 \quad L2(8.151) = 47.032$

Видим, что значения функций **L1(X)** и **L2(X)** совпали при указанных значениях X с вычисленными значениями 1-м способом.

Лабораторная работа №2

Интерполирование для равноотстоящих узлов. Первая и вторая интерполяционные формулы Ньютона

Узлы интерполяции называются *равноотстоящими,* если

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i = h = const \qquad (i = 0, 1, ..., n - 1).$$

Конечными разностями функции $y = f(x)$ называются разности вида:

$\Delta y_i = x_{i+1} - x_i$ – конечные разности первого порядка,

$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ – конечные разности второго порядка,

....

$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$ – конечные разности k-го порядка.

Ниже дается *горизонтальная таблица* конечных разностей при $n = 5$ (см. стр.15).

1. ***Первая интерполяционная формула Ньютона*** имеет вид:

$$y(x) = P_n(x) =$$

$$= y_0 + q\,\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_o\,, \quad (2.1)$$

где $q = \frac{x - x_0}{h}$.

В формуле используется верхняя горизонтальная строка таблицы разностей. Ниже в таблице элементы этой строки подчеркнуты.

I	x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	X_0	$\underline{y_0}$	$\underline{\Delta y_0}$	$\underline{\Delta^2 y_0}$	$\underline{\Delta^3 y_0}$	$\underline{\Delta^4 y_0}$
1	x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$
2	x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	
3	x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$		
4	x_4	y_4	Δy_4			
5	x_5	y_5				

Для вычислений формулу удобно применять в виде:

$$y(x) = P_n(x_0 + qh) =$$

$$= y_0 + q(\Delta y_0 + \frac{(q-1)}{2}(\Delta^2 y_0 + \frac{q-2}{3}(\Delta^3 y_0 + \frac{q-3}{4}(\Delta^4 y_0 + \cdots)\cdots). \quad (2.2)$$

(это формула Горнера).

Остаточный член $R_n(x)$ формулы (2.1) имеет вид:

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \quad (2.3)$$

где ξ — некоторая внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и точку x.

При наличии дополнительного узла x_{n+1} на практике пользуются более, удобной приближенной формулой:

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_o}{(n+1)!} q(q-1)\cdots(q-n). \quad (2.4)$$

Последняя формула полезна, например, в случае эмпирически заданных функций.

Число n желательно выбирать так, чтобы разности $\Delta^n y_i$ были *практически постоянными*.

Формула (2.1) используется для интерполирования и экстраполирования в точках x, близких к началу таблицы x_0.

При $n = 1$ и $n = 2$ из формулы (2.1) получаем частные случаи:

1) линейная интерполяция – $y(x) = y_0 + q\,\Delta y_0$;

2) квадратичная интерполяция –

$$y(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 .$$

2. ***Вторая интерполяционная формула Ньютона*** имеет вид:

$$y(x) = P_n(x) =$$

$$=y_n+q\,\Delta y_{n-1}+\frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\cdots+\frac{q(q+1)\cdots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_o \;, \quad (2.5)$$

где $q=\dfrac{x-x_n}{h}$.

В формуле используется нижняя наклонная строка таблицы разностей. В таблице ниже элементы этой строки подчеркнуты.

Остаточный член $R_n(x)$ формулы (2.5) имеет вид:

$$R_n(x)=h^{n+1}\frac{q(q+1)\cdots(q+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\,, \quad (2.6)$$

где ξ – внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и точку x.

Формула (2.6) используется для интерполирования и экстраполирования в точках $\boldsymbol{x}$, близких к концу таблицы, т.е. к $\boldsymbol{x_n}$.

В формуле используется нижняя наклонная строка таблицы разностей. Ниже в таблице элементы этой строки подчеркнуты.

i	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{y_i}$	$\Delta\mathbf{y}$	$\Delta^2\mathbf{y}$	$\Delta^3\mathbf{y}$	$\Delta^4\mathbf{y}$
0	x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
1	x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\underline{\Delta^4 y_1}$
2	x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\underline{\Delta^3 y_2}$	
3	x_3	y_3	Δy_3	$\underline{\Delta^2 y_3}$		
4	x_4	y_4	$\underline{\Delta y_4}$			
5	x_5	$\underline{y_5}$				

Основные вопросы теории

1. Конечные разности (определение, свойства).
2. Связь между производными функции и конечными разностями.
3. Как строятся интерполяционные многочлены Ньютона? Первая и вторая интерполяционные формулы Ньютона.
4. Формулы оценки погрешностей интерполирования по формулам Ньютона.

5. Экстраполирование функций.

Задание к лабораторной работе № 2

1.Составьте таблицу конечных разностей. Запишите первый и второй интерполяционные многочлены Ньютона такого порядка, который допускается таблицей.

2.Найдите интерполированием значения функции при заданных значениях аргумента Х.

3.При помощи конечных разностей оцените погрешности полученных значений.

Для вычисления формулы Ньютона удобно представлять по схеме Горнера (для 1-го интерполяционного многочлена Ньютона формула схемы Горнера на стр.15).

Замечание. Решение задания в Mathcad рассмотрено дальше (стр. 22).

Варианты заданий индивидуальных заданий

Таблица 2.1

x	1,415	1,42	1,425	1,43	1,435	1,44	1,445	1,45	1,455	1,46	1,465
y	0,888551	0,889599	0,890637	0,891667	0,892687	0,893698	0,894700	0,895693	0,896677	0,897653	0,898619

Вычислить $F(x)$ для следующих значений аргумента Х по первой и второй интерполяционной формуле Ньютона:

а) 1,41610 и 1,46250; б) 1,41790 и 1,46260; в) 1,41070 и 1,46270;

г) 1,41659 и 1,46280; д) 1,41923 и 1,46280; с) 1,41854 и 1,46334;

ж) 1,42351 и 1,46250; з) 1,42500 и 1,46401; и) 1,42153 и 1,46446;

к) 1,41728 и 1,46307; л) 1,42601 и 1,46480.

Таблица 2.2

x	0,101	0,106	0,111	0,116	0,121	0,126	0,131	0,136	0,141	0,146
y	1,26183	1,27644	1,29122	1,30617	1,3213	1,3366	1,35207	1,36773	1,38357	1,39959

Вычислить $F(x)$ для следующих значений аргумента Х по первой и второй интерполяционной формуле Ньютона:

а) 0,10200 и 0,14351; б) 0,10350 и 0,14373; в) 0,10300 и 0,14622;

г) 0,10260 и 0,14452; д) 0,10237 и 0,14507; е) 0,10345 и 0,14631;

ж) 0,10839 и 0,14851; з) 0,10299 и 0,14861; и) 0,10700 и 0,14645;

к) 0,10844 и 0,14973; л) 0,10736 и 0,15000.

Таблица 2.3

x	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75
y	0,86071	0,81873	0,77880	0,74082	0,70469	0,67032	0,63763	0,60653	0,57695	0,54881	0,52205	0,49659	0,47237

Вычислить *F(x)* для следующих значений аргумента X по первой и второй интерполяционной формуле Ньютона:

а) 0,151000 и 0,749000; б) 0,150911 и 0,747561; в) 0,150800 и 0,745550;

г) 0,151100 и 0,741110; д) 0,152250 и 0,737590; е) 0,152500 и 0,715520;

ж) 0,154000 и 0,733330; з) 0,153250 и 0,727520; и) 0,153500 и 0,729990.

Таблица 2.4

x	0,180	0,185	0,190	0,195	0,200	0,205	0,210	0,215	0,220	0,225	0,230	0,235
y	5,61543	5,46693	5,32634	5,19304	5,06649	4,94619	4,83170	4,72261	4,61855	4,51919	4,42422	4,33337

Вычислить *F(x)* для следующих значений аргумента X по первой и второй интерполяционной формуле Ньютона:

а) 0,18090 и 0,22750; б) 0,18250 и 0,22816; в) 0,18170 и 0,22793;

г) 0,18197 и 0,22851; д) 0,18236 и 0,22901; е) 0,18159 и 0,22950;

ж) 0,18229 и 0,23257; з) 0,18523 и 0,23351; и) 0,18672 и 0,23351;

к) 0,18734 и 0,23333; л) 0,18270 и 0,23450.

Таблица 2.5

x	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70	3,75	3,80	3,85	3,90	3,95	4,00	4,05	4,10	4,15	4,20
y	33,115	34,813	36,598	38,475	40,447	42,521	44,701	46,993	49,402	51,935	54,598	57,398	60,34	63,434	66,686

Вычислить *F(x)* для следующих значений аргумента X по первой и второй интерполяционной формуле Ньютона:

а) 3,5011 и 4,1990; б) 5,5010 и 4,1975; в) 3,5018 и 4,19;

г) 3,5145 и 4,1898; д) 3,5229 и 4,1888; с) 3,5219 и 4,1844;

ж) 3,5196 и 4,1811; з) 3,5056 и 4,1777; и) 3,5186 и 4,1755;

к) 3,5220 и 4,1760.

Таблица 2.6

x	0,115	0,120	0,125	0,130	0,135	0,140	0,145	0,150	0,155	0,160	0,165	0,170	0,175	0,180
y	8,65729	8,29329	7,95829	7,64893	7,36235	7,09613	6,84815	6,61659	6,39986	6,19658	6,00551	5,82558	5,65583	5,49543

Вычислить *F(x)* для следующих значений аргумента X по первой и второй интерполяционной формуле Ньютона:

а) 0,11560 и 0,17250; б) 0,11695 и 0,17296; в) 0,11685 и 0,17359;

г) 0,11600 и 0,17403; д) 0,12000 и 0,17498; е) 0,11733 и 0,17450;

ж) 0,12170 и 0,17258; з) 0,12199 и 0,17436; и) 0,12245 и 0,17348;

к) 0,11559 и 0,17752; л) 0,11750 и 0,17490.

Таблица 2.7

x	3,200	3,201	3,202	3,203	3,204	3,205	3,206	3,207	3,208	3,209	3,210	3,211	3,212	3,213
y	24,533	24,557	24,582	24,606	24,631	24,656	24,680	24,703	24,730	24,754	24,779	24,804	24,854	24,829

Вычислить *F(x)* для следующих значений аргумента X по первой и второй интерполяционной формуле Ньютона:

а) 3,2006 и 3,2122; б) 3,2016 и 3,2125; в) 3,14107 и 3,2132

г) 3,2005 и 3,2124; д) 3,2013 и 3,2126; с) 3,14185 и 3,2131

ж) 3,2004 и 3,2121; з) 3,2015 и 3,2127; и) 3,14215 и 3,2133

к) 3,2012 и 3,2125; л) 3,2017 и 3,2128.

Таблица 2.8

x	1,480	1,481	1,482	1,483	1,484	1,485	1,486	1,487	1,488	1,489	1,490	1,491	1,492	1,493
y	0,99588	0,99597	0,99606	0,99615	0,99624	0,99632	0,99641	0,99649	0,99657	0,99666	0,99674	0,99682	0,99690	0,99698

Вычислить *F(x)* для следующих значений аргумента X по первой и второй интерполяционной формуле Ньютона:

а) 1,4806 и 1,4905; б) 1,4812 и 1,4926; в) 1,4821 и 1,4917;

г) 1,4804 и 1,4907; д) 1,4813 и 1,4925; с) 1,4822 и 1,4918;

ж) 1,4805 и 1,4909; з) 1,4816 и 1,4924; и) 1,4834 и 1,4916;

к) 1,4807 и 1,4906; л) 1,4814 и 1,4923 .

Таблица 2.9

x	1,520	1,521	1,522	1,523	1,524	1,525	1,526	1,527	1,528	1,529	1,530	1,531	1,532	1,533
y	19,67	20,065	20,477	20,906	21,354	21,82`1	22,308	22,818	23,352	23,911	24,498	25,115	25,763	26,445

Вычислить *F(x)* для следующих значений аргумента X по первой и второй интерполяционной формуле Ньютона:

а) 1,5202 и 1,5312; б) 1,5213 и 1,5324; в) 1,5223 и 1,5335;

г) 1,5205 и 1,5313; д) 1,5216 и 1,5324; с) 1,5224 и 1,5332;

ж) 1,5203 и 1,5314; з) 1,5215 и 1,5324; и) 1,5226 и 1,5331;

к) 1,5204 и 1,5317; л) 1,5217 и 1,5326.

Таблица 2.10

x	0,01	0,06	0,11	0,16	0,21	0,26	0,31	0,36	0,41	0,46	0,51	0,56
y	0,991824	0,951935	0,913650	0,876905	0,841638	0,807789	0,775301	0,744120	0,714193	0,685470	0,657902	0,631442

Вычислить $F(x)$ для следующих значений аргумента X по первой и второй интерполяционной формуле Ньютона:

а) 0,0145 и 0,5122; б) 0,0623 и 0,4654; в) 0,114 и 0,5621;

г) 0,0154 и 0,5132; д) 0,0635 и 0,4627; с) 0,112 и 0,5613;

ж) 0,0123 и 0,5123; з) 0,0642 и 0,4631; и) 0,115 и 0,5634;

к) 0,0162 и 0,5121; л) 0,0614 и 0,4643.

Таблица 2.11

x	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26
y	4,4817	4,9530	5,4739	6,0496	6,6859	7,3891	8,1662	9,0250	9,9742	11,0232	12,1825	13,4637

Вычислить $F(x)$ для следующих значений аргумента X по первой и второй интерполяционной формуле Ньютона:

а) 0,1503 и 0,25226; б) 0,1604 и 0,2425; в) 0,1482 и 0,2621;

г) 0,1504 и 0,25132; д) 0,1603 и 0,2426; с) 0,1473 и 0,2613;

ж) 0,1507 и 0,25143; з) 0,1605 и 0,2427; и) 0,1468 и 0,2634;

к) 0,1508 и 0,25152; л) 0,1602 и 0,2423.

Таблица 2.12

x	0,45	0,46	0,47	0,48	0,49	0,50	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56
y	20,1946	19,6133	18,9425	18,1746	17,3010	16,3123	15,1984	13,9484	12,5508	10,9937	9,2647	7,3510

Вычислить $F(x)$ для следующих значений аргумента X по первой и второй интерполяционной формуле Ньютона:

а) 1,4526 и 1,5539; б) 1,4612 и 1,5486; в) 1,4482 и 1,5623;

г) 1,4534 и 1,5547; д) 1,4635 и 1,5492; с) 1,4463 и 1,5618;

ж) 1,4545 и 1,5592; з) 1,4616 и 1,5464; и) 1,4474 и 1,5646;

к) 1,4557 и 1,5584; л) 1,4624 и 1,5453.

Таблица 2.13

x	1,335	1,340	1,345	1,350	1,355	1,360	1,365	1,370
y	4,16206	4,25562	4,35325	4,45522	4,56184	4,67344	4,79038	4,91306

Вычислить *F(x)* для следующих значений аргумента X по первой и второй интерполяционной формуле Ньютона:

а) 1,33523 и 1,36547; б) 1,34126 и 1,36126; в) 1,34582 и 1,37121;

г) 1,33532 и 1,36572; д) 1,34163 и 1,36026; с) 1,34524 и 1,37034;

ж) 1,33552 и 1,36538; з) 1,34148 и 1,36126; и) 1,34512 и 1,37118;

к) 1,33546 и 1,36584; л) 1,34146 и 1,36126.

Интерполяционные формулы Ньютона в Mathcad

Дана таблица значений функции в точках (x_i, y_i)

x	0,150	0,155	0,160	0,165	0,170	0,175	0,180
y	6,61659	6,39986	6,19658	6,00551	5,82558	5,65583	5,49543

С помощью интерполяционных формул Ньютона найти значения функции при $x1 = 0,153$ и при $x2 = 0,173$, определить погрешность интерполирования в окрестностях этих точек.

Решение

Значения функции $y(x_i)$ из данной таблицы записываем в виде вектора:

$$y := \begin{pmatrix} 6.61659 \\ 6.39986 \\ 6.19658 \\ 6.00551 \\ 5.82558 \\ 5.65583 \\ 5.49543 \end{pmatrix}$$

Определяем количество узлов интерполяции (отнимаем единицу, т.к. нумерация начинается с нуля):

$$k\_uzl := length(y) - 1 \qquad k\_uzl = 6$$

Т.к. значения $\boldsymbol{x}$ в таблице равноотстоящие, то вектор $\boldsymbol{x}$ получим так:

$$i := 0..k\_uzl \qquad x_0 := 0.150 \qquad h := 0.005$$

$$x_{i+1} := x_i + h \qquad x^T = (0.15\ \ 0.155\ \ 0.16\ \ 0.165\ \ 0.17\ \ 0.175\ \ 0.18\ \ 0.185)$$

Создадим матрицу M. В нулевой столбец матрицы M запишем элементы вектора $\boldsymbol{x}$ (нумерация строк и столбцов начинается с нуля), в первый столбец матрицы M запишем элементы вектора $\boldsymbol{y}$:

$$M_{i,0} := x_0 + i \cdot h \qquad M^{\langle 1 \rangle} := y$$

Для расчета конечных разностей определим функцию $q(b)$, в матрицу b поместим конечные разности:

$$q(b) := \left| \begin{array}{l} \text{for } n \in 1..k\_uzl \\ \quad \text{for } k \in 0..k\_uzl - n \\ \quad\quad b_{k,n+1} \leftarrow b_{k+1,n} - b_{k,n} \\ b \end{array} \right.$$

Непосредственный расчет конечных разностей получим в матрице М:

$$M := q(M)$$

$$M = \begin{pmatrix} 0.15 & 6.61659 & -0.21673 & 0.01345 & -0.00124 & 0.00017 & -0.00006 & 0.00008 \\ 0.155 & 6.39986 & -0.20328 & 0.01221 & -0.00107 & 0.00011 & 0.00002 & 0 \\ 0.16 & 6.19658 & -0.19107 & 0.01114 & -0.00096 & 0.00013 & 0 & 0 \\ 0.165 & 6.00551 & -0.17993 & 0.01018 & -0.00083 & 0 & 0 & 0 \\ 0.17 & 5.82558 & -0.16975 & 0.00935 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.175 & 5.65583 & -0.1604 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.18 & 5.49543 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

По таблице определим степень многочлена интерполяции.

Видим, что конечные разности 3 -го порядка практически постоянны, поэтому составим интерполяционные многочлены Ньютона 3-го порядка:

$n := 3 \quad k := 0 \quad x0 := M_{k,0} \quad x0 = 0.15$

1 - я интерполяционная формула Ньютона:

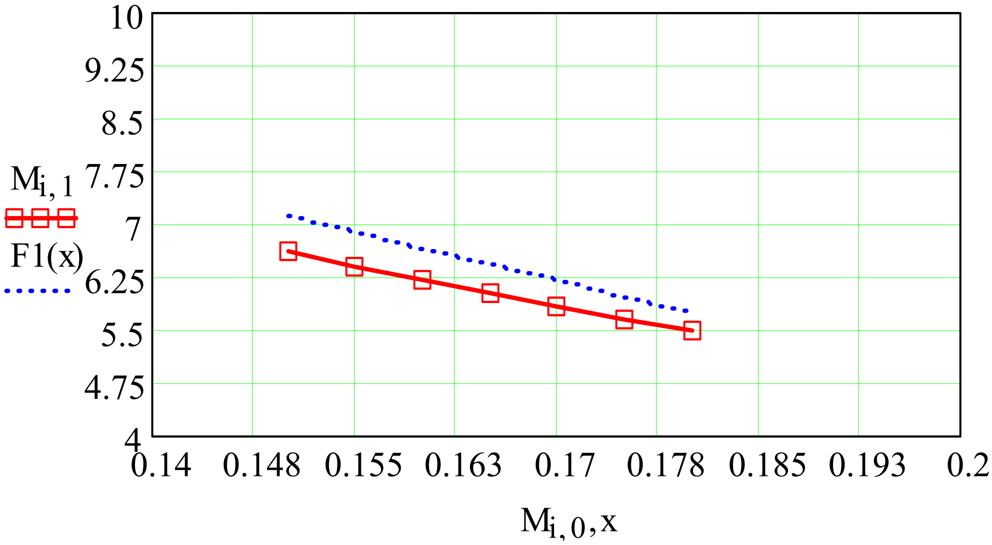
$$F1(x) := M_{k,1} + \sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=0}^{i-1}\left(\frac{x-x0}{h}-j\right)\right]\cdot\frac{M_{k,i+1}}{i!}$$

Формула остаточного члена для 1 - ой формулы Ньютона:

$$R1(x) := \left[\prod_{j=0}^{n}\left(\frac{x-x0}{h}-j\right)\right]\cdot\frac{M_{k,n+2}}{(n+1)!}$$

$x1 := 0.153 \quad F1(x1) = 6.48487 \quad R1(x1) = -0.000006$

Построим график *F1(x)* и график из точек *(x_i , y_i)*.



2 - я интерполяционная формула Ньютона:

$k := k\_uzl \quad xn := M_{k,0} \quad n := 3 \quad xn = 0.18$

$$F2(x) := M_{k,1} + \sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=0}^{i-1}\left(\frac{x-xn}{h}+j\right)\right]\cdot\frac{M_{k-i,i+1}}{i!}$$

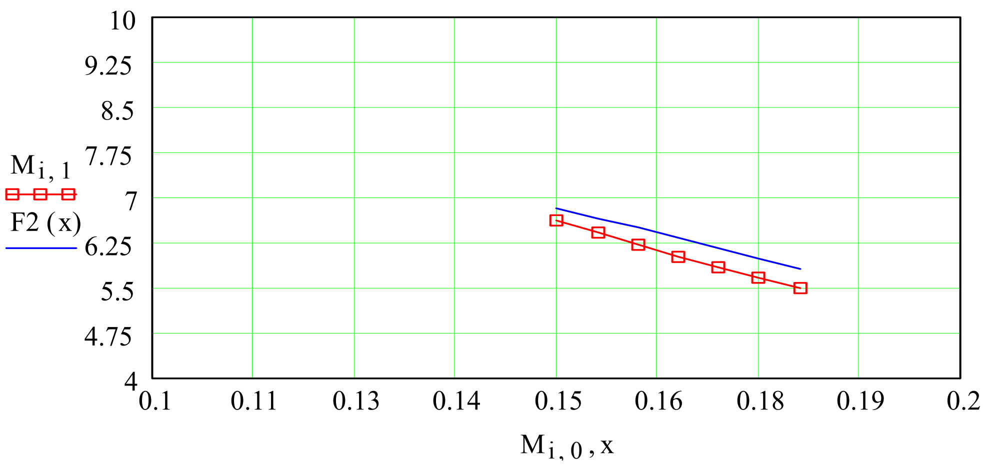
Формула остаточного члена для 2 - ой формулы Ньютона:

$$R2(x) := \left[\prod_{j=0}^{n}\left(\frac{x - xn}{h} + j\right)\right] \cdot \frac{M_{k-(n+1),n+2}}{(n+1)!}$$

Вычислим значение функции *F2(x)* и остаточный член *R2(x)* при значении x2 = 0,173

$x2 := 0.173$ $F2(x2) = 5.72256$ $R2(x2) = 0.000003$

Построим график *F2(x)* и график из точек (x_i, y_i).



Выполним в MathCad, используя стандартные функции:

$$S := \mathrm{cspline}\left(M^{\langle 0\rangle}, M^{\langle 1\rangle}\right)$$

$$F(x) := \mathrm{interp}\left(S, M^{\langle 0\rangle}, M^{\langle 1\rangle}, x\right)$$

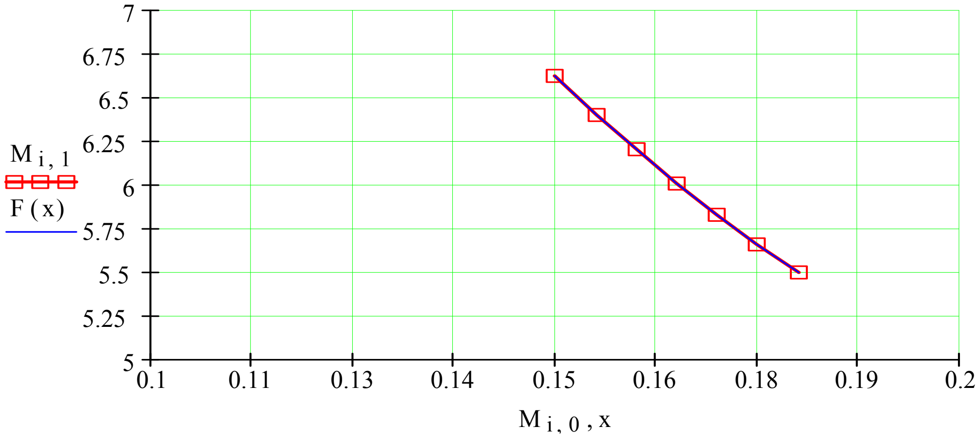
Вычислим значение функции *F(x)* при значении *x=0,153*

и *x = 0,173*:

$F(0.153) = 6.48487$ $F(0.173) = 5.7225632$

Видим, что значения функции F(0.153) и F(0.173) совпадают с теми, которые получены при вычислении F1(0.153) и F2(0.173).

Построим график *F(x)* и график из точек (x_i, y_i), (значения x_i, y_i находятся в нулевом и первом столбцах матрицы *M)*.



Список литературы

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – Т.1. - М.: Наука, 1987.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – Т.1. – М.: Наука, 1966.
3. Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. - М.: Наука, 1970.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 2007.
5. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972.
6. Черкасова М.П. Сборник задач по численным методам. – Минск: Высшая школа, 1967.
7. Мудров А. Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. – Томск: МП «РАСКО», 1992.
8. Самоучитель Mathcad 12/ Дмитрий Кирьянов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
9. Лапчик М.П., Рагулина М.И., Хеннер Е.К. Численные методы. – М.: ACADEMA, 2004.
10. Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Высшая школа, 2001.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Интерполирование функций 3
2. Постановка задачи интерполирования 3
3. Лабораторная работа №1 4
   3.1. Интерполяционная формула Лагранжа. Схема Эйткена 4
      3.1.1. Краткие теоретические сведения 4
         3.1.1.1. Интерполяционная формула Лагранжа 4
         3.1.1.2. Интерполяционная схема Эйткена 5
      3.1.2. Основные вопросы теории 6
      3.1.3. Задания для лабораторной работы № 1 7
         3.1.3.1. Задание 1 7
         3.1.3.2. Варианты задания 1 7
         3.1.3.3. Задание 2 8
         3.1.4. Выполнение заданий в Mathcad 11
4. Лабораторная работа №2 14
   4.1. Интерполирование для равноотстоящих узлов. Первая и вторая интерполяционные формулы Ньютона 14
      4.1.1. Первая интерполяционная формула Ньютона 14
      4.1.2. Вторая интерполяционная формула Ньютона 16
      4.1.3. Основные вопросы теории 16
      4.1.4. Задание для лабораторной работы № 2 17
      4.1.5. Интерполяционные формулы Ньютона в Mathcad 22
      4.1.6. Выполнение в MathCad, используя стандартные функции 25
5. Список литературы 26

Бекишева Марина Борисовна

Катюхина Людмила Георгиевна

Интерполирование функций

Методические указания
к выполнению лабораторной работы
для студентов
специальности 010101(010100)

Редактор Н.М. Устюгова
…………………………………………………………………………………
Подписано к печати Формат 60*84 1/16 Бумага тип. № 1
Печать трафаретная Усл. печ. л.1,75 Уч. – изд. л. 1,75
Заказ Тираж 100 Цена свободная
………………………………………………………………………………
Редакционно-издательский центр КГУ.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет.