МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Экономическая теория и моделирование экономических процессов»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ТЕМАТИКА КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИКЕ

к выполнению контрольной (самостоятельной) работы
для студентов направлений 080100 «Экономика», 080200 «Менеджмент»,
специальности 036401 «Таможенное дело»
заочной формы обучения

Курган 2013

Кафедра экономической теории и моделирования экономических процессов

Дисциплина: «Математика» (направления: 080100, 080200; специальность 036401)

Составил: ассистент Е.П. Белобородова

Утверждены на заседании кафедры «25» декабря 2012 г.

Рекомендованы методическим советом университета
«27» декабря 2012 г.

Содержание

Введение

Методические указания составлены в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Математика» и предназначены для студентов направлений 080100 «Экономика», 080200 «Менеджмент», специальности 036401 «Таможенное дело» заочной формы обучения. В данных методических указаниях изложены последовательность изучения дисциплины, теоретическая основа и типовые примеры для выполнения контрольных заданий, варианты контрольных (самостоятельных) работ и рекомендации по их выполнению.

1 Линейная алгебра. Системы линейных уравнений. Метод Крамера. Метод Гаусса

Системой линейных уравнений (линейной системой) называется система вида
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$
где числа a_{ij} называются коэффициентами системы, числа b_i - свободными членами. Решением системы называется совокупность n значений неизвестных x_n, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в тождества.

Система линейных уравнений может быть записана в матричном виде: $Ax = b,$ где A - матрица системы, b - правая часть, x - искомое решение, A_p - расширенная матрица системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \ldots & a_{11} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Однородной системой линейных уравнений называется система, правая часть которой равна нулю:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система ***всегда совместна***, поскольку любая однородная линейная система имеет, по крайней мере, одно решение: $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad ..., \quad x_n = 0.$

Если однородная система имеет единственное решение, то это единственное решение - нулевое, и система называется *тривиально совместной*. Если же однородная система имеет более одного решения, то среди них есть и ненулевые, в этом случае система называется нетривиально совместной.

При $m = n$ для нетривиальной совместности системы необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы системы был равен нулю. Таким образом, чтобы доказать, что система совместна, достаточно доказать, что её определитель равен нулю.

Пусть A - квадратная матрица порядка n (n > 1). Определителем Δ (или $|A|$) квадратной матрицы A порядка n называется число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} (-1)^{j+1} M_1^{<j>},$$

где $M_1^{<j>}$ - определитель квадратной матрицы порядка *(n-1)*, полученной из матрицы A вычеркиванием первой строки и j-го столбца, называемый *минором* элемента a_{ij}.

Для квадратной матрицы третьего порядка формула вычисления определителя имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\left(-1\right)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\left(-1\right)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{13}\left(-1\right)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$+a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Или

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Пример. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 3(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2(42-0) - 3(35-8) +$$

$$+4(0-6) = 84 - 81 - 24 = -21.$$

Проверка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 6\cdot 7 + 4\cdot 5\cdot 0 + 3\cdot 8\cdot 1 - 4\cdot 6\cdot 1 - 2\cdot 8\cdot 0 - 3\cdot 5\cdot 7 =$$

$$= 84 + 0 + 24 - 24 - 0 - 105 = -21.$$

Ответ: -21.

Метод Крамера

Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Определитель третьего порядка, соответствующий матрице системы, т.е. составленный из коэффициентов при неизвестных, имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Составим ещё три определителя следующим образом: заменим в определителе D последовательно 1, 2 и 3 столбцы столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда можно сформулировать **теорему (правило Крамера):** Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система имеет одно и только одно решение, причём $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 2 \cdot 4 - 11 = -8 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 + 28 - 26 = -8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -14 + 8 - 10 = -16,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -26 - 20 + 22 = -24.$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8}{-8} = 1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3.$$

Ответ: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Метод Гаусса

Метод Гаусса – алгоритм нахождения решения невырожденных систем линейных уравнений (система линейных уравнений невырожденная, когда её определитель не равен нулю). Основная идея метода состоит в приведении матрицы A посредством эквивалентных преобразований к треугольному виду, после чего значения искомых неизвестных могут быть получены непосредственно в явном виде.

Метод Гаусса основывается на возможности выполнения преобразований линейных уравнений, которые не меняют при этом решения рассматриваемой системы (такие преобразования носят наименование эквивалентных). К числу таких преобразований относятся:

- умножение любого из уравнений на ненулевую константу;
- перестановка уравнений;
- прибавление к уравнению любого другого уравнения системы.

Рассмотрим систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие x_1. Для этого второе уравнение разделим на a_{21} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с 1-ым уравнением. Аналогично третье уравнение разделим на a_{31} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с первым. В результате исходная система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \qquad\quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases}$$

Теперь из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее x_2. Для этого третье уравнение разделим на a'_{32}, умножим на $-a'_{22}$ и сложим со вторым. Тогда будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases}$$

Из последнего уравнения легко найти x_3, затем из 2-го уравнения x_2 и, наконец, из 1-го – x_1.

Часто вместо того, чтобы писать новую систему уравнений, ограничиваются тем, что выписывают расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right),$$ затем приводят её к треугольному виду с помощью элементарных преобразований (перестановка строк или столбцов; умножение строки на число, отличное от нуля; прибавление к одной строке других строк).

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x-3y+2z=2, \\ 4x-5y+2z=1, \\ 5x-6y+4z=3 \end{cases}$ методом Гаусса.

Решение

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \times(-4) \\ \times(3)^{+} \\ \end{array}\left|\begin{array}{l} \times 5 \\ + \\ \times 3 \end{array}\right.\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \times(-1) \\ + \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right).$$

Вернувшись к системе уравнений, имеем:

$$\begin{cases} 3x-3y+2z=2, & x=1, \\ -3y-2z=-5, & y=1, \\ 4z=4. & z=1. \end{cases}$$

2 Векторная алгебра. Координаты и векторы в пространстве

Направленный отрезок с началом в точке $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и концом в точке $A_2(x_2, y_2, z_2)$ называется вектором. Обозначается $\overline{A_1A_2}$ или строчной буквой латинского алфавита: $\overline{a}$ (*или* $\overline{b}$, $\overline{c}$...). Тогда координаты вектора $\overline{A_1A_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Длина отрезка A_1A_2 называется ***длиной или модулем вектора*** и обозначается: $\left|\overline{A_1A_2}\right|$ *или* $\left|\overline{a}\right|$. Вычисляется по формуле: $\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (\overline{a},\ \overline{b}) = \left|\overline{a}\right| \times \left|\overline{b}\right| \times \cos\alpha.$$

Скалярное произведение в координатах. Пусть векторы $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Тогда скалярно произведение $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, косинус угла между векторами $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ можно вычислить по формуле:

$$\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Векторным произведением векторов $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ называется вектор, обозначаемый $\overline{a} \times \overline{b}$, и удовлетворяющий трём условиям:

- $\overline{a} \times \overline{b}$ перпендикулярен каждому из перемножаемых векторов;
- его длина - $|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}| \times |\overline{b}| \times \sin(\overline{a}, \overline{b})$,
- тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ *и* $\overline{a} \times \overline{b}$ - правая.

Векторное произведение в координатах:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \overline{k},$$

где: $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ - единичные векторы.

Геометрический смысл векторного произведения. Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ (рисунок 1):

$$S = |\overline{a} \times \overline{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}.$$

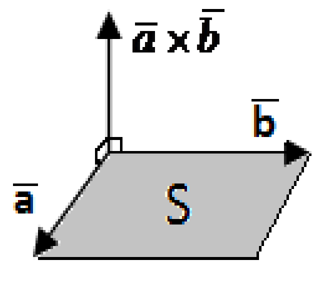

Рисунок 1 - Площадь параллелограмма равна векторному произведению

Смешанным произведением векторов называют векторно-скалярное произведение трех векторов $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$.

Смешанное произведение в координатах: $\overline{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\overline{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\overline{c}=(c_1,c_2,c_3)$, тогда $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Геометрический смысл $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$. Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку, т.е. $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=V$.

3 Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a. Предположим, что независимая переменная x неограниченно приближается к числу a. Это означает, что мы можем придавать x значения сколь угодно близкие к a, но не равные a. Будем обозначать это так $x \to a$. Для таких x найдем соответствующие значения функции. Может случиться, что значения $f(x)$ также неограниченно приближаются к некоторому числу b. Тогда говорят, что число b есть предел функции $f(x)$ при $x \to a$.

Определение. Функция $y = f(x)$ стремится к пределу b при $x \to a$, если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$ из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Если b есть предел функции $f(x)$ при $x \to a$, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Примеры

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x+1\right)=3,\ \lim\limits_{x\to 0} e^{x+1}=e,\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1,$

так как $\dfrac{1}{x}\to 0 \quad \text{\textit{при}} \quad x\to\infty.$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=\overline{\exists}$ - не существует, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$, так как $\dfrac{1}{x}\to\infty$ *при* $x\to 0$.

Условные выражения $\dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}$ характеризуют типы неопределенностей и применяются для обозначения переменных величин, при вычислении предела которых нельзя сразу применять общие свойства пределов. Причём $0^{\infty}=0$, $\dfrac{1}{0}=\infty$.

Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ *раскрывается с помощью тождественных преобразований:*

а) если в числителе и знаменателе – многочлены, то следует разложить их на множители и дробь сократить.

б) если дробь содержит иррациональные выражения, то необходимо избавиться от иррациональности в числителе или знаменателе либо введением новой переменной, либо преобразованием дроби с использованием формулы разности квадратов: $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$.

Примеры

1) $$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{x-1}{x(x+1)}=\frac{0}{2}=0.$$

2) $$\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[4]{x}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l} x=t^4 \\ t=\sqrt[4]{x} \\ x\to16,\quad t\to2 \end{array}\right|=\lim_{t\to2}\frac{t^2-4}{t-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{t\to2}\frac{(t-2)(t+2)}{t-2}=4.$$

3) $$\lim_{x\to10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to10}\frac{\left(\sqrt{x-1}-3\right)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}{(x-10)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to10}\frac{x-10}{(x-10)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}=\frac{1}{6}.$$

Неопределенность вида $\infty-\infty$ также раскрывается с помощью тождественных преобразований: необходимо выражение домножить и разделить на это же выражение, только с противоположным знаком.

Пример

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2})=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2-x-2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}=$$

$$=-\frac{4}{\infty}=0.$$

Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ *раскрывается следующим образом*: числитель и знаменатель дроби разделить на x в старшей степени.

Пример

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+1}{-5x^2+4x-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3\frac{x^2}{x^2}-4\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{-5\frac{x^2}{x^2}+4\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-4\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{-5+4\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=$$

$$=\frac{3-\frac{4}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{-5+\frac{4}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{3-0+0}{-5+0-0}=-\frac{3}{5}.$$

Формула для раскрытия неопределенности вида $0\cdot\infty$:

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{1/g(x)}=\frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

Формула для раскрытия неопределенностей вида $1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$:

$$y=\lim\left(f\left(x\right)\right)^{\varphi(x)}.$$

$$\ln y=\ln\lim\left(f\left(x\right)\right)^{\varphi(x)}=\lim\ln\left(f\left(x\right)\right)^{\varphi(x)}=\lim\varphi\left(x\right)\ln f\left(x\right).$$

Неопределенность вида 1^∞ сводится ко второму замечательному пределу.

Замечательные пределы

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Следствия первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e.$

Следствия второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{1/x}=e,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{k}-1}{x}=k.$$

4 Частные производные функции

Пусть функция $z = f(x,\ y)$ определена в области D и $(x_0,\ y_0)\in D$. Тогда при малых Δx определено ее частное приращение по x: $\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$.

Частной производной функции $f(x,y)$ по переменной x в точке (x_0,y_0) называют предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$ если он существует.

Частную производную по x обозначают одним из следующих символов: $z'_x,\ f'_x,\ \dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial x}$. Аналогично определяется частная производная по y и вводятся ее обозначения.

Частная производная – это производная функции одной переменной, когда значение другой переменной фиксировано. Поэтому частные производные вычисляются по тем же правилам, что и вычисление производных функций одной переменной.

Пример. Вычислить частные производные функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2^3 + 3x_1 - 2x_2$ по каждой из переменных x_1 и x_2.

Решение

Производную по x_1 найдём, считая x_1 переменной, а x_2 - постоянной величиной: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^3 + 3$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 3x_1 x_2^2 - 2$.

Выражения $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ называют ***частными производными второго порядка*** функции $f(x, y)$ по x и по y, соответственно, а выражения $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ – ***смешанными частными производными второго порядка*** функции $f(x, y)$. Их обозначают также символами: z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}, z''_{yx} .

Теорема. Если в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет смешанные частные производные, причем эти производные непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0)$, то они равны в этой точке:

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} .$$

Пример. Найти частные производные функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

Полученные формулы теряют смысл в точке O (0; 0).

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{x'\cdot\sqrt{x^2+y^2}-(\sqrt{x^2+y^2})'\cdot x}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot x}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{x^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y'\cdot\sqrt{x^2+y^2}-(\sqrt{x^2+y^2})'\cdot y}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot y}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{x^2+y^2-y^2}{(x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x'\cdot\sqrt{x^2+y^2}-(\sqrt{x^2+y^2})'\cdot x}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}=\frac{0-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot x}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{-yx}{(x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{y'\cdot\sqrt{x^2+y^2}-(\sqrt{x^2+y^2})'\cdot y}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}=\frac{0-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot y}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{-xy}{(x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

5 Неопределённый интеграл

Пусть на некотором интервале $(a;b)$ задана функция $f(x)$. Функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для всех $x\in\ (a;b)\quad F'(x)=f(x)$.

Любые две первообразные данной функции $f(x)$ отличаются друг от друга на произвольную постоянную. Множество всех первообразных $F(x)+C$, где C - произвольная постоянная, для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ называется неопределённым интегралом функции $f(x)$. Символически это записывается так:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Выражение $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, функция $f(x)$ - подынтегральной функцией. Вычислить неопределённый интеграл означает найти множество всех первообразных подынтегральной функции.

Основные свойства неопределённого интеграла (правила интегрирования):

- производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int (x)dx\right)' = f(x)$;

- дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

- интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной: $\int d\left(F(x)\right) = F(x) + C$;

- постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла: $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$;

- если существуют интегралы $\int f_1(x)dx, \ldots, \int f_n(x)dx$, то неопределённый интеграл суммы функций $f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_n(x)$ равен сумме неопределённых интегралов от этих функций: $\int \left(f_1(x) + \ldots + f_n(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$;

- неопределённый интеграл от производной некоторой функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной: $\int f'(x)dx = \int d\left(f(x)\right) = \int d\left(f(x) + C\right) = f(x) + C$.

Таблица-1 Основные неопределённые интегралы

1 $\int dx = x + C$	**12** $\int ctgx dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
2 $\int 0 \quad dx = C$	**13** $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$
3 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1)$	**14** $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
4 $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	**15** $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
5 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	**16** $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
6 $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x} + C\right\rvert$	**17** $\int e^x dx = e^x + C$
7 $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a} + C\right\rvert$	**18** $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
8 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	**19** $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
9 $\int \sin x dx = -\cos x + C$	**20** $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$
10 $\int \cos x dx = \sin x + C$	**21** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
11 $\int tgx dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	**22** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

Основные методы интегрирования

Непосредственное интегрирование - отыскание неопределённого интеграла с помощью таблицы основных интегралов и тождественных преобразований.

Пример. Найти интеграл $\int (2\sin x + 5\cos x)dx$.

Решение

Этот интеграл можно разбить на два интеграла, от каждого из слагаемых, и вынести в обоих постоянные множители за знак интеграла:

$$\int \left(2\sin x + 5\cos x\right)dx = \int 2\sin x dx + \int 5\cos x dx = 2\int \sin x dx + 5\int \cos x dx =$$
$$= 2\left(-\cos x\right) + 5\sin x + C = 5\sin x - 2\cos x + C.$$

Заметим, что произвольное постоянное слагаемое достаточно записать один раз, написав $\int \sin x dx = -\cos x + C_1$ и $\int \cos x dx = \sin x + C_2$, мы сгруппировали бы постоянные слагаемые и получили произвольную постоянную $2C_1 + 5C_2 = C$.

Метод замены переменной. Пусть имеет смысл сложная функция $f(\varphi(x))$, где x изменяется на некотором интервале. Тогда:

$$\int f\left(u\right)du\Big|_{u=\varphi\left(x\right)} = \int f\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)dx.$$

В левой части после вычисления интеграла $\int f(u)du$ сделана подстановка $u = \varphi(x)$. Заметим, что выражение $\varphi'(x)dx$ есть не что иное, как дифференциал $du(x)$ функции $u = \varphi(x)$. Так что мы можем записать:

$$\int f\left(u\right)du\Big|_{u=\varphi\left(x\right)} = \int f\left(\varphi\left(x\right)\right)d\varphi\left(x\right).$$

Пример. Вычислить интеграл $\int e^{x^2} x dx$.

Решение

Возьмём $u = \varphi(x) = x^2$, тогда $du = 2xdx$ и $xdx = \frac{1}{2}du$. Подставляя это выражение под знак интеграла, получаем:

$$\int e^{x^2} x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 \\ xdx = \frac{1}{2}du \end{matrix} \right| = \int e^u \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Между двумя вертикальными чёрточками мы записываем сделанные обозначения и комментарии к проделанным преобразованиям.

Метод интегрирования по частям. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производную на рассматриваемом интервале изменения x. Тогда верно равенство:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

Эта формула называется формулой ***интегрирования по частям.***

Вводя обозначения $u = f(x)$ и $v = g(x)$, замечаем, что $du = f'(x)dx$ и $dv = g'(x)dx$. Можно записать формулу интегрирования по частям в виде:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Эта формула используется в тех случаях, когда подынтегральная функция $f(x)$ представляет собой произведение многочлена на трансцендентную функцию (т.е. тригонометрическую, показательную, обратную тригонометрическую или логарифмическую), при этом:

- обратные тригонометрические и логарифмические функции принимают за u;
- тригонометрические и показательные функции совместно с dx за dv.

Пример. Найти интеграл $\int e^x x dx$, применив формулу интегрирования по частям.

Решение

Положим $u = x$ и $dv = e^x dx$. Тогда $du = dx$ и $v = e^x$. Значит,

$$\int e^x x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = e^x dx \\ du = dx \\ v = e^x \end{array} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $I = \int e^x \cos x dx$.

Решение

Для этого два раза применим интегрирование по частям и получим в правой части равенства снова тот же интеграл I. Полученное равенство будем рассматривать как уравнение для нахождения I; решив его, получим ответ.

Итак,

$$I = \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos x \\ dv = e^x dx \\ du = -\sin x dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin x \\ dv = e^x dx \\ du = \cos x dx \\ v = e^x \end{array} \right| =$$

$$= e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \right) = e^x \left(\cos x + \sin x \right) - I + C,$$

откуда, решая уравнение $I = e^x (\cos x + \sin x) - I + C$ относительно I, получаем: $I = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C$.

Ответ: $I = \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C$.

Интегрирование основных классов функций при помощи элементарных преобразований:

а) Интегралы, содержащие квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$*, где* $a \neq 0$; b, c *- некоторые постоянные, вида:*

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} \qquad и \qquad \int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

(Заметим, что в числителе дроби должно стоять линейное выражение $Mx + N$, где M и N - постоянные; при этом какой-либо из постоянных величин не запрещается быть равной 0)

Такие интегралы приводятся к табличным интегралам путём выделения из квадратного трёхчлена выражения, равного полному квадрату:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+\left(c-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Затем выполняется замена $z=x+\dfrac{b}{2a}$, в результате которой получают интеграл одного из видов:

$$\int\frac{mz+n}{z^2+d^2}dz;\quad \int\frac{mz+n}{z^2-d^2}dz;\quad \int\frac{mz+n}{\sqrt{z^2\pm d^2}}dz;\quad \int\frac{mz+n}{\sqrt{d^2-z^2}}dz$$

при некоторых постоянных m, n и d. Далее разбиваем интеграл на два слагаемых и в первом, в числителе подынтегральной функции, содержащем mz, делаем замену $u=z^2+d^2$, $u=z^2-d^2$ или $u=d^2-z^2$, согласно тому, что стоит в знаменателе. После этого первое слагаемое приводится к табличному интегралу, второе слагаемое, с n в числителе подынтегральной функции, тоже даёт табличный интеграл.

Пример. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{3x+5}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx$.

Решение

В подкоренном выражении выделим полный квадрат:

$$4x^2+4x+5=4\left(x^2+2x\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(5-4\frac{1}{4}\right)=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4=4\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right).$$

Делаем замену $z = x + \frac{1}{2}$:

$$\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dz = \left| \begin{array}{l} z = x + \frac{1}{2} \\ x = z - \frac{1}{2} \\ dx = dz \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{3\left(z+\frac{1}{2}\right)+5}{\sqrt{z^2+1}}dz =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{zdz}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{7}{4}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}}.$$

В первом из двух интегралов сделаем ещё одну замену $u = z^2 + 1$:

$$\int \frac{zdz}{\sqrt{z^2+1}} = \left| \begin{array}{l} u = z^2+1 \\ du = 2zdz \\ zdz = \frac{1}{2}du \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \sqrt{u} + C = \sqrt{z^2+1} + C.$$

Второй интеграл - табличный: $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = \ln\left|z+\sqrt{z^2+1}\right| + C$.

Возвращаясь к исходной переменной x, получаем:

$$\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx = \frac{3}{2}\sqrt{z^2+1} + \frac{7}{4}\ln\left|z+\sqrt{z^2+1}\right| + C =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x^2+x+\frac{5}{4}} + \frac{7}{4}\ln\left|x+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+\frac{5}{4}}\right| + C =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+5} + \frac{7}{4}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+5}\right| + C.$$

б) Интегралы от произведений синусов и косинусов.

1) Интегралы от произведений синусов и косинусов с разными аргументами, линейно зависящими от x, упрощаются, если применить тригонометрические ***формулы преобразования произведения в сумму:***

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\cos 5x\sin 7x dx$.

Решение

Преобразуем произведение $(\cos 5x\cdot\sin 7x)$ в сумму:

$$\cos 5x\sin 7x = \frac{1}{2}(\sin(7x-5x)+\sin(7x+5x)) = \frac{1}{2}(\sin 2x+\sin 12x).$$

Тогда:

$$\int\cos 5x\sin 7x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 2x+\sin 12x)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}-\frac{\cos 12x}{12}\right)+C =$$

$$= -\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 12x}{24}+C.$$

2) Интегралы вида $\int\sin^m x\cos^n x dx$, где хотя бы одно из чисел m и n - нечётное положительное, вычисляются заменой $s=\sin x$, если нечётна степень косинуса, или $c=\cos x$, если нечётна степень синуса. Действительно, пусть $n>0$ - нечётное число. Запишем $\cos^n x\,dx$ как $\cos^{n-1}x(\cos x dx) = \cos^{n-1}x\ \ d(\sin x)$, а оставшуюся чётную степень косинуса, $\cos^{n-1}x$, выразим через синус с помощью формулы $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$. Получим интеграл:

$$\int\sin^m x\cos^n x dx = \int\sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} d(\sin x) = \int s^m\left(1-s^2\right)^{\frac{n-1}{2}} ds.$$

После раскрытия скобок этот интеграл легко вычисляется. Аналогично нужно поступать и в случае нечётной степени m, используя равенство $\sin x dx = -d(\cos x)$.

Пример. Вычислить интеграл $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

Решение

Отделяя один множитель ($\sin x$) от нечётной степени и объединяя с дифференциалом, получаем:

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \left(\sin x dx\right) = \int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x\left(-d\left(\cos x\right)\right) =$$

$$= -\int \left(1-c^2\right)c^2 dc = -\int \left(c^2 - c^4\right)dc = -\frac{c^3}{3} + \frac{c^5}{5} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C,$$

где $c = \cos x$.

3) *Вычисления интеграла* $\int \sin^m x \cos^n x dx$, *где оба числа* m *и* n *- чётные неотрицательные.* Такие интегралы упрощаются при помощи тригонометрических ***формул понижения степени*****:**

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2\alpha\right); \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2\alpha\right). \quad \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

После применения этих формул и раскрытия скобок получаются интегралы, в которых степень синуса или косинуса нечётна. Они либо сразу сводятся к табличным интегралам линейной заменой, либо их можно вычислить способом, который рассмотрен выше (смотреть п. 2)).

Пример. Вычислить интеграл $\int \cos^4 x dx$.

Решение

Подынтегральную функцию можно преобразовать, понизив степень:

$$\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+\cos 2x\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\left(1+\cos 4x\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

Поэтому

$$\int \cos^4 x dx = \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Рациональные функции и их интегрирование. Функция $R(x)$ называется ***рациональной функцией***, или ***рациональной дробью***, если она представляет собой отношение двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$: $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Пусть степень многочлена $P(x)$ равна m, а степень $Q(x)$ равна n, т. е:

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m;$$
$$Q(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n,$$

где $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$. Разделив числитель и знаменатель на число b_0, мы получим, что коэффициент при старшей степени x^n в знаменателе равен 1. Далее будет удобно предполагать, что эта операция уже произведена, то есть, что $b_0 = 1$, и, что все коэффициенты a_j и b_j - вещественные числа. Если $m < n$, то дробь $R(x)$ называется ***правильной***, а если $m \geq n$, то ***неправильной***. Если дробь неправильная, то её числитель $P(x)$ можно поделить на знаменатель $Q(x)$, получив при этом частное $S(x)$ и остаток $T(x)$, степень которого m' меньше n. Это означает, что $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{T(x)}{Q(x)}$ или что $P(x) = S(x)Q(x) + T(x)$, где $S(x)$ - некоторый многочлен, называемый ***целой частью*** рациональной дроби $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Если остаток $T(x)$ тождественно равен 0, то многочлен $P(x)$ делится на $Q(x)$ без остатка, и функция $R(x)$ является многочленом, то есть совпадает со своей целой частью $S(x)$.

Предположим, что нам дана правильная рациональная дробь $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Её знаменатель $Q(x)$ после разложения на множители может содержать множители следующих четырёх видов: $x - x_j$; $(x - x_j)^{k_j}$,

где: $k_j \geq 2$; $x^2 + p_j x + q_j$ и $(x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}$.

Каждому из указанных типов множителей знаменателя соответствуют ***простейшие рациональные дроби***, а именно:

$$\frac{A}{x-x_j}$$ - *простейшая дробь первого типа*;

$$\frac{A}{(x-x_j)^k}$$, где $k>1$, - *простейшая дробь второго типа*;

$$\frac{Ax+B}{x^2+p_jx+q_j}$$ - *простейшая дробь третьего типа*;

$$\frac{Ax+B}{(x^2+p_jx+q_j)^l}$$, где $l>1$, - *простейшая дробь четвёртого типа*.

Здесь A и B - некоторые постоянные.

Любая правильная дробь $R(x)$ раскладывается в сумму простейших дробей указанных четырёх типов:

$$R(x)=\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{k_j}\frac{A_{jk}}{(x-x_j)^k}+\sum_{j=1}^{s}\sum_{l=1}^{l_j}\frac{C_{jl}x+B_{jl}}{(x^2+p_jx+q_j)^l},$$

где A_{jk}, C_{jl}, B_{jl} - некоторые постоянные. Эти постоянные отыскивают ***методом неопределённых коэффициентов***.

Для отыскания неизвестных постоянных методом неопределённых коэффициентов нужно, выписав разложение $R(x)$ в сумму простейших дробей, привести к общему знаменателю сумму, стоящую в правой части. Заметим, что этот общий знаменатель, очевидно, равен $Q(x)$. Получим, что в левой и правой части равенства стоят дроби с одинаковыми знаменателями. Значит, и числители у них также тождественно равны. Числитель в правой части содержит неизвестные постоянные A_{jk}, C_{jl}, B_{jl}, а числитель в левой части - нет.

Далее, приравниваем друг к другу коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях левой и правой частей: эти коэффициенты также совпадают вследствие тождественности числителей, при этом получаем систему линейных уравнений, которым должны удовлетворять неизвестные коэффициенты.

Пример. Разложить рациональную дробь $R(x)=\dfrac{5x^2+2x-1}{x^3+3x^2+2x+6}$ в сумму простейших дробей и вычислить $\int R(x)dx$.

Решение

Знаменатель $Q(x)=x^3+3x^2+2x+6=(x+1)(x^2-4x+6)$, поэтому сумма будет состоять из двух слагаемых: простейшей дроби первого типа, соответствующей линейному множителю $x+1$, и простейшей дроби третьего типа, соответствующей квадратичному множителю x^2-4x+6. Итак, вид разложения таков:

$$R\left(x\right)=\frac{5x^2+2x-1}{x^3+3x^2+2x+6}=\frac{5x^2+2x-1}{\left(x+1\right)\left(x^2-4x+6\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-4x+6}.$$

Для нахождения A, B, C приведём правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{5x^2+2x-1}{\left(x+1\right)\left(x^2-4x+6\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-4x+6}=\frac{A\left(x^2-4x+6\right)+\left(Bx+C\right)\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)\left(x^2-4x+6\right)}.$$

Поскольку дроби в левой и в правой частях этого равенства тождественно равны и имеют одинаковые знаменатели, то тождественно равны и их числители:

Составим систему: $\begin{cases} x^2: A+B=5, \\ x^1: -4A+B+C=2, \\ x^0: 6A+C=0. \end{cases}$

Откуда получаем: $A=\dfrac{2}{11}$, $C=-\dfrac{23}{11}$, $B=\dfrac{53}{11}$.

Итак, все три неизвестных коэффициента найдены, и получено разложение

$$R\left(x\right)=\frac{5x^2+2x-1}{\left(x+1\right)\left(x^2-4x+6\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-4x+6}=\frac{\frac{2}{11}}{x+1}+\frac{\frac{53}{11}x-\frac{23}{11}}{x^2-4x+6}.$$

Теперь мы можем представить интеграл от дроби $R(x)$ в виде:

$$\int \frac{5x^2+2x-1}{(x+1)\left(x^2-4x+6\right)}dx = \frac{2}{11}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{11}\int \frac{53x-23}{x^2-4x+6}dx.$$

Интеграл в первом слагаемом - табличный: $\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C$. В знаменателе дроби во втором интеграле выделим полный квадрат:

$$x^2-4x+6 = \left(x^2-4x+4\right)+2 = (x-2)^2+2,$$

сделаем замену $z = x-2$:

$$\int \frac{53x-23}{x^2-4x+6}dx = \begin{vmatrix} z = x-2 \\ dz = dx \\ x = z+2 \end{vmatrix} = \int \frac{53(z+2)-23}{x^2+2}dz = 53\int \frac{zdz}{z^2+2} + 83\int \frac{dz}{z^2+2}.$$

Последний интеграл - табличный:

$$\int \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{z}{\sqrt{2}} + C,$$

а в предыдущем интеграле нужно сделать замену $s = z^2+2$, откуда $ds = 2zdz$ и $zdz = \frac{1}{2}ds$, так что этот интеграл приводится к виду $\frac{1}{2}\int \frac{ds}{s} = \frac{1}{2}\ln|s| + C$.

Итак,

$$\int \frac{5x^2+2x-1}{(x+1)\left(x^2-4x+6\right)}dx = \frac{2}{11}\ln|x+1| + \frac{1}{11}\cdot 53\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{11}\cdot 83\cdot \frac{1}{2}\ln|s| + C.$$

Учитывая, что $z = x-2$ и $s = z^2+2 = x^2-4x+6 > 0$, получаем:

$$\int \frac{5x^2+2x-1}{(x+1)\left(x^2-4x+6\right)}dx = \frac{2}{11}\ln|x+1| + \frac{53}{11\sqrt{2}} arctg \frac{x-2}{\sqrt{2}} + \frac{83}{22}\ln\left(x^2-4x+6\right) + C.$$

Интегралы, сводящиеся к интегралам от рациональных функций путём замены

Рассмотрим интегралы от функций, рациональным образом зависящих от $\sin x$ и $\cos x$.

Определение. Будем говорить, что функция $f(x)$ ***рациональным образом зависит*** от выражения $u(x)$, если $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = R(u(x))$, где $R(u)$ - рациональная функция от переменной u.

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(u,v)$ - функция, рациональным образом зависящая от u и v, можно привести к интегралу от рациональной функции от одного переменного t, если сделать «универсальную» замену $t = tg\frac{x}{2}$.

При этом:

$$x = 2arctg\, t, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Если имеет место частный случай рациональной зависимости от $\sin x$ и $\cos x$, когда обе эти функции входят в выражение лишь в чётных степенях, т. е. подынтегральная функция имеет вид $R(\sin^2 x, \cos^2 x)$, то применять универсальную замену не обязательно: она, как правило, будет приводить к слишком сложным интегралам. В этих случаях гораздо лучше применить другую тригонометрическую замену: $t = tgx$.

Тогда:

$$x = arctgt, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \qquad \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{3+\cos^2 x}$.

Решение

Выполняя замену $t = tgx$, получаем:

$$\int \frac{dx}{3+\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = tgx \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{3+\dfrac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{3t^2+4} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+\dfrac{4}{3}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} arctg \frac{\sqrt{3}\,t}{2} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} arctg \frac{\sqrt{3}\,tgx}{2} + C.$$

6 Правила выполнения и оформления контрольной (самостоятельной) работы

1 Контрольная (самостоятельная) работа выполняется в отдельной обыкновенной тетради в клетку.

2 Вариант контрольной (самостоятельной) работы выбирается в соответствии с последней цифрой зачетной книжки студента.

3 На обложке тетради должны быть указаны:

- название учебного заведения, факультета, кафедры;
- название дисциплины;
- фамилия, имя, отчество студента;
- номер группы;
- номер зачетной книжки;
- специальность;
- фамилия, имя, отчество преподавателя.

4 В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по варианту.

5 Перед решением каждой задачи необходимо полностью записать ее условие с данными своего варианта.

6 Решение задачи следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения, выполняя необходимые чертежи.

7 После получения прорецензированной работы, как не зачтенной, так и зачтенной, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты в короткий срок.

8 При высылаемых исправлениях должна обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия на нее. Поэтому рекомендуется при

выполнении контрольной (самостоятельной) работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

9 Если контрольная (самостоятельная) работа не зачтена преподавателем, студент не допускается к сдаче экзамена.

7 Контрольные задания

В этом разделе студентам разных направлений предлагаются соответствующие задания для выполнения контрольных (самостоятельных) работ.

Направление 080200.62 «Менеджмент»:
1 семестр – контрольная работа №1 (таблица 2),
2 семестр – контрольная работа №2 (таблица 3).

Направление 080100.62 «Экономика»:
1 семестр – контрольная работа №2 (таблица 3),
2 семестр – контрольная работа №3 (таблица 4),
3 семестр – контрольная работа №1 (таблица 2).

Специальность 036401.65 «Таможенное дело»:
1 семестр – контрольная работа №4 (таблица 5).

Таблица 2 – Контрольная работа № 1

Номер варианта	**Номера заданий**		
1	**1**	**11**	**21**
2	**2**	**12**	**22**
3	**3**	**13**	**23**
4	**4**	**14**	**24**
5	**5**	**15**	**25**
6	**6**	**16**	**26**
7	**7**	**17**	**27**
8	**8**	**18**	**28**
9	**9**	**19**	**29**
0	**10**	**20**	**30**

Таблица 3 - Контрольная работа № 2

Номер варианта	Номера заданий			
1	31	41	51	61
2	32	42	52	62
3	33	43	53	63
4	34	44	54	64
5	35	45	55	65
6	36	46	56	66
7	37	47	57	67
8	38	48	58	68
9	39	49	59	69
0	40	50	60	70

Таблица 4 - Контрольная работа № 3

Номер варианта	Номера заданий				
1	71	81	91	101	111
2	72	82	92	102	112
3	73	83	93	103	113
4	74	84	94	104	114
5	75	85	95	105	115
6	76	86	96	106	116
7	77	87	97	107	117
8	78	88	98	108	118
9	79	89	99	109	119
0	80	90	100	110	120

Таблица 5- Контрольная работа № 4

Номер варианта	Номера заданий				
1	11 (а, б)	21	31 (а, б, в, г)	51	61
2	12 (а, б)	22	32 (а, б, в, г)	52	62
3	13 (а, б)	23	33 (а, б, в, г)	53	63
4	14 (а, б)	24	34 (а, б, в, г)	54	64
5	15 (а, б)	25	35 (а, б, в, г)	55	65
6	16 (а, б)	26	36 (а, б, в, г)	56	66
7	17 (а, б)	27	37 (а, б, в, г)	57	67
8	18 (а, б)	28	38 (а, б, в, г)	58	68
9	19 (а, б)	29	39 (а, б, в, г)	59	69
0	20 (а, б)	30	40 (а, б, в, г)	60	70

1-10 Вычислить $Z = B^T \cdot A \cdot B$.

1 $A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 6 & 8 & 7 \\ 5 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

2 $A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$;

4 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 7 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

5 $A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$;

6 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 1 & 8 & 7 \\ 8 & 3 & 1 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

7 $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

8 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

9 $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$;

10 $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11-20 Проверить совместность системы уравнений и решить её:
а) по формулам Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричным методом.

11 $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$

12 $\begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = +4, \\ 4x + y + 4z = +9. \end{cases}$

13 $\begin{cases} 3x - y + z = 12, \\ x + 2y + 4z = 4, \\ 5x + y + 2z = 20. \end{cases}$

14 $\begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5, \\ 2x + 3y - 4z = 4, \\ x - 2y + 3z = -12. \end{cases}$

15 $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12, \\ 3x + 4y - 2z = -12, \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$

16 $\begin{cases} 4x + y - 3z = 9, \\ x + y - z = 1, \\ 4x + y - 3z = 3. \end{cases}$

17 $\begin{cases} 4x + y - 3z = 9, \\ x + y + z = 3, \\ 8x + 3y - 6z = 19. \end{cases}$

18 $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 33, \\ 7x - 5y = -18, \\ 4x + 11z = 59. \end{cases}$

19 $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12, \\ 7x - 5y + z = 11, \\ 4x + z = 8. \end{cases}$

20 $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21, \\ 3x + 4y - 2z = 21, \\ 2x - 2y + 3z = 14. \end{cases}$

21-30 Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:
а) найти длину ребра A_1A_4;

б) вычислить угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;

в) найти площадь грани $A_1A_2A_3$;

г) вычислить объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.

21 $A_1(-4;2;5)$, $A_2(0;-2;7)$, $A_3(0;4;-3)$, $A_4(-1;3;9)$;

22 $A_1(4;4;5)$, $A_2(4;5;7)$, $A_3(2;2;8)$, $A_4(7;5;0)$;

23 $A_1(4;8;4)$, $A_2(0;-2;3)$, $A_3(-1;2;-3)$, $A_4(-1;3;7)$;

24 $A_1(-4;10;6)$, $A_2(2;-3;0)$, $A_3(1;6;4)$, $A_4(2;5;0)$;

25 $A_1(7;8;9)$, $A_2(0;-2;3)$, $A_3(1;4;2)$, $A_4(-1;5;0)$;

26 $A_1(-4;1;3)$, $A_2(7;8;-9)$, $A_3(1;3;2)$, $A_4(-1;3;4)$;

27 $A_1(7;5;3)$, $A_2(-2;1;3)$, $A_3(1;9;3)$, $A_4(2;-3;-1)$;

28 $A_1(7;6;-5)$, $A_2(1;-2;3)$, $A_3(-2;3;9)$, $A_4(2;7;-1)$;

29 $A_1(6;-5;5)$, $A_2(7;8;9)$, $A_3(-2;-4;3)$, $A_4(4;6;7)$;

30 $A_1(5;3;1)$, $A_2(-6;9;2)$, $A_3(1;3;-2)$, $A_4(3;2;5)$.

31-40 Найти пределы, не применяя правило Лопиталя.

31 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-5x^2+21}{2x^3+5x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+12x+20}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{3x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5\ln(1+\sin 3x)}{tg 4x}$.

32 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^3+2x}{2x^3-4x^5+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x^2-2x-3}{2x^2-x-1}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 8x}{\sin 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{e^{x^2}-1}$.

33 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^3-3x^2+2}{x^5+2x^3+12}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot\sin 3x}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-10}{x+1}\right)^{3x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\ln(1-8x)}{5arctg 8x}$.

34 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-12x^2+4x^4}{12x^3+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3\sin 8x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-7}\right)^{\frac{x}{6}+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$.

35 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-2x^2+8x^7}{5x^3+3x^2+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\sin 7x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-3}{10x-1}\right)^{5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\left(e^{3x}-1\right)^2}$.

36 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+10x+3x^4}{12x^2+5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{3x^2}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8x+7}{8x-3}\right)^{2x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\ln 2$.

37 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{23x^4+x^2+7x}{x^4+3x^5-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 7x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-8}{x+5}\right)^{3x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{arctg^2 x}$.

38 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2+7x^5+3x}{5x^2+3x+4x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin 4x\cdot\sin 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-7}\right)^{5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2arctgx-\sin x}$.

39 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x^3+12x}{8x^2+x^4-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+4}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{\sin^2 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-7}\right)^{x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^x}{x-\sin 9x}$.

40 а) $\lim\limits_{x\to\infty}5\dfrac{x^3-3x^4+10x}{7x^5+2x^3-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 4x}{5\sin 7x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-10}\right)^{4x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{tgx}$.

41-50 Найти производные указанных функций.

41 а) $y=\dfrac{\cos 3x}{e^x}$; в) $e^{xy}-x^3-y^3=2$;

б) $y=3\cos^2(x)$; г) $\begin{cases} x=\sqrt[3]{(t-1)^2}, \\ y=\sqrt{t-1} \end{cases}$.

42 а) $y=\dfrac{tg^2(3x+7)}{x^4+1}$;

б) $y=3\arcsin(2x+8)$;

в) $3xy-x^2-2y^3=1$;

г) $\begin{cases} x=4t\cdot\cos t, \\ y=3t^3. \end{cases}$

43 а) $y=3\cos x\cdot e^{2x}$;

б) $y=2\ln(\sin x)$;

в) $\sin(y-x^2)+2\sqrt{x-2y}=0$;

г) $\begin{cases} x=7\cos^2 t, \\ y=8\sin^2 t. \end{cases}$

44 а) $y=2tg(3x+1)\cdot\arcsin x$;

б) $y=7\sqrt{arctg(2x+7)}$;

в) $e^{x^2}-\dfrac{y}{x}+\ln y=5$;

г) $\begin{cases} x=6\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t. \end{cases}$

45 а) $y=\dfrac{e^{3x+1}}{2tg^2 x}$;

б) $y=2\arccos^2\left(e^x\right)$;

в) $y\ln x-x^3+2\sin y=1$;

г) $\begin{cases} x=6t^2-4, \\ y=3t^5. \end{cases}$

46 а) $y=\dfrac{2e^{3x}}{arctg 4x}$;

б) $y=2ctg^3(3x+8)$;

в) $x^2+y^3=e^y x$;

г) $\begin{cases} x=e^{-2t}, \\ y=e^{4t}. \end{cases}$

47 а) $y=2\ln x\cdot e^{2x}$;

б) $y=5ctg(\ln x)$;

в) $x-3y+5\ln(1+y)=0$;

г) $\begin{cases} x=4t+2t^2, \\ y=5t^3-3t^2. \end{cases}$

48 а) $y=\dfrac{2\sin 8x}{e^{2x+3}}$;

б) $y=(\sin 2x+x)^{\ln x}$;

в) $e^{\frac{y}{x}}-2x-5y=0$;

г) $\begin{cases} x=arctgt, \\ y=\ln(1+t^2). \end{cases}$

49 а) $y=\dfrac{e^{3x+2}}{3\ln x}$; в) $x-arctg\,y^3=2x^2$;

б) $y=3\cos^7\left(e^{2x}+x^2\right)$; г) $\begin{cases} x=te^t, \\ y=\dfrac{t}{e^t}. \end{cases}$

50 а) $y=2e^{3x}\cdot\cos\left(4x+7\right)$; в) $6x^2y^3-5x^2-y=0$;

б) $y=2\arcsin^2\left(3x+8\right)$; г) $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t). \end{cases}$

51-60 Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial_2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial_2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial_2 z}{\partial x \partial y}$ **функции** $z=f(x;y)$**.**

51 $z=2\ln(2x^8+3y^5)$;

52 $z=2\cos(x^3y^2)$;

53 $z=2arctg(8x+9y)$;

54 $z=e^{3x^2-y^8}$;

55 $z=4\ln(2x^3y+3x)$;

56 $z=4tg^8(x+y)$;

57 $z=2tg(x^8y^2)$;

58 $z=2\sin^3(x^3-y^4)$;

59 $z=ctg^3\dfrac{x}{y}$;

60 $z=7\arcsin^4(2x-7y)$.

61-70 Найти неопределенные интегралы. Результаты интегрирования проверить дифференцированием.

61 а) $\int\cos\left(3x+4\right)dx$; б) $\int\dfrac{\ln x}{x}dx$.

62 а) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$; б) $\int\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

63 а) $\int \frac{dx}{3x+8}$; б) $\int \frac{e^x}{3+e^x}dx$.

64 а) $\int (x+4)^8 dx$; б) $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$.

65 а) $\int \frac{dx}{5x+7}$; б) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}$.

66 а) $\int \frac{dx}{1+(x+4)^2}$; б) $\int \frac{x dx}{x^2+4}$.

67 а) $\int \sin(4x) dx$; б) $\int \frac{\ln^3 x\, dx}{x}$.

68 а) $\int \frac{dx}{7x+5}$; б) $\int \frac{x dx}{5+x^2}$.

69 а) $\int \frac{dx}{(x+8)^7}$; б) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

70 а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+4)^2}}$; б) $\int \frac{e^x dx}{5+e^x}$.

71-80 Исследовать функцию $y = f(x)$ на непрерывность в заданных точках x_1 и x_2, в случае разрыва определить род разрыва, сделать схематический чертеж.

71 $y = \frac{x}{x-4}$, $x_1 = 0$; $x_2 = 4$.

72 $y = \frac{x^2-25}{x-5}$, $x_1 = 0$; $x_2 = 5$.

73 $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$, $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

76 $y = \frac{1}{2^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

77 $y = 1 + \frac{x}{x-3}$, $x_1 = 0$; $x_2 = 3$.

78 $y = 1 + 3^{\frac{1}{x-1}}$, $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

74 $y=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_1=2;\ x_2=1$.

75 $y=1-e^{-\frac{1}{x}}$, $x_1=0;\ x_2=-1$.

79 $y=7^{\frac{1}{5-x}}$, $x_1=6;\ x_2=5$.

80 $y=\dfrac{1}{3^{\frac{1}{x}}-4}$, $x_1=0;\ x_2=1$.

81-90 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ **на отрезке** $\left[a;b\right]$**.**

81 $y=x^3-3x+1;\quad [\frac{1}{2};\ 2]$.

82 $y=x^5+\frac{5}{3}x^3+2;\ [0;\ 2]$.

83 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\cos x;\ [0;\ \frac{\pi}{2}]$.

84 $y=3x^4-16x^3+2;\ [-3;1]$.

85 $y=x^3-12x+7;\quad [0;\ 3]$.

86 $y=x^4-4x;\quad [-2;\ 2]$.

87 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\sin x;\ [0;\ \frac{\pi}{2}]$.

88 $y=81x-x^4;\quad [-1;\ 4]$.

89 $y=x^4-2x^2+3;\quad [-3;\ 2]$.

90 $y=x-\sin x;\ [-\pi;\ \pi]$.

91-100 Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ **и, используя результаты исследования, построить ее график.**

91 $y=\dfrac{x^2+1}{x}$;

92 $y=\dfrac{e^x}{x}$;

93 $y=\ln(x^2-1)$;

94 $y=xe^x$;

95 $y=\ln(4-x^2)$;

96 $y=(x-2)e^{3-x}$;

97 $y=\dfrac{4x}{2+x}$;

98 $y=x\ln x$;

99 $y=xe^{x^2}$;

100 $y=x+e^{-x}$.

101-110 Найти неопределенные интегралы. В заданиях а) и б) результаты интегрирования проверить дифференцированием.

101 а) $\int \frac{\sin 2x}{1+3\cos 2x}dx$; в) $\int \frac{6x}{x^3+2x^2-x-2}dx$;

б) $\int x^2 \sin 2x dx$; г) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$.

102 а) $\int \frac{e^x}{2e^x+3}dx$; в) $\int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$;

б) $\int (x^2+1)e^{2x}dx$; г) $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$.

103 а) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+1}}dx$; в) $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$;

б) $\int x^2 \cos 2x dx$; г) $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

104 а) $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^5+3}}dx$; в) $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx$;

б) $\int x \sin x \cos x dx$; г) $\int tg^3 4x dx$.

105 а) $\int \frac{1+\ln x}{x}dx$; в) $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$;

б) $\int x^2 e^{-x}dx$; г) $\int ctg^3 2x dx$.

106 а) $\int \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int \frac{5x}{x^4+3x^2-4}dx$;

б) $\int \frac{x^2}{\sin^2 x}dx$; г) $\int \sin 3x \cos x dx$.

107 а) $\int \frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$; в) $\int \frac{x^3+8x-2}{x^4+4x^2}dx$;

б) $\int x^2 arctgx dx$; г) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-4}}$.

108 а) $\int \frac{x^3}{1+x^8}dx$; в) $\int \frac{x^3-x-1}{x^4-x^2}dx$;

б) $\int x^2 \ln x dx$; г) $\int \frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}dx$.

109 а) $\int e^{\cos 2x}\sin 2x dx$; в) $\int \frac{x^3-2x+5}{x^4-1}dx$;

б) $\int x^2 \ln(x^2+1)dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$.

110 а) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$; в) $\int \frac{2x^3-2x^2+5}{(x-1)^2(x^2+4)}dx$;

б) $\int x\ln^2 x dx$; г) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$.

111 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=9x, \quad y=3x$.

112 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 2(1-\cos x)$.

113 Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ от точки с абсциссой $x_1=1$ до точки с абсциссой $x_2=9$.

114 Вычислить площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды: $\begin{cases} y=1-\cos t, \\ x=t-\sin t, \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi$ и осью Ox.

115 Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y=x^2$, $x=y^2$.

116 Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{4}{3}x$ от точки с абсциссой $x_1=2$ до точки с абсциссой $x_2=5$.

117 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+4x, \quad y=x+4$.

118 Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырехлепестковой розой $\rho=4\sin 2x$.

119 Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=0, \quad x=0$.

120 Вычислить длину дуги кривой $\rho=3\cos\varphi, \quad 0\le\varphi\le 2\pi$.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНАМ

Направление 036401.65 «Таможенное дело»
1 курс, 1 семестр

1 Определители 2-го и 3-го порядка. Вычисление определителей.
2 Матрицы. Основные понятия. Действия над матрицами.
3 Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.
4 Матрицы. Обратная матрица.
5 Исследование и решение систем линейных уравнений. Формулы Крамера.
6 Исследование и решение систем линейных уравнений. Метод Гаусса.
7 Векторы, действия над ними. Координаты вектора.
8 Скалярное и векторное произведения векторов. Их геометрические приложения.
9 Метод координат на плоскости. Виды уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми, условие параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой.
10 Плоскость и прямая в пространстве. Нормальный вектор плоскости, угол между плоскостями.
11 Числовые последовательности, предел последовательности.
12 Функции. Предел функции в точке. Замечательные пределы.
13 Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
14 Производная функции, её геометрический смысл.
15 Правила дифференцирования.
16 Таблица производных.
17 Производные высших порядков.
18 Исследование функции на монотонность и экстремумы с помощью производной.
19 Нахождение направлений выпуклости и точек перегиба графика функции с помощью производной.
20 Асимптоты графика функции.
21 Неопределённый интеграл и его свойства.
22 Таблица неопределённых интегралов.
23 Метод замены переменной в неопределённом интеграле.
24 Формула интегрирования по частям в неопределённом интеграле.
25 Определённый интеграл и его свойства.

Направление 080200 «Менеджмент»

1 курс, 1 семестр

1 Определители 2-го и 3-го порядка. Вычисление определителей.
2 Матрицы. Основные понятия. Действия над матрицами.
3 Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.
4 Матрицы. Обратная матрица.
5 Исследование и решение систем линейных уравнений. Формулы Крамера.
6 Исследование и решение систем линейных уравнений. Метод Гаусса.
7 Векторы, действия над ними. Координаты вектора.
8 Скалярное и векторное произведения векторов. Их геометрические приложения.
9 Метод координат на плоскости. Виды уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми, условие параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой.
10 Плоскость и прямая в пространстве. Нормальный вектор плоскости, угол между плоскостями.
11 Числовые последовательности, предел последовательности.
12 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, связь между ними.
13 Теоремы о пределах (предел суммы, произведения, частного двух последовательностей).
14 Предел функции. Определение, геометрическая иллюстрация. Бесконечно большие и бесконечно малые функции, их пределы.
15 Односторонние пределы. Признак существования предела функции в точке.
16 Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.
17 Сравнение бесконечно малых величин. Эквивалентные бесконечно малые величины. Таблица эквивалентности.
18 Непрерывность функции в точке и на отрезке. Точки разрыва, их классификация.

1 курс, 2 семестр

1 Производная функции. Определение, геометрический и механический смысл.
2 Основные правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного).
3 Таблица производных.
4 Производная сложной функции.
5 Производная от функций, заданных неявно и параметрически. Производная показательно-степенных функций.
6 Производные высших порядков.
7 Дифференцируемые функции. Теорема о дифференцируемости функции в точке.

8 Дифференциал функции. Определение и вычисление. Свойства дифференциалов.
9 Правило Лопиталя.
10 Дифференциалы высших порядков.
11 Условия возрастания и убывания функций на интервале. Экстремум функции. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функции. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке.
12 Выпуклость и вогнутость графика функции на интервале. Точки перегиба.
13 Асимптоты графика функции.
14 Общая схема исследования функции и построение ее графика.
15 Уравнение касательной и нормали к кривой.
16 Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла. Теоремы о первообразных.
17 Свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование.
18 Основные методы интегрирования (метод замены переменной, подведение множителя под знак дифференциала, интегрирование по частям).
19 Определённый интеграл и его свойства.
20 Вычисление площади плоской фигуры с помощью определённого интеграла.

Направление 080100 «Экономика»
<u>1 курс, 1 семестр</u>

1 Определение функции. Область определения.
2 Последовательность. Монотонные ограниченные и неограниченные последовательности. Предел последовательности.
3 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, связь между ними.
4 Теоремы о пределах (предел суммы, произведения, частного двух последовательностей).
5 Предел функции. Определение, геометрическая иллюстрация. Бесконечно большие и бесконечно малые функции, их пределы.
6 Односторонние пределы. Признак существования предела функции в точке.
7 Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.
8 Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые. Таблица эквивалентности.
9 Непрерывность функции в точке и на отрезке. Точки разрыва, их классификация.
10 Производная функции. Определение, геометрический и механический смысл.
11 Основные правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного).
12 Таблица производных.
13 Производная сложной функции.

14 Производная от функций, заданных неявно и параметрически. Производная показательно-степенных функций.
15 Производные высших порядков.
16 Дифференцируемые функции. Теорема о дифференцируемости функции в точке.
17 Дифференциал функции. Определение и вычисление. Свойства дифференциалов.
18 Правило Лопиталя.
19 Условия возрастания и убывания функций на интервале. Экстремум функции. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функции. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке.
20 Выпуклость и вогнутость графика функции на интервале. Точки перегиба.
21 Асимптоты графика функции.
22 Общая схема исследования функции и построение ее графика.

1 курс, 2 семестр

1 Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла. Теоремы о первообразных.
2 Свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование.
3 Основные методы интегрирования. (Метод замены переменной, подведение множителя под знак дифференциала, интегрирование по частям).
4 Определенный интеграл и его основные свойства. Теорема существования определенного интеграла. Теорема об оценке определенного интеграла. Теорема о среднем.
5 Вычисление определенного интеграла. Теорема о производной интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница.
6 Замена переменной в определенном интеграле, интегрирование по частям.
7 Приложение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, длины дуги плоской кривой в декартовых, полярных координатах, в параметрической форме.
8 Определение вероятности.
9 Непосредственный подсчет вероятностей, теоремы сложения и умножения вероятностей.
10 Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
11 Формула Бернулли, формула Пуассона, локальная формула Лапласа.
12 Дискретные и непрерывные случайные величины, функция распределения, плотность вероятности.
13 Числовые характеристики случайных величин. Предельные теоремы.
14 Нормальный закон распределения. Распределения, связанные с нормальным.
15 Генеральная совокупность и выборка, точечные и интервальные оценки характеристик генеральной совокупности.

16 Проверка статистических гипотез.
17 Элементы корреляционного анализа.

2 курс, 1 семестр

1 Матрицы. Основные понятия. Действия над матрицами.
2 Определители 2-го и 3-го порядков. Свойства определителей. Методы вычисления определителей. Понятие минора и алгебраического дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу.
3 Решение и исследование систем линейных уравнений. Формулы Крамера.
4 Ранг матрицы, его вычисление. Теорема Кронекера-Капелли.
5 Решение и исследование систем линейных уравнений методом Гаусса.
6 Обратная матрица. Необходимое и достаточное условия ее существования. Вычисление обратной матрицы и применение ее к решению систем линейных уравнений. Матричные уравнения.
7 Векторы. Основные понятия. Линейные операции над векторами (сложение, вычитание, умножение на число), их свойства.
8 Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Модуль вектора.
9 Линейно зависимые и независимые векторы. Базис векторов. Разложение вектора по базису.
10 Действия с векторами в координатной форме. Условие коллинеарности двух векторов.
11 Скалярное произведение векторов, его свойства. Вычисление скалярного произведения в координатной форме. Условие перпендикулярности двух векторов. Угол между векторами.
12 Векторное произведение векторов, его свойства. Геометрический смысл векторного произведения. Векторное произведение в координатной форме.
13 Векторно-скалярное (смешанное) произведение векторов, его геометрический смысл, свойства, вычисление в координатной форме. Условие компланарности трех векторов.
14 Простейшие задачи аналитической геометрии: расстояние между двумя точками; деление отрезка в данном отношении.
15 Прямая на плоскости. Различные формы уравнения прямой: общее уравнение прямой; уравнение прямой в отрезках; уравнение прямой, проходящей через две точки; уравнение с угловым коэффициентом; уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом; расстояние от точки до прямой.
16 Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.
17 Полярная система координат. Связь декартовых координат с полярными.

Список литературы

Основная литература

1 Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 2010.
2 Высшая математика для экономистов. / Под ред. Н.Ш. Кремера. - М.: Юнити, 2004. – 471 с.
3 Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 2009. – Ч. 1.
4 Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 2009. - Ч. 2.
5 Карасёв А.И. Курс высшей математики для экономических вузов. – М.: Высшая школа, 2009.
6 Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов: теория, примеры, задачи: Учебник для вузов. – М.: Изд-во «Экзамен», 2005.
7 Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Физматгиз, 2009.
8 Основы математики и её приложения в экономическом образовании / Под ред. Б.П. Чупрынова. – М., 2007.

Дополнительная литература

1 Белько И.В, Кузьмич К.К. Высшая математика для экономистов. - М.: ООО «Новое Знание», 2005. - Ч. 1-3.
2 Высшая математика / Под ред. Г.Н. Яковлева. - М.: Просвещение, 1988 (2003).
3 Руководство к решению задач по высшей математике / Под общей редакцией Е.И. Гурского. – М.: Высшая школа, 2009.

Методическая литература

1 Исакова Т.И. Линейная алгебра: Методические указания и контрольные задания для студентов направления 080100 «Экономика». – Курган: КГУ, 2012.
2 Исакова Т.И. Методические указания и контрольные задания по математическому анализу для студентов направления 080100 «Экономика».– Курган: КГУ, 2012. – Ч. 1.
3 Трофимова Л.А. Математика: Методические указания к выполнению практических и самостоятельных заданий для студентов направления 080200 «Менеджмент», специальности 036401 «Таможенное дело». – Курган: КГУ, 2012. – Ч. 1, 2.

Белобородова Екатерина Прокопьевна

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ТЕМАТИКА КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИКЕ

к выполнению контрольной (самостоятельной) работы
для студентов направлений 080100 «Экономика», 080200 «Менеджмент»,
специальности 036401 «Таможенное дело»
заочной формы обучения

Редактор А.С. Мокина

Подписано в печать	Формат 60х84 1/16	Бумага тип. № 1
Печать трафаретная	Усл. печ. л. 3,25	Уч. - изд. л. 3,25
Заказ	Тираж 100	Цена свободная

Редакционно-издательский центр КГУ.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет.