

*МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ*  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Курганский государственный университет»

Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

## **ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

Методические указания  
к выполнению лабораторных работ для студентов  
направления 190700.62 и специальностей 190109.65 и 190110.65

Часть 1

Курган 2013

Кафедра: «Теоретическая механика и сопротивление материалов»

Дисциплина: «Теоретическая механика»  
(направление 190700.62; специальности 190109.65, 190110.65)

Составил: канд. техн. наук, доцент С.Г. Тютрин

Составлены на основе изданий: Лабораторные работы по теоретической механике (Динамика) / Головнин Г.Я. М.: Высшая школа, 1967. 76 с.; Лабораторные работы по курсу теоретической механики: учебное пособие / Никитин Е.М. – Л.; Вологда: ЛСХИ, 1974. 64 с.

Утверждены на заседании кафедры «29» мая 2013 г.

Рекомендованы методическим советом университета «5» июня 2013 г.

# 1 ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ НА ПОВОРОТЕ С ПОМОЩЬЮ ПК

## Основные теоретические положения

Закон инерции Галилея-Ньютона гласит: под действием взаимно уравновешивающихся сил материальная точка (или тело) находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно.

Движение автомобиля на закругленном участке пути является криволинейным, поэтому закон инерции Галилея-Ньютона неприменим для составления уравнений равновесия такого автомобиля.

На рисунке 1 схематично показаны силы, действующие на автомобиль, движущийся на повороте с постоянной скоростью:

$G=mg$  – сила тяжести; она приложена в центре масс автомобиля и направлена вертикально вниз к центру Земли ( $m$  – масса автомобиля; ускорение свободного падения  $g=9,81 \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$ );

$N$  – сила реакции дорожного полотна; она направлена перпендикулярно опорной поверхности. В действительности сила  $N$  является равнодействующей нескольких сил – реакций опор каждого колеса автомобиля;

$F_{\text{ТР}}=f\cdot N$  – сила трения скольжения; она направлена по касательной к поверхности дороги в сторону центра окружности, по которой перемещается автомобиль. В частности, сила трения скольжения не дает остановившемуся автомобилю «соскользнуть» при боковом крене дорожного полотна.

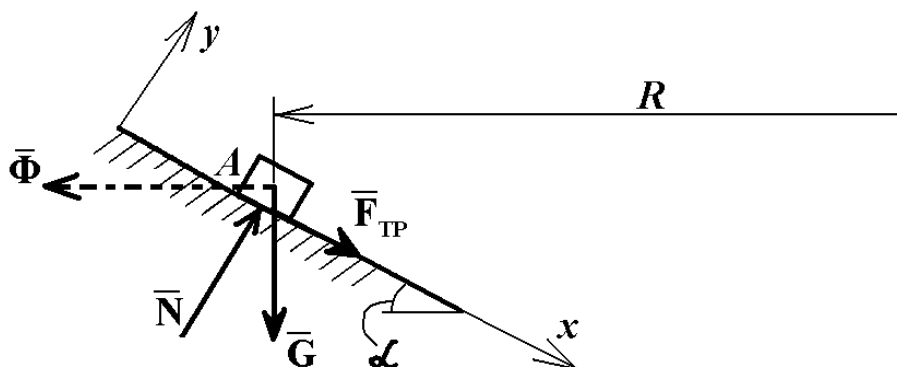


Рисунок 1 – Силы, действующие на автомобиль на повороте

Как известно, ускорение – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости. При криволинейном движении изменяется направление вектора скорости. Поэтому, даже при равномерном движении автомобиля на повороте, возникает центростремительное ускорение  $a^u$ :

$$a^u = \frac{v^2}{R}, \quad (1)$$

где  $v$  – скорость ( $\text{м}/\text{с}$ );

$R$  – радиус кривизны траектории.

Произведение массы тела на вектор его ускорения, взятое со знаком «минус», называют силой инерции:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}. \quad (2)$$

В рассматриваемом случае  $\vec{a} = \vec{a}^u$ .

Силу инерции называют даламберовой силой инерции, а также условной и фиктивной силой инерции, поскольку она не является результатом взаимодействия тел, как все реальные силы. Добавление к действующим силам фиктивной силы инерции позволяет применить условия равновесия к произвольно движущемуся телу. Это установлено принципом Даламбера: при движении материальной точки активные силы, реакции связей и сила инерции образуют равновесную систему сил.

На рисунке 1 даламберова сила инерции  $\vec{\Phi}$  показана пунктиром. Она приложена в центре масс тела и направлена по радиусу кривизны траектории от центра окружности.

Для полученной системы сил (включающей даламберову силу инерции) можно составить уравнения равновесия:

- 1)  $\sum F_{kx} = 0$  – сумма проекций на ось  $x$  всех сил системы равна нулю;
- 2)  $\sum F_{ky} = 0$  – сумма проекций на ось  $y$  всех сил системы равна нулю;
- 3)  $\sum m_A(\vec{F}_k) = 0$  – сумма моментов относительно точки  $A$  равна нулю.

Здесь первое уравнение проверяет возможность соскальзывания автомобиля с дороги в боковом направлении при недостаточной силе трения. Третье уравнение проверяет возможность опрокидывания автомобиля под действием силы инерции.

### Описание лабораторной установки

В данной работе с помощью персонального компьютера (ПК) моделируется движение автомобиля по наклонному закругленному участку дороги. Исполняемый файл программы – *Rally.exe* [1]. В зависимости от соотношения величины скорости, радиуса закругления, угла наклона и коэффициента трения автомобиль может двигаться устойчиво, соскальзывать или опрокидываться.

В рабочем окне программы изображается движение автомобиля по закругленному наклонному участку дороги (рисунок 2).

Пункт меню *View/Vectors* позволяет изобразить на экране ПК векторы сил, действующих на автомобиль с учетом их величин, направлений и точек приложения:

- 1  $N$  (зеленый вектор на экране монитора) – сила реакции опоры (дороги). Вектор перпендикулярен поверхности дороги;

- 2  $G$  (сиреневый вектор на экране монитора) – сила тяжести. Вектор направлен вертикально вниз, его начало совпадает с центром масс автомобиля;
- 3  $F_{\text{ТР}}$  (синий вектор на экране монитора) – сила трения. Этот вектор всегда направлен по касательной к поверхности дороги;
- 4  $\Phi$  (желтый вектор на экране монитора) – центробежная сила инерции. Вектор горизонтален, его начало совпадает с центром масс автомобиля.

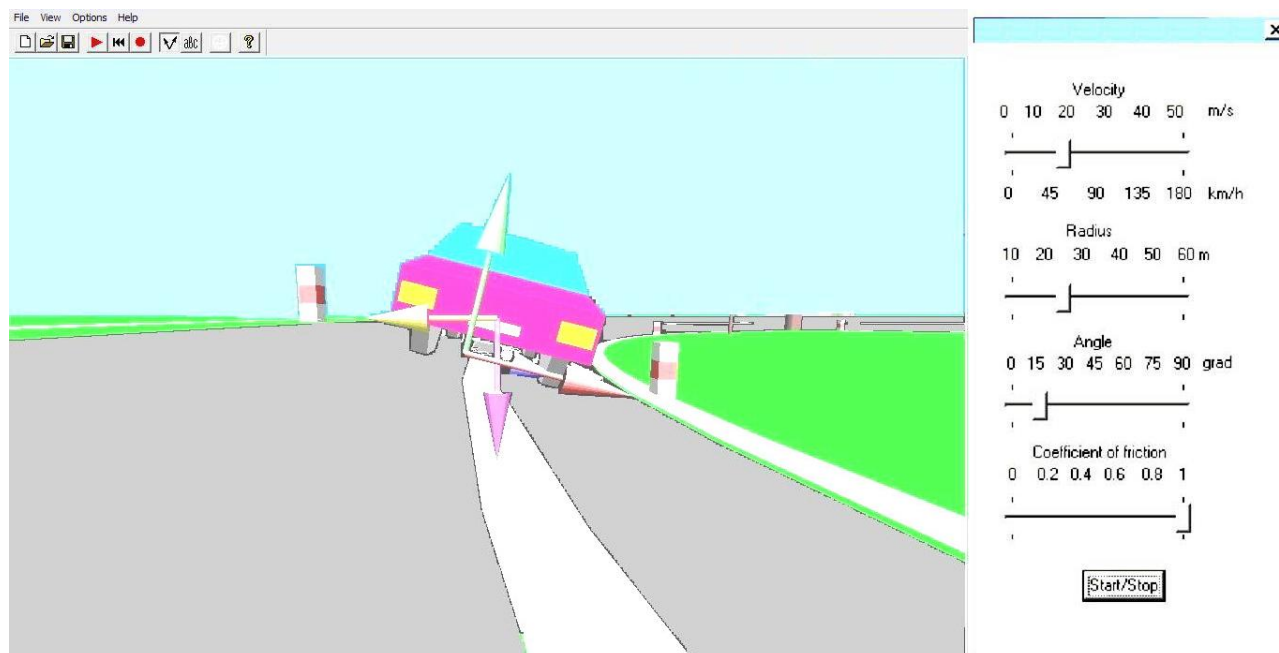


Рисунок 2 – Рабочее окно программы

На экране монитора также показан розовый вектор  $F_{\text{ТРmax}}$ , который соответствует максимально возможному значению силы трения, зависящему от коэффициента трения и угла наклона дороги.

Силы реакции опоры и трения приложены к автомобилю в тех точках, где четыре колеса автомобиля соприкасаются с поверхностью дороги, а величины этих сил неравномерно распределены между внешними и внутренними колесами. Это учитывается компьютерной программой.

На контрольной панели, расположенной в правой части экрана, пользователь может с помощью движков изменять параметры системы:

- 1 скорость (*Velocity*);
- 2 радиус кривизны участка дороги (*Radius*);
- 3 угол наклона (*Angle*);
- 4 коэффициент трения (*Coefficient of friction*).

В зависимости от значений этих параметров поведение автомобиля может быть различным.

Например, пусть движение происходит на горизонтальном закругленном участке дороги. Если скорость автомобиля достаточно высока, а радиус закругления и коэффициент трения малы, то сила трения не может скомпенсировать большую центробежную силу инерции. В этом случае автомобиль начинает со-



скальзывать. Для демонстрации такого типа движения можно воспользоваться пунктом меню *File/Slide*.


Если коэффициент трения настолько велик, что соскальзывание не происходит, то увеличение скорости автомобиля ведет к его опрокидыванию в направлении от центра закругления дороги. При этом вектор, равный векторной сумме силы тяжести и силы инерции, пересекает полотно дороги вне площади, ограниченной четырьмя колесами автомобиля. Для демонстрации такого типа движения можно воспользоваться пунктом меню *File/Rotation*. Если участок дороги сделать наклонным, то можно добиться устойчивого движения автомобиля в большом диапазоне скоростей.

Однако при слишком большом наклоне и недостаточно высокой скорости автомобиль может как соскользнуть, так и опрокинуться в сторону центра закругления дороги.

С помощью программы можно также наблюдать движение автомобиля по вертикальной стене (*File/Unreal*). Оказывается, что при определенных соотношениях физических параметров такое движение является вполне устойчивым.

Управление работой программы осуществляется следующим образом. Чтобы начать или остановить процесс моделирования, необходимо воспользоваться кнопкой *Start/Stop* на контрольной панели.


Чтобы сохранить внесенные изменения, нажмите кнопку . Чтобы вернуться к измененным параметрам, нажмите кнопку .


Чтобы вернуться к начальным параметрам программы, нужно воспользоваться кнопкой .


### Порядок выполнения работы


1 С помощью пунктов меню *File/Slide*, *File/Rotation* и *File/Unreal* просмотреть видеоиллюстрации критических случаев движения автомобиля.


2 Установить величину заданного преподавателем радиуса закругления дороги (например,  $R=20$  м).


3 Установить дорожное полотно в горизонтальное положение (угол  $\alpha=0$ ). Установить коэффициент трения, соответствующий плохим дорожным условиям (например,  $f=0,1$ ). Запомнить установленные данные, нажав кнопку .


4 Подобрать предельную скорость, при которой автомобиль ещё сохраняет устойчивость. (Использовать кнопки *Start/Stop* и .) Полученный результат записать в отчет.


5 Установить коэффициент трения, соответствующий хорошим дорожным условиям (например,  $f=0,7$ ). Запомнить установленные данные, нажав кнопку .


6 Подобрать предельную скорость, при которой автомобиль ещё сохраняет устойчивость. (Использовать кнопки *Start/Stop* и .) Полученный результат записать в отчет.


7 Наклонить дорожное полотно, например, на угол  $\alpha=7,5^\circ$ ). Установить коэффициент трения, соответствующий плохим дорожным условиям (например,  $f=0,1$ ). Запомнить установленные данные, нажав кнопку .


8 Подобрать предельную скорость, при которой автомобиль ещё сохраняет устойчивость. (Использовать кнопки *Start/Stop* и .


9 Установить коэффициент трения, соответствующий хорошим дорожным условиям (например,  $f=0,7$ ). Запомнить установленные данные, нажав кнопку .

10 Подобрать предельную скорость, при которой автомобиль ещё сохраняет устойчивость. (Использовать кнопки *Start/Stop* и .

11 Наклонить дорожное полотно, например, на угол  $\alpha=15^\circ$ ). Установить коэффициент трения, соответствующий плохим дорожным условиям (например,  $f=0,1$ ). Запомнить установленные данные, нажав кнопку .

12 Подобрать предельную скорость, при которой автомобиль ещё сохраняет устойчивость. (Использовать кнопки *Start/Stop* и .

13 Установить коэффициент трения, соответствующий хорошим дорожным условиям (например,  $f=0,7$ ). Запомнить установленные данные, нажав кнопку .

14 Подобрать предельную скорость, при которой автомобиль ещё сохраняет устойчивость. (Использовать кнопки *Start/Stop* и .

15 По найденным результатам построить в координатах  $\alpha-v$  зависимости  $v=\varphi(\alpha, f)$  при заданном  $R=const$ .

### Контрольные вопросы

1 Сформулируйте закон инерции Галилея-Ньютона. Почему он неприменим для автомобиля, совершающего поворот?

2 Какие силы действуют на автомобиль, движущийся на криволинейном участке пути с постоянной скоростью?

3 Что называется ускорением?

4 Что называется даламберовой силой инерции?

5 Сформулируйте принцип Даламбера.

6 Поясните запись:  $\sum F_{kx} = 0$ .

7 Поясните запись:  $\sum F_{ky} = 0$ .

8 Поясните запись:  $\sum m_A(\overline{F}_k) = 0$ .

### Отчет о работе

1 Название работы: . . .

2 Расчетная схема (рис. 1): . . .

3 Радиус поворота дороги  $R=$  . . . . м.

#### 4 Результаты компьютерного эксперимента (таблица 1).

Таблица 1 – Результаты компьютерного эксперимента

Угол бокового крена дороги $\alpha$	Величина предельной скорости $v$ , км/ч	
	коэффициент трения $f=...$ (плохие дорожные условия)	коэффициент трения $f=...$ (хорошие дорожные условия)
$0^\circ$		
...		

#### 5 График зависимостей $v=\varphi(\alpha, f)$ при заданном радиусе $R=...$

## 2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МЕТОДОМ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

### Основные теоретические положения

Моментом инерции тела относительно оси  $z$  называют величину, равную сумме произведений масс всех точек тела на квадраты их расстояний до этой оси:

$$J_z = \sum m_k r_k^2 . \quad (3)$$

От величины момента инерции, например, автомобиля зависит его управляемость на поворотах, интенсивность колебаний на неровной дороге. Чем больше величина момента инерции автомобиля, тем труднее им управлять на поворотах, но тем более плавный ход он будет иметь на неровной дороге.

Величины момента инерции деталей шатунно-поршневой группы в двигателе внутреннего сгорания оказывают существенное влияние на его уравновешенность и вибрацию.

Для конструкций и деталей машин сложной формы расчетные величины моментов инерции проверяются экспериментальным путем.

При определении момента инерции методом физического маятника деталь подвешивают на горизонтальной оси, не проходящей через центр тяжести (рисунки 3, 4). При отклонении детали от положения равновесия возникает восстанавливающая сила, которая стремится вернуть деталь в исходное положение, в результате чего деталь начинает совершать колебательные движения.



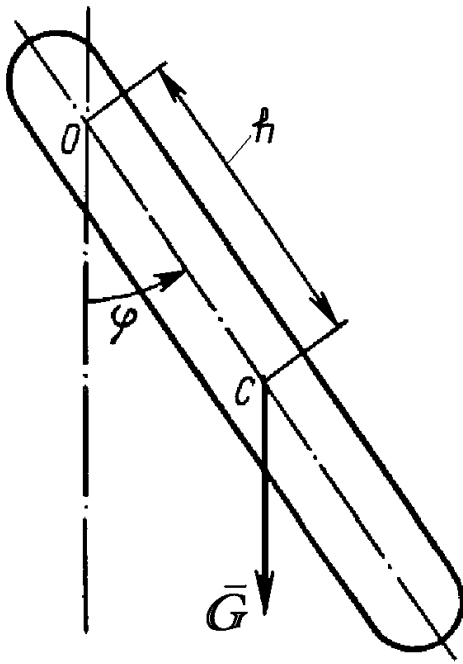


Рисунок 3 – Схема физического маятника

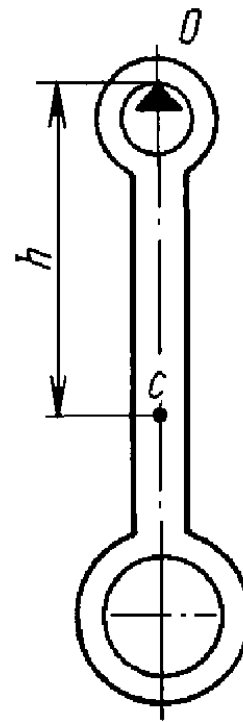


Рисунок 4 – Схема крепления детали

Уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси имеет вид:

$$J_z \ddot{\varphi} = L_z^e, \quad (4)$$

где  $L_z^e$  – сумма моментов внешних сил, приложенных к телу;

$\varphi$  – угол поворота;

$\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon$  – угловое ускорение тела.

Пренебрегая трением тела об опору, можно записать (см. рисунок 3, где ось вращения проходит через точку  $O$ ):

$$L_z^e = -Gh \sin \varphi,$$

где  $h$  – расстояние от оси  $z$  (от точки  $O$ ) до центра тяжести  $C$ , а отрицательный знак показывает, что направления  $\varphi$  и  $L_z^e$  взаимно противоположны.

Тогда из выражения (4) получаем дифференциальное уравнение колебаний маятника:

$$J_z \ddot{\varphi} + Gh \sin \varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = 0, \quad (5)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{Gh}{J_z}}. \quad (6)$$

Для малых колебаний, когда  $\varphi \leq 7^\circ$ , можно принять  $\varphi \approx \sin \varphi$  (здесь  $\varphi$  – в радианах). Тогда уравнение (5) примет вид:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0. \quad (7)$$

Как известно из курса математики, решение дифференциального уравнения (7) имеет вид:

$$\varphi = a \cdot \sin(kt + \alpha). \quad (8)$$

Выражение (8) представляет собой уравнение гармонических колебаний с амплитудой  $a$ , круговой частотой  $k$  и периодом  $T$ :

$$T = \frac{2\pi}{k}. \quad (9)$$

С учетом выражения (6), период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{Gh}}, \quad (10)$$

откуда момент инерции  $J_z = \frac{T^2 Gh}{4\pi^2}$

или 
$$J_z = \frac{T^2 mgh}{4\pi^2}, \quad (11)$$

где  $m$  – масса тела;

$g=9,81 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения.

Для определения момента инерции тела относительно центральной оси, параллельной оси подвеса  $z$ , можно воспользоваться теоремой о моментах инерции относительно параллельных осей (теоремой Гюйгенса-Штейнера):

$$J_C = J_z - mh^2. \quad (12)$$

## Описание лабораторной установки

Установка (рисунок 5) состоит из треноги 1 с вертикальной стойкой 2, в верхней части которой закреплена призма 3.

Две ножки треноги 1 снабжены винтами 6. Они позволяют регулировать наклон по отвесу 5 так, чтобы ребро призмы 3 приняло горизонтальное положение.

К стойке 2 прикреплен клин 7 с углом при вершине  $14^\circ$ . Клин 7 служит визиром, позволяющим следить за тем, чтобы колебания установленного на призме тела 4 не превышали угол  $\pm 7^\circ$ .

В работе в учебных целях используется деталь простой формы – в виде тонкого стержня (рисунок 6), для определения момента инерции которого расчетные формулы известны. С целью обеспечения подвеса в стержне выполнено технологическое отверстие малого диаметра.

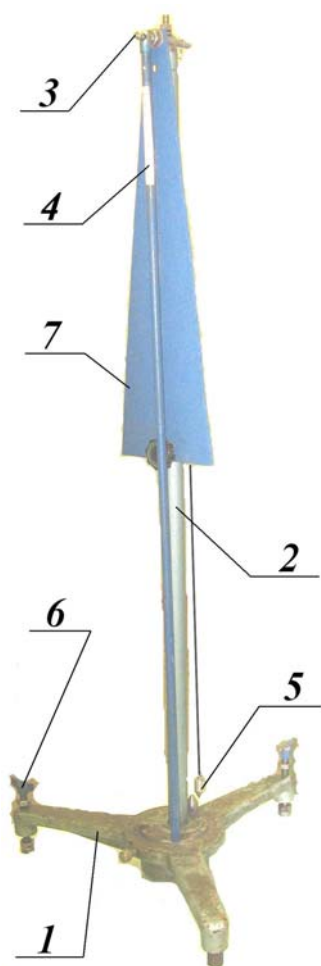


Рисунок 5 – Лабораторная установка

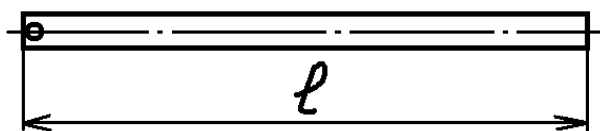


Рисунок 6 – Испытуемая деталь

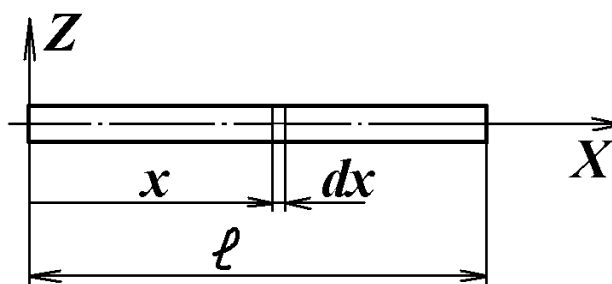


Рисунок 7 – Расчетная схема стержня

На рисунке 7 представлена расчетная схема тонкого однородного стержня длиной  $\ell$  и массой  $m$ . Стержень имеет постоянное, весьма малое поперечное

сечение  $A$  и плотность  $\rho$ . Масса стержня равна произведению плотности стержня на его объем:

$$m = \rho A \ell. \quad (13)$$

Вычислим момент инерции стержня относительно оси  $Z$ , перпендикулярной к стержню и проходящей через один из его концов. Направим ось  $X$  вдоль стержня и выделим элементарный участок длиной  $dx$ , масса которого равна  $\rho A dx$ .

Согласно принципиальной формуле (3), запишем:

$$J_z = \int_0^{\ell} \rho A x^2 dx = \rho A \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{\ell} = \rho A \frac{\ell^3}{3}.$$

С учетом выражения (13), получим в окончательном виде:

$$J_z = \frac{m \ell^2}{3}. \quad (14)$$

### Порядок выполнения работы

- 1 Определить взвешиванием массу  $m$  детали.
- 2 Определить длину детали  $\ell$  и расстояние от точки подвеса до центра тяжести  $h = \frac{\ell}{2}$ .
- 3 Проверить по отвесу и, при необходимости, отрегулировать горизонтальность положения призмы.
- 4 Надеть деталь (её отверстием) на призму.
- 5 Сообщить детали колебательное движение, для чего отклонить деталь на угол  $\varphi \leq 7^\circ$  и отпустить.
- 6 С помощью секундомера замерить продолжительность десяти полных колебаний  $10T$ . Вычислить период:

$$T = \frac{10T}{10}.$$

- 7 По формуле (11) вычислить опытное значение момента инерции  $J_z^{(o)}$ .
- 8 По формуле (14) вычислить теоретическое значение момента инерции  $J_z^{(T)}$ .
- 9 Оценить расхождение опытных и теоретических результатов:

$$\delta = \frac{J_z^{(o)} - J_z^{(T)}}{J_z^{(T)}} \cdot 100\%.$$

## Контрольные вопросы

- 1 Что называют моментом инерции тела относительно оси?
- 2 Какая связь существует между моментом инерции тела относительно оси и периодом свободных колебаний тела относительно той же оси?
- 3 Поясните порядок экспериментального определения момента инерции тела методом физического маятника.
- 4 Как, зная массу и длину стержня, вычислить его момент инерции относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через один из его концов?

## Отчет о работе

- 1 Название работы: . . .
- 2 Расчетная схема (рисунок 3): . . .
- 3 Уравнение (3) момента инерции тела относительно оси: . . .
- 4 Уравнение (7) малых колебаний тела: . . .
- 5 Уравнение (9) для определения периода колебаний: . . .
- 6 Уравнение (11) для экспериментального определения момента инерции стержня относительно оси: . . .
- 7 Уравнение (14) для теоретического определения момента инерции стержня относительно оси: . . .
- 8 Материал стержня – *сталь*;  
масса стержня  $m = \dots$  кг;  
длина стержня  $\ell = \dots$  м;  
расстояние от точки подвеса до центра тяжести стержня  $h = \frac{\ell}{2} = \dots$  м.

### 9 Результаты опыта:

- а) продолжительность десяти полных колебаний  $10T = \dots$  с;
- б) период:

$$T = \frac{10T}{10} = \dots \text{ с};$$

- в) опытное значение момента инерции  $J_z^{(o)} = \frac{T^2 mgh}{4\pi^2} = \dots \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .

- 10 Теоретическое значение момента инерции  $J_z^{(T)} = \frac{m\ell^2}{3} = \dots \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .

### 11 Расхождение опытных и теоретических результатов:

$$\delta = \frac{J_z^{(o)} - J_z^{(T)}}{J_z^{(T)}} \cdot 100\% = \dots\%.$$

- 12 Вывод: методом физического маятника определили момент инерции стержня. Погрешность по сравнению с теоретическим значением составила  $\dots\%$ .

### 3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МЕТОДОМ МНОГОФИЛЯРНОГО ПОДВЕСА

#### Основные теоретические положения

Моментом инерции тела относительно оси  $z$  называют величину, равную сумме произведений масс всех точек тела на квадраты их расстояний до этой оси

$$J_z = \sum m_k h_k^2 . \quad (15)$$

От величины момента инерции, например, автомобиля зависит его управляемость на поворотах, интенсивность колебаний на неровной дороге. Чем больше величина момента инерции автомобиля, тем труднее им управлять на поворотах, но тем более плавный ход он будет иметь на неровной дороге.

Величины момента инерции деталей шатунно-поршневой группы в двигателе внутреннего сгорания оказывают существенное влияние на его уравновешенность и вибрацию.

Для конструкций и деталей машин сложной формы расчетные величины моментов инерции проверяются экспериментальным путем.

При определении момента инерции методом многофилярного подвеса деталь подвешивают на трех или более нитях длиной  $\ell$  на одинаковом расстоянии  $a$  от центра масс (рисунок 8) и сообщают ей крутильные колебания вокруг оси  $OZ$ , проходящей через центр масс параллельно нитям.

Для придания детали крутильных колебаний необходимо повернуть её вокруг оси  $Z$  на небольшой угол  $\varphi$ . При этом реакции  $\vec{N}$  нитей перестают быть параллельными оси  $Z$ : нити поворачиваются на угол  $\alpha$  (рисунок 8). Вследствие этого поворота возникает момент внешних сил  $\vec{L}_Z^e$ , направление которого противоположно направлению угла  $\varphi$ :

$$L_Z^e = -3N \sin \alpha \cdot h ,$$

где  $h = a \cdot \cos \frac{\varphi}{2}$  – плечо силы  $\vec{N}$  относительно оси  $Z$  (рисунки 8, 9).

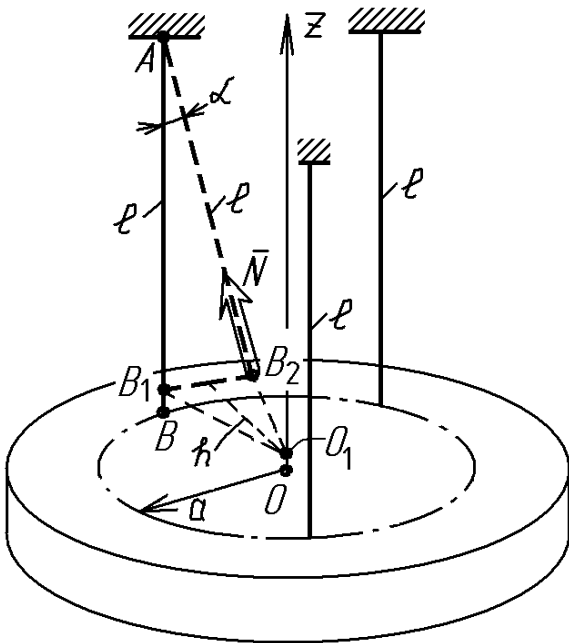


Рисунок 8 – Схема подвески детали на трех нитях

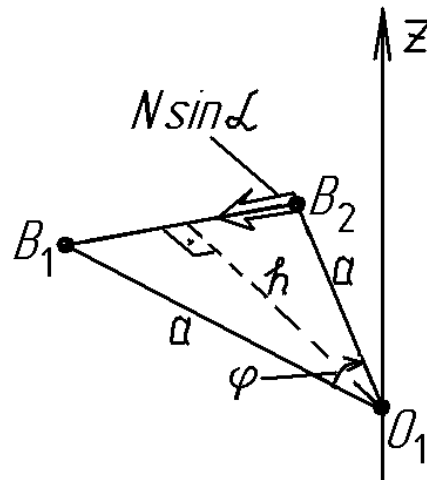


Рисунок 9 – Действие момента внешних сил

В результате преобразований и упрощений при малых углах  $\varphi$  и  $\alpha$  в окончательном виде получим:

$$L_z^e = -\frac{mga^2\varphi}{\ell}, \quad (16)$$

где  $m$  – масса детали;

$g=9,81 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения.

Уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси имеет вид:

$$J_z \ddot{\varphi} = L_z^e, \quad (17)$$

где  $\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon$  – угловое ускорение тела.

Тогда из выражений (17) и (16) получаем дифференциальное уравнение крутильных колебаний:

$$J_z \ddot{\varphi} + \frac{mga^2}{\ell} \varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad (18)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{mga^2}{\ell J_z}}. \quad (19)$$

Как известно из курса математики, решение дифференциального уравнения (18) имеет вид:

$$\varphi = A \cdot \sin(kt + \alpha). \quad (20)$$

Уравнение (20) представляет собой уравнение гармонических колебаний с амплитудой  $A$ , круговой частотой  $k$  и периодом  $T$ :

$$T = \frac{2\pi}{k}. \quad (21)$$

С учетом выражения (19), период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell J_z}{mga^2}},$$

откуда момент инерции  $J_z = \frac{T^2 mga^2}{4\pi^2 \ell}. \quad (22)$

### Описание лабораторной установки

Установка (рисунок 10) представляет собой треногий штатив 1 с траверсой 2, к которой с помощью трех параллельных капроновых нитей 3 подвешена деталь 4. (Момент инерции детали 4 требуется определить.)

При испытаниях массивных деталей вместо капроновых нитей используют стальные тросики.

К штативу 1 прикреплен указатель 5, позволяющий следить за тем, чтобы повороты испытуемого тела не превышали угол  $\pm 7^\circ$ .

В работе в учебных целях используется деталь простой формы – в виде однородного диска (рисунок 11), для определения момента инерции которого расчетные формулы известны. С целью обеспечения подвеса диска в нём выполнены технологические отверстия малого диаметра.



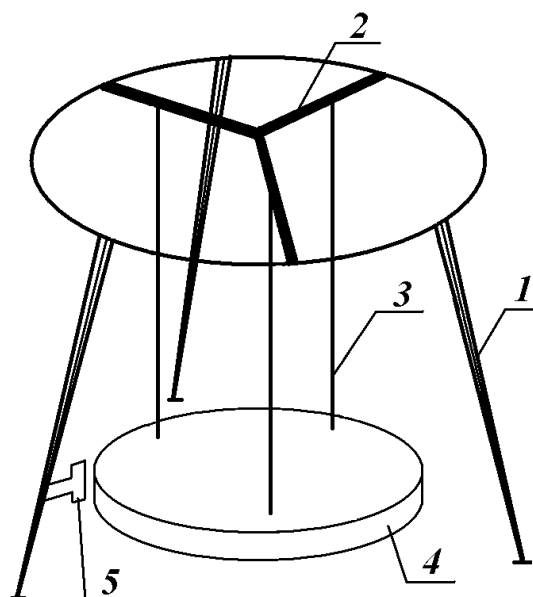


Рисунок 10 – Схема лабораторной установки

Для вывода формулы по определению момента инерции однородного диска рассмотрим цилиндр высотой  $H$ , радиусом  $R$  и массой  $m$  (рисунок 11). Масса цилиндра равна произведению плотности  $\rho$  его материала на объем:

$$m = \rho \pi R^2 H. \quad (23)$$

В теле цилиндра выделим элементарную трубку толщиной стенки  $\Delta r$  и радиусом  $r$  (рисунок 12). Масса элементарной трубки  $m_k = \rho 2\pi r \Delta r H$ . Тогда, согласно принципиальной формуле (15):

$$J_Z = \sum m_k h_k^2 = \sum (\rho 2\pi r \Delta r H \cdot r^2).$$

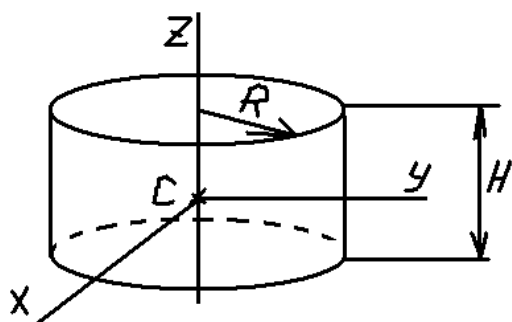


Рисунок 11 – Геометрическая модель цилиндра

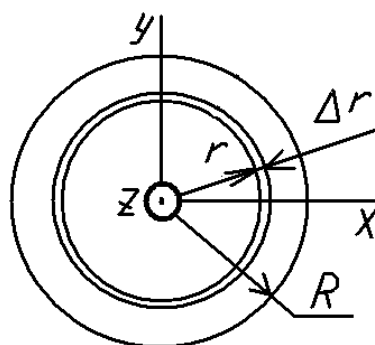


Рисунок 12 – Расчетная схема диска

Перейдя к пределу суммы, получаем определенный интеграл:

$$J_z = \int_0^R \rho 2\pi r^3 H dr = \rho 2\pi H \int_0^R r^3 dr = \rho 2\pi H \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\rho \pi H R^4}{2}$$

С учетом выражения (23), получим в окончательном виде:

$$J_z = \frac{mR^2}{2}. \quad (24)$$

### Порядок выполнения работы

- 1 Определить взвешиванием массу  $m$  диска и измерить его радиус  $R$ .
- 2 Определить длину нитей  $\ell$  и расстояние  $a$  от точек подвеса до центра.
- 3 Закрепить диск на подвесах.
- 4 Сообщить диску крутильные колебания, для чего повернуть диск на угол  $\varphi \leq 7^\circ$  вокруг оси симметрии  $Z$  и отпустить.
- 5 С помощью секундомера замерить продолжительность десяти полных колебаний  $10T$ . Вычислить период:

$$T = \frac{10T}{10}.$$

- 6 По формуле (22) вычислить опытное значение момента инерции  $J_z^{(o)}$ .
- 7 По формуле (24) вычислить теоретическое значение момента инерции  $J_z^{(T)}$ .
- 8 Оценить расхождение опытных и теоретических результатов:

$$\delta = \frac{J_z^{(o)} - J_z^{(T)}}{J_z^{(T)}} \cdot 100\%.$$

### Контрольные вопросы

- 1 Что называют моментом инерции тела относительно оси?
- 2 Какая связь существует между моментом инерции тела относительно оси и периодом свободных колебаний тела относительно той же оси?
- 3 Поясните порядок экспериментального определения момента инерции тела методом многофилярного подвеса.
- 4 Запишите формулу для вычисления момента инерции однородного диска радиусом  $R$  относительно центральной оси  $Z$ .

### Отчет о работе

- 1 Название работы: . . .
- 2 Расчетная схема (рисунок 8): . . .
- 3 Уравнение (15) момента инерции тела относительно оси: . . .

4 Уравнение (18) малых колебаний тела: . . .

5 Уравнение (21) для определения периода колебаний: . . .

6 Уравнение (22) для экспериментального определения момента инерции диска относительно оси: . . .

7 Рисунки 11 и 12 и уравнения (23)...(24) – вывод теоретической формулы для определения момента инерции диска относительно оси: . . .

8 Материал диска – *оргстекло*;

масса диска  $m = \dots \text{ кг}$ ;

радиус диска  $R = \dots \text{ м}$ ;

расстояние от точки подвеса до центра диска  $a = \dots \text{ м}$ .

9 Результаты опыта:

а) продолжительность десяти полных колебаний  $10T = \dots \text{ с}$ ;

б) период:

$$T = \frac{10T}{10} = \dots \text{ с};$$

в) опытное значение момента инерции  $J_z^{(o)} = \frac{T^2 m g a^2}{4\pi^2 \ell} = \dots \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .

10 Теоретическое значение момента инерции  $J_z^{(T)} = \frac{mR^2}{2} = \dots \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .

11 Расхождение опытных и теоретических результатов:

$$\delta = \frac{J_z^{(o)} - J_z^{(T)}}{J_z^{(T)}} \cdot 100\% = \dots \%$$

12 Вывод: методом многофилярного подвеса определили момент инерции диска. Погрешность по сравнению с теоретическим значением составила  $\dots \%$ .

## 4 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ МЕТОДОМ ПАДАЮЩЕГО ГРУЗА

### Основные теоретические положения

Одним из важнейших параметров, определяющих поведение автомобиля на дороге, является коэффициент трения между дорожным покрытием и колёсами автомобиля. Одним из методов определения коэффициента трения скольжения является метод падающего груза.

В данном методе тело  $A$  массой  $m_1$ , лежащее на горизонтальной плоскости, приводится в движение нитью с грузом  $C$  на конце (рисунок 13). На тело  $A$  в горизонтальном направлении действуют силы:  $\vec{T}_{AB}$  – сила натяжения нити и  $\vec{F}_{TP}$  – сила трения тела о плоскость. Пренебрегая трением в блоке  $B$ , можно считать, что натяжение  $T_{AB}$  части нити между  $A$  и  $B$  равно натяжению  $T_{BC}$  её части между  $B$  и  $C$ :  $T_{AB}=T_{BC}=T$ .

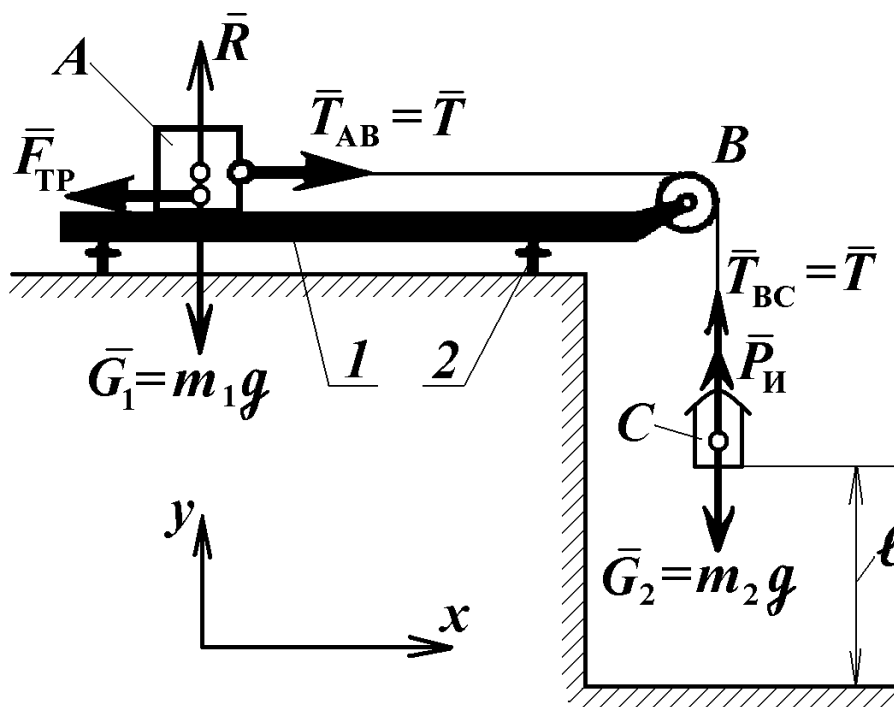


Рисунок 13 – Схема лабораторной установки

Согласно принципу Даламбера, падающий с ускорением груз  $C$  можно считать находящимся в равновесии, если к действующим силе тяжести  $\vec{G}_2$  и силе  $\vec{T}$  натяжения нити добавить силу инерции этого груза.

Сила инерции груза  $C$  массой  $m_2$  равна:  $\vec{P}_И = -m_2 \vec{a}$ , где  $\vec{a}$  – ускорение груза  $C$ .

Составим уравнение равновесия груза  $C$  в виде:  $\sum F_{ky} = 0$ . Откуда:

$$T + P_{И} - G_2 = 0, \text{ а } T = G_2 - P_{И}.$$

В итоге получаем  $T = G_2 - m_2 a$ . (25)

На основании второго закона Ньютона ( $m\vec{a} = \vec{F}$ ), уравнение движения тела  $A$  по горизонтальной плоскости примет вид:

$$m_1 a = T - F_{TP}. \quad (26)$$

Силу трения  $F_{TP}$  с помощью коэффициента трения  $f$  вычисляют по формуле

$$F_{TP} = f \cdot G_1. \quad (27)$$

С учетом выражений (25) и (27), из формулы (26) получим:

$$m_1 a = G_2 - m_2 a - f G_1.$$

Отсюда искомый коэффициент трения тела о плоскость:

$$f = \frac{G_2 - a(m_1 + m_2)}{G_1}. \quad (28)$$

При постоянных силах, действующих на тело, его движение будет равноускоренным. Ускорение  $a$  тела при равноускоренном прямолинейном движении выражается зависимостью:

$$a = \frac{2\ell}{t^2},$$

где  $\ell$  – пройденный путь;  
 $t$  – время движения.

Подставляя это значение ускорения в формулу (28), окончательно будем иметь

$$f = \frac{m_2 g - \frac{2\ell}{t^2} (m_1 + m_2)}{m_1 g}, \quad (29)$$

где  $g=9,81 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения.

### Описание лабораторной установки

При проведении лабораторной работы используется трибометр – прибор для измерения сил трения (рисунок 13). Трибометр состоит из станины 1, имеющей блок  $B$  для нити, соединяющей грузы  $A$  и  $C$ . Для установки станины в горизонтальном положении имеются винтовые опоры 2.

Для определения массы тела  $A$  и массы груза  $C$  используются весы. Пройденный путь  $\ell$  определяется линейкой, а для замера времени движения используется секундомер. (Для обеспечения высокой точности результатов необходимо, чтобы время движения  $t$  было достаточно большим: 4...5 с)

### Порядок выполнения работы

- 1 Определить взвешиванием массу  $m_1$  тела и массу  $m_2$  груза.
- 2 Проверить по уровню и, при необходимости, отрегулировать горизонтальность положения платформы.
- 3 Подготовить поверхность платформы: в серии опытов  $a$  – протереть сухой ветошью; в серии опытов  $b$  – посыпать поверхность песком для имитации загрязненного дорожного покрытия.
- 4 Переместить в крайнее левое положение груз  $A$ , измерить высоту  $\ell$  груза  $C$  над полом.
- 5 Отпустить груз  $A$  и измерить секундомером время  $t$  его движения до удара груза  $C$  об пол.
- 6 Результаты записать в таблицу 2.
- 7 Повторить опыт до 2...5 раз для каждой серии испытаний.
- 8 По формуле (29) вычислить коэффициент трения для каждого опыта.
- 9 Определить среднюю величину коэффициента трения для каждой серии испытаний по формуле  $f_{CP} = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{n}$ .

### Контрольные вопросы

- 1 По формуле (27) поясните: что показывает коэффициент трения скольжения?
- 2 Сформулируйте второй закон Ньютона.
- 3 С помощью второго закона Ньютона опишите движение груза  $C$ . Сравните полученное выражение с формулой (25).
- 4 Сформулируйте принцип Даламбера.
- 5 С помощью принципа Даламбера опишите движение тела  $A$ . Сравните полученное выражение с формулой (26).

### Отчет о работе

- 1 Название работы: . . .
- 2 Расчетная схема (рис. 13): . . .
- 3 Уравнение (25) движения груза  $C$ : . . .
- 4 Уравнение (26) движения тела  $A$ : . . .
- 5 Уравнение (27) для определения силы трения: . . .
- 6 Материал тела – *резина*;  
материал поверхности платформы – *сталь*.
- 7 Результаты опыта (таблица 2).

Таблица 2 – Результаты опыта

Серия	№ опыта	$m_1$	$m_2$	$\ell$	$t$	$f$
а) сухие, чистые поверхности трения	1					
	2					
	3					
б) загрязненные поверхности трения	1					
	2					
	3					

8 Среднее значение коэффициента трения в серии а:

$$f_{CP(a)} = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{n} = \dots$$

9 Среднее значение коэффициента трения в серии б:

$$f_{CP(b)} = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{n} = \dots$$

10 Вывод: загрязнение поверхностей трения ведет к ..... коэффициента трения.

## 5 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО КОЭФФИЦИЕНТА

### Основные теоретические положения

Рассмотрим (рисунок 14) возможные случаи механического взаимодействия твердого тела с упругим телом (в качестве твердого тела используем груз весом  $Q$ , а в качестве упругого – цилиндрическую винтовую пружину):

а) груз опускаем на пружину медленно, плавно. Нагрузка, которая прикладывается медленно, плавно, безударно, называется статической. Под действием статической сжимающей нагрузки длина пружины уменьшается на некоторую величину  $S_{cm}$ , которую называют статической осадкой пружины;

- б) груз доводим до касания с пружиной ( $h=0$  на рисунок 14) и резко отпускаем его;
- в) груз бросаем на пружину с некоторой высоты  $h$  (рисунок 14).

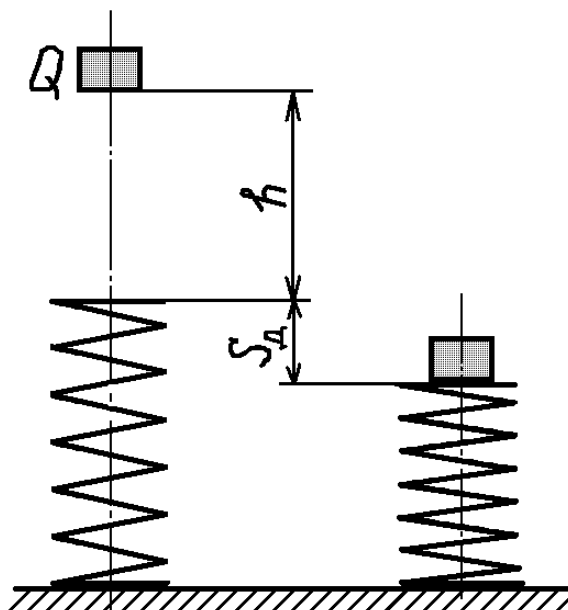


Рисунок 14 – Расчетная схема динамической осадки пружины

Нагрузка, которая возрастает от нуля до своего максимального значения за короткий промежуток времени, составляющий доли секунды, называется ударной. Под действием ударной сжимающей нагрузки длина пружины уменьшается на некоторую величину  $S_D$ , которую называют динамической осадкой пружины.

Очевидно, что динамическая осадка пружины больше ее статической осадки. Но насколько? Ответ на этот вопрос дает динамический коэффициент  $k_D$ . Динамический коэффициент показывает, во сколько раз динамическая осадка пружины больше ее статической осадки:

$$k_D = \frac{S_D}{S_{cm}}. \quad (30)$$

Рассмотрим связь между  $S_{cm}$  и  $S_D$  при свободном падении на упругое тело груза массой  $m$  с высоты  $h$  (рисунок 14).

Согласно теореме об изменении кинетической энергии механической системы, изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ всех сил, действующих на материальные точки системы на этом перемещении

$$T_2 - T_1 = \sum A_k. \quad (31)$$



Здесь  $T_1 = \frac{mv_1^2}{2} = 0$  – кинетическая энергия груза в момент начала падения с высоты  $h$  (падение начинается из состояния покоя, когда скорость груза  $v_1=0$ );

$T_2 = \frac{mv_2^2}{2} = 0$  – кинетическая энергия груза в конце пути  $h+S_D$  (в момент наибольшего сжатия пружины скорость груза  $v_2=0$ );

$\sum A_k$  – сумма работ всех сил, действующих на перемещении  $h+S_D$ , которая складывается из работы силы тяжести груза и работы силы упругости пружины.

С целью упрощения пренебрегаем потерями энергии при ударе, работой сил трения, а также массой пружины. По этой причине расчетные величины будут несколько завышенными.

Сила упругости  $F$  пружины пропорциональна и противоположно направлена ее осадке  $S$ :

$$F = -cS, \quad (32)$$

где  $c$  – жесткость пружины.

Тогда

$$\sum A_k = Q(h + S_D) - \int_0^{S_D} cSdS = Q(h + S_D) - \frac{cS_D^2}{2}. \quad (33)$$

Подставив выражения кинетической энергии и работы в уравнение (31), имеем:

$$0 = Q(h + S_D) - \frac{cS_D^2}{2}. \quad (34)$$

Решая это уравнение относительно  $S_D$ , находим:

$$S_D = \frac{Q}{c} \pm \sqrt{\left(\frac{Q}{c}\right)^2 + 2\frac{Q}{c}h}. \quad (35)$$

Для определения наибольшего значения осадки в формуле (35) выбираем знак плюс. Кроме того, учтем, что под действием статической нагрузки  $Q$  пружина сжимается на величину  $S_{cm}$ , откуда жесткость пружины  $c = \frac{Q}{S_{cm}}$ . В итоге

выражение (35) примет вид:

$$S_D = S_{cm} + \sqrt{S_{cm}^2 + 2S_{cm}h}. \quad (36)$$

Для получения динамического коэффициента (30) разделим левую и правую части выражения (36) на статическую осадку  $S_{cm}$ :

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{S_{cm}}} \quad (37)$$

### Описание лабораторной установки

Установка для экспериментального исследования (рисунок 15) имеет массивную втулку (груз) 1, пружину 3, установленные на направляющей 2. Подставки 4 позволяют менять высоту  $h$  между грузом и пружиной. Высота  $h$  отсчитывается по линейке 6. Груз 1 удерживается фиксатором 5. Величина осадки пружины отмечается карандашом 7 на миллиметровой бумаге 8.

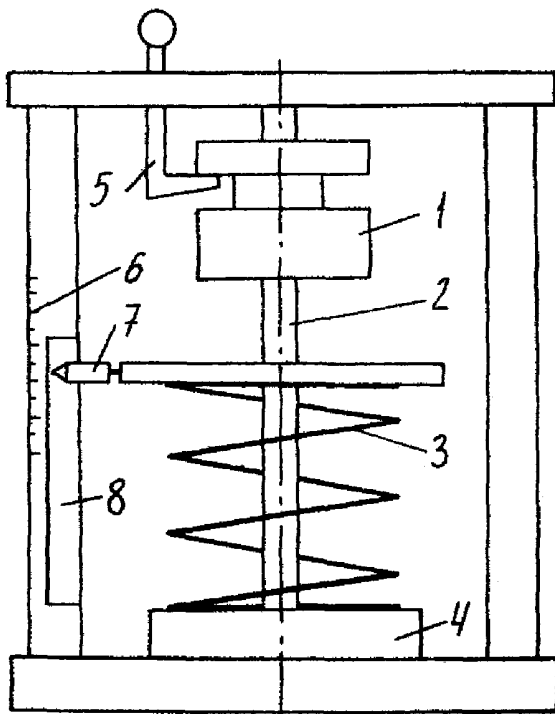


Рисунок 15 – Лабораторная установка

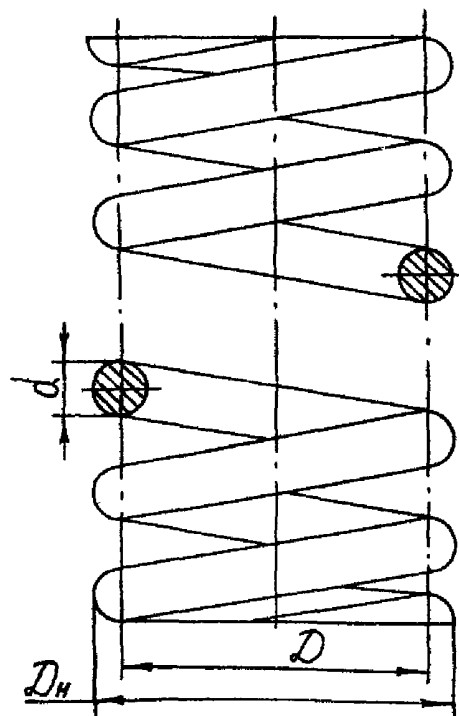


Рисунок 16 – Пружина

### Порядок выполнения работы

- 1 Замерить геометрические размеры пружины (рисунок 16).
- 2 Определить экспериментально статическую осадку пружины. Для этого, удерживая груз рукой, отвести фиксатор и плавно положить груз на пружину. По следу карандаша на миллиметровой бумаге сосчитать результат.
- 3 Определить экспериментально динамическую осадку пружины при  $h=0$  (внезапное приложение нагрузки). Для этого, удерживая груз рукой, отвести фиксатор, подвести груз до касания с пружиной и резко отпустить. Сосчитать результат по миллиметровой бумаге.

4 Определить экспериментально динамическую осадку пружины при разных высотах  $h$  падения груза (применяя две разные подставки 4, а также убирая подставку).

Для этого, удерживая груз фиксатором, измерить высоту груза над пружиной. Сбросить груз путем отвода фиксатора. Записать результат в таблицу 3.

5 Определить экспериментальные значения динамического коэффициента по формуле (30).

6 Вычислить теоретические значения динамического коэффициента по формуле (37) для используемых значений высоты  $h$ .

7 В одной системе координат построить график зависимостей опытного и теоретического динамических коэффициентов от высоты падения груза ( $h$  – на оси абсцисс,  $k_d$  – на оси ординат).

### Контрольные вопросы

1 Что называется осадкой пружины?

2 Что показывает динамический коэффициент?

3 Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии механической системы.

4 Почему расчетные формулы для определения динамической осадки пружины и динамического коэффициента являются приближенными? Какие допущения приняты при выводе этих формул?

5 Как экспериментально определяется статическая осадка пружины?

6 Как экспериментально определяется динамическая осадка пружины?

7 Почему обычно опытное значение динамического коэффициента меньше, чем теоретическое?

### Отчет о работе

1 Название работы: . . .

2 Расчетная схема (рисунок 14): . . .

3 Уравнение (31) для описания теоремы об изменении кинетической энергии механической системы: . . .

4 Формулы (33), (34), (35) и (36) для вывода уравнения динамической осадки пружины: . . .

5 Уравнение (37) для вычисления динамического коэффициента: . . .

6 Схема установки (рисунок 15): . . .

7 Результаты опыта:

наружный диаметр пружины  $D_n = \dots \text{ мм}$ ;

диаметр проволоки  $d = \dots \text{ мм}$ ;

средний диаметр пружины  $D = D_n - d = \dots \text{ мм}$ ;

число рабочих витков пружины (исключая витки, плотно прилегающие к опорным поверхностям; может быть нецелым числом)  $n = \dots$  ;

вес груза  $Q = \dots \text{ Н}$ ;

статическая осадка пружины (опытная)  $S_{ст}^{(o)} = \dots \text{ мм}$ .

Таблица 3 – Результаты лабораторной работы

№ опыта	Высота падения $h$ , мм	Динамическая осадка $S_D^{(o)}$ , мм	Динамический коэффициент $k_D^{(o)} = \frac{S_D^{(o)}}{S_{cm}^{(o)}}$
1	0		
2			
3			
4			

8 Результаты теоретических расчетов:

а) статическая осадка пружины  $S_{cm}^{(T)} = \frac{QD^3n}{10^4 d^4} = \dots \dots \dots$  мм;

б) динамический коэффициент (теоретический) при используемых высотах:

при  $h=0$   $k_D^{(T)} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{S_{cm}^{(T)}}} = \dots \dots \dots$ ;

при  $h=\dots$   $k_D^{(T)} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{S_{cm}^{(T)}}} = \dots \dots \dots$ ;

при  $h=\dots$   $k_D^{(T)} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{S_{cm}^{(T)}}} = \dots \dots \dots$ ;

при  $h=\dots$   $k_D^{(T)} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{S_{cm}^{(T)}}} = \dots \dots \dots$

9 График зависимостей  $k_D^{(o)} = f(h)$  и  $k_D^{(T)} = f(h)$  (построить в одной системе координат:  $h$  – на оси абсцисс,  $k_D$  – на оси ординат).

10 Вывод: теоретические значения динамического коэффициента .....  
 опытных значений потому, что .....  
 .....

## Список литературы

1 Алешкевич, В. А. Механика [Текст] : учебник для студентов вузов / В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев ; под ред В. А. Алешкевича. – М. : Академия, 2004. – 480 с. [В приложении к учебнику – электронный ресурс: Ахметьев В. М. Компьютерные демонстрации к учебнику (на CD)].

2 Головнин, Г. Я. Лабораторные работы по теоретической механике (Динамика) [Текст] / Г. Я. Головнин. – М.: Высшая школа, 1967. – 76 с.

3 Никитин, Е. М. Лабораторные работы по курсу теоретической механики [Текст] : учебное пособие / Е. М. Никитин. – Л. ; Вологда : ЛСХИ, 1974. – 64 с.

4 Яблонский, А. А. Курс теоретической механики [Текст] : учебник / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – СПб. : Лань, 2004. – 768 с.

Тютрин Сергей Геннадьевич

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания  
к выполнению лабораторных работ для студентов  
направления 190700.62 и специальностей 190109.65 и 190110.65

Редактор А. С. Мокина

---

Подписано в печать 17.06.13	Формат 60×84 1/16	Бумага тип. №1
Печать трафаретная	Усл. печ. л. 2,0	Уч.-изд. л. 2,0
Заказ 103	Тираж 25	Цена свободная

---

РИЦ Курганского государственного университета.  
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.  
Курганский государственный университет.