МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра алгебры и геометрии

Математика

Методические указания и материалы
для проведения практических занятий
по математике для студентов специальностей
020300 – Социология и 350500 – Социальная работа

Часть 2

Курган 2004

Кафедра: «Алгебры и геометрии»

Дисциплина: Математика (специальности 020300, 350500)

Составила: старший преподаватель Потеряйко Е.Л.

Утверждены на заседании кафедры «21» января 2004 г.

Рекомендованы редакционно-издательским советом университета «___» ___________ 2004 г.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие указания предназначены для студентов, обучающихся по специальностям 020300 «Социология» и 350500 «Социальная работа». Они составлены в соответствии с Государственным образовательным стандартом и соответствуют учебному плану по дисциплине «Математика».

Для каждой темы составлены вопросы по теории для повторения, приведены решения основных типов задач, предложены задачи для работы на практических занятиях и дома.

Цель данных указаний – оказать помощь студентам при подготовке к практическим занятиям по данному курсу.

Глава I. Элементы дифференциального исчисления функции одной переменной

Занятия 1, 2. Понятие функции. Элементарные функции

Вопросы для повторения

1. Определение функции.
2. Область определения и область значений функции.
3. Способы задания функции, график.
4. Свойства функций: четность, нечетность, периодичность, монотонность, непрерывность.
5. Функция, обратная для данной.
6. Элементарные функции. Композиции элементарных функций.

Образцы решения типовых задач

Пример 1. Найти область определения функции.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-x-6}}{\log_3(x-2)}$$

Решение: Для нахождения области определения функции необходимо решить систему: $\begin{cases} x^2-x-6\ge 0, \\ x-2>0, \\ \log_3(x-2)\ne 0. \end{cases}$

1) $x^2-x-6\ge 0$

$(x-3)(x+2)\ge 0$

$x=3$, $x=-2$

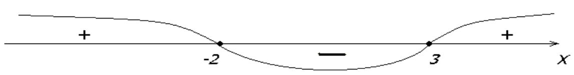
2) $x-2>0$

$x>2$

3) $\log_3(x-2)\ne 0$

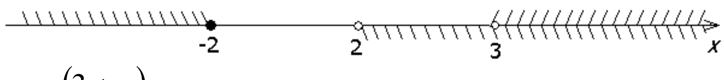
$\log_3(x-2)\ne\log_3 1$

$x-2\ne 1$, $x\ne 3$



$x\in(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$

$$\begin{cases} x\in(-\infty;-2]\cup[3;+\infty), \\ x\in(2;+\infty), \\ x\ne 3. \end{cases}$$



$x\in(3;+\infty)$.

Ответ: $D(f)$: $(3;+\infty)$.

Пример 2. Найти функцию, обратную для данной $y=\dfrac{x-2}{4-x}$.

Решение: Область определения исходной функции $D(y)=(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$.

Преобразуем на $D(y)$ данную функцию, выразив переменную x через y:

y(4-x)=x-2;
4y-xy-x-2=0;
4y+2=x(y+1);
$x=\dfrac{4y-2}{y+1}$.

После переобозначения зависимой и независимой переменных $x\leftrightarrow y$ получаем функцию, обратную исходной:

$$y=\frac{4x+2}{x+1}$$

Ответ: $y=\dfrac{4x+2}{x+1}$.

Пример 3. Найти множество значений функции $y=2+3\sin 5x$.
Решение: Функция $y=\sin t$ – ограниченная функция, т.е. $-1\le\sin t\le 1$, значит
$-1\le\sin 5x\le 1$
$-3\le 3\sin 5x\le 3$
$2-3\le 2-3\sin 5x\le 2+3$
$-1\le y\le 5$
E(y) = [–1;5]
Ответ: E(y) = [–1;5]

Задачи для решения в аудитории

Найти область определения функций:

1. $y = x^3+2x+1$
2. $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$
3. $y=\sqrt{4-x^2}$
4. $y=\dfrac{1-x}{\sin x}$
5. $y = log_2(x^2-4x-5)$
6*. $y = arccos\dfrac{5}{x}$

Найти множества значений функций:

7. $y = e^x+2$
8. $y = x^2+x+1$
9. $y = 3cos2x-1$
10. $y=\sqrt{x-3}$
11. $y=\dfrac{\pi}{2}+\arcsin x$
12*. $y = log_2(4-x^2)$

Указать, какие из функций являются четными, а какие – нечетными:

13. $y = x^2+5$
14. $y=x2^{x^2}$
15. $y = sin2x$
16. $y = cosx+xsinx$
17. $y=3^x+\dfrac{1}{3^x}$
18. $y=\log_2\dfrac{1-x}{1+x}$
19. $y=\log_2\sqrt{1+x^2}$
20*. $y=\dfrac{x^3+x^2+x}{x^2+x+1}$
21*. $y=\dfrac{5^x+5^{-x}}{5^x-5^{-x}}$

Найти наименьшие положительные периоды функций:

22. $y = sin4x$
23. $y=tg\dfrac{x}{2}$
24. $y = sinx+cos2x$
25*. $y = cos^2 3x$
26*. $y=\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|$
27*. $y = lg|sinx|$

Разложить сложные функции на элементарные функции их составляющие:

28. $y = 3sin(x^2+x+1)$ 29. $y = 2^{\arcsin x^2}$ 30. $y = \sqrt{\ln(tg^3 \frac{x}{3})}$

Найти функции, обратные для данных:

31. $y = 2x-3$ 32. $y = \frac{x-2}{x+1}$ 33. $y = x^2$

34. $y = \sqrt{x+2}$ 35. $y = 10^x+1$ 36. $y = 3\lg \frac{x}{2}$

37. $y = arccosx$ 38. $y = 8e^x$

Построить графики функций:

39. $y = |x^2-1|$ 40. $y = \frac{x+1}{x-1}$ 41. $y = \begin{cases} x^2, x \le 0, \\ 5, x > 0. \end{cases}$ 42. $y = \begin{cases} 2x+3, x \le -1, \\ x^2, -1 < x < 1, \\ 3-2x, x \ge 1. \end{cases}$

Задачи для решения дома

Найти область определения и область значений функций:

43. $y = x^2-2x+4$ 44. $y = \sqrt{25-x}$ 45. $y = 2^x-3$

46. $y = log_3(16-x^2)$ 47. $y = 5-sin2x$

Указать, какие из функций являются четными, а какие – нечетными:

48. $y = x^4+x^2+4$ 49. $y = \frac{x^3-x}{\sin x}$ 50. $y = xe^{x^2}$

Найти наименьшие положительные периоды функций:

51. $y = \cos\frac{3}{2}x + \sin\frac{x}{3}$ 52. $y = \cos^2\frac{x}{4}$ 53. $y = \left|\sin\frac{x}{2}\right|$

Найти функции, обратные для данных:

54. $y = 5x+2$ 55. $y = 2^x-3$ 56. $y = arcsin3x$

Построить графики функций:

57. $y = 2-\sqrt{x-1}$ 58. $y = \begin{cases} -\frac{9}{x}, x < -3, \\ |x|, -3 \le x \le 3, \\ \frac{9}{x}, x > 3. \end{cases}$

Занятия 3, 4. Предел функции

Вопросы для повторения

1. Определение числовой последовательности.
2. Определение предела числовой последовательности.
3. Определение предела функции.
4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства.
5. Основные теоремы о пределах.
6. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.
7. Замечательные пределы.

Образцы решения типовых задач

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

Решение: Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Теорему 2 (предел частного) применить нельзя. Необходимо раскрыть эту неопределенность путем умножения и деления дроби на выражение, сопряженное числителю, т.е. на выражение $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ и применения формулы $(a\text{-}b)(a+b) = a^2\text{-}b^2$.

Получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

Так как знаменатель теперь не равен нулю, то неопределенность раскрыта.

Применяя теорему 2, окончательно получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}2}{\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{2}{2}=1.$$

Пример2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$.

Решение: Имеем неопределенность вида 1^{∞}. Раскроем эту неопределенность, применяя 2-ой замечательный предел в форме $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Получаем

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}=\lim_{x\to 1}(1+(1-x)^{\frac{1}{1-x}})^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to 1}2x}=e^2.$$

Задачи для решения в аудитории

Найти пределы:

59. $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-7x+4)$

60. $\lim\limits_{x\to 0}(x\cos x+5(x^2-3x+1))$

61. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+8}{x^2-x+4}$

62. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 5x}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$

63. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{\pi}\arcsin x-3}{3+x^2}$

64. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{2\sin x\sqrt{2+\cos 2x}}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}$

65. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+6}{x-1}$

66. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{1-x^2}$

67. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

68. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-6x^2+8x}{x-4}$

69*. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+x^2-x+2}{x+2}$

70. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$

71. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

72. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{16x^3-2x^2+3x+1}{4x^3+2x^2-3x+2}$

73. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{15x^4-2x^3+3x^2-5x+1}{3x^4+4x^3+2x^2-4x-2}$

74. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+4x+1}{x^3+3x^2+1}$

75. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+4x^2+5x-10}{x^2+3x+5}$

76. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x-3)(x+2)(x+5)}{5x^3-2x+1}$

77. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$

78. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

79. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$

80. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}$

81. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

82*. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{1+x}}$

83. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$

84. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

85*. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,tgx}{1-\cos x}$

86. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{x}$

87. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$

88. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{tgx-\sin x}$

89. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x}$

90*. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{2x+2}$

91*. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+7}\right)^{2x-5}$

92*. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+2}$

93*. $\lim\limits_{x\to 3}(3-x)^{\frac{3x}{2-x}}$

94*. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

Задачи для решения дома

Найти пределы:

95. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}((1-2\cos^2 x)\sin x)$

96. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\frac{1}{\pi}\arccos x}{x^2+3}$

97. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+2}{x-2}$

98. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^3-8x^2+15x}$

99. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$

100. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4-x}-1}{x-3}$

101. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{2-x}-2}$

102. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2+1}{9x^4-3x^3-x+2}$

103. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+7}{7x^3+x^2-2x+5}$

104. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 8x}$

105. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x-2x\sin x}$

106. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tg 2x}{\sin 4x}$

107. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

108. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$

Занятие 5. Непрерывность функции. Односторонние пределы. Точки разрыва

Вопросы для повторения

1. Определение непрерывности функции в точке.
2. Определение непрерывной функции на интервале.
3. Односторонние пределы функции в точке.
4. Точки разрыва. Классификации.
5. Теорема Коши о промежуточных значениях.

Образцы решения типовых задач

Пример 1. Показать, что при x=4 функция $y=\dfrac{x}{x-4}$ имеет разрыв.

Решение: Найдем односторонние пределы функции в точке x=4

$$\lim_{x\to 4-0}\frac{x}{x-4}=-\infty;\lim_{x\to 4+0}\frac{x}{x-4}=+\infty.$$

Таким образом, функция при $x\to 4$ не имеет ни левого, ни правого конечного предела. Следовательно, $x = 4$ является точкой разрыва II рода.

Задачи для решения в аудитории

Исследовать на непрерывность функции:

109. $f(x)=x-2$ в точках $x_1=-2, x_2=2$.

110. $f(x)=\begin{cases} x-2, 0<x<1, \\ 1-x, 1\le x\le 3, \end{cases}$ в точке $x_0=1$.

111. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, x\le 1, \\ -x, x>1, \end{cases}$ в точке $x_0=1$.

Исследовать на непрерывность, определить характер точек разрыва функций:

112. $f(x)=|x-1|$

113. $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, x\ne 1, \\ 2, x=1. \end{cases}$

114. $y=\begin{cases} 2x, 0\le x\le 1, \\ 2-x, 1<x\le 2. \end{cases}$

115. $f(x)=\begin{cases} \cos x, x\le 0, \\ 2+x, x>0. \end{cases}$

116. $y=\frac{x^2-25}{x-5}$

117. $y=\frac{1+x}{1+x^3}$

118. $y=\frac{x}{1+x}$

119. $y=\frac{1}{(x-1)(x-5)}$

120. $y=\frac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}$

121. $y=\frac{tgx arctg\frac{1}{x-3}}{x(x-5)}$

122. $y=\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$

123. $y=\frac{x+1}{x^3+6x^2+11x+6}$

124. $y=\frac{1}{x^2+x+1}$

125. Исследовать на непрерывность функцию $y=\frac{1}{(x-1)(x-6)}$ на отрезке: 1) $[2;5]$; 2) $[4;10]$; 3) $[0;7]$.

126. Исследовать на непрерывность функцию $y=\frac{1}{x^4-26x^2+25}$ на отрезке: 1) $[6;10]$; 2) $[-2;2]$; 3) $[-6;6]$.

Задачи для решения дома

Исследовать на непрерывность функции

127. $f(x)=\begin{cases} x^2, x\le 0, \\ -x, x>0. \end{cases}$ в точке $x_0=0$.

128. $f(x)=\begin{cases} x+2, x\le 3, \\ \frac{3}{x}, x>3. \end{cases}$ в точке $x_0=3$.

Найти точки разрыва функции и определить их характер:

129. $y=\frac{x^2-4}{x+2}$

130. $y=\frac{3x^2}{(x-3)(x+4)}$

131. $y=\frac{1}{1-x^2}$

132. $f(x)=\begin{cases} x^2, 0\le x\le 2, \\ 20-8x, 2<x\le 3. \end{cases}$

Занятие 6. Производная функции

Вопросы для повторения

1. Задачи, приводящие к понятию производной.
2. Определение производной функции в точке.
3. Геометрический и механический смысл производной.
4. Определение дифференцируемой функции в точке, на промежутке.
5. Правила дифференцирования функции.
6. Таблица производных элементарных функций.

Образцы решения типовых задач

Пример 1. Исходя из определения производной, найти производную функции $y = -ctgx - x$.

Решение: 1) $\Delta y = -ctg(x+\Delta x) - (x+\Delta x) + ctgx + x = ctgx - ctg(x+\Delta x) - \Delta x$.

Используя формулу $ctg\alpha - ctg\beta = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$, получаем

$$\Delta y = \frac{\sin(x+\Delta x - x)}{\sin x \sin(x+\Delta x)} - \Delta x = \frac{\sin\Delta x}{\sin x\sin(x+\Delta x)} - \Delta x$$

2) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\sin x\sin(x+\Delta x)} - 1$$

3) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\sin x\sin(x+\Delta x)} - 1\right) = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

$$y' = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = ctg^2 x$$

Ответ: $(-ctgx - x)' = ctg^2 x$

Пример 2. Найти производную функции $y = \dfrac{\arcsin x}{x}$.

Решение: Воспользуемся правилом дифференцирования частного: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Получаем $y' = \dfrac{(\arcsin x)'x - x'\arcsin x}{x^2} = \dfrac{x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \dfrac{x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

Пример 3. Найти производную функции $y = (2x^3+5)^4$.

Решение: Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции. Получаем $y' = 4(2x^3+5)^3(2x^3+5)' = 4(2x^3+5)^3 6x^2 = 24x^2(2x^3+5)^3$.

Задачи для решения в аудитории

Исходя из определения производной, найти производные функций:

133. $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$ 134. $y = \sqrt{x}$ 135. $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$ 136. $y = 5\sin x + 3\cos x$

Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производные следующих функций:

137. $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$
138. $y = \dfrac{7}{x^3}$
139. $y = \dfrac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \dfrac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \dfrac{2}{15}x^7\sqrt{x}$
140. $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$
141. $y = 3x^3 \ln x - x^3$
142. $y = \dfrac{2^{3x}}{3^{2x}}$
143. $y = x^2 \sin x - 2\cos x$
144. $y = \ln(2x^3 + 3x^2)$
145. $y = \sqrt{1 - 3x^2}$
146. $y = x \arccos \dfrac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$
147. $y = \left(\sin \dfrac{x}{2} - \cos \dfrac{x}{2}\right)^2$
148. $y = \cos^3 \dfrac{x}{3}$
149. $y = \ln tg \dfrac{2x+1}{4}$
150. $y = tg\, 2x + \dfrac{2}{3} tg^3 2x + \dfrac{1}{5} tg^5 2x$
151. $y = arctg\sqrt{4x^2 - 1}$
152. $y = \arcsin \dfrac{2x^3}{1 + x^6}, |x| < 1$
153. $y = \arccos \dfrac{9 - x^2}{9 + x^2}$
154. $y = \dfrac{\ln x}{x^5} + \dfrac{1}{5x^5}$
155. $y = \log_2 \sin^2 x$
156. $y = \log_{x^2} 2$

157. Чему равно выражение $u = y^2 + (y')^2 + \dfrac{4y^2}{(y')^2}$, если $y = 2\cos x$?

158. Показать, что функция $y = (x^2 + 1)(e^x + c)$ обращает уравнение $y' - \dfrac{2xy}{x^2 - 1} = e^x(x^2 + 1)$ в тождество.

Задачи для решения дома

Найти производные функций:

159. $y = 7x^7 + 3x^2 - 4x - 1$
160. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$
161. $y = x \arccos x$
162. $y = x^2 \log_3 x$
163. $y = \dfrac{\cos x}{1 + 2\sin x}$
164. $y = \sin^2 x^3$

165. Найти $f'(1)$; $f'(e)$; $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)$; $f'\left(\dfrac{1}{e^2}\right)$, если $f(x) = x \ln x$.

166. Найти $f'(0)$, если $f(x) = \dfrac{1 - 10^x}{1 + 10^x}$.

Занятие 7. Производные высших порядков. Дифференциал функции

Вопросы для повторения

1. Определение производной 2-го порядка. Механический смысл.
2. Определение производной n-го порядка.
3. Определение дифференциала функции.
4. Геометрический смысл дифференциала.
5. Связь производной и дифференциала функции.
6. Основные свойства дифференциала.
7. Применение дифференциала функции к приближенным вычислениям.

Образцы решения типовых задач

Пример 1. Найти дифференциал функции и производную 3-го порядка $y = e^{x^2}$.

Решение:

$$y' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = 2xe^{x^2}$$

$$dy = y' \cdot dx, dy = 2xe^{x^2} dx$$

$$y'' = (2xe^{x^2})' = (2x)'e^{x^2} + 2x(e^{x^2})' = 2e^{x^2} + 2xe^{x^2} 2x = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = 2e^{x^2}(1+2x^2)$$

$$y''' = (2e^{x^2}(1+2x^2))' = (2e^{x^2})'(1+2x^2) + 2e^{x^2}(1+2x^2)' = 4xe^{x^2}(1+2x^2) + 8xe^{x^2} =$$

$$= 4xe^{x^2}(1+2x^2+2) = 4xe^{x^2}(3+2x^2)$$

Ответ: $dy = 2xe^{x^2} dx, y''' = 4xe^{x^2}(3+2x^2)$

Пример 2. Вычислить приближенное значение $\arcsin 0{,}51$.

Решение: Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$. Полагая $x = 0{,}5, \Delta x = 0{,}01$ и применяя формулу $\arcsin(x+\Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \cdot \Delta x$, получаем:

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}} \cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}011 = 0{,}513$$

Ответ: $\arcsin 0{,}51 \approx 0{,}513$.

Задачи для решения в аудитории

Найти производные второго порядка:

167. $y = -\dfrac{22}{x+5}$

168. $y = \dfrac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$

169. $y = \dfrac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \dfrac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x$

170. $y = -\dfrac{1}{9}x\sin 3x - \dfrac{2}{27}\cos 3x$

171. $y = \cos^2 5x$

172. $y = x\ln(x+\sqrt{x^2+9}) - \sqrt{x^2+9}$

Найти производные третьего порядка:

173. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$

174. $y = xe^{-x}$

175. $y = e^x\cos x$

176. $y = x^2\sin x$

177. $y = \dfrac{x}{6(x+1)}$

178. $y = \dfrac{1}{2}\ln^2 x$

Найти производные n-го порядка:

179. $y = \dfrac{1}{2x+1}$

180. $y = 5\text{-}3\cos^2 x$

181. $y = 2^x+2^{-x}$

182. $y = x^2 \ln x$

Найти дифференциалы функций:

183. $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x-6}{x+6}$

184. $y = \arcsin\sqrt{x}$

185. $y = x\,\mathrm{arctg}\,x$

186. $y = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

187. $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

188. $y = 2^{-x^2}$

189. Найти приближенное значение $\mathrm{arctg}1{,}05$.

190. Найти приближенное значение $\mathrm{tg}46^0$.

191. Найти приближенное значение $\ln(\mathrm{tg}45^0 15^{|})$.

192. Найти приближенное значение $\sqrt[4]{15{,}8}$.

Задачи для решения дома

Найти дифференциалы функций:

193. $y = x^3\sqrt{x}$

194. $y = \dfrac{2-x^2}{2+x^2}$

195. $y = \ln(\sin\sqrt{x})$

196. $y = \mathrm{arctg}\sqrt{x^2+1}$

Найти производные указанных порядков для функций:

197. $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - \dfrac{1}{2}x + 7$; найти y^{V} .

198. $y = x^3 e^x$; найти y^{IV} .

199. $y = \sin^2 3x$; найти y^{III} .

200. Найти приближенное значение $\sin 46^0$.

201. Найти приближенное значение $\sqrt{1{,}005}$.

202. Показать, что функция $y = x+ \sin 2x$ удовлетворяет уравнению $y^{||} + 4y = 4x$.

Занятие 8. Формула Тейлора. Правило Лопиталя

Вопросы для повторения

1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
2. Формула Маклорена.
3. Правило Лопиталя.

Образцы решения типовых задач

Пример 1. Представить функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в виде многочлена пятой степени относительно одночлена $x - 1$.

Решение: Вычислим значения функции $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ и ее производных до пятого порядка включительно при $a = 1$.

$$f(1)=1;f^{|}(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}};f^{|}(1)=\frac{1}{3};f^{||}(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}};f^{||}(1)=-\frac{2}{9};$$

$$f^{|||}(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}};f^{|||}(1)=\frac{10}{27};f^{|V}(x)=-\frac{80}{81}x^{-\frac{11}{3}};f^{|V}(1)=-\frac{80}{81};$$

$$f^{V}(x)=\frac{880}{243}x^{-\frac{14}{3}};f^{V}(1)=\frac{880}{243}$$

По формуле Тейлора получим

$$\sqrt[3]{x}=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{9\cdot 2!}(x-1)^2+\frac{10}{27\cdot 3!}(x-1)^3-\frac{80}{81\cdot 4!}(x-1)^4+\frac{880}{243\cdot 5!}(x-1)^5+R_5,$$

где $R_5=\frac{f^{VI}(\tau)}{6!}(x-1)^6=-\frac{12320}{729\cdot 6!}\tau^{-\frac{17}{3}}(x-1)^6, 1<\tau<x$

Пример 2. Используя правило Лопиталя, найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение: Неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя 2 раза и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}$$

Задачи для решения в аудитории

203. Представить функцию $f(x) = 2^x$ в виде многочлена третьей степени относительно x.

204. Представить в виде многочлена третьей степени относительно $x-x_0$ ($x_0\neq 0$) функцию $f(x)=\frac{1}{x}$.

205. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью 0,0001.

Вычислить с точность до 10^{-3}:

206. $\sqrt[3]{29}$ 207. $\cos 41^0$ 208. $\sqrt[3]{121}$

Используя правило Лопиталя, найти пределы:

209. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$

210. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}$

211. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$

212. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

213. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e}{\ln(1+x)}$

214. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-arctgx}{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}}$

215. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$

216. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$

217. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x-2)}{\ln(e^x-e^2)}$

219. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$

218. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{\pi-2arctgx}$

220. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^5-1+x^2}$

Задачи для решения дома

221. Разложить функцию $f(x)$ = tg$x$ по формуле Маклорена до члена x^3 включительно.

222. Разложить многочлен $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ по степеням $x - 1$ по формуле Тейлора.

223. Вычислить с точность до 10^{-3} $\sqrt[3]{e}$.

Используя правило Лопиталя, найти пределы:

224. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

225. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

226. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$

227. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1+x^4}{\sin 2x}$

228. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{\ln(1-x)}$

229. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{ctg\,\pi x}$

Занятие 9. Исследование функций на монотонность и экстремумы

Вопросы для повторения

1. Определение возрастающей (убывающей) функции в интервале.
2. Теоремы о возрастании (убывании) функции в интервале.
3. Определение максимума (минимума) функции в точке.
4. Необходимое условие существования экстремума.
5. Первое достаточное условие существования экстремума функции в точке.
6. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Образцы решения типовых задач

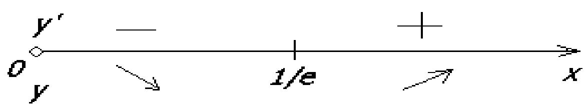
Пример 1. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = x\ln x$.

Решение: 1) $D(y) = (0;+\infty)$, функция непрерывна на $D(y)$.

2) $y' = x'\cdot\ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1$

3) $y' = 0$, $\ln x + 1 = 0$, $\ln x = -1$, $x = \dfrac{1}{e}$

4)



Ответ: функция убывает в промежутке $\left(0;\frac{1}{e}\right)$, возрастает в промежутке $\left(\frac{1}{e};+\infty\right)$.

Пример 2. Исследовать функцию на экстремумы $f(x)=\dfrac{x}{4x^2-3x+4}$

Решение: 1) $D(f)$ = (-∞;+∞), непрерывная функция.

2) $f'(x)=\dfrac{4x^2-3x+4-x(8x-3)}{\left(4x^2-3x+4\right)^2}=\dfrac{4x^2-3x+4-8x^2+3x}{\left(4x^2-3x+4\right)^2}=\dfrac{4-4x^2}{\left(4x^2-3x+4\right)^2}$

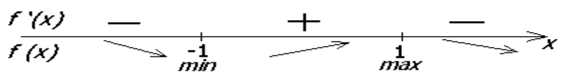
3) $f'(x)=0$; $\dfrac{4-4x^2}{\left(4x^2-3x+4\right)^2}=0$; $4-4x^2=0$

$4x^2=4$

$x^2=1$

$x_1=-1$, $x_2=1$

4)



$x_{\min}=-1$; $y_{\min}=f(-1)=\dfrac{-1}{4(-1)^2-3(-1)+4}=-\dfrac{1}{11}$

$x_{\max}=1$; $y_{\max}=f(1)=\dfrac{1}{5}$

Ответ: $f(x)$ имеет минимум в точке $\left(-1;-\frac{1}{11}\right)$ и максимум в точке $\left(1;\frac{1}{5}\right)$.

Задачи для решения в аудитории

Найти интервалы возрастания и убывания функций:

230. $y=x^3+5x+6$

231. $y=2-3x+x^3$

232. $y=(x^2-1)^{3/2}$

233. $y=xe^{-x}$

234. $y=(2-x)(x+1)^2$

235. $y=(x-2)(x+1)(x-3)$

Найти экстремумы функций:

236. $y=(2x-1)\sqrt[3]{(x-3)^2}$

237. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$

238. $y=\dfrac{x^2}{x^2+2x+2}$

239. $y=\dfrac{x^2-x}{x^2+5x+6}$

240. $y=\dfrac{x^2-x}{x^2-x+3}$

241. $y=x^2e^{-x}$

Найти наименьшее и наибольшее значения функций на отрезке:

242. $y=x^4-2x^2+3$; [-3; 2]

243. $y=3x-x^3$; [-2; 3]

244. $y=-5x^3+x|x-1|$; [0; 2]

Задачи для решения дома

Найти интервалы возрастания и убывания функций:

245. $y = x^{-2}$ 246. $y = 3x^2 - 6x + 7$

Найти экстремумы функций:

247. $y = \frac{x}{1+x^2}$ 248. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$

249. $y = x^2\left(1 - x\sqrt{x}\right)$ 250. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

Найти наименьшее и наибольшее значения функций на отрезке:

251. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 24$; [-2; 1]

252. $y = 4x^3 - x|\,x - 2|$; [0; 3]

Занятие 10. Исследование функции с помощью производной 2-го порядка

Вопросы для повторения

1. Второе достаточное условие существования экстремума функции.
2. Алгоритм исследования функции на экстремум с помощью второй производной.
3. Определение выпуклости (вогнутости) графика функции в точке.
4. Определение выпуклости (вогнутости) графика функции в интервале.
5. Определение точки перегиба графика функции.
6. Теоремы, позволяющие находить интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба (теоремы 1 и 2).

Образцы решения типовых задач

Пример 1. Найти экстремумы функции $y = 2x^2 - x^4$.

Решение: 1) $D(y) : R$, непрерывная функция

2) $y' = 4x - 4x^3$

3) $y' = 0$, $4x - 4x^3 = 0$, $4x(1 - x^2) = 0$,

$x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

4) $y'' = (4x - 4x^3)' = 4 - 12x^2$

5) $x = 0$, $y''(0) = 4 > 0 \Rightarrow x = 0$ – точка минимума

$x = -1$, $y''(-1) = 4 - 12\cdot1 = -8 < 0 \Rightarrow x = -1$ – точка максимума

$x = 1$, $y''(1) = 4 - 12 = -8 < 0 \Rightarrow x = 1$ – точка максимума

6) $x_{\min} = 0$; $y_{\min} = y(0) = 0$;

$x_{\max} = -1$; $y_{\max} = y(-1) = 2\cdot1 - 1 = 1$;

$x_{\max} = 1$; $y_{\max} = y(1) = 2\cdot1 - 1 = 1$;

Ответ: y имеет максимум в точках (-1; 1), (1; 1), минимум в точке (0; 0).

Пример 2. Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба $y = x^5 + 5x - 6$.

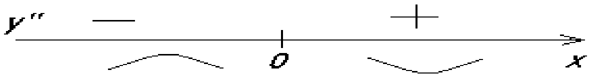
Решение: 1) $D(y) : R$, непрерывная функция

2) $y' = 5x^4 + 5$

3) $y'' = 20x^3$

4) $y'' = 0$, $20x^3 = 0$, $x = 0$.

5)



$x = 0$ – точка перегиба $y(0) = 0 + 0 – 6 = -6$.

Ответ: график функции выпуклый в промежутке $(-\infty;\ 0)$ и вогнут в промежутке $(\ 0;\ +\infty)$, точка $(\ 0;\ -6)$ – точка перегиба.

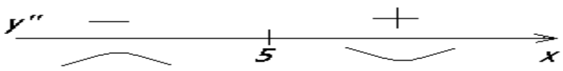
Пример 3. Найти точки перегиба кривой $y = (x – 5)^{5/3} + 2$.

Решение: 1) $D(y) : R$

2) $y' = \dfrac{5}{3}(x-5)^{\frac{2}{3}}$

3) $y'' = \dfrac{10}{9\sqrt[3]{x-5}}$

4) $y'' \neq 0$, y'' не существует в точке $x = 5$.



$x = 5$ – точка перегиба. $y(5) = 2$.

Ответ: (5; 2) – точка перегиба.

Задачи для решения в аудитории

Найти экстремумы функций:

253. $y = 2x^3 – 9x^2 + 12$

254. $y = x^{2/3}(\ x – 5\ )$

255. $y = x + \sqrt{3-x}$

256. $y = (x – 1)^{6/7}$

257. $y = xe^x$

258. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

259. $y = \ln(x^2 + 1)$

260. $y = \dfrac{4x}{1+x^2}$

Найти интервалы выпуклости и вогнутости графиков функций:

261. $y = x^2 – 5x + 6$

262. $y = \dfrac{4}{x^2}$

Найти точки перегиба кривых:

263. $y = x^3 - \dfrac{1}{2}x^2$

264. $y = x^4 - \dfrac{4}{3}x^3$

265. $y = (x – 4)^5 + 4x + 4$

266. $y = (x-1)\sqrt[7]{(x-1)^6}$

267. $y = x^4 – 8x^3 + 24x^2$

268. $y = \dfrac{x}{1-x^2}$

Задачи для решения дома

Найти экстремумы функций:

269. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x+1$

270. $y = (x + 1)^2(x – 2)$

271. $y = x\ln x$

272. $y=\sqrt{x^2+1}$

273. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции $y=\frac{x^3}{3}+x^2-3x+\frac{2}{3}$

Найти точки перегиба кривых:

274. $y = x^3 – 3x^2 + 2x$

275. $y = x^4 – 6x^2$

276. $y = 2x^2 + \ln x$

277. $y = x\mathrm{arctg}x$

Занятие 11. Асимптоты графика функции

Вопросы для повторения

1. Определение асимптоты кривой $y = f(x)$.
2. Классификация асимптот.
3. Определение вертикальной асимптоты.
4. Определение наклонной асимптоты.
5. Способы нахождения наклонной асимптоты.

Образцы решения типовых задач

Пример: Найти асимптоты кривой $y = x + 2\mathrm{arctg}x$.

Решение: Так как функция непрерывна на всей числовой прямой, вертикальных асимптот нет. Найдем наклонные асимптоты:

1)

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2arctgx}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2arctgx}{x}\right)=1$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2arctgx-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2arctgx\right)=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$$

$y = x + \pi$ – правая наклонная асимптота.

2)

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2arctgx}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2arctgx}{x}\right)=1$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}\left(x+2arctgx-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2arctgx\right)=2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi$$

$y = x – \pi$ - левая наклонная асимптота.

Задачи для решения в аудитории

Найти асимптоты графиков функций:

278. $f(x)=\frac{x+5}{x-3}$

279. $f(x) = x^2e^{-x}$

280. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$

281. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2x+2}$

282. $f(x)=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$

283. $f(x)=\dfrac{5x}{x-1}$

284. $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2-1}+2x$

285. $f(x)=2x-\dfrac{\cos x}{x}$

286. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$

287. $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}-3x$

288. $f(x)$ = 0,5x + arctg$x$

289. $f(x)$ = x – 2arctg$x$

290. $f(x)$ = $xe^{1/x}$

291. $f(x)$ = - $x$arctg$x$

Задачи для решения дома

Найти асимптоты графиков функций:

292. $y=\dfrac{x^2}{x^4+1}$

293. $y=\dfrac{x}{1-x^2}$

294. $y=\dfrac{x}{2x-1}+x$

295. $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$

Занятие 12, 13. Построение графиков функций

Вопросы для повторения

1. Схема исследования графика функции.
2. Примерный характер схемы исследования.

Образец решения типовой задачи

Пример. Построить график функции $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

Решение: 1) $D(y)$: $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

2) $y(-x)=\dfrac{-x^3+4}{x^2}\neq y(x)$, $y(-x)\neq -y(x)$

функция не является четной или нечетной.

3) с0x: $y=0$; $\dfrac{x^3+4}{x^2}=0; x=-\sqrt[3]{4}$ $\quad A\left(-\sqrt[3]{4};0\right)$

4) $y>0$ при $\dfrac{x^3+4}{x^2}>0; x>-\sqrt[3]{4}$, $x\neq 0$

$y<0$ при $x<-\sqrt[3]{4}$

5) $y'=\dfrac{3x^2\cdot x^2-2x(x^3+4)}{x^4}=\dfrac{3x^4-2x^4-8x}{x^4}=\dfrac{x^4-8x}{x^4}=1-\dfrac{8}{x^3}$;

$y'=0;\ 1-\dfrac{8}{x^3}=0;\ x^3=8, x=2$

6) $y''=\left(1-\dfrac{8}{x^3}\right)'=\left(-8x^{-3}\right)'=24x^{-4}=\dfrac{24}{x^4}$

$y'' \neq 0, \quad т.к. \ \dfrac{24}{x^4} \neq 0$

7)

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	$\overline{\exists}$	-	0	+
y''	+	$\overline{\exists}$	+		+
y	↗	$\overline{\exists}$	↘	3 min	↗
график					

$x_{\min} = 2, \quad y(2) = \dfrac{2^3+4}{2^2} = 3;$ B(2; 3)

8) $x = 0$ – точка разрыва

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+4}{x^2} = \infty$$

$x = 0$ – вертикальная асимптота (ось 0y) .

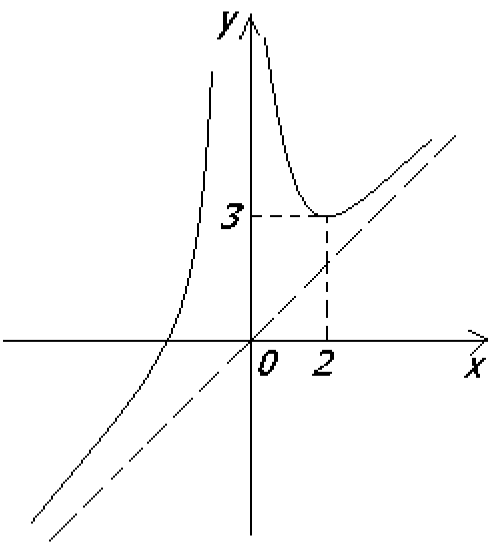
Найдем наклонные асимптоты:

$$\begin{array}{r|l} x^3+4 & x^2 \\ \hline -\,x^3 & x \\ \hline 4 & \end{array}$$

$\dfrac{x^3+4}{x^2} = x + \dfrac{4}{x^2}, \quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0$

$y = x$ – наклонная асимптота.

9) Построим график:



Задачи для решения в аудитории

Построить графики функций:

296. $y = x^3 - 3x$

297. $y = 12x - x^3$

298. $y = \ln x - \ln(x-1)$

299. $y = \dfrac{6\sqrt{x}}{x+2}$

300. $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

301. $y = x + e^{-x}$

302. $y=\frac{x^2+1}{x-1}$

303. $y=\frac{x^2}{1-x^2}$

304. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$

305. $y=2x+\frac{1}{x^2}$

306. $y=e^{-x^2}$

307. $y=\frac{1+\ln x}{x}$

308. $y=\frac{x}{x^2-1}$

Задачи для решения дома

Построить графики функций:

309. $y=\frac{x^3}{3}+x^2$

310. $y=x-\ln x$

311. $y=\frac{x}{x^2+1}$

312. $y=\frac{x^2}{x-2}$

Занятие 14. Контрольная работа №1.
Тема: «Элементы дифференциального исчисления функции одной независимой переменной»

Глава II. Элементы интегрального исчисления функции одной переменной

Занятие 15, 16. Неопределенный интеграл

Вопросы для повторения

1. Определение первообразной функции.
2. Определение неопределенного интеграла.
3. Свойства неопределенного интеграла.
4. Таблица основных интегралов.
5. Основные методы интегрирования.
6. Метод непосредственного интегрирования.
7. Метод замены переменной.
8. Интегрирование по частям.

Образцы решения типовых задач

Пример 1. Вычислить $\int\sqrt{1-\cos 2x}dx$.

Решение: $\int\sqrt{1-\cos 2x}dx=\int\sqrt{2\sin^2 x}dx=\int\sqrt{2}\sin xdx=-\sqrt{2}\cos x+C$

Пример 2. Вычислить $\int \frac{2xdx}{6+x^2}$.

Решение: $\int \frac{2xdx}{6+x^2} = \begin{vmatrix} t = 6+x^2 \\ dt = 2xdx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(6+x^2) + C$.

Пример 3. Вычислить $\int x \cdot arctgxdx$.

Решение: Используем формулу $\int udv = uv - \int vdu$

$$\int x \cdot arctgx = \begin{vmatrix} u = arctgx; dv = xdx \\ du = \frac{dx}{1+x^2}; v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2} arctgx - \int \frac{x^2 dx}{2(1+x^2)} = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \frac{dx}{x^2+1}\right) = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} arctgx + C = \frac{1}{2}(x^2+1) arctgx - \frac{1}{2}x + C.$$

Задачи для решения в аудитории

Вычислить интегралы, используя таблицу основных интегралов:

313. $\int \frac{dx}{x^3}$

314. $\int (2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 5)dx$

315. $\int (\cos x + \sin x)dx$

316. $\int (1+x^5)dx$

317. $\int (5x + e^x)dx$

318. $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx$

319. $\int \left(\frac{8}{\sin^2 x} + \frac{7}{\cos^2 x}\right)dx$

320. $\int (e^x + \sin x)dx$

Вычислить интегралы методом замены переменной:

321. $\int xe^{x^2} dx$

322. $\int \frac{x^2}{2x^3+3} dx$

323. $\int \frac{arctgx}{1+x^2} dx$

324. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

325. $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$

326. $\int \frac{e^x dx}{2+3e^x}$

327. $\int x\sqrt{2-x}dx$

328. $\int \frac{3x^3 dx}{\sqrt{16-x^8}}$

329. $\int e^{2x^3+3} x^2 dx$

330. $\int \frac{x}{2x^4+5} dx$

Вычислить интегралы, применяя метод интегрирования по частям:

331. $\int x \ln xdx$

332. $\int arctg 2xdx$

333. $\int x \sin xdx$

334. $\int xe^{-x} dx$

335. $\int (2x+8)\cos 7xdx$

336. $\int (5x+1)\ln xdx$

337. $\int (x-3)e^{-2x} dx$

338. $\int x^3 \ln xdx$

339. $\int \arccos xdx$

340. $\int \arcsin 2xdx$

341. $\int \ln^2 xdx$

342. $\int x^2 e^x dx$

Задачи для решения дома

Вычислить интегралы, используя таблицу основных интегралов:

343. $\int \frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2} dx$

344. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$

345. $\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx$

346. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} \right) dx$

Вычислить интегралы методом замены переменной:

347. $\int e^{\sin x} \cos x dx$

348. $\int 2^{x^3 + 2x^2} (3x^2 + 4x) dx$

349. $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1}$

350. $\int tgx dx$

351. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2 - x^4}}$

352. $\int \frac{\ln x + 3}{x} dx$

Вычислить интегралы, применяя метод интегрирование по частям:

353. $\int (x + 1) \ln x dx$

354. $\int (2x + 3) \sin x dx$

355. $\int x \cos x dx$

356. $\int x e^{2x} dx$

Занятие 17. Интегрирование дробно – рациональных функций

Вопросы для повторения

1. Определения рациональной дроби. Правильные и неправильные дроби.
2. Интегрирование простейших дробей I типа $\left(\frac{A}{x - a} \right)$.
3. Интегрирование простейших дробей II типа $\left(\frac{A}{(x - a)^m}, m \in Z, m > 1 \right)$.
4. Интегрирование простейших дробей III типа $\left(\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}, \frac{p^2}{4} - q < 0 \right)$.
5. Разложение рациональной дроби на простейшие (теорема о разложении).
6. Метод неопределенных коэффициентов интегрирования правильных рациональных дробей.

Образцы решения типовых задач

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{3x - 1}{x^2 - 4x + 8} dx$.

Решение: $\int \frac{3x - 1}{x^2 - 4x + 8} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x - 4) - 1 + 6}{x^2 - 4x + 8} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 8} dx + 5 \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 8} =$

$= \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 8) + 5 \int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 2^2} = \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 8) + \frac{5}{2} arctg \frac{x - 2}{2} + C$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{x^4}{x^4-16}dx$.

Решение: Выделим целую часть данной неправильной рациональной дроби

$$\frac{x^4}{x^4-16}=\frac{(x^4-16)+16}{x^4-16}=1+\frac{16}{x^4-16}$$

$$\int \frac{x^4}{x^4-16}dx=\int\left(1+\frac{16}{x^4-16}\right)dx=\int dx+16\int\frac{dx}{x^4-16}=x+16\int\frac{dx}{x^4-16}$$

$$\frac{1}{x^4-16}=\frac{1}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$\frac{1}{x^4-16}=\frac{A(x+2)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-4)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$

$$1=A(x^3+2x^2+4x+8)+B(x^3-2x^2+4x-8)+Cx^3+Dx^2-4Cx-4D$$

$$1=(A+B+C)x^3+(2A-2B+D)x^2+(4A+4B-4C)x+8A-8B-4D$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 0=A+B+C \\ x^2 & 0=2A-2B+D \\ x & 0=4A+4B-4C \\ x^0 & 1=8A-8B-4D \end{array} \quad \begin{cases} A+B+C=0 \\ 2A-2B+D=0 \\ A+B-C=0 \\ 8A-8B-4D=1 \end{cases} \quad \begin{cases} C+C=0 \Rightarrow C=0 \\ 2A+2A+D=0 \\ C=A+B \Rightarrow A=-B \\ 8A+8A-4D=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4A=-D \\ 16A=1+4D \end{cases}$$

$$1+4D=-4D \qquad A=-\frac{D}{4}$$

$$8D=-1; D=-\frac{1}{8} \qquad A=\frac{1}{32}, B=-\frac{1}{32} \qquad A=\frac{1}{32}; B=-\frac{1}{32}; C=0; D=-\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{x^4-16}=\frac{1}{32(x-2)}-\frac{1}{32(x+2)}-\frac{1}{8(x^2+4)}$$

$$\int\frac{x^4}{x^4-16}dx=x+16\left(\frac{1}{32}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{32}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x^2+4}\right)=x+\frac{1}{2}\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x+2|-arctg\,\frac{x}{2}+C=$$

$$=x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-arctg\,\frac{x}{2}+C.$$

Задачи для решения в аудитории

Найти интегралы:

357. $\int\frac{dx}{(x-1)^4}$

358. $\int\frac{dx}{(2x+3)^3}$

359. $\int\frac{dx}{x^2+6x+25}$

360. $\int\frac{dx}{2x^2-2x+3}$

361. $\int\frac{8x-7}{x^2+10x+29}dx$

362. $\int\frac{x+1}{5x^2+2x+1}dx$

Найти интегралы, пользуясь разложением рациональных дробей на простейшие:

363. $\int\frac{x}{x^3+1}dx$

364. $\int\frac{3x-1}{x^3+3x}dx$

365. $\int\frac{2x-1}{x^3-x}dx$

366. $\int\frac{2x+5}{x^3-4x}dx$

367. $\int \frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3(x-2)}dx$

368. $\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}dx$

369. $\int \frac{x^2}{x^2-4x+3}$

370*. $\int \frac{x^2+2}{x^4+4}dx$

Задачи для решения дома

Найти интегралы:

371. $\int \frac{dx}{(x-5)^3}$

372. $\int \frac{dx}{(3x+2)^5}$

373. $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$

374. $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-4x+7}$

375. $\int \frac{3x+7}{x^2+8x+17}dx$

376. $\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29}dx$

Найти интегралы, пользуясь разложением рациональных дробей на простейшие:

377. $\int \frac{x+2}{x(x-3)}dx$

378. $\int \frac{x+20}{x^3-8}dx$

379. $\int \frac{x^2-x+1}{(x-2)^2(x+1)}dx$

380. $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+4}dx$

Занятие 18. Интегрирование тригонометрических функций

Вопросы для повторения

1. Интегралы вида $\int \sin\alpha x\cos\beta x dx$; $\int \sin\alpha x\sin\beta x dx$; $\int \cos\alpha x\cos\beta x dx$, их вычисление.
2. Интегралы вида $\int \sin^n x\cos^m x dx$, $n,m\in N$, их вычисление.
3. Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, $R(u,v)-$ рациональная функция, их вычисление.

Образцы решения типовых задач

Пример 1. Найти $\int \sin^8 x\cos^5 x dx$.

Решение:

$$\int \sin^8 x\cos^5 x dx = \int \sin^8 x(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) = \int (\sin^8 x - 2\sin^{10} x + \sin^{12} x)d(\sin x) =$$

$$= \frac{\sin^9 x}{9} - \frac{2\sin^{11} x}{11} + \frac{\sin^{13} x}{13} + C$$

Пример 2: Найти интеграл $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

Решение: $t = tg\frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2},,$

получим

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{8t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C$$

Задачи для решения в аудитории

Найти интегралы:

381. $\int\sin 2x\cos 5x dx$
382. $\int\sin 3x\sin x dx$
383. $\int\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$
384. $\int\sin^2 x\cos^2 x dx$
385. $\int\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx$
386. $\int\sin^3 x dx$
387. $\int\cos^6 x dx$
388. $\int\sin^4 x\cos^5 x dx$
389. $\int\frac{dx}{\sin^4 x}$
390. $\int\frac{\cos^5 x}{\sin x}dx$
391. $\int\frac{dx}{1-\sin x}$
392. $\int\frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$
393. $\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$
394. $\int\frac{dx}{2\sin x+\sin 2x}$

Задачи для решения дома

Найти интегралы:

395. $\int\cos 3x\cos x dx$
396. $\int\sin 3x\sin 5x dx$
397. $\int\cos^4 x dx$
398. $\int\sin^3 x\cos^2 x dx$
399. $\int\frac{dx}{4-5\sin x}$
400. $\int\frac{dx}{5-3\cos x}$
401. $\int\frac{dx}{\sin x-\cos x}$
402. $\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$

Занятие 19. Определённый интеграл

Вопросы для повторения

1. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла.
2. Определение определённого интеграла. Его геометрический смысл.
3. Свойства определённого интеграла.
4. Связь определённого и неопределённого интегралов. Формула Ньютона-Лейбница.
5. Методы вычисления определённого интеграла.

Образцы решения типовых задач

Пример 1. Найти $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

Решение:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{xdx}{2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{2} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)dx = (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - (\frac{1}{2}0 - \frac{1}{2}\sin 0) = \frac{\pi-2}{4}$$

Пример 2: Найти $\int\limits_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$.

Решение: $x = R\sin t, dx = R\cos tdt,$

если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = R$, то $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\int\limits_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\cdot R\cos tdt = R^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = \frac{1}{2}R^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}R^2(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{R^2}{2}(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - 0 - \frac{1}{2}\sin 0) = \frac{\pi R^2}{4}$$

Пример 3: Найти $\int\limits_1^e \ln^2 xdx$.

Решение: Используем формулу интегрирования по частям $\int\limits_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int\limits_a^b VdU$

$$\int\limits_1^e \ln^2 xdx = \begin{vmatrix} u = \ln x; dV = dx \\ du = \frac{2}{x}\ln xdx; V = x \end{vmatrix} = x\ln^2 x\Big|_1^e - 2\int\limits_1^e \ln xdx = \begin{vmatrix} U = \ln x; dV = dx \\ dU = \frac{dx}{x}; V = x \end{vmatrix} = x\ln^2 x\Big|_1^e - 2(x\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e dx) =$$

$$= x\ln^2 x\Big|_1^e - 2x\ln x\Big|_1^e + 2x\Big|_1^e = e\ln^2 e - \ln^2 1 - 2e\ln e + 2\ln 1 + 2e - 2 = e - 2.$$

Задачи для решения в аудитории

Найти интегралы:

403. $\int\limits_1^2 (3x^2 + x)dx$

404. $\int\limits_2^3 (x-2)^2 dx$

405. $\int\limits_a^{2a} (x^2 + 2ax)dx$

406. $\int\limits_{-1}^1 (a^4 + ax^2)dx$

407. $\int\limits_1^2 2^x dx$

408. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

409. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

410. $\int_0^4 \frac{dx}{16+x^2}$

411. $\int_{-2}^{3} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}3x, x<1,\\ x+2, x\ge 1.\end{cases}$

412. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}\cos x, x\le \dfrac{\pi}{4},\\ \sin x, x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

413. $\int_5^6 |x-3|dx$

414. $\int_{-1}^{2} |x-3|dx$

415. $\int_{-1}^{5} |x-3|dx$

416. $\int_{-2}^{1} |x|(x-2)dx$

417. $\int_0^1 \frac{x^3dx}{1+x^4}$

418. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

419. $\int e^{x^2} xdx$

420. $\int_0^5 \sqrt{25-x^2}dx$

421. $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx$

422. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$

423. $\int_0^1 xe^x dx$

424. $\int_1^e \ln xdx$

425. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin xdx$

426. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

427. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$

Задачи для решения дома

Найти интегралы:

428. $\int_{-1}^{1} (x^4+a^2x)dx$

429. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx$

430. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin xdx$

431. $\int_1^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

432. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xdx$

433. $\int_{-2}^{3} |x-1|dx$

434. $\int_{-2}^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}2x, x<1,\\ x^2+2, x\ge 1.\end{cases}$

435. $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx$

436. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin xdx$

437. Решить уравнение $\int_1^2 (\frac{2y}{x^2} + xy^2)dx = 8.$

Занятие 20. Приложение определённого интеграла

Вопросы для повторения

1. Формула для вычисления площадей плоских фигур.
2. Вычисление длины дуги кривой.

Образцы решения типовых задач

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и осью Ox.

Решение: Парабола пересекает ось Ox в точках:

$$4x - x^2 = 0$$
$$x(4-x) = 0; x = 0, x = 4$$

Значит: $S = \int_0^4 (4x - x^2)dx = (2x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^4 = \frac{32}{3}$ $(ед^2)$.

Пример 2: Найти длину дуги кривой $y^2 = x^3$ от $x = 0$ до $x = 1$ $(y \geq 0)$.

Решение: $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, получим:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27} \cdot \left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right).$$

Задачи для решения в аудитории

Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

438. $y = \frac{4}{x}, y = -x + 5$

439. $y = 6x - 3x^2, y = 0$

440. $y = 4 - x^2, y = 0$

441. $y = x^2, y = 2 - x^2$

442. $2x - 3y + 2 = 0, x = 2, x = 5$

443. $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1, x = 2$

444. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

445. $y = -x^2, x + y + 2 = 0$

446. $x^2 - y^2 = 1, x = 2$

447. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1, x = 4, x = 5$

448. $y = \ln x, y = 0, x = 2, x = 8$

449. $y = x^2, y = \frac{1}{3}x^3$

450. $y = x, y = \frac{1}{4}x^3$

Найти длину дуги:

451. $y = x^{\frac{3}{2}}$ от $x = 0$ до $x = 4$

452. $y = x^2 - 1$, отсечённой осью Ox

453. $y=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$ от $x=0$ до $x=2$

454. $y=\ln\sin x$ от $x=\frac{\pi}{3}$ до $x=\frac{2\pi}{3}$

455. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$ от $x=1$ до $x=e$

Задачи для решения дома

Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

456. $y=x^2-6x+5, y=0$

457. $x^2=8y, y^2=x$

458. $y=9-x^2, y=0$

459. $x^2+y^2=4$

Найти длину дуги кривой:

460. $y=\ln\cos$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{6}$

461. $y=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$ от $x=0$ до $x=1$.

Занятие 21. Несобственные интегралы

Вопросы для повторения

1. Определение несобственного интеграла. Виды несобственных интегралов.
2. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.
3. Геометрический смысл несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования.
4. Сходящиеся и расходящиеся интегралы.

Образец решения типовых задач

Пример: Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$$

Решение: $$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}arctg\Big|_a^0=\lim_{a\to-\infty}\left(arctg\,0-arctga\right)=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

то есть, интеграл сходится.

Задачи для решения в аудитории

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

462. $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}$

463. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$

464. $\int_{0}^{+\infty}\cos xdx$

465. $\int_{1}^{+\infty}\frac{1+\ln x}{x}dx$

466. $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{4+x^2}$

467. $\int_{0}^{+\infty}\frac{arctgx}{1+x^2}dx$

468. $\int_{-\infty}^{+\infty}e^x dx$

469. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

470. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

Задачи для решения дома

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

471. $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$

472. $\int_{0}^{+\infty} \sin xdx$

473. $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

474. $\int_{0}^{+\infty} \frac{arctgx}{1+x^2}dx$

Глава III. Элементы теории функций нескольких независимых переменных

Занятие 22. Функция двух независимых переменных

Вопросы для повторения

1. Определение функции 2-х независимых переменных.
2. Область определения функции 2-х переменных. Геометрический смысл.
3. Частные производные функции 2-х переменных.
4. Частные производные 2 порядка функции 2-х переменных.
5. Полный дифференциал.

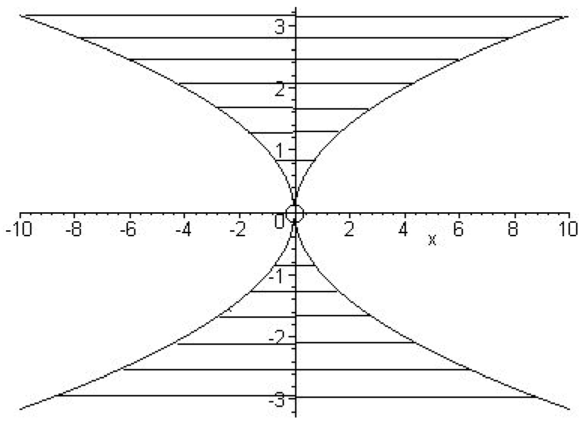
Образцы решения типовых задач

Пример 1: Найти и построить область определения функции $z = \arcsin\frac{x}{y^2}$

Решение: Функция определена при $\begin{cases} y \neq 0, \\ -1 \leq \frac{x}{y^2} \leq 1, \end{cases}$

$-1 \leq \frac{x}{y^2} \leq 1; -y^2 \leq x \leq y^2; y^2 = x; y^2 = -x$.

Область определения функции является часть плоскости, заключённая между двумя параболами, за исключением точки $O(0;0)$.



Пример 2: Найти частные производные первого и второго порядков, полный дифференциал функции $z = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$.

Решение:

$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = 2x - 3y - 1; \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = -3x - 8y + 2$;

$dz = (2x - 3y - 1)dx - (3x + 8y - 2)dy$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{x^2} = (2x - 3y - 1)'_x = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = (2x - 3y - 1)'_y = -3;$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{y^2} = (-3x - 8y + 2)'_y = -8; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = (-3x - 8y + 2)'_x = -3;$

$z''_{xy} = z''_{yx} = -3.$

Задачи для решения в аудитории

Найти области определения функций:

475. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

476. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

477. $z = \arcsin(x + y)$

478. $z = \frac{x^2 + y}{2x - y}$

479. $z = \ln(x^2 - y)$

480*. $z = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$

Найти частные производные и полный дифференциал функции:

481. $z = x^2 + 2y^2 - 3xy - 4x + 2y + 5$

482. $z = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y}$

483. $z = e^{xy(x^2 + y^2)}$

484. $z = \frac{x + 3y^3}{x - y}$

485. $z = x^4 y^3 + 3x \ln y + x^y$

486. $z = arctg\left(\frac{y}{1 + x^2}\right)$

487. Найти частные производные функции $y = arctg\,\frac{x}{y}$ в точке $(1;2)$.

488. Показать, что функция $z = y\ln(x^2 - y^2)$, удовлетворяет уравнению $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$

Найти частные производные второго порядка функций:

489. $z = y \ln x$ 490. $z = x^2 y$

491. $z = \ln(x^2 + y^2)$ 492. $z = \sin xy$

493. $z = x^y$ 494. $z = \sin x \sin y$

Задачи для решения дома

Найти области определения функций:

495. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ 496. $z = \ln(y - x)$

497. Найти значение функции $z = x^3 - 5xy + y^2$ в точке $P(3;-2)$.

Найти частные производные функций и полный дифференциал:

498. $z = x^5 - 3x^2 y^3 + 4xy + y^2$ 499. $y = \ln \frac{x}{y}$

500. $z = \frac{3x - 2y^2}{x + y}$ 501. $y = arctg \frac{x + y}{x - y}$

Найти частные производные второго порядка для функций:

502. $z = 3x^2 y - 3xy^2$ 503. $z = \cos xy$

504. $z = e^{xy}$ 505. $z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Занятие 23. Метод наименьших квадратов

Вопросы для повторения

1. Сущность метода наименьших квадратов.
2. Нормальная система метода наименьших квадратов.

Образец решения типовой задачи

Пример: Результаты измерения величин x и y даны в таблице:

x	2	4	6	8	10
y	5,5	8,5	13,6	17,3	20,1

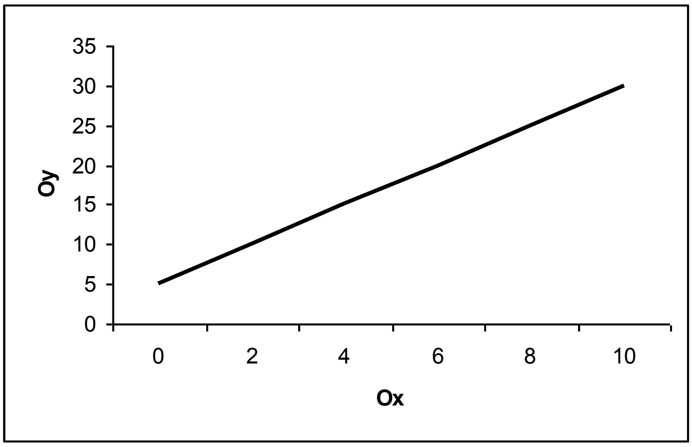
Полагая, что между x и y существует линейная зависимость $y = ax + b$, способом наименьших квадратов, определить коэффициенты a и b. Сделать чертёж.

Решение: n=5. Вспомогательная таблица:

	x	x^2	y	xy
	2	4	5,5	11
	4	16	8,5	34
	6	36	13,6	81,6
	8	64	17,3	138,4
	10	100	20,1	201
Σ	30	220	65	466

Нормальная система имеет вид: $\begin{cases} 220a + 30b = 466, \\ 30a + 5b = 65, \end{cases}$ $\begin{cases} 44a + 6b = 93{,}2, \\ 6a + b = 13, \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1{,}9, \\ b = 1{,}6, \end{cases}$

$y = 1{,}9x + 1{,}6$



Задачи для решения в аудитории

Методом наименьших квадратов найти функцию вида $y = ax + b$. Сделать чертёж.

506.

x	1	2	3	4	5
y	4,8	5,8	4,3	2,3	2,8

507.

x	-3	-2	-1	0	1
y	1,5	2,8	3,1	4	4,2

508.

x	1	3	5	7	9	11
y	2	2,5	2,7	3,2	4,2	4,8

509.

x	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12	14
y	10,5	9,8	8	7,5	5,6	6,4	4,7	3,5	3	2

Задачи для решения дома

Методом наименьших квадратов найти функцию вида $y = ax + b$. Построить в прямоугольной системе координат экспериментальные точки и график функции.

510.

x	1	2	3	4	5
y	3,2	4,2	2,7	0,7	1,2

511.

x	1	2	3	4	5
y	3,4	4,4	2,9	0,9	1,9

512.

x	-2	-1	0	1	2
y	3,6	4,6	3,1	1,1	1,6

513.

x	-2	-1	0	1	2
y	3,8	4,8	3,3	1,3	1,8

514.

x	2	4	6	8	10
y	4	5	3,5	1,5	2

515.

x	2	4	6	8	10
y	2,8	3,8	2,3	0,3	0,8

516.

x	1	3	5	7	9
y	4,4	5,4	3,9	1,9	2,4

517.

x	1	3	5	7	9
y	4,1	5,1	3,6	1,6	2,1

518.

x	-4	-2	0	2	4
y	4,6	5,6	4,1	2,1	2,6

519.

x	-4	-2	0	2	4
y	4,8	5,8	4,3	2,3	2,8

520.

x	-3	-1	0	1	3
y	3	2,5	2,8	2	3,2

521.

x	-3	-1	0	1	3
y	4,2	4,5	5,2	3,8	2,5

Глава IV. Дифференциальные уравнения

Занятие 24, 25. Дифференциальные уравнения первого порядка

Вопросы для повторения

1. Определение дифференциального уравнения первого порядка.
2. Общее решение и начальные условия. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.
3. Уравнения с разделяющими переменными.
4. Однородные уравнения первого порядка.
5. Линейные уравнения первого порядка.

6. Уравнение Бернулли.

Образцы решения типовых задач

Пример 1: Решить равнение: $y'\cos x=\dfrac{y}{\ln y}$. Начальные условия: $y(0)=1$.

Решение: $y'\cos x=\dfrac{y}{\ln y}$, $\dfrac{dy}{dx}\cdot\cos x=\dfrac{y}{\ln y}$.

Разделим переменные (умножим обе части уравнения на $\dfrac{\ln y dx}{y\cos x}$).

Получим $\dfrac{\ln y}{y}dy=\dfrac{dx}{\cos x}$

$$\int\frac{\ln y}{y}dy=\int\frac{dx}{\cos x}+C \qquad (1);$$

$$\int\frac{\ln y}{y}dy=\int\ln y d(\ln y)=\frac{\ln^2 y}{2}=\frac{1}{2}\ln^2 y;$$

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\left|\begin{matrix} tg\dfrac{x}{2}=t; x=2arctgt \\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}; dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{2dt}{1-t^2}=-2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|=\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+1}{tg\frac{x}{2}-1}\right|=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|;$$

Подставим вычисленные интегралы в уравнение (1):

$$\frac{1}{2}\ln^2 y=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C;\ x_0=0; y_0=1;$$

$$\frac{1}{2}\ln^2 1=\ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right|+C;\ C=0.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}\ln^2 y=\ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$.

Пример 2: Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

Решение: Правая часть уравнения $f(x;y)=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ обладает свойством $f(\lambda x,\lambda y)=\dfrac{2(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x)^2-(\lambda y)^2}=f(x,y)$. Поэтому заданное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Сделаем замену: $u=\dfrac{y}{x}, y=u\cdot x, y'=u'\cdot x+u$.

Получим: $u'x+u=\dfrac{2x\cdot ux}{x^2-u^2x^2}$.

$$u'x+u=\frac{2u}{1-u^2}; u'x=\frac{2u}{1-u^2}-u; u'x=\frac{2u-u+u^3}{1-u^2}; u'x=\frac{u+u^3}{1-u^2};$$

$\dfrac{du}{dx}x=\dfrac{u(1+u^2)}{1-u^2}$; – уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{\left(1-u^2\right)du}{u\left(1+u^2\right)}=\frac{dx}{x};\int\frac{\left(1-u^2\right)du}{u\left(1+u^2\right)}=\int\frac{dx}{x}+\ln C.$$

Вычислим интеграл:

$$\int\frac{\left(1-u^2\right)du}{u\left(1+u^2\right)}=\int\frac{\left(1+u^2\right)-2u^2}{u\left(1+u^2\right)}du=\int\frac{du}{u}-\int\frac{2u^2du}{u\left(1+u^2\right)}=\int\frac{du}{u}-\int\frac{2udu}{1+u^2}=\ln u-\ln\left(1+u^2\right).$$

Получим:

$$\ln u-\ln\left(1+u^2\right)=\ln x+\ln C;\ln\frac{u}{1+u^2}=\ln Cx;\frac{u}{1+u^2}=Cx;\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=Cx;\frac{xy}{x^2+y^2}=Cx;C=\frac{y}{x^2+y^2}$$

Ответ: $\frac{y}{x^2+y^2}=C$.

Пример 3: Найти частное решение уравнения $y'+\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3e^{x+1}y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Решение: Данное уравнение является уравнением Бернулли.

Сделаем замену: $y=uv, y'=u'v+uv'$.

$$u'v+uv'+\frac{2uv}{x+1}=(x+1)^3e^{x+1}u^2v^2;u'v+u\left(v'+\frac{2v}{x+1}\right)=(x+1)^3e^{x+1}u^2v^2.$$

Пусть

$$v'+\frac{2}{x+1}v=0,\frac{dv}{dx}+\frac{2}{x+1}v=0,\frac{dv}{v}=-\frac{2dx}{x+1},\int\frac{dv}{v}=-2\int\frac{dx}{x+1},\ln v=-2\ln(x+1),\ln v=\ln(x+1)^{-2},$$

$$v=\frac{1}{(x+1)^2};\ u'v=(x+1)^3e^{x+1}u^2v^2;$$

Подставим функцию $v=\frac{1}{(x+1)^2}$:

$$\frac{u'}{(x+1)^2}=(x+1)^3e^{x+1}u^2\frac{1}{(x+1)^4};\ u'=(x+1)e^{x+1}u^2;\ \frac{du}{dx}=(x+1)e^{x+1}u^2;\frac{du}{u^2}=(x+1)e^{x+1}dx;$$

$$\int\frac{du}{u^2}=\int(x+1)e^{x+1}dx+C.$$

Вычислим интеграл:

$$\int(x+1)e^{x+1}dx+C=\left|\begin{matrix}u=x+1;dv=e^{x+1}dx\\du=dx;v=e^{x+1}\end{matrix}\right|=(x+1)e^{x+1}-\int e^{x+1}dx=(x+1)e^{x+1}-e^{x+1}.$$

Получим $-\frac{1}{u}=(x+1)e^{x+1}-e^{x+1}+C$; $-\frac{1}{u}=e^{x+1}(x+1-1)+C;-\frac{1}{u}=xe^{x+1}+C;$

$$u=-\frac{1}{xe^{x+1}+C};y=uv;y=-\frac{1}{\left(xe^{x+1}+C\right)(x+1)^2};x_0=0;y_0=1;1=-\frac{1}{(0+C)\cdot 1};C=-1.$$

Частное решение: $y=-\frac{1}{\left(xe^{x+1}-1\right)(x+1)^2}$.

Ответ: $y=-\frac{1}{\left(xe^{x+1}-1\right)(x+1)^2}$.

Задачи для решения в аудитории

Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

522. $xy^2y' = 1$

523. $(x^2+1)y' = y^3$

524. $\sqrt{4-x^2}\,y' = y+2$

525. $\cos 5x = y'y^2$

526. $x^2(y^3+5)dx + (x^3+5)y^2dy = 0, y(0)=1$

527. $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0, y(\sqrt{3}) = 0$

528. $xydx + (1+y^2)\sqrt{1+x^2}\,dy = 0, y(\sqrt{8}) = 1$

529. $tgy \cdot dx - x\ln xdy = 0, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$

530. $y' = 2x^2+5x+12, y(1) = \frac{1}{6}$

531. $\sqrt{1-y^2}\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0, y(0) = 1$

532. $y'\cos x = y\sin x + \sin x, y(\pi) = -2$

533. $yy' = e^{x-y}$

534. $e^{-y}(1+y') = 1$

Решить однородные дифференциальные уравнения первого порядка:

535. $xyy' = x^2 + y^2$

536. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

537. $xy' + x \cdot tg\frac{y}{x} = y$

538. $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}, y(1) = \frac{\pi}{2}$

539. $(x-y)y' = 2x+y$

540. $xy'\ln\frac{y}{x} = x + y\ln\frac{y}{x}$

541. $xdy = \left(y + 2x \cdot ctg\frac{y}{x}\right)dx$

542. $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}$

543. $xdy = \left(y + 3x\sin\frac{y}{x}\right)dx$

544. $y'x\ln\frac{x}{y} - y = 0, y(2) = 2$

545. $x^2y' = y^2 + xy + x^2, y(1) = 0$

Решить уравнения Бернулли:

546. $y' + 2xy = 3x^2e^{-x^2}, y(0) = 0$

547. $y'x + y = -xy^2$

548. $y' + y = xy^3$

549. $xy' - y = y^2 \cdot \sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

550. $xy' + y = y^2\ln x$

551. $xy' + 2y = x^5y^2$

552. $xy' - y = x^2\cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

553. $y'\cos^2 x + y = tgx, y(0) = -1$

554. $(1+x^2)y' + y = y^2 arctgx, y(0) = 1$

555. $\sqrt{1-x^2}\,y' + y = y^2\arcsin x, y(0) = -1$

556. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 4\frac{arctgx}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{y}$

557. $y' + \frac{1}{\sin^2 x}y = y^2\frac{ctgx}{\sin^2 x}$

558. $y' + 3y \cdot tg3x = \sin 6x, y(0) = \frac{1}{3}$

Задачи для решения дома

Решить уравнения:

559. $y' = 5x^4 - 3x^2 + 2x - 1$

560. $y' = e^x$, $y(1) = e$

561. $yy' = x^2$

562. $\sin x = yy'$

563. $y' + y^2 = 1$

564. $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0, y(1) = 2$

565. $xy' + y\ln\frac{y}{x} = 0$

566. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$

567. $(x-2y)y' = x + y$

568. $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0,\ y(1) = 0$

569. $y' - \frac{y}{x} = x,\ y(2) = 6$

570. $y' + \frac{y}{x} = xy^2,\ y(1) = 1$

571. $(1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$

572. $y' + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

Занятие 26. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Вопросы для повторения

1. Определение неоднородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.
2. Однородное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка.
3. Теорема об общем решении однородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.
4. Теорема об общем решении неоднородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.
5. Виды частных и общих решений однородных дифференциальных уравнений в зависимости от числа корней характеристического уравнения.
6. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с видом правой части $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ ($a_2 \neq 0$).
7. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с видом правой части $f(x) = ae^{bx}$ ($a \neq 0$).
8. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с видом правой части $f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$ ($a, b \neq 0$).

Образцы решения типовых задач

Пример 1. Найти решения дифференциальных уравнений 2-го порядка:

а) $y'' - 6y' + 8y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$;

б) $y'' - 8y' + 16y = 0$;

в) $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Решение: а) Характеристическое уравнение: $k^2 - 6k + 8 = 0$

$k_1 = 2;\ k_2 = 4 \Rightarrow y_1 = e^{2x};\ y_2 = e^{4x}$

Общее решение: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$, C_1, C_2 – произвольные постоянные

$y'(x) = 2C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{4x}$

$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0,\ C_1 + C_2 = 1$

$y'(0) = 2 \Rightarrow 2 = 2C_1 e^0 + 4C_2 e^0,\ 2C_1 + 4C_2 = 2$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 + 2C_2 = 1; \end{cases} \begin{cases} C_1 = 1 - C_2, \\ 1 - C_2 + 2C_2 = 1; \end{cases} \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Частное решение: $y = e^{2x}$

б) $k^2 - 6k + 8 = 0$, $(k - 4)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 4$
Общее решение: $y = C_1 e^{4x} + C_2 xe^{4x}$, $y = (C_1 + C_2 x) e^{4x}$

в) $k^2 - 4k + 13 = 0$
$D_1 = 4 - 13 = -9$, $k_1 = 2 + 3i$; $k_2 = 2 - 3i$
Общее решение: $y = e^{\alpha x} (C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$,
$\alpha = 2$, $\beta = 3$, $y = e^{2x} (C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$

Пример 2. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами $y'' - y' - 6y = 2e^{3x}$
Решение: $y'' - y' - 6y = 0$, $k^2 - k - 6 = 0$, $k_1 = -2$; $k_2 = 3$
$Y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения.
Частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде:
$\bar{y}(x) = \mathrm{A}xe^{3x}$, $\bar{y}'(x) = \mathrm{A}e^{3x} + 3\mathrm{A}xe^{3x}$, $\bar{y}''(x) = 3\mathrm{A}e^{3x} + 3\mathrm{A}e^{3x} + 9\mathrm{A}xe^{3x} = 6\mathrm{A}e^{3x} + {}$ $+9\mathrm{A}xe^{3x}$,
Подставим $\bar{y}(x)$, $\bar{y}'(x)$ и $\bar{y}''(x)$ в уравнение
$6\mathrm{A}e^{3x} + 9\mathrm{A}xe^{3x} - \mathrm{A}e^{3x} - 3\mathrm{A}xe^{3x} - 6\mathrm{A}xe^{3x} = 2e^{3x}$
$5\mathrm{A}e^{3x} = 2e^{3x} \Rightarrow 5\mathrm{A} = 2$; $\mathrm{A} = \frac{2}{5}$
Общее решение: $y = Y(x) + \bar{y}(x)$; $\bar{y}(x) = \frac{2}{5} xe^{3x}$
$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + \frac{2}{5} xe^{3x}$

Задачи для решения в аудитории

Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами:
573. $y'' - 7y' + 10y = 0$
574. $y'' - 6y' + 9y = 0$
575. $y'' + 2y' + 10y = 0$
576. $y'' + 8y' = 0$

Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:
577. $y'' + 8y' + 7y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$
578. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$
579. $y'' + y = 0$, $y(\pi) = -1$, $y'(\pi) = -4$

Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения:
580. $y'' - 2y' = 3x^2 + 1$
581. $y'' - 6y' + 8y = 3e^{4x}$
582. $y'' - 2y' - 3y = 8e^{3x}$
583. $y'' - 2y' + 2y = x^2$
584. $y'' + y = 3\sin x$
585. $y'' + y' + y = 3\cos 2x$

Найти частное решение неоднородного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

586. $2y'' - y' = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

587. $y'' - 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1$, $y(0) = \frac{41}{64}$, $y'(0) = \frac{29}{16}$

588. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

589. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

Задачи для решения дома

Решить уравнения:

590. $y'' + 2y' - 3y = 0$

591. $y'' + 2y' + 5y = 0$,

592. $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

593. $y'' + y' = x^2 + 2x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$

594. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$

595. $y'' + 4y = 3\sin 2x$,

596. $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x$

Занятие 27. Контрольная работа № 2

Темы «Элементы интегрального исчисления функции одной переменной», «Элементы теории функций нескольких переменных» и «Дифференциальные уравнения»

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Дополнительные задания к практическим занятиям

Задачи к занятию № 23

1. Исследование школьников показало, что скорость чтения человека зависит от времени, проведенного за чтением книг. Результаты исследования приведены в таблице:

Время (ч/неделя)	4	5	6	7	8
Скорость чтения (слов/мин)	120	135	158	174	186

Полагая, что зависимость скорости чтения (x) от времени (y) линейная: $y=ax+b$, найти коэффициенты a,b.

2. Исследование успеваемости студентов показало, что успеваемость студентов зависит от числа посещенных занятий. Результаты в таблице:

Число посещенных занятий	1	2	3	4	5	6
Доля успевающих студентов в процентах в общей массе	35	41	49	58	69	80

Полагая, что указанная зависимость имеет линейный вид: $y=ax+b$, найти коэффициенты a,b.

3. Установлено, что размер стипендии зависит от размера минимальной заработной платы. Динамика размера стипендии представлена в таблице:

Прирост мин. размера опл. труда	40	50	60	70
Прирост стипендии	15	24	30	39

Предполагая, что указанная зависимость – линейный: $y=ax+b$, найти коэффициенты a,b.

Задачи к занятию № 19

4. Пусть $f(x) = -x^2 + 6x$ – количество людей (в условных единицах), выезжающих из страны за время x (в годах), отсчитываемое от начала выезда. Подсчитать какая масса людей выедет за границу за 3 года.
5. Пусть $f(x)=\begin{cases} -x^2+6x, 0<x\le 2, \\ -x^2+5x-1, 2<x\le 4, \\ -x^2+7x-6, 4<x\le 6 \end{cases}$ – функция, которая характеризует изменение объема законспектированных студентами лекций в зависимости от времени. В данном случае учебный день составляет 6 часов. Определить:

а) объем лекций, законспектированных за весь день;

б) объем лекций, законспектированных за первые 3 часа занятий.

Объем лекций считать в условных единицах.

6. Пусть $f(x)=3x^2+4$ – количество иностранных граждан (в условных единицах), приезжающих в Россию за время x, отсчитываемое от начала въезда. Подсчитать какая масса иностранцев посетит Россию за 4 месяца.

Задачи к занятию № 24, 25

7. Пусть в начальный момент времени t_0 численность населения поселка А составляла 3500 человек. Коэффициент рождаемости $k_1 = 0{,}18$, смертности $k_2 = 0{,}194$. Найти закон изменения численности населения поселка А с течением времени.
8. Пусть в условиях предыдущей задачи $k_1 = 0{,}115$, $k_1 = 0{,}095$ при численности населения в начальный момент времени t_0: 1200 человек. Найти закон изменения численности населения поселка с течением времени.
9. Известно уравнение, связывающее прирост населения с механическим и естественным движением: $y' = R(x) - P(x) + Q(x),$, где $R(x)$– приезжающие, $P(x)$ – выбывающие, $Q(x)$ – естественный прирост населения. Пусть $R(x) = -x^2 + 7x + 1$, $P(x) = -x^2 + 3$, $Q(x) = 3000e^{0{,}07x}$. Найти закон изменения численности населения.

Справочные материалы по элементарной математике

1. Формулы сокращенного умножения:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

2. Формулы корней квадратного уравнения:

$ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0, b^2 - 4ac \geq 0$

Теорема Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

3. Некоторые свойства логарифмов:

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$

1) $a^{\log_a b} = b$; 2) $\log_a 1 = 0$; 3) $\log_a a = 1$; 4) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;

5) $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$; 6) $\log_a x^k = k\log_a x$; 7) $\log_{a^k} x = \dfrac{1}{k}\log_a x\ (x > 0, y > 0)$

8) $\log_{10} b = \lg b$; 9) $\log_e b = \ln b$.

4. Значение тригонометрических функций некоторых углов:

α	**0°** **0**	**30°** $\frac{\pi}{6}$	**45°** $\frac{\pi}{4}$	**60°** $\frac{\pi}{3}$	**90°** $\frac{\pi}{2}$	**120°** $\frac{2\pi}{3}$	**180°** π	**270°** $\frac{3\pi}{2}$	**360°** 2π
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1
tgα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
ctgα	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	∞	0	∞

5. Некоторые тригонометрические формулы:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

2) $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

3) $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

4) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$;

5) $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

6) $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

7) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

8) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

9) $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$;

10) $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$;

11) $\sin\alpha = \dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$;

12) $\cos\alpha = \dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$;

13) $tg\alpha = \dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$;

14) $ctg\alpha = \dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}$;

15) $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$

16) $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$

17) $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баврин И.И. Курс высшей математики. – М.: Просвещение, 1992. – 416 с.
2. Маркович Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. – М.: Высшая школа, 1982. – 480 с.
3. Тарасов Н.П. Курс высшей математики для техникумов. – М.: Наука, 1971. – 448 с.
4. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2001. – 304 с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. – М.: Высшая школа, 1980. – 320 с.
6. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. – М.: Высшая школа, 1980. – 350 с.
7. Клюева Л.А., Тальский Д.А. Практикум по математике для заочных техникумов. – М.: Высшая школа, 1970. – 446 с.
8. Сборник задач по высшей математике. /Под ред. Э.С. Марковича. – М.: Высшая школа, 1967. – 372 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Елена Львовна Потеряйко

Математика

Методические указания и материалы
для проведения практических занятий
по математике для студентов специальностей
020300 – Социология и 350500 – Социальная работа

Часть 2

Редактор	Л.Е. Глазкова
Компьютерный набор	Бородина Т.А.

Подписано к печати		Бумага тип № 1
Формат 60*84 1/16	Усл. печ. л. 3,25	Уч. изд. л. 3,25
Заказ	Тираж 100	Цена свободная

Издательство Курганского государственного университета.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет, ризограф.