

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ**

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

по курсу математики для студентов специальностей
**050501, 140211, 150202, 151001, 151002, 190201, 190202,
190601, 190603, 190702, 200503, 220301, 260601, 280101**

Курган 2005

Кафедра прикладной математики и компьютерного моделирования

Курс: «Математика»

Составила: доцент кафедры ПМиКМ Агафонова В.Н.

Контрольные задания составлены на основе учебных программ по курсу «Математика».

Утверждены на заседании кафедры « 17 » ноября 2004 г.

Рекомендованы методическим советом университета

« ____ » _____ 2005 г.

Введение

Данные контрольные задания составлены в соответствии с программой по курсу «Математика» для студентов дневной формы обучения специальностей 050501, 140211, 150202, 151001, 151002, 190201, 190202, 190601, 190603, 190702, 200503, 220301, 260601, 280101.

В контрольные задания включены типовые задачи из раздела «Элементы линейной алгебры». Для их выполнения нужно знать основные понятия и формулы указанного раздела.

Контрольные задания содержат 30 вариантов по 5 задач в каждом. Составленные задачи охватывают все основные вопросы изучаемого курса.

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & x \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} < 0.$$

2. Исследовать систему уравнений. Если она совместна, решить ее.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным способом.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 6; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 13; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 10; \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 11; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 6; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

5. Даны системы линейных преобразований:

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + x_2; \\ x_2' = x_1 - 2x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1'' = x_1' + 2x_2'; \\ x_2'' = 3x_1' - x_2'. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные:

а) x_1'', x_2'' через x_1, x_2 ;б) $x_1; x_2$ через x_1'', x_2'' .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 2 & x & x \\ 2 & -1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Исследовать систему уравнений. Если она совместна, решить ее.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 4; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1; \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 0; \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

5. Даны линейные системы:

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3; \\ x_2' = 6x_1 + 7x_2 + x_3; \\ x_3' = 9x_1 + x_2 + x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1'' = x_1' + 3x_2' - 2x_3'; \\ x_2'' = 4x_1' + x_2' + 2x_3'; \\ x_3'' = 3x_1' - 4x_2' + 5x_3'. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} \cos 8x - \sin 5x \\ \sin 8x - \cos 5x \end{vmatrix} \geq 0.$$

2. Исследовать систему уравнений. Если она совместна, решить ее.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 8; \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9; \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5; \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Даны линейные системы:

$$\begin{cases} x'_1 = 4x_1 + 3x_2 - x_3; \\ x'_2 = -2x_1 + x_2 + 3x_3; \\ x'_3 = x_1 + x_2 - x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = x'_1 - 2x'_2 + x'_3; \\ x''_2 = 3x'_1 + x'_2 - 2x'_3; \\ x''_3 = 2x'_1 - x'_2. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные x''_1, x''_2, x''_3 через x_1, x_2, x_3 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 4

1. Вычислить определитель, не раскрывая его:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Исследовать систему уравнений. Если она совместна, решить ее.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 2. \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным способом.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1; \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 5; \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 9; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 10. \end{cases}$$

5. Даны системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x'_1 = 4x_1 + x_2 + x_3; \\ x'_2 = x_1 - 2x_2 - 2x_3; \\ x'_3 = x_1 + 3x_2 - x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = x'_1 + 2x'_2 + x'_3; \\ x''_2 = 3x'_1 - x'_2 - 2x'_3; \\ x''_3 = 2x'_1 + 3x'_2 - x'_3. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные x''_1, x''_2, x''_3 через x_1, x_2, x_3 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 5

1. Решить неравенство

$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 8.$$

2. Исследовать систему. Если она совместна, решить ее.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где $X = (x_1 \ x_2 \ x_3)$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = (5 \ 4 \ 4).$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 8; \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9; \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5; \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Даны системы линейных уравнений;

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_2 + x_3; \\ x'_2 = -2x_1 + 3x_2 + 2x_3; \\ x'_3 = 4x_1 - x_2 + 5x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = -3x'_1 + x'_3; \\ x''_2 = 2x'_2 + x'_3; \\ x''_3 = -x'_2 + 3x'_3. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные x''_1, x''_2, x''_3 через x_1, x_2, x_3 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 6

1. Вычислить $\varphi(A)$ если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, а $\varphi(x) = x^2 - x - 3$.

2. Решить систему уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$$

5. Даны линейные системы:

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 - 3x_3; \\ x'_2 = x_1 - x_2 + 2x_3; \\ x'_3 = 3x_1 + 2x_2 - x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = 3x'_1 - 2x'_2 + x'_3; \\ x''_2 = x'_1 + x'_2 - x'_3; \\ x''_3 = 2x'_1 - 3x'_2 + 2x'_3. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные x''_1, x''_2, x''_3 через переменные x_1, x_2, x_3 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 7

1. Проверить, что определитель

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

делится на $(x+y)$ и $(x^2 - xy + y^2)$.

2. Исследовать систему уравнений. Если она совместна, решить ее по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4; \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16. \end{cases}$$

5. Даны линейные системы:

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 - x_2 + 5x_3; \\ x'_2 = x_1 + 2x_2 + 4x_3; \\ x'_3 = 3x_1 + 2x_2 - x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = 4x'_1 + 3x'_2 + x'_3; \\ x''_2 = 3x'_1 + x'_2 + 2x'_3; \\ x''_3 = x'_1 - 2x'_2 + x'_3. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные

x''_1, x''_2, x''_3 через x_1, x_2, x_3 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 8

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Исследовать систему уравнений. Если она совместна, решить ее.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4; \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $Y \cdot A = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, Y = (y_1 \ y_2 \ y_3), B = (4 \ 0 \ 3).$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5; \\ x_1 - 3x_3 + 3x_4 = -4; \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12; \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$$

5. Даны системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x'_1 = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3; \\ x'_2 = 6x_1 + 9x_2 + x_3; \\ x'_3 = 2x_1 + x_2 + x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = -x'_1 + 3x'_2 - 2x'_3; \\ x''_2 = -4x'_1 + 3x'_2 + 2x'_3; \\ x''_3 = 3x'_1 - 3x'_2 + 5x'_3. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменных x''_1, x''_2, x''_3 через x_1, x_2, x_3 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 9

1. Вычислить $\varphi(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, а $\varphi(x) = 2x^3 + 4x - 5$.

2. Исследовать систему уравнений. Если она совместна, решить ее по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11; \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40; \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$$

5. Даны линейные системы:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - 3x_2 + 4x_3; \\ x'_2 = 2x_1 + x_2 - 5x_3; \\ x'_3 = 3x_1 + 5x_2 + x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = 4x'_1 + 5x'_2 - 3x'_3; \\ x''_2 = x'_1 - x'_2 - x'_3; \\ x''_3 = 7x'_1 + 4x'_3. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные x''_1, x''_2, x''_3 через x_1, x_2, x_3 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 10

1. Доказать справедливость равенства

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin \alpha & \sin^2 \alpha \\ 1 & \sin \beta & \sin^2 \beta \\ 1 & \sin \gamma & \sin^2 \gamma \end{vmatrix} = (\sin \alpha - \sin \beta) \cdot (\sin \beta - \sin \gamma) \cdot (\sin \gamma - \sin \alpha).$$

2. Исследовать систему уравнений. Если она совместна, решить ее по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где

$$X = (x_1 \quad x_2 \quad x_3), A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 8; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3; \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3. \end{cases}$$

5. Даны линейные системы:

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 + 5x_3; \\ x'_2 = x_1 + x_2 + x_3; \\ x'_3 = 3x_2 - 6x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = 2x'_1 - x'_2 - 5x'_3; \\ x''_2 = 7x'_1 + x'_2 + 4x'_3; \\ x''_3 = 6x'_1 + 4x'_2 - x'_3. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные x''_1, x''_2, x''_3 через x_1, x_2, x_3 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 11

1. Вычислить $\varphi(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, а $\varphi(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$.

2. Исследовать систему уравнений. Если она совместна, решить ее по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

5. Даны линейные системы:

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 + x_2 + x_3; \\ x'_2 = 2x_1 - x_2 + 2x_3; \\ x'_3 = x_1 + 2x_2 - x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = 4x'_1 + 3x'_2 + x'_3; \\ x''_2 = 2x'_1 - x'_2 + 3x'_3; \\ x''_3 = x'_1 + 2x'_2 - x'_3. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные x''_1, x''_2, x''_3 через x_1, x_2, x_3 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 12

1. Вычислить определитель, приводя его к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Исследовать систему уравнений. Если она совместна, решить ее.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение, $A \cdot Y = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -3 \\ 5 & 26 & -4 \\ -2 & -14 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2; \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2. \end{cases}$$

5. Даны линейные системы преобразования: $\begin{cases} x'_1 = 5x_1 + 4x_2; \\ x'_2 = x_1 - 7x_2; \end{cases}$

$\begin{cases} x''_1 = 3x'_1 - x'_2; \\ x''_2 = 2x'_1 + 3x'_2. \end{cases}$ Средствами матричного исчисления выразить пере-

менные: а) x''_1, x''_2 через x_1, x_2 ; б) x'_1, x'_2 через x''_1, x''_2 . Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 13

1. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Исследовать систему уравнений. Если она совместна, решить ее по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7. \end{cases}$$

5. Даны линейные преобразования:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 + 2x_3; \\ x'_2 = 2x_1 - x_3; \\ x'_3 = x_1 - 3x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = 2x'_1 + 3x'_2 + x'_3; \\ x''_2 = x'_1 - 2x'_2; \\ x''_3 = x'_1 - x'_2 + 2x'_3. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные x''_1, x''_2, x''_3 через x_1, x_2, x_3 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 14

1. Найти $\varphi(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, а $\varphi(x) = x^2 + 2x - 1$.

2. Исследовать систему уравнений. Если она совместна, решить ее.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 + x_3 - 4x_4 = -5; \\ x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3; \\ x_1 + x_3 + x_4 = 3; \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Даны линейные преобразования:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 + x_3; \\ x'_2 = 2x_1 - x_2 + 2x_3; \\ x'_3 = -x_1 + 3x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = 2x'_1 + 3x'_2 - x'_3; \\ x''_2 = x'_1 + x'_2 - 3x'_3; \\ x''_3 = 3x'_1 - x'_2 + 4x'_3. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные x''_1, x''_2, x''_3 через x_1, x_2, x_3 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 15

1. Найти значение матричного многочлена $f(A) = A^2 + 2A + E$

при $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, если E - единичная матрица третьего порядка.

2. Решить систему уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 5; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 8; \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 13. \end{cases}$$

5. Даны линейные преобразования:

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2; \\ x_2' = x_1 + 2x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1'' = x_1' + 4x_2'; \\ x_2'' = 3x_1' + x_2'. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные:

а) x_1'', x_2'' через x_1' и x_2' ;

б) x_1 и x_2 через x_1', x_2' .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 16

1. Вычислить ранг матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Исследовать систему уравнений. Если она совместна, решить ее по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 6; \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12; \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$$

5. Даны линейные преобразования:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 3x_2; \\ x_2' = 2x_1 - x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1'' = 5x_1' - x_2'; \\ x_2'' = 3x_1' + 2x_2'. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные:

а) x_1'', x_2'' через x_1' и x_2' ;

б) x_1 , x_2 через x_1', x_2' .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 17

1. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10; \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 6 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

5. Даны линейные системы:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 3x_2; \\ x'_2 = x_1 + 4x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = x'_1 + 2x'_2; \\ x''_2 = 3x'_1 - x'_2. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные:

а) x''_1 и x''_2 через x_1 и x_2 ;

б) x'_1 и x'_2 через x''_1 и x''_2 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 18

1. Найти значение многочлена $f(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$,

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5.$$

2. Исследовать систему уравнений. Если она совместна, решить ее.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 3; \\ 5x_1 - 8x_2 + 6x_3 = 5. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 = -3; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0. \end{cases}$$

5. Даны линейные преобразования:

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 - x_2 + x_3; \\ x'_2 = x_1 + 4x_2 - x_3; \\ x'_3 = 2x_1 - x_2 + 2x_3; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x''_1 = 2x'_1 + 4x'_2 + x'_3; \\ x''_2 = x'_1 - x'_2 + 2x'_3; \\ x''_3 = 2x'_1 + 3x'_2 - x'_3. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные x''_1, x''_2, x''_3 через x_1, x_2, x_3 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 19

1. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти ранг полученной матрицы.

2. Решить систему уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -2; \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$$

5. Даны линейные преобразования:

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + 3x_2 - x_3; \\ x'_2 = x_1 - x_2 + 2x_3; \\ x'_3 = x_1 + 3x_2 - x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = x'_1 - 3x'_2 + x'_3; \\ x''_2 = 3x'_1 - 2x'_2 + x'_3; \\ x''_3 = x'_1 + 2x'_2 - 3x'_3. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные x''_1, x''_2, x''_3 через x_1, x_2, x_3 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 20

1. Вычислить $\varphi(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, а $\varphi(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

2. Исследовать систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2; \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным способом.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 7; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7; \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 = -1; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 - 3x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Даны линейные преобразования:

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 + 2x_2 + x_3; \\ x'_2 = x_1 - x_2 + 2x_3; \\ x'_3 = 3x_1 + x_2 + x_3; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x''_1 = 2x'_1 + x'_2 - x'_3; \\ x''_2 = x'_1 - x'_2 + 3x'_3; \\ x''_3 = 2x'_2 + x'_2 - x'_3. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные x''_1, x''_2, x''_3 через x_1, x_2, x_3 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 21

1. Решить неравенство

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} \geq 0.$$

2. Исследовать систему уравнений. Если она совместна, решить ее по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 7 = 0. \end{cases}$$

5. Даны линейные системы:

$$\begin{cases} x'_1 = 4x_1 + x_2 + x_3; \\ x'_2 = x_1 - 2x_2 - 2x_3; \\ x'_3 = 2x_1 - 2x_2 - 2x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = x'_1 + 2x'_2 + 3x'_3; \\ x''_2 = 3x'_1 - x'_2 + x'_3; \\ x''_3 = 2x'_1 - x'_2 + 2x'_3. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные x''_1, x''_2, x''_3 через x_1, x_2, x_3 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 22

1. Решить неравенство

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x+1} & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} < 0.$$

2. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4; \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $Y \cdot A = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (2 \quad 4 \quad 5).$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

5. Даны линейные преобразования:

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2; \\ x'_2 = 3x_1 - 2x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = x'_1 + 5x'_2; \\ x''_2 = 3x'_1 - 2x'_2. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные:

а) x''_1, x''_2 через x_1 и x_2 ;

б) x'_1 и x'_2 через x''_1 и x''_2 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 23

1. Найти определитель произведения матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ на

транспонированную A^T .

2. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3; \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3; \\ 5x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ 6x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

5. Даны линейные преобразования:

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2; \\ x'_2 = 3x_1 - x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = x'_1 + 4x'_2; \\ x''_2 = 3x'_1 - x'_2. \end{cases}$$

С помощью матричного исчисления выразить переменные:

а) x''_1 и x''_2 через x_1, x_2 ;

б) x'_1, x'_2 через x''_1, x''_2 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 24

1. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 2; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3; \\ 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 5x_4 - 11x_5 = 3. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

5. Даны линейные преобразования:

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 - x_2; \\ x'_2 = 2x_1 - x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = 5x'_1 - 2x'_2; \\ x''_2 = x'_1 + 3x'_2. \end{cases}$$

С помощью матричного исчисления выразить переменные:

а) x''_1 и x''_2 через x_1, x_2 ;

б) x_1, x_2 через x'_1, x'_2 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 25

1. Вычислить определитель произведения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ на транспонированную } A^T.$$

2. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3; \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1; \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9; \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = 0. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $Y \cdot A = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 7; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 = -3; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Даны линейные преобразования:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2; \\ x'_2 = 2x_1 + 3x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = 4x'_1 - x'_2; \\ x''_2 = x'_1 + 3x'_2. \end{cases}$$

С помощью матричного исчисления выразить переменные:

а) x''_1, x''_2 через x_1, x_2 ;

б) x_1, x_2 через x'_1, x'_2 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 26

1. Решить неравенство

$$\left| \begin{array}{cc} x & 2x+1 \\ \frac{1+x}{-x} & \frac{1+x}{x} \\ \frac{1}{1+x} & \frac{1}{1+x} \end{array} \right| < 0.$$

2. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5; \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 + 3 = 0; \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$$

5. Даны преобразования: $X = A \cdot Y$ и $Z = B \cdot Y$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Выразить переменные z_1, z_2, z_3 через x_1, x_2, x_3 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 27

1. Вычислить $\varphi(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi(x) = \frac{x+2}{x-2}$.

2. Исследовать систему уравнений. Если она совместна, решить ее по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2x + y = 5; \\ x + 3z = 16; \\ 5y - z = 10. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3; \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -2; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5. \end{cases}$$

5. Даны матричные уравнения: $X = A \cdot Y$, $Z = B \cdot Y$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Выразить переменные z_1, z_2, z_3 через x_1, x_2, x_3 .
Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 28

1. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

2. Найти все решения системы.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным способом.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16; \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases}$$

4. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$$

5. Даны матричные уравнения: $Y = A \cdot X$, $Z = B \cdot Y$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Выразить переменные z_1, z_2, z_3 через x_1, x_2, x_3 .
Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 29

1. Вычислить $\varphi(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi(x) = x^2 - 2x + 3$.

2. Решить систему уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8; \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5; \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$$

3. Решить матричное уравнение $Y \cdot A = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 = -1; \\ 3x_1 - 3x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$$

5. Даны линейные преобразования:

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + 3x_2; \\ x'_2 = x_1 - x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = x'_1 - 2x'_2; \\ x''_2 = 3x'_1 + x'_2. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные:

а) x''_1, x''_2 через x_1 и x_2 ;

б) x_1, x_2 через x'_1 и x'_2 .

Написать формулы линейных преобразований.

Вариант 30

1. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -23 & 4 \\ 3 & 21 & 2 \\ 5 & -27 & 10 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -9; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным способом.

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6; \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5; \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

5. Даны линейные преобразования:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - 2x_2 - x_3; \\ x'_2 = 2x_1 - x_2 + x_3; \\ x'_3 = -x_1 + 2x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = 2x'_2 - x'_3; \\ x''_2 = x'_1 - 3x'_2 + x'_3; \\ x''_3 = x'_2 + 3x'_3. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления выразить переменные

x''_1, x''_2, x''_3 через x_1, x_2, x_3 .

Написать формулы линейных преобразований.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Что называется матрицей?
2. Какая матрица называется диагональной, скалярной, единичной?
3. Какие матрицы называются квадратными?
4. Как производится сложение, вычитание матриц, умножение матрицы на число?
5. Как производится умножение матриц и как определяется размерность матрицы-произведения?
6. Какие законы имеют место относительно действий сложения, умножения матриц?
7. Что называется определителями 2-го, 3-го порядков?
8. При каких преобразованиях не меняется величина определителя?
9. В каких случаях определитель равен нулю?
10. В каких случаях определитель меняет свой знак?
11. Что называется минором и алгебраическим дополнением и какая связь между ними?
12. Сформулируете свойство, с помощью которого можно понизить порядок определителя?
13. Чему равна сумма произведений элементов какого-либо столбца на алгебраические дополнения элементов другого столбца?
14. Что называется обратной матрицей?
15. Какие матрицы называются вырожденными? невырожденными?
16. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы.
17. Что такое присоединенная матрица?
18. Как находится обратная матрица?
19. Какие системы можно записать в матричной форме?
20. Что называется рангом матрицы?
21. Какие преобразования можно производить над матрицей, не меняющие ее ранга?
22. Сформулируйте формулу Кронекера-Капелли.
23. В каких случаях система линейных уравнений имеет единственное решение? Множество решений?
24. Сформулируйте правило Крамера.
25. При каком условии однородная система имеет ненулевые решения?
26. В чем сущность метода Гаусса? Какие системы можно решать этим методом?
27. Как производится исследование системы при решении ее методом Гаусса?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солодовников А.С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование. М.: Просвещение, 1966.
2. Ромакин М.И. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. М.: Высшая школа, 1963.
3. Проскураков М.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1967.
4. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Изд-во ГИТЛ, 1954.
5. Данко П.К., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I. М.: Высшая школа, 1980.
6. Рублев А.Н. Линейная алгебра. М.: Высшая школа, 1968.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.	2
2. Варианты контрольных заданий.	4
3. Контрольные вопросы по теории.	34
4. Список литературы.	35
5. Содержание.	35

Агафонова Валентина Николаевна

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

по курсу математики для студентов специальностей
**050501, 140211, 150202, 151001, 151002, 190201, 190202,
190601, 190603, 190702, 200503, 220301, 260601, 280101**

Редактор Кокина Н.М.

Компьютерный набор: Архипова В.А.

Подписано в печать	Формат 60x 84/16	Бумага тип. № 1
Печать трафаретная	Усл. печ. л. 2,25	Уч. - изд. л. 2,25
Заказ	Тираж 200	Цена свободная

Редакционно-издательский центр КГУ,
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25
Курганский государственный университет