МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра алгебры и геометрии

МАТЕМАТИКА

Методические указания для практических занятий по курсу «Математика» для студентов факультета психологии, валеологии и спорта специальностей «Физическая культура и спорт», «Олигофренопедагогика» и «Логопедия» (031700, 031800, 022300, 033100)

Курган 2004

Кафедра: «Алгебры и геометрии»

Дисциплина: «Математика»

Составитель: доцент Чернышова А.В.

Утверждены на заседании кафедры «17» мая 2004 г.

Рекомендованы методическим
советом университета «___» ___________ 2004 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания включают в себя задачи по основным разделам высшей математики: элементам теории множеств, аналитической геометрии, линейной алгебры и линейного программирования, дифференциального и интегрального исчисления функций, математической логики, теории вероятностей и математической статистики. Материал разбит на соответствующие темы и содержит:

1) вопросы по теории (для самоконтроля);
2) задачи для аудиторного и самостоятельного решения;
3) задания для контроля;
4) приложения.

Практические занятия – наиболее активный вид учебных занятий в вузе. Он предполагает самостоятельную работу над лекциями и учебными пособиями. При подготовке к практическим занятиям необходимо повторить теорию (по лекциям или учебным пособиям) и решить задачи, предложенные преподавателем.

В течение всего курса студент должен выполнить 1 – 2 контрольные работы, на каждом занятии преподаватель осуществляет контроль знаний студентов устным опросом или с помощью небольших проверочных работ, позволяющих оценить степень усвоения материала. При подготовке к занятиям студент может ознакомиться со справочным материалом, рассмотренным в приложении.

Настоящее пособие может быть использовано для проведения занятий по математике на других факультетах (историческом, юридическом, филологическом).

Тема 1. Элементы теории множеств

Вопросы по теории

1. Понятие множества, элемент множества, способы задания множеств, примеры.
2. Конечное и бесконечное множества, пустое множество.
3. Подмножество, определение, обозначение, примеры.
4. Объединение, пересечение и разность множеств, определение, обозначение, примеры.
5. Графическая интерпретация операций над множествами, примеры.
6. Формула Грассмана, решение задач.
7. Числовые множества: отрезки, промежутки, интервалы, N, Z, Q, R, C.
8. Основные операции над комплексными числами.

Задачи

1. M – множество четырехугольников. Принадлежит ли этому множеству: 1) ромб; 2) трапеция; 3) окружность; 4) прямоугольник; 5) диагональ параллелограмма; 6) квадрат?
2. S – множество спортивных игр. Принадлежит ли этому множеству: 1) футбол; 2) волейбол; 3) регби; 4) самбо; 5) спортлото; 6) баскетбол; 7) бобслей?
3. Принадлежит ли число: 1) 2 множеству (2; 10); 2) - ¼ множеству [-1/2; 0]; 3) 72 множеству Q; 4) 5,3 множеству Z; 5) –9 множеству N; 6) –0,2 множеству R?
4. В следующих множествах все элементы, кроме одного, обладают некоторыми общими свойствами. Опишите это свойство и найдите элементы, не обладающие им:
   1) {квадрат; круг; ромб; параллелограмм; трапеция};
   2) {4; 9; 16; 25; 30};
   3) {синий; красный; белый; цвет; черный}.
5. Среди следующих множеств найдите равные множества:
   $A = \{1; 3; 6\}$, $B = \{6; 2; 3\}$, $C = \{6; 9; 3\}$, $D = \{9; 6; 3\}$, $E = \{3; 2; 6\}$, $K = \{3; 6; 9\}$, $L = \{x \mid x \in N,\ 1 \le x < 5\}$, $M = \{x \mid x \in N,\ 1 \le x \le 4\}$, $R = \{x \mid x \in N,\ 2 < x \le 4\}$, $P = \{x \mid x \in N,\ 1 < x \le 4\}$, Q – множество квадратов, T – множество прямоугольников, W – множество четырехугольников, у которых все углы прямые.
6. Укажите, какие из данных множеств являются конечными, бесконечными, пустыми: 1) M – множество действительных корней квадратного уравнения $x^2 + 1 = 0$; 2) M – множество всех четных чисел; 3) M – множество студентов КГУ; 4) M – множество прямоугольных треугольников, у которых квадрат гипотенузы не равен сумме квадратов его катетов; 5) M – множество всех положительных иррациональных чисел.

7. Из букв множества M = {м; н; о; ж; е; с; т; в; а} составить такие его подмножества, чтобы при чтении получались существительные в единственном числе в именительном падеже.
8. Дано множество K = {21; 54; 153; 171; 234}. Составьте подмножество K из чисел, которые: 1) делятся на 7; 2) делятся на 9; 3) не делятся на 5; 4) не делятся на 4.
9. Из некоторого множества X составили все его подмножества: {21; 32}, {32}, {32; 43}, {21}, {43}, {21; 43}, {21; 32; 43}, ∅. Из каких элементов состоит множество X?
10. Даны множества: A = {12; 20; 48; 60; 90}, B = {48; 60; 90} и M = {12; 20; 35}. Найдите: 1) $M\cap A$; 2) $M\cap B$; 3) $A\cap B$; 4) $M\cup A$; 5) $M\cup B$; 6) $A\cup B$; 7) $A\setminus B$; 8) $B\setminus M$.
11. Даны множества: A = {21; 12; 11; 22}, B = {11; 12; 13; 14; 15}, C = {51; 15; 31}, D = {11; 13; 14; 15}. Найдите: 1) $A\setminus(B\cup D)$; 2) $(C\cap D)\cup A\setminus B$; 3) $C\cup(A\cap B)\setminus D$.
12. Множество K = {20; 35; 42; 55; 60; 68; 70} есть объединение множеств A и B. В множество A входят все числа, которые делятся на 2, а в множество B – все числа, которые делятся на 5. Найдите пересечение множеств A и B. Сформулируйте характеристическое свойство этого множества.
13. Начертите два треугольника так, чтобы их пересечением: 1) была точка; 2) был треугольник; 3) был отрезок; 4) был четырехугольник; 5) был пятиугольник.
14. На листе бумаги начертили круг площадью 78 см^2 и квадрат площадью 55 см^2. Площадь пересечения круга и квадрата равна 30 см^2. Не занятая кругом и квадратом часть листа имеет площадь 150 см^2. Найдите площадь листа.
15. Каждый ученик в классе изучает английский или французский язык. Английский язык изучают 25 человек, французский – 27 человек, а тот и другой – 18 человек. Сколько учеников в классе?
16. В одном множестве 40 элементов, а в другом 30. Сколько элементов может быть в их : 1) пересечении; 2) объединении?
17. Каждый из членов команды играет либо в футбол, либо в теннис, либо в футбол и в теннис. Сколько человек в команде, если известно, что 18 человек играют в обе игры, 23 человека играют в футбол, 21 – в теннис?
18. Из 220 школьников 163 играют в баскетбол, 175 играют в футбол, 24 – не играют в эти игры. Сколько человек одновременно играют в баскетбол и футбол?
19. Из 20 человек двое изучали только английский язык, трое – только немецкий, шестеро – только французский. Никто не изучал трех языков. Один изучал немецкий и английский, трое – французский и английский. Сколько человек изучало французский и немецкий языки?
20. Сколько человек пошли в поход, если 16 взяли бутерброды с ветчиной, 24 – с колбасой, 15 – с сыром, 11 - с ветчиной и колбасой, 8 – с ветчиной

и сыром, 12 – с колбасой и сыром, 6 – бутерброды трех видов, 5 – взяли пирожки?

21. Контрольную работу, содержащую одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии, писали 105 учащихся. Задачу по алгебре решили 70 человек, по геометрии – 59, по тригонометрии – 62. 90 учащихся решили задачи по алгебре или геометрии, 89 – по геометрии или тригонометрии. По алгебре или по тригонометрии задачи были решены 91 учащимся, а 6 школьников не решили ни одной задачи. Сколько учащихся решили все три задачи?

22. Выполнить указанные действия:

1) $\frac{2+3i}{1-i}+(1-i)(2-i)$; 2) $\frac{7-i}{1+2i}-(3+4i)(1+i)$; 3) $(1-7i)2i-\frac{3+2i}{-1-i}$;

4) $\frac{1+3i}{2i}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)(1+7i)$; 5) $\sqrt[3]{-\sqrt{3}-i}$; 6) $(-1-\sqrt{3}i)^3$; 7) $\sqrt[5]{-3-3i}$;

8) $(\sqrt{3}-i)^5$.

Тема 2. Элементы математической логики

Вопросы по теории

1. Что такое высказывание, высказывательная форма?
2. Основные операции над высказываниями.
3. Основные формулы алгебры высказываний, законы логики высказываний.
4. Методы решения логических задач.

Задачи

23. Укажите среди следующих предложений высказывания и найдите значение истинности каждого из высказываний:

1) Луна – спутник Земли;
2) все студенты любят математику;
3) 17·2 + 5 = 42;
4) $7-\sqrt{3}+\sqrt{6}$;
5) $x + 5 = 10$;
6) существует такое действительное число x, что $3x - 7 = 14$;
7) Вы были в кино?
8) $-2 > 4$;
9) 13 делится на 3;
10) 5– составное число;
11) Который час?
12) Подумай!
13) $5x = 14$;

14) для любых действительных чисел a и b имеет место равенство $ab=ba$;
15) 3/2 – четное число;
16) $x < 0$.

24. Определите, какие из следующих высказываний являются элементарными, какие составными. Составные высказывания формализуйте и найдите их значения истинности:
    1) все треугольники равнобедренные;
    2) после уроков мы будем кататься на коньках или на лыжах;
    3) квадрат является ромбом;
    4) Париж – столица Франции;
    5) любая дробь $\frac{a}{b}$ равна нулю тогда и только тогда, когда $a = 0$ и $b \neq 0$.
    6) Если число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6.
25. Образуйте отрицания следующих высказываний: 1) 4 делится на 2; 2) Курган – столица России; 3) 231 – четное число; 4) Волга впадает в Каспийское море. Укажите, что является истинным: само высказывание или его отрицание.
26. Пусть a представляет высказывание «Теория Дарвина является научной», b – высказывание «Теория Дарвина может быть подтверждена опытными данными» и c – высказывание «Теория Дарвина может быть опровергнута опытными данными». Сформулируйте высказывания, получающиеся из приведенных формул в результате подстановки вместо переменных a,b и c указанных конкретных высказываний:
    а) $a \to (b \vee c)$;
    б) $a \to (b \to c)$;
    в) $(b \vee c) \to a$;
    г) $(\bar{b} \wedge c) \to \bar{a}$;
    д) $(b \wedge \bar{c}) \to \bar{a}$;
    е) $\bar{a} \to (\bar{b} \vee \bar{c})$
    ж) $(\bar{b} \wedge \bar{c}) \to \bar{a}$;
    з) $b \to (c \to a)$.
27. Выясните, являются ли следующие выражения тавтологиями:
    1) $(\overline{A} \Rightarrow A) \Rightarrow A$; 2) $((A \Rightarrow B) \wedge \overline{B}) \Rightarrow A$; 3) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.
28. Составьте таблицы истинности для следующих формул:
    1) $\overline{(X \vee Y) \wedge X}$; 2) $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\overline{X} \vee Y)$; 3) $(X \Leftrightarrow Y) \wedge Z \Rightarrow X$;
    4) $(X \Rightarrow Y) \wedge Y \Rightarrow X$; 5) $X \wedge Y \Rightarrow Z \Leftrightarrow X \wedge \overline{Z} \Rightarrow Y$.
29. Проверьте равносильность формул: 1) $X \Leftrightarrow Y \equiv \overline{X} \wedge \overline{Y} \vee X \wedge Y$;
    2) $X \Rightarrow Y \equiv \overline{Y} \Rightarrow \overline{X}$.
30. Проехав половину всего пути, пассажир заснул. Когда он проснулся, то оказалось, что ему осталось ехать половину того пути, который он проехал спящим. Какую часть пути он проехал спящим?

31. Из четырех монет – одна фальшивая и отличается от остальных по весу. Как выделить ее двумя взвешиваниями на весах с двумя чашками без гирь? Можно ли при этом выяснить, легче ли она остальных?

32. В купе одного из вагонов поезда ехали москвич, ленинградец, туляк, киевлянин, харьковчанин и одессит. Их фамилии начинались буквами *А*, *Б, В, Г, Д, Е*. В дороге выяснилось, что:
   1) *А* и москвич – врачи, *Д* и ленинградец – учителя, *В* и туляк – инженеры;
   2) киевлянин, *Б* и *Е* – участники войны, туляк в армии не служил;
   3) харьковчанин старше *А*, одессит старше *В*, а *Е* – самый молодой;
   4) *Б* и москвич вышли в Киеве, а *В* и харьковчанин – в Виннице.

33. Три друга – Иван, Дмитрий и Степан – преподают различные предметы (химию, физику, и биологию) в школах Москвы, Львова и Киева. Известно, что:
   1) Иван работает не в Москве, а Дмитрий не в Львове;
   2) москвич преподает не физику;
   3) тот; кто работает в Львове, преподает химию;
   4) Дмитрий преподает не биологию.

   Какой предмет, и в каком городе преподает каждый из товарищей?

34. Написав контрольную работу, сестры сообщили родителям:

   Света: на этот раз я написала на 5;
   Люда: я написала не на 3;
   Ира: я написала не на 5.

   Сестры получили разные положительные оценки, причем из трех высказываний одно верное, два ошибочных. Какие оценки получили девочки?

35. В универмаге встретил я
Осла, козу и кошку,
Они купили красный мяч
И желтую гармошку.

      Зайдя потом, увидел я
      Осла, козу и белку,
      Они купили красный плащ
      И белую тарелку.

Зашел я в третий, встретил там
Опять осла и кошку.
Они купили в этот раз
Лишь желтую матрешку.

      Мне срочно нужен твой совет,
      Задумайся немножко.
      Скажи: какой любимый цвет
      У белки и у кошки.

И кто не сделал ни одной
Покупки в магазинах,
Поскольку не было, увы,

Товаров ярко-синих?

36. **На общей кухне.** Жилица Тройкина положила в общую плиту 3 полена своих дров, Пятеркина 5 полен, жилец Бестопливный, у которого не было своих дров, получил от обеих соседок разрешение сварить обед на общем огне. В возмещение расходов он уплатил соседкам 8 рублей. Как должны они поделить эту плату? «Пополам, - поспешит заявить кто-то. – Бестопливный пользовался их огнем поровну». «Ну, нет, - возразит другой. – Надо принять во внимание, что «дровяные вложения» были различными. Кто дал три полена, должен получить 3 рубля, кто дал 5 полен – получает 5 рублей. Вот это будет справедливый дележ». Окончательное решение головоломки, друзья, за вами.

37. **Боги Правды, Лжи и Дипломатии** (старинная индийская задача):
В старинном храме, говорят,
Стоят на чердаке
Бог Правды, Лжец и Дипломат,
Все – с лотосом в руке.
Бог Правды, лотосом клянясь,
Лишь истину твердит.
Бог Лжи, нимало не смутясь,
Неправду говорит.
А Дипломат дает ответ
По прихоти своей –
То правду говорит, то – нет,
Но всякий раз «ей-ей».
Пришел в тот храм мудрец Рашид
И к первому: - Привет!
С тобою рядом кто стоит?
– Бог Правды! – был ответ.
– Теперь скажи мне о себе, –
Второго он спросил
Я – Дипломат, служу судьбе,
Второй проговорил.
Шагает к третьему Рашид
(Рашид был стар и сед).
– Мой бог, сомненья разреши,
Скажи, кто твой сосед?
– О, досточтимейший мудрец,
Не бей напрасно ног.
Могу сказать: он страшный лжец, –
Ответил третий бог.
Теперь, читатель, разбери –
Узнать я был бы рад:
Кто Лжец, кто правду говорит
И кто же Дипломат?

Тема 3. Элементы аналитической геометрии

Вопросы по теории

1. Декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве.
2. Основные задачи в прямоугольной системе координат (длина отрезка, деление отрезка в данном отношении).
3. Полярная система координат на плоскости.
4. Связь между системами координат.
5. Способы задания прямой, основные уравнения прямой линии.
6. Основные задачи на прямую: взаимное расположение прямых, угол между прямыми, расстояние от точки до прямой.
7. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Определения, уравнения, основные свойства.

Задачи

37. Найти расстояние между точками *A* и *B*: 1) *A (-3; 9), B (3; 1*); 2) *A (2; -1), B (5; 3)*.
38. Вычислить площадь квадрата, две смежные вершины которого *A (3; -7), B (-1; 4)*.
39. Найти координаты точки *C*, делящей отрезок *AB* между точками *A (-2; 1)* и *B (8; 6)* в отношении 3:2, считая от точки *A*.
40. Найти координаты точки *C*, делящей отрезок *AB* между точками *A (1; 2)* и *B (-1; 4)* в отношении 1:2, считая от точки *A*.
41. Отрезок *AB* разделен точкой *C (4; 1)* в отношении $\lambda = \frac{1}{4}$, считая от точки *A*. Найти координаты точки *A* и длину *AB*, если *B (8; 5).*
42. Найти координаты точки *C* – середины отрезка *AB*, если:
    1) *A (5; -4), B (-1; 2);* 2) *A (6; -3), B (-2; -7)*.
43. Даны вершины треугольника *A (-7; 4), B (-5; 2), C (6; -3)*. Найти длину медианы *AK* и площадь треугольника.
44. Три последовательные вершины параллелограмма *A (3; -3), B (-1; 1)* и *C (1; 6).* Найти координаты четвертой вершины *D* и длину *BD*.
45. Найти полярные координаты точек *M (2; 2)* и *N* $(-\sqrt{3};\ 1)$.
46. Найти прямоугольные координаты точек $S\ (2;\ \frac{\pi}{4}),\ K\ (4;\ -\frac{\pi}{6})$.
47. Определить, какие из точек *A (2; 3), B (3; 3), C (4; 4)* лежат на прямой *l*: $y = \frac{1}{2}x + 2$.
48. Записать уравнение прямой, проходящей через точку *M (a; b)* и имеющей угловой коэффициент *k*: 1) *M (1; 1), k = 2*; 2) *M (-3; 0,5), k = -1*.
49. Написать уравнение прямой в отрезках, если прямая проходит через точки *A* и *B*: 1) *A (0; 3), B (4; 0);* 2) *A (-2; 0), B (0; -5).*

50. Написать уравнения всех прямых, проходящих через точки: *К (1; -3)*, *Р (0; 4)* и *М (-2; 2)*.
51. Написать уравнение прямой, проходящей через точку *А (-2; 6)* и параллельной прямой $5x + 3y - 7 = 0$.
52. Написать уравнение прямой, проходящей через точку *В (-1; 1)* и перпендикулярной прямой $3x - y - 2 = 0$.
53. Найти угол, образованный прямыми l_1 и l_2:
    1) l_1: у = 3х + 5; l_2: у = -2х + 7; 2) l_1: $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y = 0$; l_2: $\sqrt{6}x - 3y + 3 = 0$.
54. Найти точку пересечения двух прямых l_1 и l_2:
    1) l_1: х + у – 7 = 0; l_2: х – 7у + 1 = 0; 2) l_1: 2х + 3у –12 = 0; l_2: х – у – 1 = 0.
55. Определить координаты вершин треугольника *АВС*, если даны уравнения его сторон:
    AB: $y = 2x - 1$, *BC*: $2y - x = 3$, *AC*: $2x + 3y - 5 = 0$.
56. Найти расстояние от точки *А* до прямой *l*:
    1) *А (2; 5)*, *l*: $6x + 8y - 5 = 0$; 2) *А (-3; 4)*, *l*: $12x + 5y - 10 = 0$.
57. Даны уравнения сторон треугольника
    l_1: $2x - 5y - 3 = 0$, l_2: $x + 3y - 7 = 0$, l_3: $3x - 2y + 1 = 0$. Написать уравнение высоты, проведенной на сторону l_1 и найти ее длину.
58. Написать уравнение окружности с центром в точке *М* и радиусом *R*:
    1) *М (-1; 2)*, $R = 5$; 2) *М (-2; -3)*, $R = \sqrt{5}$; 3) *М (0; 5)*, $R = 6$.
59. Написать уравнение окружности с центром в точке *М (4; 2)* и проходящей через точку *К (3; -2)*.
60. Дан эллипс $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1$. Определить его оси и расстояние между фокусами. Построить эллипс.
61. Дан эллипс $16x^2 + 25y^2 = 400$. Найти длины осей, координаты его вершин и фокусов, эксцентриситет. Построить эллипс.
62. Написать каноническое уравнение гиперболы, если даны: 1) $a = 7$, $b = 2$; 2) $a = 4$, $c = 5$; 3) $b = 9$, $c = 15$. Построить гиперболы.
63. Дана гипербола $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Найти расстояние между фокусами.
64. Написать уравнения парабол с вершиной в начале координат, зная, что координаты их фокусов равны: 1) *F (4; 0)*; 2) *F (-2; 0)*; 3) *F (0; 5)*.
65. Написать уравнения парабол с вершиной в начале координат, для которых директрисами служат прямые: 1) $x = -2$; 2) $x = 3$.

Тема 4. Элементы линейной алгебры и линейного программирования

Вопросы по теории

1. Матрицы, их виды, основные операции над матрицами: сложение, умножение, умножение на число, нахождение обратной матрицы.

2. Определители второго и третьего порядков, их свойства, правила вычисления.
3. Методы решения систем линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными: метод Гаусса, метод Крамера, матричный метод.
4. Шифрование и матрицы.
5. Геометрическая интерпретация решений системы линейных уравнений. Понятие о выпуклых множествах точек.
6. Системы линейных неравенств. Геометрическая интерпретация решений системы линейных неравенств.
7. Модели, их виды и применение математических моделей на практике.

Задачи

66. Дано:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 4 & 3 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ -2 & -1 & -4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 7 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 4\\ -5 & 3\end{pmatrix}.$$

Найти: 1) A + B; 2) C – D; 3) 2A – B; 4) 3C + 2D; 5) A · C; 6) B · (C + D); 7) |A|; 8) |B|; 9) A^{-1}; 10) B^{-1}.

67. Решить следующие системы различными методами:

1) $\begin{cases}x-y+2z=6,\\ -x+2y+z=-1,\\ 4x+3y-3z=-5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-y+2z=3,\\ x+2y+3z=1,\\ -2x-y-4z=-1;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}5x-y+2z=1,\\ x+2y+z=2,\\ 3x-2y+2z=3;\end{cases}$

68. Зашифруйте данный текст, используя кодирующую матрицу $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$:

1) «Спартак» - чемпион; 2) Вася + Катя = любовь.

69. Расшифруйте текст с помощью декодирующей матрицы $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$: 1) 116, 58, 32, 19, 58, 115, 19, 34, 37, 57, 6, 12; 2) 60, 51, 17, 16, 58, 79, 16, 15, 48, 79, 14, 15.

70. На предприятии для производства трех видов изделий установлены три технологические производственные линии для их изготовления. Владелец предприятия стремится полностью использовать эти линии в течение 8-часовой рабочей смены. Данные о том, сколько времени (в часах) должна эксплуатироваться та или иная линия для изготовления одного изделия каждого вида, приведены в матрице А:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Величина элемента a_{ij} представляет собой затраты времени (в часах) i-й линии для изготовления единицы j-го изделия. Взяв в качестве неизвестных x, y и z, составить систему уравнений, предполагающую полное использование линий. Найти решение системы в матричном виде.

71. На трех станках обрабатываются детали двух видов (*А* и *Б*), причем каждая деталь проходит обработку на всех станках. Известно время обработки деталей на каждом станке, время работы станков в течение одного цикла производства и прибыль от продажи одной детали каждого вида (данные приведены в таблице). Составить план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль.

Станки	**Время обработки деталей (час)**		**Время работы станка за цикл производства (час)**
	А	**Б**	
I	1	2	16
II	1	1	10
III	3	1	24
Прибыль на 1 деталь (тыс. руб.)	4	2	

72. Ниже приведена таблица, в которой указаны запасы некоторого груза у поставщиков A_1, A_2, A_3, потребности в этом грузе потребителей B_1, B_2, B_3, а также стоимости (тарифы) $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{33}$ перевозки единицы этого груза от каждого поставщика каждому потребителю (тариф c_{ij} означает стоимость перевозки единицы груза от поставщика A_i потребителю B_j); величины c_{ij} указаны в некоторых денежных единицах. Составьте оптимальный план перевозок – такой, чтобы все потребности были удовлетворены и при этом стоимость всех перевозок была возможно меньшей.

Поставщики	**Потребители**			**Запасы**
	$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{B_3}$	
$\mathbf{A_1}$	5	9	3	50
$\mathbf{A_2}$	6	1	2	45
$\mathbf{A_3}$	5	4	7	105
Потребности	90	25	85	**Итого:** 200

Тема 5. Элементы комбинаторики и теории вероятностей

Вопросы по теории

1. Понятие комбинаторики.

2. Правила суммы и произведения.
3. Виды комбинаторных соединений: размещения, перестановки, сочетания. Определения и формулы, свойства сочетаний.
4. Соединения с повторениями.
5. Понятие испытания, события.
6. Виды событий: совместимые, несовместимые, противоположные, достоверные, невозможные, случайные, зависимые, независимые.
7. Понятие полной группы событий.
8. Классическое определение вероятности, свойства вероятности.
9. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
10. Формула полной вероятности.

Задачи

73. Сколькими способами можно составить список из 25 студентов?
74. Сколькими способами можно разместить 6 гербариев на стенде?
75. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные пятизначные числа. Выясните:
1) сколько существует пятизначных чисел, если цифры в записи не повторяются;
2) сколько существует пятизначных чисел, если цифры в их записи могут повторяться;
3) сколько существует пятизначных чисел, начинающихся со 143, если цифры в записи не повторяются.
76. Сколько можно составить четных четырехзначных чисел из цифр 0, 2, 3, 5: если цифры в записи могут повторяться; если цифры не повторяются.
77. Сколькими способами можно выбрать четыре краски из шести различных красок?
78. Из группы в 25 человек нужно выбрать три делегата на научную конференцию. Сколькими способами это можно сделать?
79. При встрече 16 человек обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?
80. Сколько человек участвовало в шахматном турнире, если известно, что каждый участник сыграл с каждым из остальных по одной партии, а всего было сыграно 210 партий?
81. Из четырех сортов гвоздик нужно составить букет из пяти цветков. Сколькими способами можно это сделать?
82. Сколько различных пятизначных чисел можно составить при помощи цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если: 1) цифры в записи не повторяются; 2) цифры в записи могут повторяться?
83. Сколько надо взять элементов, чтобы число размещений из них по 4 было в 12 раз больше, чем число размещений из них по 2?
84. Из скольких элементов можно составить 56 размещений по два элемента в каждом?

85. Группа в 30 человек обменивается друг с другом фотокарточками. Сколько всего фотографий потребуется для этого?
86. Имеется 12 различных конфет. Сколькими способами можно из них составить набор, если в нем должно быть четное число конфет?
87. Сколько может быть случаев при выборе 2 карандашей и 3 ручек из 5 различных карандашей и 5 различных ручек?
88. Из 10 роз и 8 гвоздик нужно составить букет так, чтобы в нем были 2 розы и 3 гвоздики. Сколькими способами это можно будет сделать?
89. В ящике имеется 100 яиц, из них 5 некачественных. Найти вероятность того, что вынутое наудачу яйцо будет некачественным.
90. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпавшее число очков будет четным.
91. Участники жеребьевки тянут жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.
92. В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил 6 нестандартных деталей. Чему равна относительная частота появления нестандартной детали?
93. При транспортировке 1000 дынь испортилось 15. Чему равна относительная частота испорченных дынь?
94. При стрельбе по мишени вероятность сделать отличный выстрел равна 0,3, а вероятность выстрела на оценку «хорошо» равна 0,4. Какова вероятность получить за сделанный выстрел оценку не ниже «хорошо»?
95. Бросается один раз игральная кость. Определить вероятность того, что выпадет 3 или 5 очков.
96. В урне 30 шаров: 15 белых, 10 красных и 5 синих. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар?
97. В денежно-вещевой лотерее на серию в 1000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Какова вероятность какого-либо выигрыша на один лотерейный билет?
98. В колоде 36 карт. Наудачу вынимаются 2 карты. Определить вероятность того, что вторым вынут туз, если первым тоже вынут туз.

Тема 6. Элементы теории игр

Вопросы по теории

1. Основные понятия теории игр, применение на практике.

Задачи

99. Два игрока по очереди кладут одинаковые монеты на стол, но так, что взаимное перекрывание монет не допускается. Выигрывает тот из

игроков, который положит последнюю монету (и места для других монет уже не останется). Определить выигрышную стратегию первого игрока.

100. Два игрока, *A* и *B,* не глядя друг на друга, кладут на стол по картонному кружку красного, зеленого или синего цветов, сравнивают цвета кружков и расплачиваются друг с другом так, как показано в платежной матрице игры. Найти седловую точку игры или доказать, что ее нет.

	B_1	B_2	B_3
A_1	-2	2	-1
A_2	2	1	1
A_3	3	-3	1

101. Игра, в которой принимают участие двое, состоит в следующем. Берутся две кучки спичек. Попеременно каждый из играющих отбрасывает одну из них, а оставшуюся разбивает на две, и так до тех пор, пока в каждой кучке не останется по одной спичке. Сделавший последний ход, выигрывает. Кто победит (начинающий игру или его партнер), если в начале игры в одной кучке было 20 спичек, а в другой – 25?

102. В каждую клетку квадратной таблицы размером 25×25 вписано произвольно одно из чисел +1 или –1. Под каждым из столбцов записывается произведение всех чисел данного столбца, а справа от каждой строки – произведение всех чисел данной строки. Доказать, что сумма всех пятидесяти произведений не может быть равной нулю.

103. Из числа 12345678910111213…9899100, образованного путем последовательного приписывания друг за другом всех чисел от 1 до 100 включительно, надо вычеркнуть 100 таких цифр, чтобы полученное оставшееся число было наибольшим. Записать это число.

104. В коробке 27 спичек. Двое играющих берут по очереди одну, две, три или четыре спички. Выигрывает тот, у которого в конце игры окажется четное число спичек. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер?

105. На бумаге в строчку написано несколько минусов. Каждый из двух играющих переправляет один или два минуса на плюсы. Выигрывает тот, кто переправит последний минус. Кто выиграет при правильной игре, начинающий или его партнер, если игра начинается с 7; 8; k минусов? Как надо вести игру, чтобы выиграть?

Тема 7. Этапы развития математики.

Вопросы по теории

1. Возникновение математики в древности.
2. История развития арифметики.
3. История развития алгебры.
4. История развития математического анализа.

Задачи

106. Написать первые пятнадцать чисел натурального ряда в системах с основанием g, равным 5, 7, 12.
107. Записать число 38_{10} по основаниям g = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12.
108. Могут ли в семеричной или пятеричной системах быть числа, записанные в виде 567, 1238, 1029?
109. Чему равно 84, если 8·8 = 54?
110. **Задача Ньютона из книги «Всеобщая арифметика»:** Купец имел некоторую сумму денег. В первый год он истратил 100 фунтов. К оставшейся сумме он добавил третью ее часть. В следующем году он вновь истратил 100 фунтов и увеличил оставшуюся сумму на третью ее часть. В третьем году он опять истратил 100 фунтов. После того, как он добавил к остатку третью его часть, капитал его стал вдвое больше первоначального. Определить первоначальный капитал купца.
111. **Жизнь Диофанта (надпись на гробнице):** Путник! Здесь прах погребен Диофанта. И числа поведать могут, о чудо, сколь долог был век его жизни. Часть шестую его представляло прекрасное детство. Двенадцатая часть протекла еще жизни – покрылся пухом тогда подбородок. Седьмую в бездетном браке провел Диофант. Прошло пятилетие; он был осчастливлен рожденьем прекрасного первенца сына, коему рок половину лишь жизни прекрасной и светлой дал на земле по сравненью с отцом. И в печали глубокой старец земного удела конец восприял, переживши года четыре с тех пор, как сына лишился. Скажи, сколько лет жизни достигнув, смерть восприял Диофант?
112. **Арабская задача (XI в.):** На обоих берегах реки растет по пальме, одна против другой. Высота одной – 30 локтей, другой – 20 локтей; расстояние между их основаниями – 50 локтей. На верхушке каждой пальмы сидит птица. Внезапно обе птицы заметили рыбу, выплывшую к поверхности воды между пальмами; они кинулись к ней разом и достигли ее одновременно. На каком расстоянии от основания более высокой пальмы появилась рыба?
113. **Любимая задача Л.Н. Толстого:** Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг. После этого артель разделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца; вторая же

половина косила малый луг, на котором к вечеру еще остался участок, скошенный на другой день одним косцом за один день работы. Сколько косцов было в артели?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Дано: A = {20; 35; 42; 55; 60; 68; 70}; B = {10; 15; 20; 25; 30}; C = {5; 10}; D = {55; 60; 62; 68}. Найти: 1) $A \cup C$; 2) $A \cap B$; 3) $D \setminus C$; 4) $A \cap D \setminus (B \cup C)$.
2. Определить число студентов в группе, если 15 из них изучают английский язык, 12 – немецкий, 3 – оба языка, 1 – ни одного.
3. В старшей группе детского сада 28 детей. Из них 17 детей умеют считать, а 9 – читать и считать. Сколько детей умеют читать?
4. Выполнить указанные действия:

   а) $(4+i)(1-2i)-\dfrac{3-2i}{2-i}$; б) $(-3i+2i)(3-5i)+\dfrac{1+4i}{2+3i}$; в) $\dfrac{2+i}{-3-i}-(4-2i)(1+i)$;

   г) $\sqrt[4]{1+i}$; д) $(\sqrt{3}-i)^5$; е) $\sqrt[3]{i+\sqrt{3}}$; ж) $(-2-2i)^2$.
5. Составить таблицы истинности для следующих формул:

   1) $(A \Rightarrow B) \wedge B \Rightarrow A$; 2) $(A \Rightarrow B) \wedge \overline{A} \Rightarrow \overline{B}$; 3) $\overline{(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)}$;

   4) $(A \Rightarrow B) \wedge A \wedge \overline{B}$; 5) $A \wedge B \wedge \overline{\overline{A} \vee B}$; 6) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow A \wedge B \Rightarrow C$.
6. Кто-то принес в класс цветы. Были высказаны следующие предположения: это Андрей и Борис, Андрей и Даша, Андрей и Сергей, Борис и Даша, Борис и Володя, Володя и Галя, Галя и Даша. Учитель сказал, что в одном из этих предположений одно имя названо правильно, а второе неправильно, во всех же остальных предположениях оба имени названы неверно. Кто принес цветы?
7. Имеются кубики из картона и из дерева, большие и маленькие, зеленые и красные. Известно, что: зеленых кубиков 16; зеленых больших 6; больших зеленых из картона 4; красных из картона 8; красных из дерева 9; больших деревянных 7; маленьких деревянных 11. Сколько всего кубиков?
8. **Кто муж? Кто жена?** Однажды на семейном празднике собрались семь супружеских пар. Фамилии мужчин: Владимиров, Федоров, Назаров, Викторов, Степанов, Матвеев и Тарасов. Женщин зовут: Тоня, Люся, Лена, Света, Маша, Оля и Галя. На вечере Владимиров танцевал с Леной и Светой, Назаров – с Машей и Светой, Тарасов – с Леной и Олей, Викторов – с Леной, Степанов – со Светой, Матвеев – с Олей. Затем стали играть в карты. Сперва Викторов и Владимиров играли с Олей и Галей, потом мужчин сменили Степанов и Назаров, а женщины продолжали игру. И, наконец, Степанов и Назаров сыграли одну партию с Тоней и Леной. Попробуйте определить, кто на ком женат, если известно, что на вечере ни один мужчина не танцевал со своей женой и ни одна супружеская пара не садилась одновременно за стол при игре.
9. **Кто где?**

Дуб, клен, сосна, береза, пень!
За ними спрятались, таятся
Бобр, заяц, белка, рысь, олень.
Кто где? Попробуй разобраться!
Где рысь? Ни зайца, ни бобра
Ни слева нет, ни справа – ясно.
И рядом с белкой – вот хитра –
Их также не ищи напрасно.
С оленем рядом рыси нет,
И зайца справа нет и слева.
А белка справа, где олень!
Теперь берись за поиск смело.
И хочет дать тебе совет
Поросший мхом высокий пень:
Кто где? Напасть на верный след
Помогут белка и олень.

10. **Колючая задача**

Вот симпатичные ежи,
Какого как зовут, скажи.
От Пэта слева Физа нет,
От Физа справа нет Чучачу,
Мак рядом с Фиэом. Пэт
Мне эту предложил задачу.
Ее решил я в пять минут…
А ты? Ежи ответа ждут!

11. **На берегу Олень-реки**

Индейцы Ази, Биг, Вики
И длинноногий Гили
На берегу Олень-реки
Устроить кросс решили.
Старт был у камня, где родник,
А финиш там, где сети.
Прошу, запомните, что Биг
Не первый и не третий.
В таблице Ази от Вики
Два места отделили.
(Ура Вики!) на две строки
Биг выше встал, чем Гили.
Теперь прошу карандашом
Скорей вооружиться.
Подумать надо хорошо
И сложится таблица.

12. У учительницы одной из начальных школ Нью-Йорка пропал кошелек. Украсть кошелек мог только кто-нибудь из пяти учеников: Лилиан,

Джуди, Дэвид, Тео или Маргарет. При опросе каждый из этих детей дал по три показания:

Лилиан: 1) Я не брала кошелек; 2) Я никогда в своей жизни ничего не воровала; 3) Это сделал Тео.

Джуди: 1) Я не брала кошелек; 2) Мой папа достаточно богат и я имею свой собственный кошелек; 3) Маргарет знает, кто это сделал.

Дэвид: 1) Я не брал кошелек; 2) С Маргарет я не был знаком до поступления в школу; 3) Это сделал Тео.

Тео: 1) Я не виновен; 2) Это сделала Маргарет; 3) Лилиан лжет, утверждая, что я украл кошелек.

Маргарет: 1) Я не брала кошелек учительницы; 2) В этом виновата Джуди; 3) Дэвид может поручиться за меня, так как знает меня со дня рождения.

При дальнейшем опросе каждый из учеников признал, что из сделанных им трех заявлений два верных и одно ложное. Определите, кто из учеников украл кошелек своей учительницы.

13. Четверо юношей: Андрей, Борис, Кирилл и Дмитрий влюблены и, увы, как это часто бывает в жизни, без взаимности. Андрей любит девушку, которая влюблена в юношу, любящего Таню. В Машу влюблен юноша, которого любит девушка, любимая Борисом. Кирилл влюблен в девушку, которая сама любит Диму. Если Бориса не любит Зина, а юноша, которого любит Галя, не любит Зину, то кто любит Андрея?
14. В семье четверо детей. Им 5, 8, 13 и 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера и Галя. Сколько лет каждому ребенку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори и сумма лет Ани и Веры делится на три?
15. В параллелограмме *ABCD* найти координаты вершины *D* и длину *DB*, если *A (3; -3), B (-1; 4), C (-1; 6).*
16. В треугольнике с вершинами *O (0; 0), B (8; 0), A (0; 6)* найти длину медианы *OK*.
17. Отрезок *AB* разделен точкой *C (4; 1)* в отношении $\lambda = -\frac{1}{4}$, считая от точки *A*. Найти координаты точки *A*, если *B (8; 5).*
18. Написать уравнения сторон треугольника *ABC*, если *A (6; 0), B (3; 4), C (0; -2).*
19. Найти расстояние от точек *A (1; 0)* и *B (-1; 2)* до прямой $l: 3x - y + 4 = 0$.
20. Определить угол между прямыми $l: 3x + y - 6 = 0$ и *AB*, если *A (-3; 1), B (3; 3).*
21. Написать уравнение прямой, проходящей через точку *M (1; 1)* и параллельной прямой $l: y = 4x - 7$.
22. Написать уравнение прямой, проходящей через точку *M (0; -5)* и перпендикулярной прямой $l: y = -2x + 4$.
23. Написать каноническое уравнение эллипса, если сумма полуосей и расстояние между фокусами равны между собой и равны 8.

24. Написать каноническое уравнение эллипса, если большая полуось равна 6, $\varepsilon = 0{,}5$.
25. Написать уравнение окружности с центром *O (4; 2),* которая проходит через точку *M (3; 2).*
26. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, если: а) *F (0; -4);* б) *d*: *x = -8.*
27. Дана гипербола $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$. Найти ее основные характеристики.
28. Решить системы уравнений различными способами:

1) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 4y - 5z = 11, \\ 3x + 2y - 4z = 8, \\ 4x - 3y + 2z = 1. \end{cases}$

29. Первого сентября на 1 курсе одного из факультетов запланировано по расписанию 3 лекции по разным предметам. Всего на первом курсе изучается 10 предметов. Сколько существует способов составить расписание на 1 сентября?
30. На кафедре математики 9 преподавателей. Сколькими способами можно составить расписание консультаций на 9 дней, если каждый преподаватель дает консультацию ровно один раз?
31. На тренировках занимаются 12 баскетболистов. Сколько может быть образовано разных стартовых пятерок?
32. 7 членов профсоюзного комитета должны избрать из своего состава председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?
33. Сколько существует трехзначных чисел в десятичной системе счисления?
34. Для передачи сигналов на корабле вывешиваются один под другим три разноцветных полотнища. Сколько разных сигналов можно передать при наличии белого, красного, желтого, зеленого, синего и черного полотнища?
35. Сколькими способами можно из 15 солдат и 4 офицеров назначить в патруль трех солдат и одного офицера?
36. На окружности отмечено 8 различных точек. Сколько различных хорд можно провести, соединяя любые две из них?
37. Для полета в космос необходимо укомплектовать следующий экипаж: командир корабля, первый его помощник, второй помощник, два бортинженера и врач. Командная тройка может быть отобрана из 25 готовящихся к полету летчиков, два бортинженера – из 20 специалистов, врач – из 8 медиков. Сколькими способами можно укомплектовать экипаж?
38. Пусть в некоторой стране номер автомобиля составляется из двух букв, за которыми следуют две цифры, например, *AB-53*. Сколько различных номеров можно составить, если использовать 5 букв и 6 цифр?
39. На студенческом вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары?

40. В урне находятся 4 белых и 7 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар окажется белым?
41. Игральная кость подбрасывается один раз. Найти вероятности следующих событий: A – «число выпавших очков равно трем», B – «число очков четно», C – «число очков меньше пяти», D – «число очков не меньше двух».
42. Монета подбрасывается 3 раза. Найти вероятность того, что все три раза выпал орел.
43. Игральный кубик бросается два раза. Найти вероятность того, что: а) оба раза появится одинаковое число очков; б) сумма выпавших очков делится на три.
44. **«Кто первый скажет сто».** Играют двое. Первый участник игры называет произвольное целое число, не превышающее 10, то есть он может назвать 10 и всякое меньшее число. Второй игрок прибавляет к названному числу свое целое число, тоже не превышающее 10, и сообщает новую сумму. К новой сумме второй прибавляет число не большее 10 и так далее до тех пор, пока окончательной суммой не окажется 100. Выигрывает тот, кто первый достигнет 100. Как добиться победы?
45. **«Одиннадцать спичек».** На столе – 11 спичек. Первый играющий берет себе из этого количества по своему усмотрению 1, 2 или 3 спички. Затем второй играющий берет себе из числа оставшихся предметов так же по своему усмотрению 1, 2 или 3 спички. Так поочередно оба играющих берут каждый раз не более чем по три спички. Проигрывает тот, которому приходится брать последнюю спичку. Может ли начинающий игрок поставить своего партнера перед необходимостью взять последнюю спичку? Как надо вести игру, чтобы выиграть в тех случаях, когда начальное число спичек – 30?
46. **«Игра Баше».** На столе выложены n предметов. Двое играющих поочередно забирают несколько предметов, причем заранее договорено, что число забранных за один раз предметов не превышает k ($0 < k \le n$). Выигрывает тот, кто своим ходом может забрать все оставшиеся предметы. Определить выигрышную стратегию для каждого игрока.
47. **«Две кучки камней».** Имеется две кучки камней. Двое играющих забирают поочередно камни. Разрешается взять один из любой кучки или по одному камню из обеих кучек. Выигравшим считается тот, после хода которого ни в одной кучке не останется камней. Определить выигрышную стратегию для каждого игрока.
48. **«Вперед и вверх».** Играют двое на прямоугольном клетчатом поле $OBKA$. Точка O является начальной, а точка K – конечной. Пусть отрезок OA содержит m клеток, а отрезок OB – n клеток. Затем выбираются два натуральных числа $\Delta x \le m$ и $\Delta y \le n$. Начинающий игру из точки O либо проводит вправо горизонтальную линию, длина которой не превосходит Δx, либо – вверх вертикальную линию, длина которой не превосходит Δy. Второй игрок также проводит вправо горизонтальную или вверх

вертикальную линию, длины которых не превосходят соответственно Δx и Δy, причем начало этой линии совпадает с концом линии, проведенной первым игроком, и т.д. Выигрывает тот, кто первым достигнет точки *К*.

49. «Быки и коровы». Играют двое. Каждый задумывает четырехзначное число с разными цифрами, которое должен отгадать партнер. Ход заключается в том, что отгадывающий называет определенное число, также четырехзначное с разными цифрами. Если задуманное и названное числа имеют общие цифры, стоящие на одних и тех же местах, то такую ситуацию называют «быком». Если общие цифры есть, но стоят они на разных местах, то это «корова». В ответ на ход партнера загадчик сравнивает свое число с названным и сообщает общее число «быков» и «коров». Например, если задумано 5239, а названо 2735, то ответ будет «1 бык 2 коровы» (цифра 3 имеется в обоих числах и стоит на одинаковых местах – 1 бык, цифры 2 и 5 общие, но стоят на разных местах – 2 коровы, цифры 7 и 9 не являются общими). Сделав ход и получив ответ, отгадчик извлекает некоторую информацию о задуманном числе и в конце концов определяет его. Игра заканчивается в тот момент, когда в ответ на свой ход он получает 4 быка, то есть задуманное число найдено. Выигрывает тот, кто быстрее отгадает число противника.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Тема 1. *Элементы теории множеств*

1. Операции над множествами:

а) пересечение $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$;

б) объединение $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$;

в) разность $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$;

г) формула Грассмана: если $A \cap B \neq \varnothing$, то $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;

если $A \cap B = \varnothing$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.

2. Множество комплексных чисел $C = \{a + bi \mid a, b \in R, i^2 = -1\}$.

а) сложение (вычитание) комплексных чисел:

$(a \pm bi) + (c \pm di) = a \pm bi + c \pm di = (a + c) \pm (b + d)i.$

б) умножение комплексных чисел:

$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$

в) деление комплексных чисел:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i.$$

г) тригонометрическая форма комплексного числа: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = arctg\,\frac{b}{a}$.

д) возведение комплексного числа в n-ю степень ($n \in N$): $z^n = r^n(\cos(n \cdot \varphi) + i\sin(n \cdot \varphi))$.

е) извлечение корня n-й степени из комплексного числа: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$, $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$.

Тема 2. *Элементы математической логики*

1. $\overline{A}$ – негация; $A \wedge B$ – конъюнкция; $A \vee B$ – дизъюнкция; $A \Rightarrow B$ – импликация; $A \Leftrightarrow B$ – эквиваленция.

2. Таблица истинности:

A	B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
и	и	л	и	и	и	и
и	л	л	л	и	л	л
л	и	и	л	и	и	л
л	л	и	л	л	и	и

Тема 3. ***Элементы аналитической геометрии***

1. Основные задачи в прямоугольной системе координат:

а) расстояние между точками A (x_1; y_1) и B (x_2; y_2): $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

б) площадь треугольника ABC, вершины которого имеют координаты A (x_1; y_1), B (x_2; y_2) и C (x_3; y_3): $S_{ABC} = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$.

в) деление отрезка в данном отношении: $C(x;y) \in AB$, $\frac{AC}{CB} = \lambda \Rightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$; $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$.

2. Прямая линия на плоскости.

1) виды уравнения прямой:

а) *l: Ax + By + C = 0*, *A,B,C∈R* и *A* и *B* не равны нулю одновременно – общее уравнение прямой;

б) *l*: $y = kx + b$, где k – угловой коэффициент – уравнение прямой с угловым коэффициентом;

в) *l*: $y - y_0 = k(x - x_0)$ – уравнение прямой, проходящей через данную точку (x_0; y_0) с данным угловым коэффициентом k;

г) $l: \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две данные точки (x_1; y_1) и (x_2; y_2);

д) $l: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой в отрезках;

е) $l: \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через данную точку (x_0; y_0), перпендикулярно данному вектору $\vec{n}(\alpha;\beta)$.

2) основные задачи на прямую:

а) угол между прямыми l_1: $y = k_1 x + b_1$ и l_2: $y = k_2 x + b_2$: $\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$; $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$; $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}$. б) расстояние от точки $M(x_0;\ y_0)$ до прямой l: $\rho(M;l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, в) координаты точки пересечения двух прямых: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$.

3. Кривые второго порядка.

1) Окружность: $\omega : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$; O($x_0$; y_0) – центр, R – радиус.

2) Эллипс: $\alpha : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, F_1 (c; 0), F_2 (-c; 0) – фокусы; $c^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет; a, b – полуоси.

3) Гипербола: $\gamma : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, F_1 (c; 0), F_2 (-c; 0) – фокусы; $c^2 = a^2 + b^2$; a, b – действительная и мнимая полуоси; асимптоты $y = \pm\frac{b}{a}x$.

4) Парабола: $\beta : y^2 = 2px$; O(0; 0) – вершина, $F(\frac{p}{2};\ 0)$ – фокус, директриса: $x = -\frac{p}{2}$.

Тема 4: *Элементы линейной алгебры и линейного программирования*

1. Система из двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2 \end{cases}$, a_{ij} – коэффициенты при неизвестных, c_k – свободные члены.

2. Система из трех линейных уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases}$, a_{ij} – коэффициенты при неизвестных, c_k – свободные члены.

3. Матрица: $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}a_{m3}...a_{mn} \end{pmatrix}$. Если m=n, то матрица называется квадратной (n-го порядка).

4. Определитель квадратной матрицы:

   1) второго порядка: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$;

   2) третьего порядка: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$

   $+ a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{21} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{33} \cdot a_{21} - a_{23} \cdot a_{11} \cdot a_{32}$.

5. Обратная матрица: $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \left| A_{n-in-j} \right|$ - алгебраическое дополнение к a_{ij}-тому элементу матрицы A.

6. Методы решения систем линейных уравнений:

   1) Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных.

   2) Метод Крамера – значения переменных находятся путем деления соответствующих определителей на главный определитель системы.

   3) Матричный метод – система решается в виде матричного уравнения.

7. Шифрование и математика:

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Р	**С**	**Т**	**У**	**Ф**	**Х**	**Ц**	**Ч**	**Ш**	**Щ**	**Ъ**	**Ы**	**Ь**	**Э**	**Ю**	**Я**	**#**
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
.	**,**	«»	**-**	+	=											
35	36	37	38	39	40											

Кодирующая матрица: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $|A|=1$. Декодирующая матрица: A^{-1}.

Тема 5: Элементы комбинаторики и теории вероятностей.

1. Факториал: $n\,! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.
2. Перестановки: $P_n = n!$.
3. Размещения: $A_n^m = \dfrac{n\,!}{(n-m)!}$.
4. Сочетания: $C_n^m = \dfrac{n\,!}{m\,!\cdot(n-m)!}$.
5. Вероятность наступления события A в данном испытании: $P(A)=\dfrac{m}{n}$, где n – общее число возможных исходов в данном испытании, m – число исходов, благоприятствующих наступлению события A.

Контрольная работа № 1

Номер варианта определяется из таблицы по двум последним цифрам зачетной книжки.

Таблица

Первая цифра зачетной книжки	Последняя цифра зачетной книжки										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1 11 21 31 41 51	2 12 22 32 42 52	3 13 23 33 43 53	4 14 24 34 44 54	5 15 25 35 45 55	6 16 26 36 46 56	7 17 27 37 47 57	8 18 28 38 48 58	9 19 29 39 49 59	10 20 30 40 50 60
	1	2 13 24 35 46 57	3 14 25 36 47 58	4 15 26 37 48 59	5 16 27 38 49 60	6 17 28 39 50 51	7 18 29 40 41 52	8 19 30 31 42 53	9 20 21 32 43 54	0 11 22 33 44 55	1 12 23 34 45 56
	2	3 15 27 39 50 52	4 16 28 40 42 54	5 17 29 31 43 55	6 18 30 32 44 56	7 19 21 33 45 57	8 20 22 34 46 58	9 11 23 35 47 59	10 12 24 36 48 60	1 13 25 37 49 51	2 14 26 38 50 52
	3	4 17 30 33 46 59	5 18 21 34 47 60	6 19 22 35 48 51	7 20 23 36 49 52	8 11 24 37 50 53	9 12 25 38 41 54	10 13 26 39 42 55	1 14 27 40 43 56	2 15 28 31 44 57	3 16 29 32 45 58
	4	5 19 23 37 41 55	6 20 24 38 42 56	7 11 25 39 43 57	8 12 26 40 44 58	9 13 27 31 45 59	10 14 28 32 46 60	1 15 29 33 47 51	2 16 30 34 48 52	3 17 21 35 49 53	4 18 22 36 50 54

Продолжение таблицы

Первая цифра зачетной книжки	Последняя цифра зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	6 11 26 31 46	7 12 27 32 47	8 13 28 33 48	9 14 29 34 49	10 15 30 35 50	1 16 21 36 41	2 17 22 37 42	3 18 23 38 43	4 19 24 39 44	5 20 25 40 45
6	7 13 29 35 41	8 14 30 36 42	9 15 21 37 43	10 16 22 38 44	1 17 23 39 45	2 18 24 40 46	3 19 25 31 47	4 20 26 32 48	5 11 27 33 49	6 12 28 34 50
7	8 15 22 39 46	9 16 23 40 47	10 17 24 31 48	1 18 25 32 49	2 19 26 33 50	3 20 27 34 41	4 11 28 35 42	5 12 29 36 43	6 13 30 37 44	7 14 21 38 45
8	9 17 25 33 41	10 18 26 34 42	1 19 27 35 43	2 20 28 36 44	3 11 29 37 45	4 12 30 38 46	5 13 21 39 47	6 14 22 40 48	7 15 23 31 49	8 16 24 32 50
9	10 19 28 37 46	1 20 29 38 47	2 11 30 39 48	3 12 21 40 49	4 13 22 31 50	5 14 23 32 41	6 15 24 33 42	7 16 25 34 43	8 17 26 35 44	9 18 27 36 45

Задания для контрольной работы № 1

Задание 1: Даны множества: А и В. Найти: 1) $A \cap B$; 2) $A \cup B$; 3) $A \setminus B$; 4) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1. А = {12; 20; 34; 37}, В = {2; 34; 35; 37}.
2. А = {3; 5; 7;9}, В = {3; 7; 15; 28}.
3. А = {2; 4; 6; 8; 10}, В = {2; 4; 3; 1; 6}.
4. А = {1; 2; 3; 4; 5; 6}, В = {3; 2; 6; 8}.
5. А = {25; 37; 44; 56}, В = {13; 15; 37; 48}.
6. А = {2; 6; 20; 21; 35}, В = {4; 15; 21; 35}.
7. А = {2; 3; 6; 8; 10}, В = {1; 2; 4; 25; 33}.
8. А = {0; 1; 2; 3; 7; 15}, В = {-2; 0; 3; 2; 14}.
9. А = {-7; -3; 2; 4; 33}, В = {-1; 0; 1; 2; 4; 3}.
10. А = {2; 6; 24; 12; 31}, В = {0; 7; 13; 18; 31}.

Задание 2: Вычислить.

11. $\frac{3-i}{1+i}+3i(7-i)$.
12. $(4+i)(1-2i)-\frac{3-2i}{2-i}$.
13. $\frac{2+i}{-3-i}-(4-2i)(1+i)$.
14. $\frac{1-3i}{1+2i}+(1-i)(1+7i)$.
15. $\frac{2+3i}{1-i}-4i(5+2i)$.
16. $(5-3i)(4+7i)-\frac{1+i}{2+3i}$.
17. $\frac{2-i}{1+i}+(1+2i)(8-7i)$.
18. $\frac{3-i}{1+i}+(3-2i)(7-5i)$.
19. $\frac{2+i}{3+4i}-(7-3i)(1+i)$.
20. $\frac{3+i}{1+i}-(2+7i)(4-5i)$.

Задание 3: Даны вершины треугольника А, В и С. Найти длину медианы, площадь треугольника АВС и написать уравнение прямой, проходящей через точку К, параллельно стороне АВ. Сделать чертеж.

21. А(-7; 4), В(-4; 6), С(7;-2); АК.
22. А(-6; 4), В(-5; 2), С(6;-2); ВК.
23. А(-3; 7), В(7; 0), С(11; 5); СК.
24. А(6; -4), В(10; 4), С(-2; 4); АК.
25. А(6; -4), В(10; 4), С(-2; 4); ВК.
26. А(2; -4), В(8; 6), С(-2; 0); СК.
27. А(-6; -2), В(4; 0), С(2; -2); АК.
28. А(-6; -2), В(0; 4), С(-2; 2); ВК.
29. А(4; 8), В(2; -4), С(0; 2); СК.
30. А(-2; 0), В(8; 4), С(2; -4); АК.

Задание 4: Решить задачу, используя формулу Грассмана:

31. В детском саду 52 ребенка. Каждый из них любит пирожное или мороженое. 25 детей любит пирожное, а 20 человек – пирожное и мороженое. Сколько детей любит мороженое?
32. Из 220 школьников 163 играют в баскетбол, 175 – в футбол, 24 – не играют в эти игры. Сколько человек играют в баскетбол и футбол?
33. Каждый из членов команды играет либо в футбол, либо в теннис, либо в футбол и в теннис. Сколько человек в команде, если известно, что 18 человек играют в обе игры, 23 человека играют в футбол, 21 – в теннис?
34. В кружке мягкой игрушки занимается 26 человек. Половина детей любят карамель, а 10 человек – карамель и шоколадные конфеты. Сколько детей любят шоколадные конфеты?
35. В младшей группе детского сада 15 детей пьют молоко, 20 – кефир, 10 – и молоко, и кефир. Сколько детей в группе?
36. Все студенты в группе изучают английский или немецкий язык. 12 студентов изучают английский язык, 15 – немецкий, 3 – оба языка. Сколько студентов в группе?
37. Из 27 учеников 13 человек любят читать фантастику, 8 – приключенческую литературу и фантастику. Сколько человек любят читать приключенческую литературу?
38. В кружке вязания 14 девочек связали шапочку, 15 – шарф, 7 – шапочку и шарф. Сколько девочек ходит в кружок?
39. В старшей группе детского сада 22 ребенка. Половина детей любит манную кашу, а 8 человек – и манную, и рисовую кашу. Сколько детей любит рисовую кашу?
40. В подготовительной группе детского сада 12 человек умеют читать, 13 – считать, 7 – читать и считать. Сколько человек в группе?

Задание 5: Формализуйте высказывание:

41. «Если мистер Джонс счастлив, то миссис Джонс несчастлива, и если мистер Джонс несчастлив, то миссис Джонс счастлива».
42. «Если в Варшаву мы не поедем и в горы мы не отправимся, то ежедневно будем ходить на пляж или будем читать книги».
43. «Если «Спартак» проиграет, а «Торпедо» выиграет, то «Локомотив» потеряет первое место и на третье место выйдет «Зенит»».
44. «Если я поздно приду на остановку и не смогу сесть в автобус, то опоздаю на занятия и пропущу интересную лекцию».
45. «Если завтра будет воскресенье или в институте не будет занятий, то ко мне придут друзья и мы послушаем музыку».
46. «После обеда я отправлюсь на прогулку в парк или, если ко мне зайдет приятель, то я буду играть с ним в шахматы или мы посмотрим кино».

47. «Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам».
48. «Если в контрольной работе я выполнил первое и третье задания, то у меня есть шанс получить положительную отметку тогда и только тогда, когда я выполню второе задание».
49. «Если в пятницу не будет дождя или снега, то мы пойдем гулять или пойдем в кино».
50. «Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда накрест лежащие углы равны или внутренние односторонние углы равны».

Задание 6: Проверьте, равносильны ли формулы:

51. $(A \vee B) \wedge (A \wedge B)$ и $B \wedge A$.
52. $\overline{A \vee B} \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$ и $\overline{A \vee B}$.
53. $X \wedge Y \Rightarrow X$ и $X \Rightarrow Y \vee X$.
54. $A \Leftrightarrow B$ и $(\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$.
55. $A \Rightarrow B$ и $\overline{A} \vee B$.
56. $A \Leftrightarrow B$ и $A \wedge B \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$.
57. $A \wedge \overline{A \vee B}$ и $A \wedge \overline{A} \wedge \overline{B}$.
58. $A \wedge B \wedge \overline{C}$ и $\overline{A \Rightarrow (B \Rightarrow C)}$.
59. $A \vee B \Rightarrow A \vee C$ и $A \vee \overline{B} \vee C$.
60. $A \Rightarrow B \Rightarrow A \wedge C$ и $A \wedge (\overline{B} \vee C)$.

Контрольная работа № 2

Номер варианта определяется из таблицы к контрольной работе № 1 по двум последним цифрам зачетной книжки.

Задания к контрольной работе

Задание 1: Решить систему уравнений указанным методом:

1. методом Гаусса: $\begin{cases} 4x + y + 4z = -2, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}$
2. методом Крамера: $\begin{cases} x - y - 2z = 0, \\ -3x + 4y - z = -1, \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$
3. матричным методом: $\begin{cases} 4x - 3y - 2z = 3, \\ 2x - 4y - 3z = 0, \\ x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$

4. методом Гаусса: $\begin{cases} -2x + y + z = 3, \\ 2x - y - 2z = -2, \\ 3x - y - z = 1 \end{cases}$

5. методом Крамера: $\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 3, \\ x - 4y + 8z = 1, \\ 3x + 2y - 4z = 3 \end{cases}$

6. матричным методом: $\begin{cases} x - y - z = -2, \\ 3x - 4y + z = 1, \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$

7. методом Гаусса: $\begin{cases} x + 2y + 4z = 31, \\ 5x + y + 2z = 29, \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$

8. методом Крамера: $\begin{cases} -2x + y + z = 3, \\ 2x - y - 2z = -2, \\ 3x - y - z = 1 \end{cases}$

9. матричным методом: $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ -3x + 4y - z = -1, \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$

10. методом Гаусса: $\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 3, \\ x - 4y + 8z = 1, \\ 3x + 2y - 4z = 3 \end{cases}$

Задание 2: Используя графический метод, найти решение следующей задачи линейного программирования:

11. $\begin{cases} x + 6y \geq 5 \\ 5x + y \geq 9 \\ 3x + 2y \geq 11 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$, Z(x; y) = x + y → min.

12. $\begin{cases} x + 3y \leq 5 \\ 3x + y \leq 10 \\ 3x + 2y \leq 11 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$, Z(x; y) = 2x + 2y → max.

13. $\begin{cases} x + y \geq 4 \\ 2x + y \geq 6 \\ 3x + 2y \geq 11 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$, Z(x; y) = 5/4x + y → min.

14. $\begin{cases} x + y \le 5 \\ 5x + y \le 16 \\ 3x + 2y \le 11 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$, Z(x; y) = 4x + 2y → max.

15. $\begin{cases} x + 4y \ge 7 \\ 4x + y \ge 8 \\ 3x + 2y \ge 11 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$, Z(x; y) = 0,5x + y → min.

16. $\begin{cases} x + 2y \le 9 \\ 5x + y \le 16 \\ 3x + 2y \le 11 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$, Z(x; y) = 1,5x + 2y → max.

17. $\begin{cases} x + 5y \ge 8 \\ 3x + y \ge 7 \\ 3x + 2y \ge 11 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$, Z(x; y) = 7/4x + y → min.

18. $\begin{cases} x + y \le 5 \\ 7x + y \le 22 \\ 3x + 2y \le 11 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$, Z(x; y) = 2,5x + 2y → max.

19. $\begin{cases} x + 3y \ge 6 \\ 5x + y \ge 9 \\ 3x + 2y \ge 11 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$, Z(x; y) = 3,5x + y → min.

20. $\begin{cases} x + 2y \le 9 \\ 7x + y \le 22 \\ 3x + 2y \le 11 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$, Z(x; y) = 2,5x + 2y → max.

Задание 3: Решить задачу (комбинаторика).

21. Первого сентября на первом курсе одного из факультетов запланировано по расписанию 3 лекции по разным предметам. Всего на первом курсе изучается 10 предметов. Сколько существует способов составить расписание на 1 сентября?
22. Сколькими способами можно из 15 солдат и 4 офицеров назначить в патруль трех солдат и одного офицера?
23. В некотором классе изучают 10 различных предметов. В пятницу завуч должен поставить 5 различных предметов. Сколькими способами он может это сделать?

24. В розыгрыше первенства по волейболу участвуют 12 команд. Сколько должно быть сыграно игр, если любые две команды должны сыграть между собой только один матч?
25. Сколько существует всего семизначных телефонных номеров, в каждом из которых ни одна цифра не повторяется?
26. Из имеющихся семи роз и пяти веток зелени нужно составить букет, состоящий из трех роз и двух веток зелени. Сколькими способами можно составить такой букет?
27. В помещении 16 ламп. Сколько может быть различных вариантов освещения помещения, при котором должно гореть 12 ламп?
28. В вазе находятся разных по размерам 5 яблок и 6 апельсинов. Сколькими способами можно вынуть из вазы 2 яблока и 3 апельсина?
29. Каждый избиратель может занести в свой бюллетень либо одного, либо двух из 6 выдвигающихся на выборы кандидатов. Сколькими способами могут быть заполнены бюллетени?
30. Сколькими способами можно назначить патруль из двух солдат и одного офицера, если в роте имеются 80 солдат и 5 офицеров?

Задание 4: Решить задачу (теория вероятностей).

31. В ящике лежат 5 белых, 10 черных и 15 красных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар не будет белым?
32. В пачке 12 билетов денежно-вещевой лотереи, 15 билетов лотереи РОСТО и 20 билетов художественной лотереи. Какова вероятность того, что наудачу вынутый один билет будет билетом либо денежно-вещевой, либо художественной лотереи?
33. В цехе работают 10 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу выбраны 2 человека. Какова вероятность того, что выбранные люди окажутся мужчинами?
34. В цехе работают 10 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу выбраны 2 человека. Какова вероятность того, что выбранные люди окажутся женщинами?
35. В цехе работают 10 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу выбраны 2 человека. Какова вероятность того, что выбраны мужчина и женщина?
36. Студент, идя на экзамен, знал ответы на 70 вопросов из 90. Какова вероятность того, что студент ответит верно на предложенные ему экзаменатором 2 вопроса?
37. Школьник, идя на зачет, знал 15 из 20 предложенных к зачету вопросов. Какова вероятность того, что ему на зачете достанутся три известных ему вопроса?
38. В урне находятся 4 белых и 7 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар окажется белым?

39. Из коробки, в которой имеется 4 желтых, 4 синих и 6 красных карандашей наудачу берут один карандаш. Какова вероятность того, что карандаш синий или красный?
40. В читальном зале есть 12 учебников по теории вероятностей, среди которых 4 новых. Наудачу берем 2 учебника. Найти вероятность того, что оба учебника новые.

Контрольная работа для студентов факультета психологии, валеологии и спорта заочной формы обучения специальностей «Логопедия» и «Олигофренопедагогика»

Номер варианта определяется из таблицы 1 по двум последним цифрам зачетной книжки

.

Задания для контрольной работы

Задание 1: Даны множества: А и В. Найти: 1) А∩В; 2) АUВ; 3) А\В; 4) (АUВ)\ (А∩В).

1. А = {12; 20; 34; 37}, В = {2; 34; 35; 37}.
2. А = {3; 5; 7;9}, В = {3; 7; 15; 28}.
3. А = {2; 4; 6; 8; 10}, В = {2; 4; 3; 1; 6}.
4. А = {1; 2; 3; 4; 5; 6}, В = {3; 2; 6; 8}.
5. А = {25; 37; 44; 56}, В = {13; 15; 37; 48}.
6. А = {2; 6; 20; 21; 35}, В = {4; 15; 21; 35}.
7. А = {2; 3; 6; 8; 10}, В = {1; 2; 4; 25; 33}.
8. А = {0; 1; 2; 3; 7; 15}, В = {-2; 0; 3; 2; 14}.
9. А = {-7; -3; 2; 4; 33}, В = {-1; 0; 1; 2; 4; 3}.
10. А = {2; 6; 24; 12; 31}, В = {0; 7; 13; 18; 31}.

Задание 2: Вычислить.

11. $\frac{3-i}{1+i}+3i(7-i)$.
12. $(4+i)(1-2i)-\frac{3-2i}{2-i}$.
13. $\frac{2+i}{-3-i}-(4-2i)(1+i)$.
14. $\frac{1-3i}{1+2i}+(1-i)(1+7i)$.
15. $\frac{2+3i}{1-i}-4i(5+2i)$.
16. $(5-3i)(4+7i)-\frac{1+i}{2+3i}$.
17. $\frac{2-i}{1+i}+(1+2i)(8-7i)$.
18. $\frac{3-i}{1+i}+(3-2i)(7-5i)$.
19. $\frac{2+i}{3+4i}-(7-3i)(1+i)$.
20. $\frac{3+i}{1+i}-(2+7i)(4-5i)$.

Задание 3: Даны вершины треугольника А, В и С. Найти длину медианы, площадь треугольника АВС и написать уравнение прямой, проходящей через точку К, параллельно стороне АВ. Сделать чертеж.

21. А(-7; 4), В(-4; 6), С(7;-2); АК.
22. А(-6; 4), В(-5; 2), С(6;-2); ВК.
23. А(-3; 7), В(7; 0), С(11; 5); СК.
24. А(6; -4), В(10; 4), С(-2; 4); АК.
25. А(6; -4), В(10; 4), С(-2; 4); ВК.
26. А(2; -4), В(8; 6), С(-2; 0); СК.
27. А(-6; -2), В(4; 0), С(2; -2); АК.
28. А(-6; -2), В(0; 4), С(-2; 2); ВК.
29. А(4; 8), В(2; -4), С(0; 2); СК.
30. А(-2; 0), В(8; 4), С(2; -4); АК.

Задание 4: Решить систему уравнений указанным методом:

31. методом Гаусса: $\begin{cases} 4x + y + 4z = -2, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}$

32. методом Крамера: $\begin{cases} x - y - 2z = 0, \\ -3x + 4y - z = -1, \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$

33. матричным методом: $\begin{cases} 4x - 3y - 2z = 3, \\ 2x - 4y - 3z = 0, \\ x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$

34. методом Гаусса: $\begin{cases} -2x + y + z = 3, \\ 2x - y - 2z = -2, \\ 3x - y - z = 1 \end{cases}$

35. методом Крамера: $\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 3, \\ x - 4y + 8z = 1, \\ 3x + 2y - 4z = 3 \end{cases}$

36. матричным методом: $\begin{cases} x - y - z = -2, \\ 3x - 4y + z = 1, \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$

37. методом Гаусса: $\begin{cases} x + 2y + 4z = 31, \\ 5x + y + 2z = 29, \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$

38. методом Крамера: $\begin{cases} -2x + y + z = 3, \\ 2x - y - 2z = -2, \\ 3x - y - z = 1 \end{cases}$

39. матричным методом: $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ -3x + 4y - z = -1, \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$

40. методом Гаусса: $\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 3, \\ x - 4y + 8z = 1, \\ 3x + 2y - 4z = 3 \end{cases}$

Задание 5: Проверьте, равносильны ли формулы:

41. $(A \vee B) \wedge (A \wedge B)$ и $B \wedge A$.
42. $\overline{A \vee B} \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$ и $\overline{A \vee B}$.
43. $X \wedge Y \Rightarrow X$ и $X \Rightarrow Y \vee X$.
44. $A \Leftrightarrow B$ и $(\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$.
45. $A \Rightarrow B$ и $\overline{A} \vee B$.
46. $A \Leftrightarrow B$ и $A \wedge B \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$.
47. $A \wedge \overline{A \vee B}$ и $A \wedge \overline{A} \wedge \overline{B}$.
48. $A \wedge B \wedge \overline{C}$ и $\overline{A \Rightarrow (B \Rightarrow C)}$.
49. $A \vee B \Rightarrow A \vee C$ и $A \vee \overline{B} \vee C$.
50. $A \Rightarrow B \Rightarrow A \wedge C$ и $A \wedge (\overline{B} \vee C)$.

Задание 6: Решить задачу.

51. В ящике лежат 5 белых, 10 черных и 15 красных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар не будет белым?
52. В пачке 12 билетов денежно-вещевой лотереи, 15 билетов лотереи РОСТО и 20 билетов художественной лотереи. Какова вероятность того, что наудачу вынутый один билет будет билетом либо денежно-вещевой, либо художественной лотереи?
53. В цехе работают 10 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу выбраны 2 человека. Какова вероятность того, что выбранные люди окажутся мужчинами?
54. В цехе работают 10 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу выбраны 2 человека. Какова вероятность того, что выбранные люди окажутся женщинами?
55. В цехе работают 10 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу выбраны 2 человека. Какова вероятность того, что выбраны мужчина и женщина?
56. Студент, идя на экзамен, знал ответы на 70 вопросов из 90. Какова вероятность того, что студент ответит верно на предложенные ему экзаменатором 2 вопроса?
57. Школьник, идя на зачет, знал 15 из 20 предложенных к зачету вопросов. Какова вероятность того, что ему на зачете достанутся три известных ему вопроса?

58. В урне находятся 4 белых и 7 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар окажется белым?
59. Из коробки, в которой имеется 4 желтых, 4 синих и 6 красных карандашей наудачу берут один карандаш. Какова вероятность того, что карандаш синий или красный?
60. В читальном зале есть 12 учебников по теории вероятностей, среди которых 4 новых. Наудачу берем 2 учебника. Найти вероятность того, что оба учебника новые.

ВОПРОСЫ

к экзамену по математике (150 – 152, 155, 156, 157 гр.)

1. Множество. Виды множеств, определения, примеры.
2. Подмножество. Разность множеств, равенство множеств.
3. Пересечение и объединение множеств. Определение, свойства, примеры.
4. Диаграммы Эйлера-Венна как геометрическая иллюстрация операций над множествами.
5. Числовые множества, множество комплексных чисел.
6. Операции сложения, вычитания, умножения и деления на множестве комплексных чисел.
7. Тригонометрическая форма комплексного числа.
8. Операции возведения в степень и извлечения корня n-й степени из комплексного числа.
9. Прямоугольная декартова система координат.
10. Полярная система координат.
11. Формулы перехода от полярных к прямоугольным координатам; от прямоугольных к полярным координатам.
12. Длина отрезка, площадь треугольника, деление отрезка в заданном отношении.
13. Прямая линия на плоскости, виды уравнений прямой.
14. Основные задачи на прямую.
15. Кривые второго порядка: окружность.
16. Кривые второго порядка: эллипс.
17. Кривые второго порядка: гипербола.
18. Кривые второго порядка: парабола.
19. Матрицы, виды матриц, основные элементарные преобразования строк и столбцов матриц.
20. Определители второго и третьего порядков.
21. Операции над матрицами: $A-B,\ A+B,\ \lambda\cdot A, \lambda\in R$, $A\cdot B$.
22. Решение систем трех линейных уравнений с тремя переменными: метод Крамера.
23. Решение систем трех линейных уравнений с тремя переменными: метод Гаусса.
24. Решение систем трех линейных уравнений с тремя переменными: матричный метод.
25. Шифрование и математика.
26. Основные формулы комбинаторики (виды комбинаций).
27. Основные понятия теории вероятностей, вероятность события, виды событий.
28. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
29. Высказывания и операции над ними.
30. Формулы алгебры высказываний. Тавтологии. Равносильность формул.
31. Методы решения текстовых логических задач.

32. Модели. Виды моделей. Применение.
33. Задачи линейного программирования. Основные понятия.
34. Игры. Виды игр. Основные понятия теории игр. Применение теории игр в жизни.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гарднер М. Путешествие во времени/Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.
2. Грес П.В. Математика для гуманитариев: Учебное пособие. – М.: Логос, 2003.
3. Грузман М.З. Логические игры с калькулятором: Кн. для учащихся 8-10 кл. сред. шк./ Под ред. И.Ф. Тесленко. – М.: Просвещение, 1989.
4. Ивин А.А. Практическая логика: Задачи и упражнения. – М.: Просвещение, 1996.
5. Математика и информатика: Учебник для студентов гуманитарных факультетов педагогических вузов/ Под ред. В.Д. Будаева, Н.Л. Стефановой. – СПб.: Издательство РГПУ им. А.И. Герцена, 2001.
6. Никольская И.Л. Знакомство с математической логикой. – М.: Московский психолого–социальный институт: Флинта, 1998.
7. Шипачев В.С. Высшая математика: Учеб. для немат. спец. вузов/ Под ред. акад. А.Н. Тихонова. – 2-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 1990.
8. Шолохович Ф.А., Васин В.В. Основы высшей математики: Учебник для вузов. – 2-е изд., испр. и доп. – Екатеринбург: Уральское изд-во, 2003.

Анастасия Валерьевна Чернышова

МАТЕМАТИКА

Методические указания
для практических занятий по курсу «Математика»
для студентов специальностей
(031700, 031800, 022300, 033100)

Подписано к печати		Бумага типа № 1
Формат 60×84 1/16	Усл. п.л.	Уч. изд. л.
Заказ	Тираж 150 экз.	Цена свободная

Издательство Курганского государственного университета.
640669, г.Курган, ул.Гоголя, 25.
Курганский государственный университет, ризограф.