МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра математического анализа

Педагогические тесты достижений по теме «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

Учебно-методическая разработка по разделу
математического анализа для студентов I курса
(специальности 010101, 050201)

Курган 2009

Кафедра математического анализа

Дисциплина: «Математический анализ» (специальности 010101, 050201)

Составил: доцент, канн. пед. наук А. Е. Мухин

Составлена на основании ГОС ВПО для специальностей 010101, 050201 «Математика» (2000 г.)

Утверждена на заседании кафедры «16» сентября 2009 г.

Рекомендована методическим советом университета «5» октября 2009 г.

Введение

Предлагаемая разработка содержит систему четырехуровневых педагогических тестов достижений по теме «Дифференциальное исчисление функций одной переменной».

Она может быть использована для контроля и диагностики качества усвоения знаний, а также для организации дифференцированного обучения студентов.

Для организации работы с тестами материал разбит на восемь подтем, по каждой из которых составлены тесты четырех уровней.

В тестах I уровня требуется из данных ответов выбрать правильный (не обязательно один!) или классифицировать предлагаемые объекты по определенным группам. Они позволяют проверить усвоение материала на уровне узнавания основных понятий и свойств.

Тесты II уровня содержат тестовые задачи – задачи для проверки усвоения базовых знаний и умений: знание формулировок и доказательства теорем; умение применять теоремы в стандартных ситуациях и т. п.

В тестах III уровня задания усложняются за счет нестандартности ситуаций, в которых требуется применить изучаемую теорию. При решении задач III уровня необходимо использовать некоторые эвристические приемы.

Тесты IV уровня требуют некоторого исследования, применения усвоенных знаний и умений в новой для студента ситуации.

В зависимости от особенностей группы студентов обязательным можно считать усвоение знаний на I – II или I – III уровнях. Задания тестов IV уровня могут быть использованы для индивидуальной работы со студентами.

Материал считается усвоенным на данном уровне, если верно выполнено не менее 70 % заданий.

Федеральный компонент государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по специальностям 010100 и 050201 (2000 г.) предусматривает следующий обязательный минимум содержания по теме «Дифференциальное исчисление функций одной переменной».

Дифференциалы и производные: дифференцируемость функции в точке; производная функции в точке, дифференциал и их геометрический смысл; механический смысл производной; правила дифференцирования; производные и дифференциалы высших порядков; формула Лейбница. Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения: теоремы Ролля, Лагранжа, Коши о конечных приращениях, локальная формула Тейлора; асимптотические разложения элементарных функций; формула Тейлора с остаточным членом; применение дифференциального исчисления к исследованию функций; признаки постоянства, монотонность, экстремумы, выпуклость, точки перегиба, раскрытие неопределенностей, геометрические приложения.

Студент должен знать: определение производной функции в точке, геометрический и механический смысл производной функции в точке; определение дифференцируемости функции в точке, необходимое условие дифференцируемости функции в точке; необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке; определение дифференциала функции; геометрический и механический смысл дифференциала функции в точке; таблицу основных производных; правила дифференцирования суммы, произведения и частного; правила дифференцирования обратной и сложной функции; способ логарифмического дифференцирования; свойство инвариантности формы дифференциала функции; применения дифференциала в приближенных вычислениях; определения производных высших порядков; свойства производных n-го порядка; механический смысл производной II порядка; определения дифференциалов высших порядков; понятие параметрически заданных функций и правила дифференцирования параметрически заданных функций; уравнения касательной и нормали к графику функции; формулировки и доказательства теорем Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши; правила Лопиталя для раскрытия неопределенностей; признаки постоянства, возрастания и убывания функции; понятия максимума и минимума функции; необходимые условия экстремума функции; достаточные условия максимума и минимума функции; понятия наибольшего и наименьшего значений функции на промежутке; понятие выпуклой (вогнутой) функции; достаточное условие выпуклости (вогнутости) функции; понятие точки перегиба графика функции; необходимые условия точки перегиба; достаточные условия точки перегиба; определение асимптоты и виды асимптот графика функции; общую схему построения графика функции.

Студент должен уметь: находить производную функции в точке по определению; решать задачи, приводящие к понятию производной; находить производные основных элементарных функций; находить производные суммы, произведения и частного функций; производные обратной и сложной функций; находить производную показательно-степенной функции; находить дифференциал функции; доказывать необходимое условие дифференцируемости функции в точке; доказывать необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке; приводить примеры функций, непрерывных, но не дифференцируемых в точке; доказывать свойство инвариантности формы дифференциала функции; применять дифференциал функции в приближенных вычислениях; находить производные параметрически заданных функций; производные и дифференциалы высших порядков; доказывать свойства производных высших порядков; нарушение свойства инвариантности формы дифференциала II порядка; доказывать теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши; приводить контрпримеры на эти теоремы; доказывать признаки постоянства и монотонности функции на промежутке; исследовать функции на монотонность; доказывать необходимые условия экстремума функции; достаточные условия экстремума функции; исследовать функции на экстремум; находить наименьшее и наибольшее значения функции на промежутке; доказывать достаточные условия выпуклости и вогнутости функции на промежутке; исследовать функции на выпуклость и вогнутость; доказывать необходимые условия точки перегиба графика функции; достаточные условия точки перегиба; исследовать функции на перегиб; находить асимптоты графика функции; раскрывать неопределенности, используя правила Лопиталя; находить уравнения касательной и нормали к графику функции; строить график функции, используя общую схему построения графика функции.

Подтемы, на которые разбита тема «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»:

I. Производная функции в точке. Дифференцируемость функции.
II. Условия дифференцируемости функции. Основные правила дифференцирования.
III. Производные основных элементарных функций. Техника дифференцирования.
IV. Геометрический и физический смысл производной.
V. Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков.
VI. Основные теоремы дифференциального исчисления.
VII. Применение производной к вычислению пределов. Правила Лопиталя.
VIII. Применение производных к исследованию функций и построению графиков.

I. Производная функции в точке. Дифференцируемость функции

Тест I уровня

1. Если две переменные связаны соотношением $x=\varphi(t)$, то отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при фиксированном Δt выражает:

   а) мгновенную скорость изменения функции x в некоторой точке t_0;

   б) среднюю скорость изменения функции x на промежутке $[t_0;\ t_0+\Delta t]$ $[t_0+\Delta t;\ t_0]$;

   в) угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $x=\varphi(t)$ в точке $(t_0;\ \varphi(t_0))$;

   г) угловой коэффициент секущей, проведенной к графику функции $x=\varphi(t)$ через точки $(t;\ x)$ и $(t_0;\ \varphi(t_0))$.

2. Касательная к графику функции в заданной точке M_0 – это:

   а) прямая, имеющая с графиком функции одну общую точку – точку касания;

   б) предельное положение секущей MM_0, когда точка M стремится к точке M_0, двигаясь по графику функции;

   в) прямая, имеющая с графиком функции одну общую точку M_0 и график функции расположен по одну сторону от нее;

   г) прямая, к которой стремится секущая MM_0.

3. Если материальная точка движется по закону $S=S(t)$ прямолинейно и неравномерно, то:

   а) скорость ее движения в любой точке траектории движения можно определить по формуле $V=\frac{S}{t}$;

   б) мгновенную скорость движения материальной точки в момент $t=t_0$ можно определить по формуле $V=\frac{\Delta S}{\Delta t}$;

   в) в этом случае различают мгновенную и среднюю скорости движения точки;

   г) мгновенная скорость движения точки в момент времени $t=t_0$ есть величина, к которой стремится отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$.

4. Если функция $f(x)=\sqrt[5]{x}$, то ее производная в точке $x_0=3$, согласно определению, находится по формуле:

   а) $\lim\limits_{x\to 3}=\dfrac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{x-3}$;

   б) $\lim\limits_{x\to 3}=\dfrac{\sqrt[5]{x+3}-\sqrt[5]{3}}{x-3}$;

   в) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}=\dfrac{\sqrt[5]{3+\Delta x}-\sqrt[5]{\Delta x}}{\Delta x}$;

   г) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}=\dfrac{\sqrt[5]{3+\Delta x}-\sqrt[5]{3}}{\Delta x}$;

5. Используя конспект лекции или учебник, проверьте, правильно ли вы выполнили задания 1 – 4.

Тест II уровня

1. Сформулируйте и решите задачу:

а) о нахождении мгновенной скорости прямолинейного неравномерного движения;

б) о проведении касательной к графику функции в данной точке;

в) о нахождении линейной плотности неоднородного стержня по известной его массе;

г) о нахождении силы переменного тока по известному количеству электричества.

2. Сформулируйте определения:

а) средней плотности стержня на отрезке $[x_0; x_0+\Delta x]$; плотности стержня в точке x_0, если стержень неоднороден и его масса $m=m(x)$;

б) средней скорости растворения соли за промежуток времени $[t_0; t_0+\Delta t]$;

скорости растворения соли в момент времени $t=t_0$, если закон растворения соли имеет вид $x=x(t)$;

в) средней скорости изменения температуры за промежуток времени $[t_0; t_0+\Delta t]$;

скорости изменения температуры в момент времени $t=t_0$, если температура изменяется по закону $T=T(t)$;

г) средней скорости химической реакции за промежуток времени $[t_0; t_0+\Delta t]$;

д)скорости химической реакции в момент времени $t=t_0$, если химическая реакция происходит по закону $Q=Q(t)$.

3. Производная функции $f(x)$ в точке x_0 – это:

а) число;

б) функция;

в) вектор;

г) скаляр.

4. Какие ограничения на Δx накладываются при определении производной функции в точке x_0:

а) $\Delta x > 0$;

б) $\Delta x \geq 0$;

в) $\Delta x < 0$;

г) $\Delta x \leq 0$;

д) $\Delta x \neq 0$;

е) $x_0+\Delta x \in D(f)$;

ж) $f(x)$ – непрерывна на $(x_0 - \Delta x; x_0+\Delta x)$.

5. Выберите из предлагаемых функций те, которые дифференцируемы в точке $x_0=1$:

а) $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)$;

б) $f(x)=\frac{1}{2}|x-1|$;

в)f(x)=$\begin{cases} x^2-1, x\le 1, \\ x-1, x>1; \end{cases}$

г) f(x)=$\begin{cases} x^2-1, x\le 1, \\ x^3-1, x>1. \end{cases}$

6. а) сформулируйте определение дифференцируемости функции в точке;

б) сформулируйте определение производной функции в точке;

в) запишите алгоритм нахождения производной функции в точке по определению;

г) найдите производную функции f(x)=$\sqrt{x^2-3}$ в точке x_0=2 по определению.

7. Приведите пример функции:

а) не имеющей производной в некоторой точке;

б) производная которой на всей области определения постоянна;

в) производная которой на всей области определения равна 0;

г) не имеющей производной в некоторой точке, но непрерывной в этой точке.

Тест III уровня

1. Докажите, что если функция f(x) – четная и дифференцируема в точке x_0=0, то $f'(0)$=0.

2.Что можно сказать о четности (нечетности) производной нечетной и дифференцируемой на множестве R функции f(x)? Сформулируйте и докажите соответствующее утверждение.

3. Докажите, что если функция f(x), дифференцируемая на R, является периодической, то ее производная также является периодической функцией с тем же периодом.

4. Исследуйте на дифференцируемость функцию f(x) в точке x_0:

а) f(x)= $\begin{cases} x^2, x\le 0, \\ 2x+1, x>0, \end{cases}$ x_0=0;

б)f(x)= $\begin{cases} x^2, x<0, \\ \sin x, x\ge 0, \end{cases}$ x_0=0;

в)f(x)= |lnx|, x_0=1;

г) f(x)= $\begin{cases} x\,arctg\frac{1}{x}, x\ne 0, \\ 0, x=0, \end{cases}$ x_0=0.

5. Известно, что $f'(x)$ – периодическая функция. Что можно сказать о периодичности f(x)? Ответ обоснуйте.

6. Определите, какими должны быть a и b, чтобы функция f(x)=$\begin{cases} x^3, x\le x_0, \\ ax+b, x>x_0 \end{cases}$ была непрерывной и дифференцируемой в точке x_0.

7. Докажите, что функция f(x)=$\begin{cases} \sin x, x \in Q, \\ x, x \in J \end{cases}$ дифференцируема в точке x_0=0.

Тест IV уровня

1. Постройте пример функции, дифференцируемой в точках x_1=0, x_2=1, x_3=2 и не дифференцируемой во всех остальных точках числовой прямой.

2. Докажите, что функция f(x)= $\begin{cases} x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|, x \neq 0, \\ 0, x = 0 \end{cases}$ не дифференцируема во всяком интервале (– ε; ε), ε>0, кроме точки x_0=0.

3. Докажите, что если f(x) дифференцируема на R и для любых x_1, $x_2 \in$ R $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$, то f'(x)=const $\forall$ $x\in$ R.

4. Докажите, что если f(x) дифференцируема на R и для любых x_1, $x_2 \in$ R $f(x_1 * x_2)=f(x_1)*f(x_2)$, то f(x)=$e^{\alpha x}$ или f(x)$\equiv$0.

5. Докажите или опровергните утверждение: если f(x) имеет производную в точке x_0, то она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки.

II. Условия дифференцируемости функции. Основные правила дифференцирования

Тест I уровня

1.Непрерывность функции является для ее дифференцируемости условием:

а) необходимым;

б) достаточным;

в) необходимым и достаточным;

г) ни необходимым, ни достаточным.

2. Из предложенных равенств выберите верное:

а) (f(x)*g(x))' $= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

б) $(f(x_0) + g(x_0))' = f'(x_0) + g'(x_0)$;

в) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x=x_0} = \frac{f^1(x_0) \bullet g(x_0) - f(x_0) \bullet g^1(x_0)}{g^2(x_0)}$

г) $(f(x) * g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

3. Выберите дифференцируемые в точке x_0 функции, если их приращения в точке x_0 имеют вид:

а) $\Delta f(x_0) = \Delta x(a + \Delta x)$,где α не зависит от Δx ;

б) $\Delta g(x_0) = g'(x_0) * \Delta x + \Delta x^4$;

в) $\Delta \varphi(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2$;

г) $\Delta \hbar(x_0) = (3x_0^2 + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3) * \Delta x$.

4.Функция f(x)дифференцируема в точке x_0, если:

а) существуют $f'(x_0-)$ и $f'(x_0+)$;

б) функция является непрерывной в точке x_0;

в) существуют $f'(x_0-)$ и $f'(x_0+)$ и $f'(x_0-)=f'(x_0+)$;

г) существует $f'(x_0)$.

5. Выберите промежуток, на котором к функции f(x)=sinx можно применить теорему о существовании и дифференцируемости обратной функции:

а) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

б) [0; π];

в) [–2; 2];

г) (–2; 2).

Тест II уровня

1. Сформулируйте и докажите теорему о связи дифференцируемости и непрерывности функции в точке.

2. Сформулируйте и докажите или опровергните обратную по отношению к теореме пункта 1 теорему.

3. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

4. Используя необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке, выберите из предложенных функций те, которые дифференцируемы в точке x_0:

а) $f(x)=3x^2+4x-1$, $x_0=2$;

б) $f(x)=\begin{cases} x^2, x\in Q, \\ -x^2, x\in J, \end{cases}$ $x_0=0$;

в) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $x_0=0$;

г) $f(x)=|x-1|$, $x_0=1$.

5. Сформулируйте теоремы о дифференцировании суммы, произведения и частного функций. Докажите одну из них.

6. Пользуясь правилами дифференцирования, найдите:

а) $(f(x)*g(x))'$, если $f(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$, $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$;

б) $f'(-1)$, если $f(x)=\dfrac{3x^2-2x+1}{7x+1}$;

в) $f'(x)$, если $f(x)=x\left(\dfrac{x^2}{3}+1\right)+\dfrac{x^2}{x^2+1}-14$.

7. Сформулируйте и докажите теорему о дифференцировании обратной функции. Найдите с помощью этой теоремы производную функции $f(x)=a^x$, если известно, что $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$.

8. Расставьте стрелки, выражающие причинно-следственную связь между понятиями:

$f(x)$ непрерывна в точке x_0	$f(x)$ дифференцируема в точке x_0
$f(x)$ разрывна в точке x_0	$f(x)$ не дифференцируема в точке x_0

9. Сформулируйте и докажите теорему о дифференцировании сложной функции. Используя ее, найдите производную функции $f(x) = \ln \arcsin \sqrt{1-x^2}$.

<u>Тест III уровня</u>

1. Сформулируйте и докажите теоремы о дифференцировании функций:

а) $U(x)+V(x)+W(x)$;

б) $U(x)*V(x)*W(x)$;

в) $\dfrac{U(x)*V(x)}{W(x)}$;

г) $\dfrac{U(x)}{V(x)*W(x)}$.

2. Докажите теорему о дифференцировании произведения любого конечного числа функций.

3. Докажите или опровергните следующие утверждения:

а) если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а g(x) не дифференцируема в точке x_0, то $f(x)$+ g(x) не имеет производной в точке x_0;

б) если $f(x)$ и g(x) не дифференцируемы в точке x_0, то $f(x)$+ g(x) не дифференцируема в точке x_0;

в) если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а g(x) не дифференцируема в точке x_0, то $f(x)$ *g(x) не имеет производной в точке x_0;

г) если $f(x)$ и g(x) не дифференцируемы в точке x_0, то $f(x)$ *g(x) не дифференцируема в точке x_0.

4. Найти производные функций:

а) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$;

б) $f(x) = \cos ax * \sin bx$;

в) $f(x) = tgx + \frac{1}{3}tg^3x + \frac{3}{5}tg^5x + \frac{2}{7}tg^7x$;

г) $f(x) = e^{ax}\cos bx$;

д) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;

е) $f(x)=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}$;

ж) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$;

з) $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}+a\cdot\arcsin\frac{a}{x}$

5. С помощью дифференцирования найдите формулы для $\cos 2x$, sin(x+a), sin3x, если известны формулы для sin2x, cos(x+a), cos3x.

6. Докажите, что функция $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ удовлетворяет соотношению $f(x)=xf'(x)+\frac{1}{2}\ln 2f'(x)$.

Тест IV уровня

1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на (a; b). Докажите или опровергните следующие утверждения:

а) если $f(x)<g(x)$, то $f'(x)\le g'(x)$ на (a; b);

б) если $f'(x)\le g'(x)$, то $f(x)<g(x)$ на (a; b);

в) если $f(a)=g(a)$ и $f'(x)<g'(x)$ на (a; b), то $f(x)<g(x)$ на (a; b).

2. Постройте пример функции непрерывной в точке x_0 и не имеющей в этой точке ни левой, ни правой производной.

3. Постройте пример функции, имеющей в точке разрыва бесконечную отрицательную производную.

4. Дана функция $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$. Найдите такое δ>0, что при всех Δx, для которых $|\Delta x|<\delta$ и при всех $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ выполняется неравенство:

$$\left|f'(x)-\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|<0{,}01.$$

III. Производные основных элементарных функций. Техника дифференцирования

Тест I уровня

1. Выпишите элементарные функции, из которых составлена сложная функция $f(x)=ctg^3\ln\sqrt{x^2+1}$, и запишите цепочку для нахождения ее производной.

2. Укажите для функций y = tg x, y = sin x, y = arctg x, y =ctg x, y = arccos x, y = cos x их производные среди функций:

а) $y=\frac{1}{1+x^2}$; б) $y=-\frac{1}{sin^2x}$; в) $y=-\cos x$;

г) $y = -\sin x$; д) $y = \cos x$; е) $y = -\frac{1}{\cos^2 x}$;

ж) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; з) $y = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; и) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Производная функции $f(x) = e^{2\pi}$ равна:

а) $2\pi\, e^{2\pi-1}$; б) $e^{2\pi}$;

в) 0; г) $2\, e^{2\pi}$.

4. Из предложенных промежутков выберите области определения функции f(x) = arcsin x и ее производной:

а) $(0;\pi)$; б) $[0;\pi]$; в) (-1;1);

г) [-1;1]; д) $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$; е) $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$; ж) $\boldsymbol{R}$.

5. Выберите из указанных функций показательные, степенные, показательно–степенные:

а) $y = 4x^2$; б) $y = 4^{2x}$; в) $y = \sqrt{x}$;

г) $y = x^{2x}$; д) $(\cos x)^{\sin x}$.

Укажите области их определения.

Тест II уровня

1. Выведите формулы для нахождения производных обратных тригонометрических функций.

2. Сформулируйте и докажите теорему о дифференцировании сложной функции.

3. Запишите таблицу производных для сложных функций, взяв в таблице производных основных элементарных функций вместо переменной x функцию от x.

4. Найдите производную функции $y = x^{\alpha} (\alpha \in R, x > 0)$, представив ее как композицию функций $y = e^{z}$, $z = \alpha \ln x$.

5. Найдите производные функций:

а) $y = \ln|f(x)|, f(x) \neq 0$;

б) $y = f(\arcsin(g(x))), |g(x)| < 1$;

в) $y = \sqrt[n]{f^2(x) + g^2(x)}$;

г) $y = (f(x)^{g(x)}, f(x) > 0$,

где $f(x)$ и g(x) – функции, дифференцируемые на R.

6. Найдите производные функций:

а) $f(x) = arcctg\, sin^3 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$,

б) $f(x) = (x^2 + 3x + 4)\, tg\frac{2}{x} + arccos^2 \frac{1}{\sqrt{x}}$.

7. Укажите области определения функций:

а) $f(x) = x^{\cos x}$;

б) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}\ \sin^2 x \cdot 3^x$

и определите их производные, используя метод логарифмического дифференцирования.

8. Сформулируйте и докажите теорему о дифференцировании параметрически заданной функции.

9. Найдите производные параметрически заданных функций:

а) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = e^{\alpha t}\cos\beta t, \\ y = e^{\alpha t}\sin\beta t; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = t^2 - 3t + 4, \\ y = t^2 - 4t + 4. \end{cases}$

Тест III уровня

1. Для каждой из функций найдите точки, в которых производная не существует:

а) $f(x) = \sqrt{1 - \cos 2x}$;

б) $f(x) = \ln|x^2 - 4x + 3|$;

в) $f(x) = \arcsin(\sin x)$;

г) $f(x) = \arccos\frac{1}{x}$.

Найдите в этих точках левую и правую производную.

2. Найдите производную функции $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0$, рассматривая ее как обратную к функции $a^x, a > 0, a \neq 1, x \in \mathrm{R}$

3. Выведите формулу для производной cos x, используя равенство $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$.

4. Выведите формулу для производной arccos x, используя равенства $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ и $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Докажите что функция $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ удовлетворяет уравнению $(1 - x^2)f'(x) - xf(x) = 1$.

6. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ в точке x_0=0, предварительно упростив выражение производной.

7. Найдите производную функции $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$, используя наиболее рациональный способ ее вычисления.

Тест IV уровня

1. Постройте пример дифференцируемой функции, производная которой не ограничена в окрестности точки разрыва.

2. Имеет ли производную в точке $x_0=0$ функция $f(x) = \sin|x|$? Композицией каких функций она является? Приведите подобные примеры сложных функций и исследуйте эти функции на дифференцируемость.

IV. Геометрический и физический смысл производной

Тест I уровня

1. Из утверждений, относящихся к рис.1, выберите истинные:

а) $K_{кас} = \frac{MK}{M_0K}$; б) $K_{кас} = \operatorname{tg} \beta$;

в) $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$; г) $K_{кас} = f'(x_0) = tg\ \alpha$.

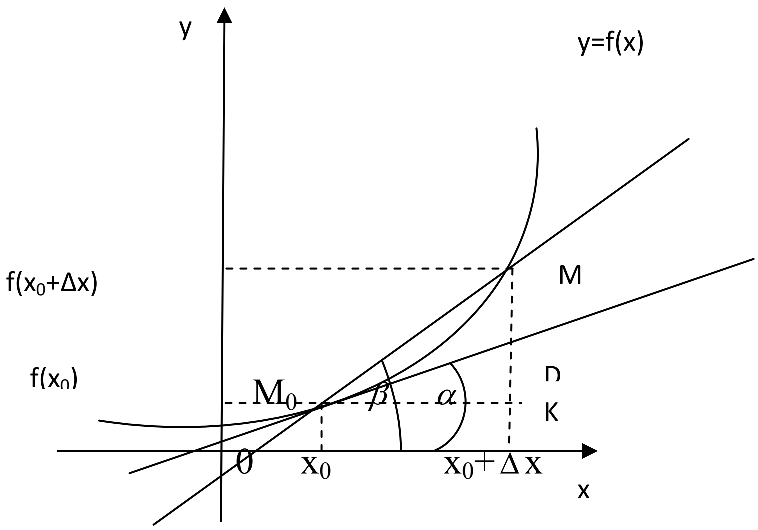


Рис. 1

2. Из предложенных функций выберите те, касательные к графикам которых в точке с абсциссой x_0 образуют с положительным направлением оси ОХ острый угол:

а) $f(x) = (1-x)^3, x_0 = 3;$

б) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}, x_0 = 2;$

в) $f(x) = \cos x, x_0 = -\frac{\pi}{4};$

г) $f(x) = e^{2x}, x_0 = -3.5.$

3. Для функций, представленных графиками на рис.2, укажите значения аргумента, при которых производные этих функций :

а) равны нулю;

б) больше нуля;

в) меньше нуля.

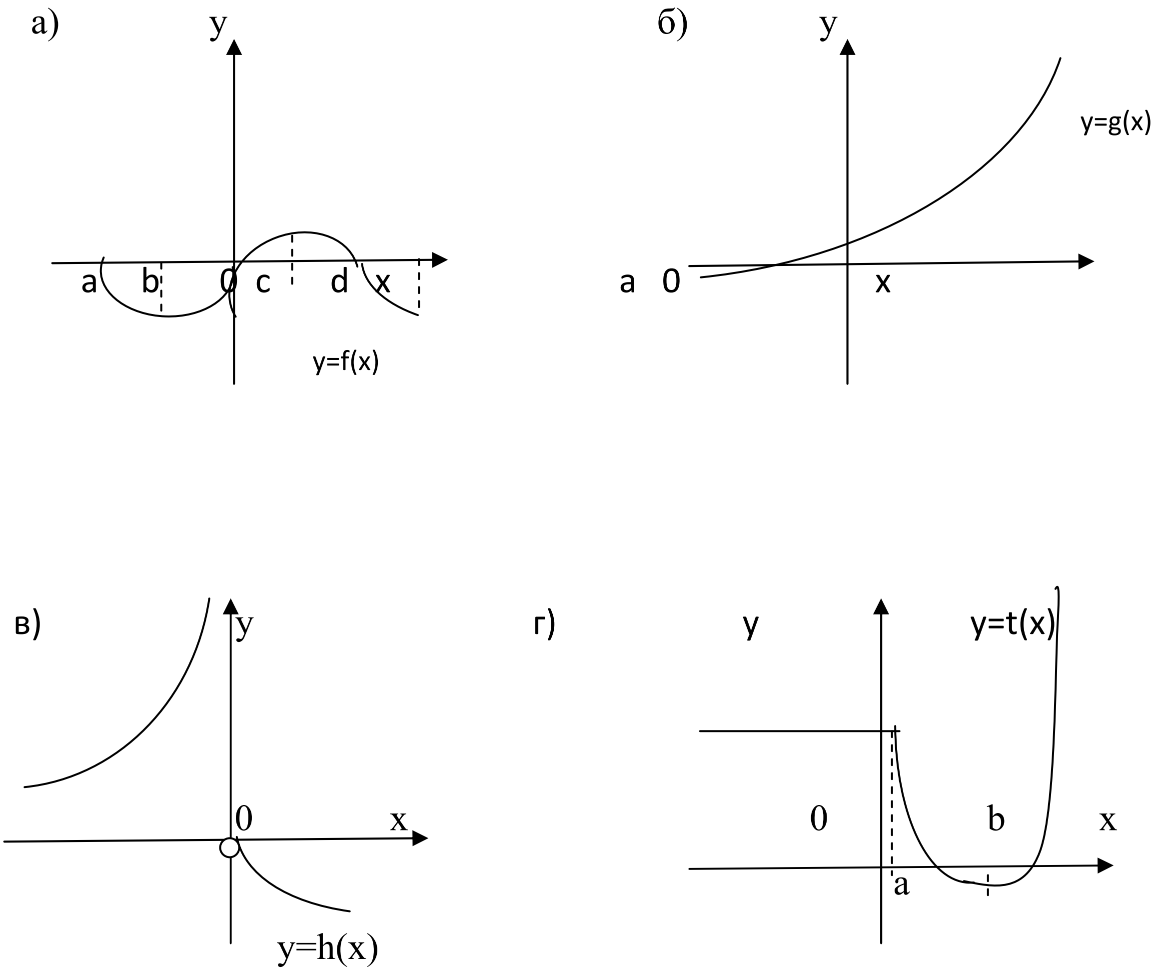


Рис. 2

4. Объедините в пары предложенные физические величины, указав в каждой из них функцию и соответствующую ей производную:

а) угловая скорость;
б) масса вещества;
в) мгновенная скорость;
г) сила тока;
д) плотность вещества;
е) координаты точки;
ж) количество электричества;
з) угол поворота.

5. Если на рис. 3 изображен график зависимости массы стержня m (кг) от его длины l (м), то линейная плотность стержня в точке, отстоящей от его начала на 4 м, равна:

а) 1кг/м; б)2 кг/м;
в) 4 кг/м; г) 8кг/м.

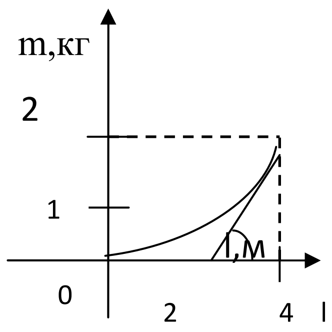


Рис.3

Тест II уровня

1. Приведите геометрическую и физическую интерпретации производной функции в точке.

2. Выведите уравнение касательной к графику функции в данной точке.

3. Выведите уравнение нормали к графику функции в данной точке.

4. Приведите примеры функций, графики которых имеют в данной точке:

а) горизонтальную касательную;

б) вертикальную касательную.

5. Напишите уравнения касательной и нормали к графику функции $f(x) = x \cdot \ln x$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. Постройте соответствующий чертеж.

6. Найдите на графике функции $f(x) = tg^2(3x-4)$ точки, в которых касательная к нему параллельна оси ординат.

7. Изобразите зависимость силы тока от времени на графике, если известна графическая зависимость количества электричества от времени (рис.4). Ответ обоснуйте.

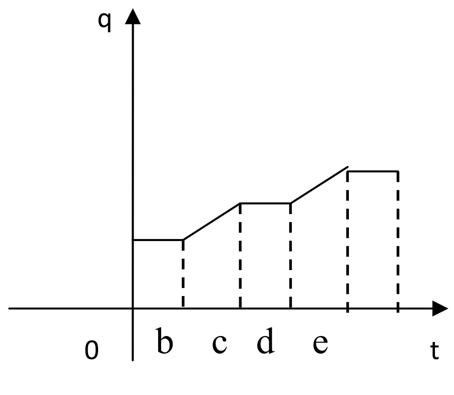


Рис.4

8. Найдите линейную плотность тонкого неоднородного стержня АВ длиной 20 см:

а) в точке Д: АД = 5см;

б) в точке А;

в) в конце стержня, если известно, что для любой точки С, отстоящей от точки А на l см масса куска стержня АС в граммах равна $m = 3l^2 + 5l$.

9. Распад радия совершается по закону $m = m_0 e^{-kt}$, где m_0 - масса радия в начальный момент времени t = 0, m - масса нераспавшегося радия в момент времени t.

а) определите закон зависимости скорости распада радия от времени.

б) докажите, что скорость распада радия пропорциональна наличному количеству радия.

в) найдите коэффициент пропорциональности k, зная, что период полураспада радия равен T.

10. Закон движения материальной точки, брошенной под углом α к горизонту с начальной скоростью ϑ_0 без учета сопротивления воздуха, имеет вид:

$$\begin{cases} x = t \cdot \vartheta^0 \cdot \cos\alpha, \\ y = t \cdot \vartheta_0 \cdot \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Найдите координаты вектора скорости и величины скорости материальной точки.

Тест III уровня

1. Определите, под каким углом пересекаются графики функций $f_1(x) = 8 - x$ и $f_2(x) = 4\sqrt{x+4}$.

2. Приведите примеры функций, удовлетворяющих заданным условиям, и постройте их графики:

а) $f(x)$ не имеет производной в некоторых точках своей области определения;

b) *в каждой точке области определения касательная* к графику функции совпадает с ним;

c) $f'(x) > 0$ на (a;b); $f'(x) = 0$ в точках $x_1 = b, x_2 = d$; $f'(x)$ не существует в точке $x_0 = c$; $f'(x) < 0$ на $(d;+\infty)$, $a < b < c < d$.

3. Докажите, что отрезок касательной к графику функции $f(x) = \frac{a}{x}$, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам. Укажите вытекающий из этого утверждения способ построения касательной в любой точке гиперболы. Постройте касательную к гиперболе $y = -\frac{6}{x}$ в точке $x_0 = 2$.

4. На параболе $y = x^2$ взяты точки с абсциссами $x_1 = -1, x_2 = 3$. Через эти точки проведена секущая. Определите, в какой точке касательная к параболе будет параллельна этой секущей.

5. Определите, при каком значении а кривые $y = x^3 - x + 1$ и $y = 3x^2 - 4x + a$ касаются друг друга.

6. Определите, при каких значениях a и b прямая $y = 7x - 2$ касается графика функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ в точке A (1;5).

7. Точка движется по кубической параболе $12y = x^3$. Какая из ее координат изменяется быстрее?

8. Лампа подвешена на высоте 12 м над прямой горизонтальной дорожкой, по которой движется человек ростом 1,8 м. Определите, с какой скоростью удлиняется его тень, если он удаляется от лампы со скоростью 50 м/мин.

9. Камень, брошенный в пруд, вызывает ряд концентрических волн. С какой скоростью возрастает площадь, захваченная волной, к концу второй секунды, если радиус волны возрастает со скоростью 2 м/с?

10. Составьте задачу, аналогичную задаче 3 предлагаемого теста и решите ее.

Тест IV уровня

1. Определите, в каких точках и под каким углом пересекаются графики функций: функций $f_1(x) = \varphi(x)$ и $f_2(x) = \varphi(x)\sin \pi x$, где $\varphi(x)$ – функция, дифференцируемая на множестве R.

2. Докажите, что семейства парабол $y^2 = p^2 - 2px$ и $y^2 = 2qx+q^2$ ($p \neq 0, q \neq 0$) образуют ортогональную сетку (т.е. кривые этих семейств пересекаются под прямыми углами).

3. Введите понятия правой и левой касательной к графику функции в данной точке. Приведите примеры. Найдите угол между правой и левой касательными, проведенными к графику функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ в точке M $(1;\frac{\pi}{2\sqrt{3}})$, убедившись, что они существуют и различны.

4. Составьте уравнения всех общих касательных к графикам функций $f(x) = x^2 - x + 1$ и $q(x) = 2x^2 - x + 0.5$.

5. Парабола с вершиной на оси OX касается прямой y = x в точке A (-1;-1). Найдите уравнение параболы.

6. Дана прямая $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + 4$. После поворота на некоторый острый угол вокруг точки M, лежащей на этой же прямой, прямая становится касательной к графику функции $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 18x - 7$ в точке с абсциссой x = -1. Найдите угол поворота и координаты точки M.

V. Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков

Тест I уровня

1. Из предложенных выражений выберите главную часть дифференцируемой в точке x_0 функции f(x):

а) $\alpha(\Delta x)\Delta x$, α (Δx)→0, при Δx →0;

б) $f'(x_0+\Delta x)-f(x_0)$;

в) $f'(x_0)$;

г) $f'(x_0)\Delta x, f'(x_0)\neq 0$.

2. Выберите истинное утверждение:

а) если функция дифференцируема n раз, то она дифференцируема (n+1) раз;

б) если функция дифференцируема n раз, то она дифференцируема (n-1) раз;

3. Дифференциал функции в точке с геометрической точки зрения означает:

а) приращение ординаты точки кривой, являющейся графиком функции;

б) приращение ординаты точки касательной к графику функции;

в) приращение абсциссы точки кривой, являющейся графиком функции;

г) тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс.

4. Если $f'(x)=const$ для любого $x\in\mathbb{R}$, то функция имеет вид:

а) $f(x)=e^{x}$

б)$f(x)=ax^2+bx+c$;

в) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$;

г) $f(x)=ax+b$.

5. Чем объясняется возможность использования формулы

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0):$$

а) близостью графика функции $f(x)$ в точке x_0 к касательной к нему с абсциссой в этой точке;

б) тем, что $f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ - главная часть дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$?

Тест II уровня

1. Приведите определение дифференциала функции в точке. Запишите формулу для его вычисления. Покажите, что дифференциал функции – главная часть приращения функции.

2. Поясните, на чем основана возможность применения дифференциала в приближенных вычислениях. Вычислите приближенно:

а) $(0{,}995)^6$;

б)$\sqrt{25{,}012}$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-0.02\right)$.

3. Изобразите геометрически дифференциал функции в точке. Что происходит с дифференциалом при уменьшении Δx?

4. Сформулируйте и докажите свойство инвариантности дифференциала I порядка.

5. Сформулируйте определения:

а) производной II порядка для функции $f(x)$;

б) производной k-го порядка для функции $f(x)$;

в) дифференциала II порядка для функции $f(x)$;

г) дифференциала k-го порядка для функции $f(x)$.

6. Найдите для функции $f(x) = 5^x$:

а) $f''(x)$; б) $f^{(k)}(x)$; в) $d^2 f(x)$; г) $d^k f(x)$.

7. Поясните, чем отличаются выражения dx^2 и d^2x. Приведите примеры.

8. Сформулируйте правила нахождения дифференциалов суммы, произведения и частного дифференцируемых функций. Докажите одно из них.

9. Докажите, что дифференциалы высших порядков свойством инвариантности формы не обладают. Найдите $d\,f(x)$ и $d^2 f(x)$ для функции $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$, если

а) x – независимая переменная;

б) x - функция от некоторой независимой функции.

10. Выведите формулы для производных n-го порядка функций:

а) $f(x) = \ln(x+1)$; б) $f(x) = 3^{2x}$.

Докажите справедливость полученных формул для любого натурального n методом математической индукции.

Тест III уровня

1. Постройте пример такой функции y, что $y'' = -\frac{1}{y^3}$.

2. Выясните, удовлетворяет ли функция $f(x) = 1 + \cos e^x + \sin e^x$ дифференциальному уравнению: $y'' - y' + e^{2x}y = 0$.

3. Найдите $\lim_{n\to\infty} \left|f^{(n)}(2)\right|$, если $f(x) = \frac{1}{x}$.

4. Выразите d^2y через:

а) z и его дифференциалы;

б) x и его дифференциалы;

в) t и его дифференциалы, если $y = \sin z$, $z = a^x$, $x = t^3$.

г) Материальная точка движется в вертикальной плоскости под углом α к плоскости горизонта с начальной скоростью ϑ_0.

1. Составьте уравнение ее движения (пренебрегая сопротивлением воздуха).

2. Определите скорость движения точки в любой момент времени t.

3. Определите ускорение движения точки в любой момент времени t.

4. Определите траекторию движения точки.

5. Найдите наибольшую высоту подъема точки.

6. Найдите дальность полета точки.

Тест IV уровня

1. Постройте пример функции, не являющейся постоянной, у которой приращение в некоторой точке равно ее дифференциалу в этой точке. Укажите общий вид таких функций. Сформулируйте и докажите соответствующее необходимое и достаточное условие.

2. Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной искомой функции, входящей в уравнение. Составьте уравнение 4-го порядка, которому удовлетворяла бы функция $f(x) = e^x \cos x$.

3. Функция $f(x)$ удовлетворяет соотношению:

$(ax^2 + bx + c) \cdot f''(x) + (dx + e)f'(x) + g \cdot f(x) = 0$, где a, b, c, d, e, g $\in \mathbf{Z}$.

Покажите, что все функции $f^{(n)}(x)$ удовлетворяют подобному соотношению. Замените аналогичное соотношение для функции $f'''(x)$.

4. Пусть $p_n(x) = e^{x^2} \cdot \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}$. Докажите:

1) $p'_n(x) = -2n \cdot p_{n-1}(x)$;

2) $p_{n+1}(x) + 2x \cdot p_n(x) + 2n \cdot p_{n-1}(x) = 0$;

3) $p_n(x) = p'_{n-1}(x) - 2x \cdot p_{n-1}(x)$.

5. Тело совершает колебания по закону $y = Ae^{-kt}\sin(wt + \alpha)$. Установите связь между координатой тела y, скоростью V и ускорением a.

VI. Основные теоремы дифференциального исчисления

Тест I уровня

1. Выберите утверждения, соответствующие теореме Ферма:

а) функция, достигающая на отрезке своего наибольшего значения и дифференцируемая на нём, имеет в некоторой его внутренней точке производную, равную нулю;

б) если функция имеет в точке **c** отрезка [a;b] наименьшее значение, то касательная к её графику, проведённая в этой точке, параллельна оси абсцисс;

в) если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке [a;b] и достигает на нём своего наибольшего (наименьшего) значения в некоторой точке $c \in [a;b]$, то $f'(c) = 0$;

г) касательная к графику функции $f(x)$, дифференцируемой на отрезке [a;b], параллельна оси абсцисс в некоторой точке $c \in (a;b)$, если в этой точке функция принимает наибольшее (наименьшее) значение на этом отрезке.

2. Измените условия теоремы Ролля, касающиеся непрерывности и дифференцируемости так, чтобы они не дублировали друг друга, и выберите соответствующую формулировку из предложенных:

а) пусть $f(x)$ определена на [a;b] и дифференцируема в (a;b);

б) пусть $f(x)$ определена и непрерывна на [a;b];

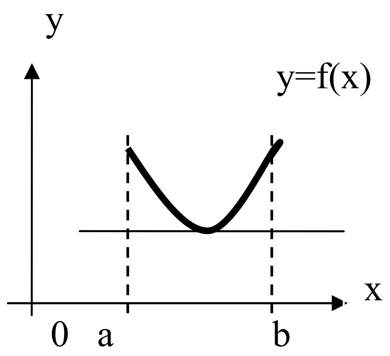
в) пусть $f(x)$ определена на [a;b], дифференцируема в (a;b) и непрерывна в точках a и b;

г) пусть $f(x)$ определена на [a;b], непрерывна в (a;b) и дифференцируема в точках a и b.

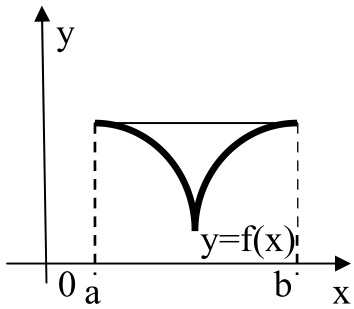
3. Верно ли, что если в теореме Лагранжа положить $f(a)=f(b)$, то получим теорему Ролля?

4. Выберите рисунок, который может иллюстрировать теорему Лагранжа:

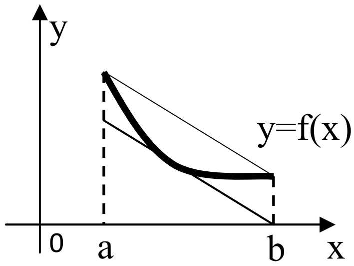
а)



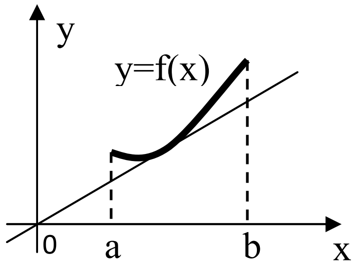
б)



в)



г)



<u>Тест II уровня</u>

1. Сформулируйте и докажите теорему Ферма. Приведите её геометрическую интерпретацию.

2. Обоснуйте существенность условия принадлежности точки с интервалу (a;b).

3. Сформулируйте и докажите теорему Ролля. Приведите геометрическую интерпретацию теоремы. Выделите факты (утверждения), на которые опирается доказательство теоремы Ролля.

4. Выясните, удовлетворяет ли функция $f(x)=\begin{cases}1\quad x^2, & x\le 0\\ 1-x^2, & x>0\end{cases}$ на отрезке [-1;1] условиям теоремы Ролля. В случае положительного ответа укажите точку $c\in(-1;1)$: $f'(c)=0$.

5. Установите, не противоречит ли теореме Ролля тот факт, что функция $f(x)=\frac{2-x^2}{x^4}$, принимая на концах отрезка [-1;1] равные значения, имеет на интервале (-1;1) производную $f'(x)\neq 0$.

6. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа. Приведите её геометрическую интерпретацию.

7. Выясните, удовлетворяет ли условиям теоремы Лагранжа на отрезке [-2;1] функция $f(x)=4-x^2$. Если ответ положительный, то найдите точку **с** на этом отрезке такую, что $f'(c)=(f(1)-f(-2))\cdot\frac{1}{3}$.

8. Сформулируйте и докажите теорему Коши. Выделите утверждения (факты), на которые опирается доказательство теоремы.

9. Установите, удовлетворяют ли условиям теоремы Коши на отрезке [-8;8] функции: $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sqrt[3]{x^2}$. Если да, то найдите на указанном отрезке точку **с**, удовлетворяющую формуле Коши.

<u>Тест III уровня</u>

1. Приведите примеры, подтверждающие существенность всех условий теоремы Ролля.

2. Исследуйте, при каких значениях a и b формула Лагранжа применима для функции $f(x)=\frac{1}{x}$ на отрезке [a;b].

3. Покажите, что теорема Коши является обобщением теоремы Лагранжа.

4. Расставьте стрелки, выражающие логическую взаимосвязь между теоремами:

Теорема Ферма	Теорема Коши
Теорема Лагранжа	Теорема Ролля

5. Постройте пример функции, удовлетворяющей на отрезке [-a;a] условиям теоремы Ролля, и найдите её среднее значение на этом отрезке.

6. Выясните, можно ли считать доказательством теоремы Коши следующее: если функции f(x) и g(x) удовлетворяют на отрезке [a;b] всем условиям теоремы Коши, то каждая из них на нём удовлетворяет и условиям теоремы Лагранжа; поэтому к каждой из них можно применить формулу Лагранжа:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a);\ g(b)-g(a)=g'(c)(b-a),\ a<c<b.$$

Разделив почленно первое равенство на второе, получим:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\ a<c<b.$$

Теорема доказана.

7. Составьте задачу на применение теоремы Коши и решите её.

Тест IV уровня

1. Докажите теорему: если функция f(x) имеет производную и не ограничена на конечном интервале (a;b), то f′(x) не ограничена на этом интервале. Приведите геометрическую интерпретацию теоремы. Какую теорему о среднем можно использовать при доказательстве?

2. Докажите неравенство $|\sin x_1 - \sin x_2| \le |x_1 - x_2|$ для любых x_1, $x_2 \in R$. Какую теорему о среднем можно использовать при доказательстве?

3. Докажите, что все корни производной многочлена

p(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) являются действительными. Укажите границы, между которыми заключены корни производной этого многочлена.

4. Докажите, что если f(x) дифференцируема на отрезке [a;b] и в точке c∈(a;b) f′(c)=0, то если при переходе через точку **c** производная меняет знак, то существует отрезок [α;β]: f(β)-f(α)=0. Приведите геометрическую интерпретацию этого факта.

VII. Применение производной к вычислению пределов. Правила Лопиталя

Тест I уровня

1. Укажите из перечисленных неопределённостей те, для раскрытия которых можно использовать правила Лопиталя:

а) $\frac{\infty}{\infty}$; б) $\frac{0}{0}$; в) $\frac{\infty}{0}$; г) $\frac{0}{\infty}$; д) $\infty - \infty$.

2. Можно ли использовать правила Лопиталя для раскрытия неопределённостей вида:

а) $0\cdot\infty$; б) $\infty - \infty$; в) 0^0; г) ∞^0; д) 1^∞?

3. Выберите из предложенных примеров неопределённости вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$:

а) $\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$, $x \to 0$;
г) $\frac{1}{x^2}$ - $\mathrm{ctg}^2\, x$, $x \to 0$;
б) $\frac{e^x + \sin x}{x + \sin x}$, $x \to +\infty$;
д) $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$, $x \to 0$;
в) $\mathrm{tg}\, x$ - $\frac{1}{1 - \sin x}$, $x \to \frac{\pi}{2}$;
е) $\frac{x + 2\ln x}{x}$, $x \to +\infty$.

4. Сформулируйте теорему, на которую опирается доказательство правила Лопиталя.

Тест II уровня

1. Сформулируйте правила Лопиталя для раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \to a$ ($x \to \infty$). Докажите одно из них.

2. Неопределённости какого вида могут быть раскрыты с помощью правил Лопиталя и каким образом? Опишите способ вычисления предела показательно-степенной функции.

3. Используя правила Лопиталя, вычислите:

а) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\cos x-1}$;

в) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x-\frac{1}{1-\sin x})$; г) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{\ln x})$.

4. Используя правила Лопиталя, раскройте неопределённости из п.3 теста I уровня.

5. Вычислите, используя правила Лопиталя:

а) $\lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$; б) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

в) $\lim_{x\to a}(2-\frac{x}{a})^{tg\frac{\pi x}{2a}}$; г) $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Тест III уровня

1. Сформулируйте условия, при которых имеют место равенства:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

2. Вычислите предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}.$$

3. Выясните, можно ли применить правило Лопиталя при вычислении предела: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}$. Найдите этот предел, если он существует.

4. Вычислите предел:

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x).$$

Тест IV уровня.

1. Докажите, что $\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x}$ существует и равен единице, но не может быть вычислен с помощью правила Лопиталя.

2. Найдите в точке x_0=0 производную функции

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

3. Сравните порядок роста при $x\to+\infty$ функций:

а) $f(x)=e^{\beta x}-1$, $\beta>0$;

б) $g(x)=(\ln x)^{\beta}$, $\beta>0$

с порядком роста степенных функций.

VIII. Применение производной к исследованию функций и построению графиков

Тест I уровня

1. Выберите из предложенных графиков тот, который изображает вид производной функции f(x), которая на $(-\infty;a)$ возрастает, на $[a;b]$ постоянна, на $(b;+\infty)$ убывает.

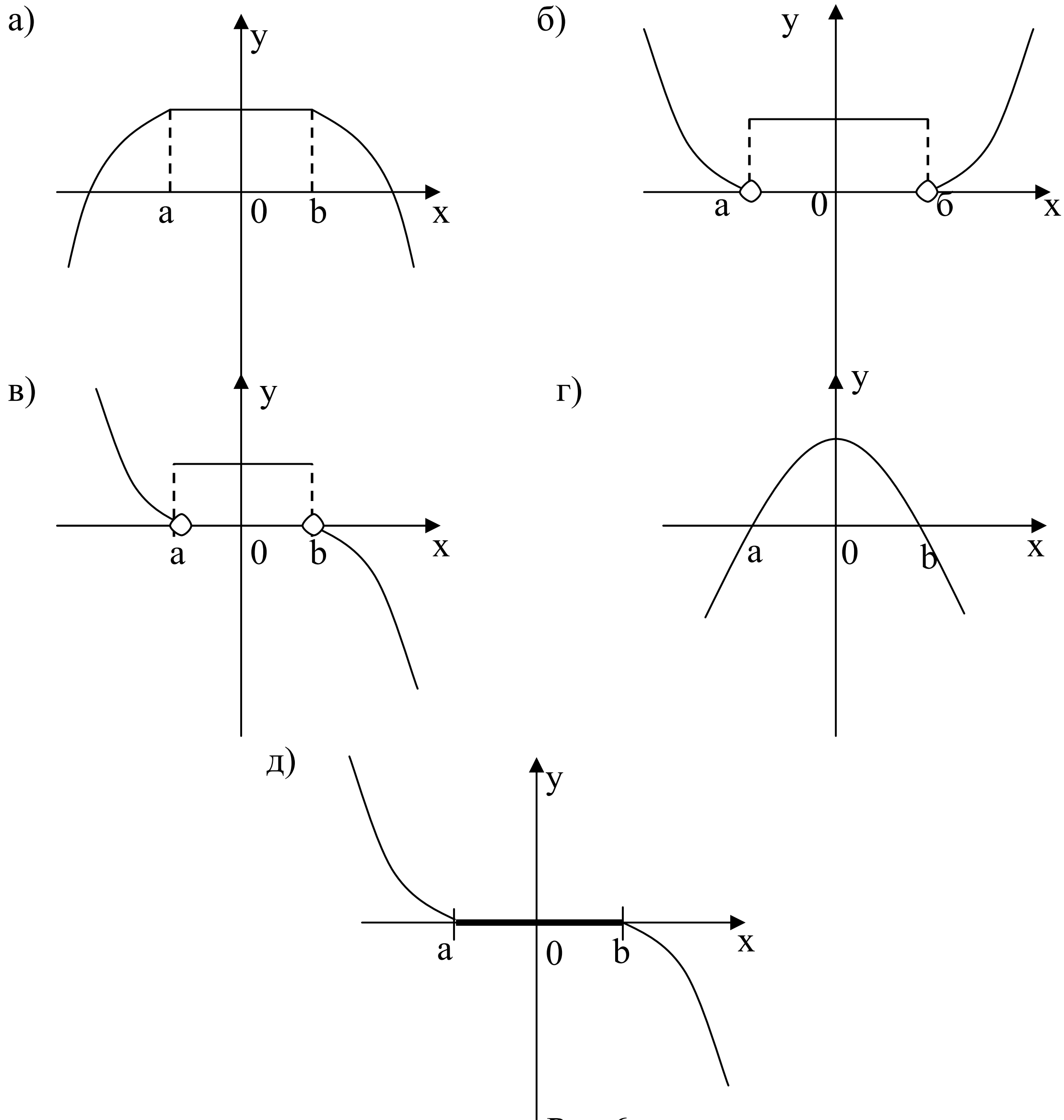
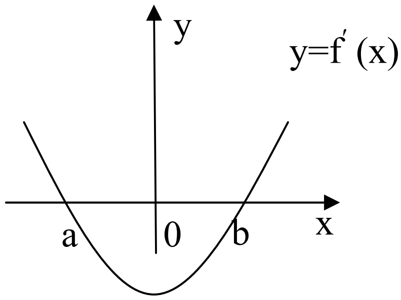


Рис.6

2. Из предложенных рисунков выберите тот, на котором изображён вид графика функции, если график её производной имеет вид



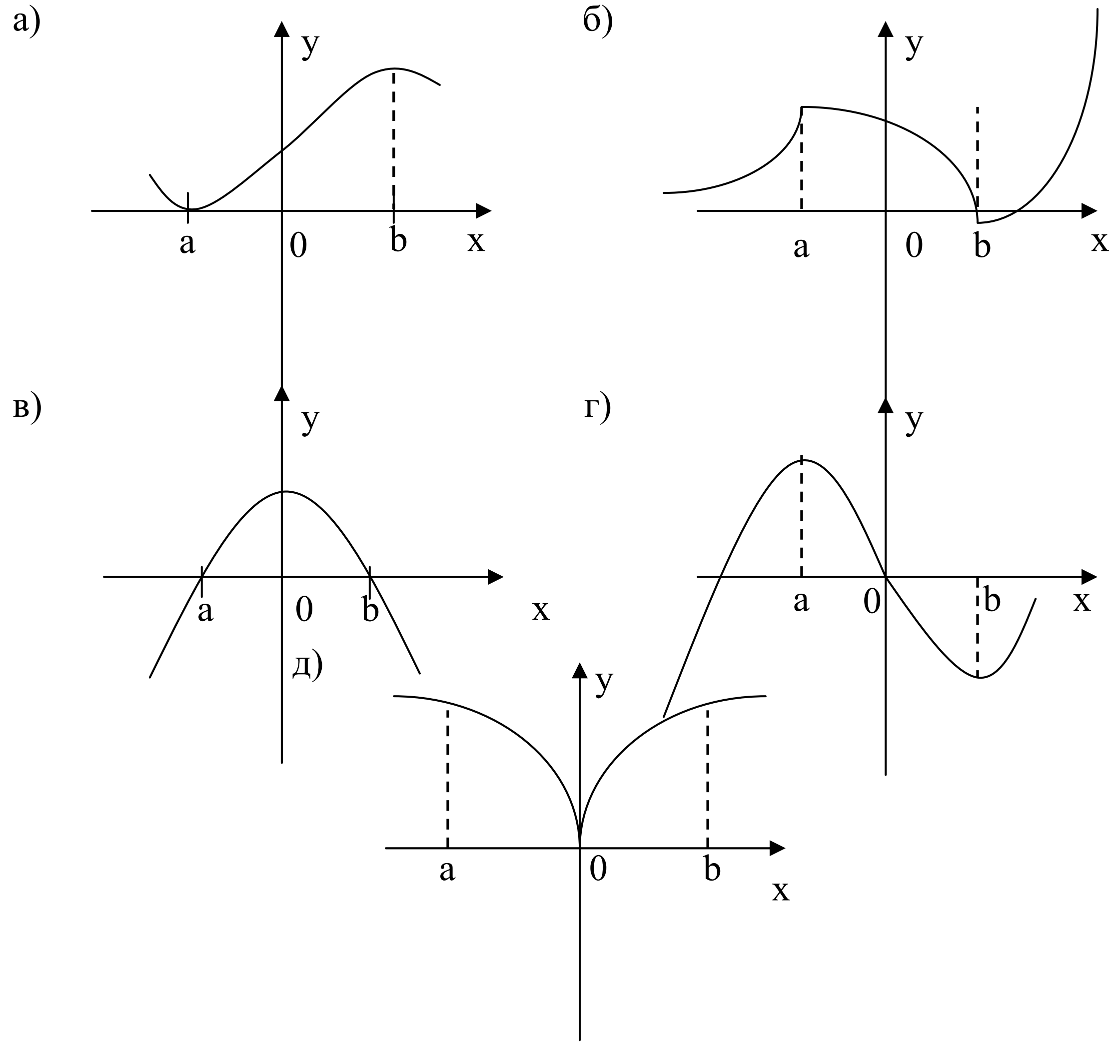


Рис.7

3. Выберите утверждения, которые являются истинными для функции, график которой изображён на рис.8.

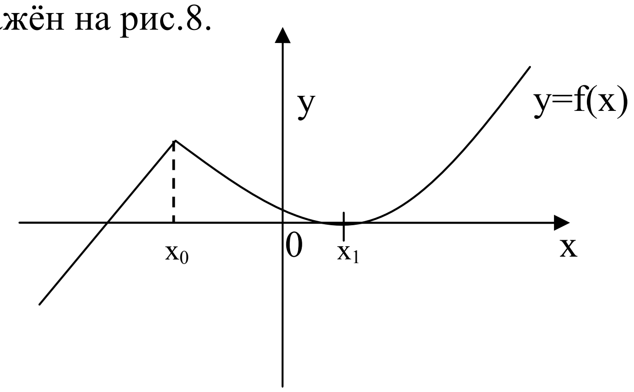


Рис.8

а) f(x) дифференцируема на R;
б) f(x) не дифференцируема в точке x_0;
в) f(x) имеет в точке x_1 экстремум;
г) f(x) не имеет в точке x_0 экстремума;
д) $f'(x_1)=0$;
е) $f'(x_0)$ не существует;

ж) $f'(x)$ на $(-\infty;x_0)$ больше нуля;

з) $f'(x)$ на $(x_1;+\infty)$ меньше нуля.

4. Можно ли утверждать, что $f(c)=\max_{[a;b]} f(x)$, если f(x) непрерывна на [a;b], имеет на нём единственный экстремум (максимум) в точке $c\in(a;b)$?

5. Выберите (укажите) промежутки, на которых кривая, изображённая на рис. 9, является выпуклой вниз.

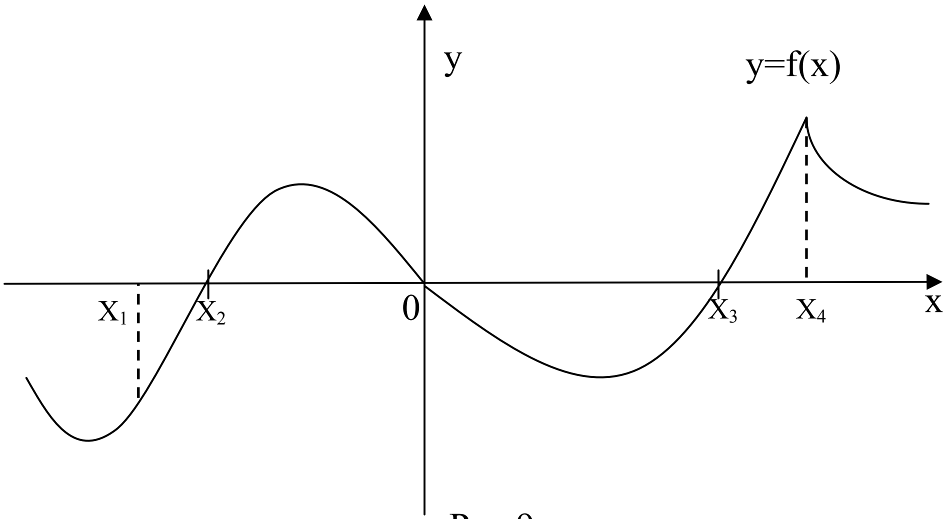


Рис.9

а) $(-\infty;x_1)$;
б) $(x_1;x_2)$;
в) $(x_2;0)$;
г) $(0;x_3)$;
д) $(x_3;x_4)$;
е) $(x_4;+\infty)$.

Тест II уровня

1. Сформулируйте и докажите условие постоянства функции на промежутке.

2. Докажите, что если f(x) и g(x) непрерывны на [a;b] и для любого $x\in(a;b)$ $f'(x)=g'(x)$, то $f(x)=g(x)+C$, где C=const на [a;b].

3. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие монотонности функции на промежутке.

4. Постройте пример функции f(x), если известно, что на $(-\infty;-3)$ $f'(x)=0$, на $[-3;2]$ $f'(x)>0$, на $(2;4)$ $f'(x)<0$.

5. Сформулируйте и докажите необходимое условие экстремума функции в точке.

6. Приведите пример, показывающий, что равенство нулю производной функции в точке является для существования экстремума в этой точке условием лишь необходимым.

7. Сформулируйте и докажите достаточные условия экстремума функции в точке.

8. Исследуйте функции на монотонность и экстремумы, постройте эскизы их графиков:

а) $f(x)=x^5-5x^4+5x^3-1$;

б) $f(x)=x^2 \cdot e^{-x}$;

в) $f(x)=\sqrt{8x^2-x^4}$;

г) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$.

9. Составьте алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений функции на отрезке.

10. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на указанном промежутке:

а) $f(x)=x^5-5x^4+5x^3-1$, $x\in[-1;2]$;

б) $f(x)=x-2\sqrt{x}$, $x\in[0;5]$;

в) $f(x)=x\cdot\ln x$, $x\in[\frac{1}{e^2};1]$;

г) $f(x)=2^{x^2-x-2}$, $x\in[-1;3]$.

11. Решите задачи:

а) среди всех прямоугольников площади S найдите прямоугольник с наименьшим периметром; с наименьшей диагональю.

б) найдите наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в окружность радиуса R.

в) найдите на параболе $y=x^2$ точку, ближайшую к точке $(2;\frac{1}{2})$.

г) найдите острые углы прямоугольного треугольника, имеющего наибольшую площадь из всех треугольников, у которых сумма длин одного катета и гипотенузы постоянна и равна a.

12. Приведите примеры кривых, имеющих различные направления выпуклости. Сформулируйте определение точки, в которой происходит изменение направления выпуклости кривой.

13. Сформулируйте и докажите достаточное условие выпуклости кривой.

14. Сформулируйте и докажите необходимое условие существования точки перегиба графика функции.

15. Сформулируйте и докажите достаточное условие существования точки перегиба графика функции.

16. Исследуйте функции на выпуклость (вогнутость) и перегиб:

а) $f(x)=x^4-12x^3+48x^2-50$;

б) $f(x)=x\cdot e^{-x}$;

в) $f(x)=e^{2x-x^2}$.

17. Сформулируйте определения вертикальных и невертикальных асимптот графика функции.

18. Исследуйте функции:

а) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$; б) $f(x)=\frac{x}{2x-1}+x$

на наличие асимптот и постройте схемы их графиков.

19. Проведите полное исследование и постройте график функции:

а) $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$;

б) $f(x)=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$;

в) $f(x)=x\cdot\ln x$;

г) $f(x)=x^2-e^{-x}$.

Тест III уровня

1. Исследуйте функции на монотонность и экстремумы, постройте эскизы их графиков:

а) $f(x)=\frac{\sqrt{1+|x+2|}}{1+|x|}$;

б) $f(x)=\frac{\sqrt[3]{1+|x|}}{1+|4x+5|}$.

2. Докажите, что если функция f(x) непрерывна на (a;b) и $f'(x)>0$ всюду на (a;b), за исключением конечного числа точек, в которых $f'(x)=0$ или не существует, то f(x) строго возрастает на (a;b).

3. Докажите, что для строгого возрастания функции f(x) на (a;b) необходимо и достаточно, чтобы для любых $x_1, x_2 \in (a;b)$: $x_1<x_2$ существовало такое число $\tau\in(x_1;x_2)$, что $f'(\tau)>0$.

4. Докажите, что график функции $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

5. Исследуйте функцию $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ и постройте её график.

Тест IV уровня

1. Пусть f(x) возрастает на (a;b). Следует ли отсюда, что $f'(x)$ возрастает на (a;b)? Существует ли зависимость между монотонностью функции и её производной?

2. Функцию f(x) назовём возрастающей в точке x_0, если $\exists\delta>0$: $f(x)<f(x_0)$ при $x\in(x_0-\delta;x_0)$ и $f(x)>f(x_0)$ при $x\in(x_0;x_0+\delta)$. Используя это определение, докажите:

а) из возрастания функции в каждой точке интервала следует её возрастание на этом интервале;

б) $f(x)=\begin{cases} x+x^2\cdot\sin\frac{2}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ возрастает в точке $x_0=0$, но не является возрастающей ни на одном интервале, содержащем эту точку.

3. Постройте пример функции, которая убывает слева от точки $x_0=-1$, возрастает справа от неё, но точка x_0 является для функции точкой максимума, а не минимума.

4. Определите, при каких значениях параметра a функция $f(x)=e^x+ax^3$ имеет точки перегиба.

Список литературы

1. Бохан К.А., Егорова И.А., Лащёнов К.В. Курс математического анализа – Т.1. – М.: Просвещение, 1972.
2. Виленкин Н.Я., Куницкая Е.С., Мордкович А.Г. Математический анализ: Дифференциальное исчисление. – М.: Просвещение, 1984.
3. Мордкович А.Г., Мухин А.Е. Сборник задач по введению в анализ и дифференциальному исчислению функций одной переменной. – М.: Просвещение, 1985.
4. Нейман Ю.М. и др. Основы дифференциального исчисления. Тесты. – М., 2002.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – Т.1. – М.: Физматгиз, 1960.
6. Шашкина М.Б. Педагогические тесты достижений по теме «Дифференциальное исчисление функций одной переменной». – Красноярск, 1997.

Мухин Александр Ефимович

Педагогические тесты достижений по теме
«Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

Учебно-методическая разработка по разделу математического анализа для студентов I курса (специальности 010101, 050201)

Редактор Н.М.Устюгова

Подписано к печати	Формат 60х84 /16	Бумага тип.№1
Печать трафаретная	Усл.-печ. л.2,25	Уч.-изд.л.2,25
Заказ	Тираж 50	Цена свободная

РИЦ Курганского государственного университета.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет.