

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Металлорежущие станки и инструменты»

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
ШПИНДЕЛЬНЫХ УЗЛОВ С ПЕРЕМЕННОЙ РАДИАЛЬНОЙ
ЖЕСТКОСТЬЮ ОПОР**

Методические указания к выполнению домашнего задания
по курсу «Расчет и конструирование станков»
раздел : «Математическое моделирование основных систем и узлов станков»
для студентов специальности 151002 (120200)

Курган 2005

Кафедра: «Металлорежущие станки и инструменты»

Дисциплина: «Расчет и конструирование станков»

Составили: доцент, канд. техн. наук Рохин В.Л.
канд. техн. наук Рохин Л.В.

Работа выполнена при равноценном участии авторов.

Утверждены на заседании кафедры «3» «февраля» 2005 г.

Рекомендованы методическим советом университета
« » « » 2005 г.

Введение

Домашнее задание по разделу «Математическое моделирование основных систем и узлов станков» включает расчет динамических характеристик шпиндельного узла на опорах качения. В процессе выполнения задания студенту по заданным исходным данным и разработанной математической модели необходимо произвести расчет собственных частот шпиндельного узла, траектории движения оси шпинделя, динамических нагрузок на опоры в связи с неуравновешенностью узла. Необходимо провести исследование влияния конструктивных параметров узла на указанные динамические характеристики.

При проведении исследований следует использовать приведенную в приложении программу, реализованную в среде Mathcad.

1 Расчет динамических характеристик шпиндельных узлов с переменной радиальной жесткостью опор

В процессе сборки шпиндельных узлов производят их статическую и динамическую балансировку. При вращении шпинделя на холостом ходу дополнительной нагрузки не возникает. При установке на шпиндель приспособления или инструмента центр масс системы «шпиндель-приспособление» может сместиться и оказаться вне оси вращения шпинделя. Эксцентриситет центра масс достигает нескольких миллиметров. При вращении шпинделя возникнут центробежные силы, нагружающие опоры шпинделя и искажающие траекторию его вращения. Возникает задача оценки динамической нагрузки на опоры шпинделя, критической скорости его вращения, смещения оси шпинделя относительно своего номинального положения и определение ожидаемой погрешности обработки.

Рассмотрим методику решения таких задач на примере шпиндельного узла со смещенным центром масс.

Пусть динамическая система «шпиндель – опоры – приспособление» в произвольный момент времени имеет центр масс в точке **a** на расстоянии $e=oa$ от номинального положения оси шпинделя (рисунок 1). При вращении под действием центробежных сил деформируются опоры 1 и 2 шпинделя и собственно шпиндель. В результате центр масс перемещается в точку **c**.

Введем обозначения:

$$a_x = e \cdot \cos \omega t, \quad a_y = e \cdot \sin \omega t;$$

a_x $b_x = x_0$ - проекция величины смещения центра масс из-за деформации опор в плоскости XOZ;

a_y $b_y = y_0$ – то же в плоскости YOZ;

b_x $c_x = x_{ш}$ - проекция величины смещения центра масс из-за деформации собственно шпинделя в плоскости XOZ;

b_y $c_y = y_{ш}$ – то же в плоскости YOZ.

x , y – величины смещения шпинделя из-за совместного действия всех перечисленных факторов. Причем, как следует из рисунка 1:

$$x=e \cdot \cos \omega t+x_0+x_{ш}; \quad y=e \cdot \sin \omega t+y_0+y_{ш}.$$

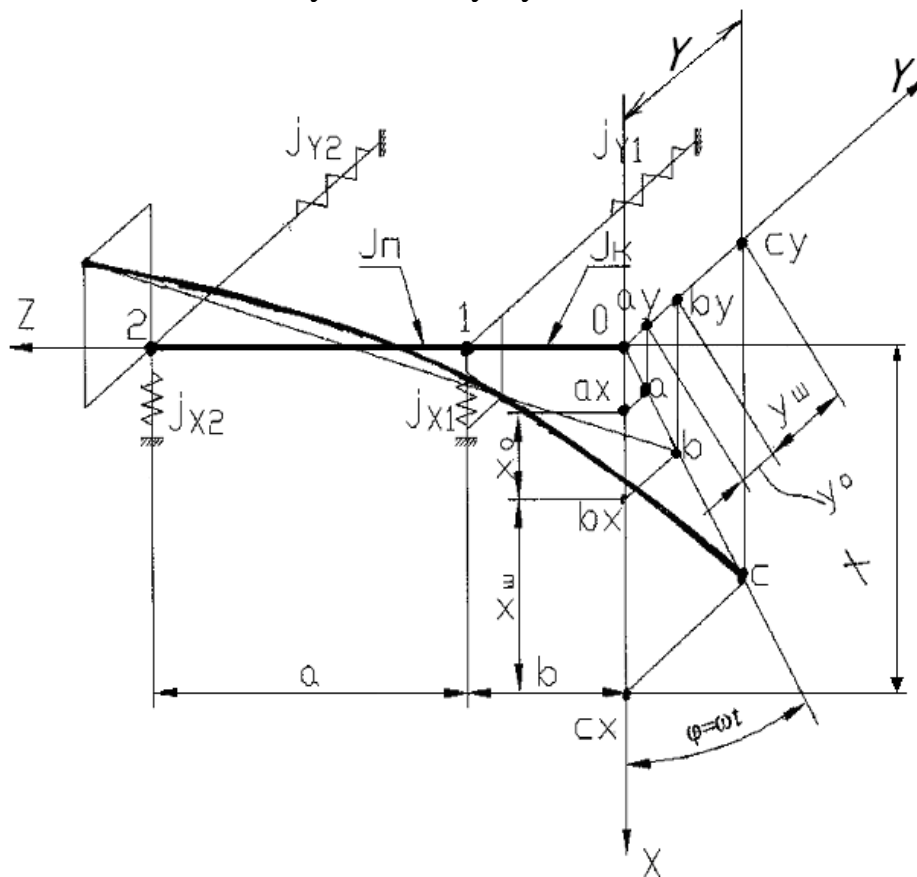


Рисунок 1- Схема динамической системы “шпиндель – опоры приспособление”

Для решения задачи воспользуемся дифференциальным уравнением движения системы в обобщенных координатах (уравнением Лагранжа 2-го рода) (1):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

где q_i - обобщенная координата, $q_i = (x_0, y_0, x, y)$;

\dot{q}_i - обобщенная координата, $\dot{q}_i = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{x}, \dot{y})$;

$i=1, 2, \dots, n$ – число обобщенных координат; в рассматриваемой задаче $n=4$.

$L=T-\Pi$ – функция Лагранжа (T и Π - кинетическая и потенциальная энергии системы).

Составим систему уравнений, описывающую приведенную к точке O деформацию подшипников (x_0, y_0) и общее смещение системы x, y . В качестве обобщенных координат выберем x, y и x_0, y_0 .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_0} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

(1)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_0} = 0.$$

Найдем функцию Лагранжа. Для этого отдельно определим кинетическую и потенциальную энергию.

Кинетическую энергию системы выражаем через координаты центра масс:

$$T = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{m \cdot \dot{y}^2}{2}, \quad (2)$$

где $m = m_1 + m_2$, m_1 – масса приспособления, m_2 – приведенная к переднему концу масса шпинделя,

$m_2 = 0,3 \cdot m_{ш}$, $m_{ш}$ – масса шпинделя.

Потенциальную энергию системы находим отдельно для патрона со шпинделем и опор. Обозначим приведенную к переднему концу жесткость шпинделя через j , тогда:

$$\Pi_{ш} = \frac{1}{2} \cdot j \cdot x_{ш}^2 + \frac{1}{2} \cdot j \cdot y_{ш}^2, \quad (3)$$

где $x_{ш}$, $y_{ш}$ – смещение центра масс системы из-за упругих деформаций шпинделя.

Из рисунка 1 следует:

$$\begin{aligned} x_{ш} &= x - x_0 - e \cdot \cos \omega t; \\ y_{ш} &= y - y_0 - e \cdot \sin \omega t; \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3) получим:

$$\Pi_{ш} = \frac{1}{2} \cdot j \cdot (x - x_0 - e \cdot \cos \omega t)^2 + \frac{1}{2} \cdot j \cdot (y - y_0 - e \cdot \sin \omega t)^2, \quad (5)$$

Потенциальная энергия опор шпинделя равна:

$$\Pi_{о.ш.} = \frac{1}{2} \cdot j_{x.o.} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot j \cdot j_{y.o.} \cdot y^2, \quad (6)$$

В уравнения (5) и (6) входит жесткость собственно шпинделя j , приведенная к плоскости ОХУ и жесткость опор шпинделя $j_{x.o.}$, $j_{y.o.}$ приведенная к той же плоскости.

Приведенная жесткость шпинделя зависит от его параметров и определяется по выражению:

$$j = \frac{10^{-3}}{\frac{b^3}{3 \cdot E \cdot J_K} + \frac{a \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot J_{II}}}, \left[\frac{\text{даН}}{\text{мм}} \right], \quad (7)$$

где a , b – размерные параметры (рисунок 1), мм; J_K , J_{II} – моменты инерции сечения шпинделя в консольной и пролетной части соответственно мм⁴; E – модуль упругости материала шпинделя, для стали $E = 2,1 \cdot 10^4$ даН/мм².

Жесткость опор шпинделей, как правило, не одинакова по разным радиальным направлениям. Это объясняется технологическими погрешностями сборки шпиндельных узлов. В частности, у токарного станка модели АТПр2М12 жесткость в передней опоре по экспериментальным данным отличается по различным направлениям в 1,3-1,6 раза. Поэтому в расчетной

схеме (рисунок 1) этот факт учитывается путем введения в опорах 1 и 2 разных коэффициентов жесткости по направлениям осей ОХ и ОУ. Из-за технологических погрешностей жесткость меняется от 30 до 50%.

Жесткость подшипников шпинделя определяют по справочникам (например, Р.Д. Бейзельман и др. Подшипники качения: Справочник. - М.: Машиностроение, 1975. - 574с.). Приведенные к точке О жесткости опор шпинделя равны: жесткость опор в направлении оси ОХ

$$j_{x0} = \frac{1}{\frac{(a+b)^2}{j_{x1} \cdot a^2} + \frac{b^2}{j_{x2} \cdot a^2}}, \left[\frac{\text{даН}}{\text{мкм}} \right], \quad (8)$$

где j_{x1}, j_{x2} – жесткости опор в направлении оси ОХ, $\frac{\text{даН}}{\text{мкм}}$;

жесткость опор в направлении оси ОУ, $\frac{\text{даН}}{\text{мкм}}$

$$j_{y0} = \frac{1}{\frac{(a+b)^2}{j_{y1} \cdot a^2} + \frac{b^2}{j_{y2} \cdot a^2}}, \left[\frac{\text{даН}}{\text{мкм}} \right], \quad (9)$$

где j_{y1}, j_{y2} – жесткости передней и задней опор в направлении оси ОУ, $\frac{\text{даН}}{\text{мкм}}$.

Соотношения $\frac{j_{x1}}{j_{y1}}$ и $\frac{j_{x2}}{j_{y2}}$ ориентировочно можно принять в пределах

0,75...1,5 в зависимости от класса точности станка.

Суммарная потенциальная энергия шпинделя и его опор равна:

$$\begin{aligned} \Pi = \Pi_{\text{ш}} + \Pi_{\text{оп}} = \frac{1}{2} \cdot j \cdot (x - x_0 - e \cdot \cos \omega t)^2 + \frac{1}{2} \cdot j \cdot (y - y_0 - e \cdot \sin \omega t)^2 + \\ + \frac{1}{2} \cdot j_{x0} \cdot x_0^2 + \frac{1}{2} \cdot j_{y0} \cdot y_0^2; \end{aligned} \quad (10)$$

Запишем функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned} L = T - \Pi = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{m \cdot \dot{y}^2}{2} - \frac{1}{2} j \cdot (x - x_0 - e \cdot \cos \omega t)^2 - \\ - \frac{1}{2} j \cdot (y - y_0 - e \cdot \sin \omega t)^2 - \frac{1}{2} \cdot j_{x0} \cdot x_0^2 - \frac{1}{2} \cdot j_{y0} \cdot y_0^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Подставим полученное значение функции Лагранжа в 1 уравнение системы (1)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left[\frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{m \cdot \dot{y}^2}{2} - \frac{1}{2} j \cdot (x - x_0 - e \cdot \cos \omega t)^2 - \frac{1}{2} j \cdot (y - y_0 - e \cdot \sin \omega t)^2 - \left[-\frac{1}{2} j_{x_0} \cdot x_0^2 - \frac{1}{2} j_{y_0} \cdot y_0^2 \right]}{\partial \dot{x}} \right)}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{2m\dot{x}}{2} = m\dot{x};$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{1}{2} j \cdot (2 \cdot x - 2 \cdot (x_0 + e \cdot \cos \omega t));$$

т.к. $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = m\ddot{x}$, то уравнение принимает вид:

$$m\ddot{x} + j \cdot (x - x_0 - e \cdot \cos \omega t) = 0. \quad (12)$$

Третье уравнение системы (1) аналогично первому, только составляется для координаты Y шпиндельного узла. Поэтому для него имеем:

$$m\ddot{y} + j \cdot (y - y_0 - e \cdot \sin \omega t) = 0. \quad (13)$$

Подставим значения функции Лагранжа (11) во второе уравнение системы (1):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left[\frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{m \cdot \dot{y}^2}{2} - \frac{1}{2} j \cdot (x - x_0 - e \cdot \cos \omega t)^2 - \frac{1}{2} j \cdot (y - y_0 - e \cdot \sin \omega t)^2 - \left[-\frac{1}{2} j_{x_0} \cdot x_0^2 - \frac{1}{2} j_{y_0} \cdot y_0^2 \right]}{\partial \dot{x}_0} \right)}{\partial \dot{x}_0} \right) = 0$$

Находим частные производные:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} \right) = 0;$$

$$-\frac{\partial L}{\partial x_0} = -\frac{j}{2} \cdot (-2 \cdot (x - e \cdot \cos \omega t) + 2 \cdot x_0) - \frac{1}{2} \cdot j_{x0} \cdot 2 \cdot x_0.$$

Уравнение примет вид:

$$j \cdot (x_0 - x) + j_{x0} \cdot x_0 = -j \cdot e \cdot \cos \omega t. \quad (14)$$

Аналогично для четвертого уравнения системы (1):

$$j \cdot (y_0 - y) + j_{y0} \cdot y_0 = -j \cdot e \cdot \sin \omega t. \quad (15)$$

Таким образом, система (1) преобразуется к виду:

$$\left. \begin{aligned} m \cdot \ddot{x} + j \cdot (x - x_0 - e \cdot \cos \omega t) &= 0 \\ m \cdot \ddot{y} + j \cdot (y - y_0 - e \cdot \sin \omega t) &= 0 \\ j \cdot (x_0 - x) + j_{x0} \cdot x_0 &= -j \cdot e \cdot \cos \omega t \\ j \cdot (y_0 - y) + j_{y0} \cdot y_0 &= -j \cdot e \cdot \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Исключим из системы обобщенные координаты опор x_0 и y_0 .

Для этого найдем из первого и третьего уравнений системы (16) x_0 .

$$\frac{m \cdot \ddot{x} + j \cdot x - j \cdot e \cdot \cos \omega t}{j} = x_0;$$

Имеем:

$$\frac{-j \cdot x + j \cdot e \cdot \cos \omega t}{j + j_{x0}} = -x_0;$$

Сложим полученные уравнения:

$$\frac{m \cdot \ddot{x}}{j} + x \left(1 - \frac{j}{j + j_{x0}} \right) - \left(1 - \frac{j}{j + j_{x0}} \right) \cdot e \cdot \cos \omega t = 0 \quad (17)$$

Умножим обе части уравнения (17) на j :

$$m \cdot \ddot{x} + \frac{j \cdot j_{x0}}{j + j_{x0}} \cdot x - \frac{j \cdot j_{x0}}{j + j_{x0}} \cdot e \cdot \cos \omega t = 0 \quad (18)$$

Аналогичные преобразования проведем для второго и четвертого уравнений системы (17), исключив из них y_0 ,

Окончательный вид преобразованного уравнения:

$$m \cdot \ddot{y} + \frac{j \cdot j_{y0}}{j + j_{y0}} \cdot y - \frac{j \cdot j_{y0}}{j + j_{y0}} \cdot e \cdot \sin \omega t = 0 \quad (19)$$

Обозначим приведенную жесткость упругой системы «шпиндель – опоры» через j_1 и j_2 :

$$j_1 = \frac{j \cdot j_{x0}}{j + j_{x0}}; \quad j_2 = \frac{j \cdot j_{y0}}{j + j_{y0}};$$

Объединим уравнения (18) и (19) в систему:

$$\left. \begin{aligned} m \cdot \ddot{x} + j_1 \cdot x &= j_1 \cdot e \cdot \cos \omega t \\ m \cdot \ddot{y} + j_2 \cdot y &= j_2 \cdot e \cdot \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Имеем систему двух неоднородных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Прейдем к определению параметров динамической системы.

1 Определим критическую скорость шпинделя.

Критической скоростью вращающегося вала называется такая скорость, при которой угловая частота вращения (c^{-1}) равна частоте его собственных поперечных колебаний:

$$\omega_{1кр} = \sqrt{\frac{j_1}{m}}; \quad \omega_{2кр} = \sqrt{\frac{j_2}{m}}; \quad (21)$$

Критические частоты вращения вала связаны с угловыми скоростями:

$$n_{1кр} = \frac{30 \cdot \omega_{1кр}}{\pi} \left[\frac{\text{об}}{\text{мин}} \right]; \quad n_{2кр} = \frac{30 \cdot \omega_{2кр}}{\pi} \left[\frac{\text{об}}{\text{мин}} \right]; \quad (22)$$

2 Определим траекторию движения центра масс системы. Для этого рассмотрим систему уравнений вынужденных колебаний (20). Решим первое уравнение системы (20). Частное решение полного уравнения, соответствующее вынужденным колебаниям, ищем в виде:

$$x = A \cdot \cos \omega t.$$

Тогда: $\dot{x} = -A \cdot \omega \cdot \sin \omega t$, $\ddot{x} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t$.

Подставим решение x и его вторую производную \ddot{x} в первое уравнение (20):

$$-m \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t + j_1 \cdot A \cdot \cos \omega t = j \cdot e \cdot \cos \omega t.$$

Отсюда находится амплитуда колебаний:

$$A = \frac{j_1 \cdot e}{j_1 - m \cdot \omega^2}. \quad (23)$$

Проекция перемещений центра масс на ось ОХ:

$$x = \frac{j_1 \cdot e}{j_1 - m \cdot \omega^2} \cdot \cos \omega t. \quad (24)$$

Аналогично решается второе уравнение системы (20). Обозначив амплитуду колебаний центра масс в направлении оси ОУ через B , имеем:

$$B = \frac{j_2 \cdot e}{j_2 - m \cdot \omega^2}, \quad y = \frac{j_2 \cdot e}{j_2 - m \cdot \omega^2} \cdot \sin \omega t. \quad (25)$$

Решение (24) и (25) описывает вынужденные колебания системы под действием возмущающей силы, которые являются координатами центра масс, заданные в параметрической форме.

Траекторию движения центра масс можно изобразить на комплексной плоскости с помощью координат x и y , представив ее в виде годографа.

$z = x + i \cdot y$, где i – мнимое число

$$z = \frac{j_1 \cdot e}{j_1 - m \cdot \omega^2} \cdot \cos \omega t + i \cdot \frac{j_2 \cdot e}{j_2 - m \cdot \omega^2} \cdot \sin \omega t. \quad (26)$$

Построение траектории на комплексной плоскости осуществляется по модулю $|z|$ и аргументу φ . Введем общепринятые обозначения: действительная часть комплексного числа:

$$R_e = \frac{j_1 \cdot e}{j_1 - m \cdot \omega^2} \cdot \cos \omega t.$$

Мнимая часть комплексного числа:

$$I_m = \frac{j_2 \cdot e}{j_2 - m \cdot \omega^2} \cdot \sin \omega t.$$

Вычисленные значения координат траектории сводим в таблицу 1.

Таблица 1- Расчет траектории оси шпинделя $|z| = \sqrt{R_e^2 + I_m^2}$

$\omega t = \varphi$	R_e	I_m	$\operatorname{tg} \varphi$	$ Z $
0	A	0	0	A
$\frac{\pi}{4}$	$A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	$B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{B}{A}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	B	∞	B
$\frac{3\pi}{4}$	$-A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	$B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{B}{A}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2}$
π	-A	0	0	A
$\frac{5\pi}{4}$	$-A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{B}{A}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{B}{A}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2}$

По этим данным строится траектория движения центра масс за один оборот шпинделя.

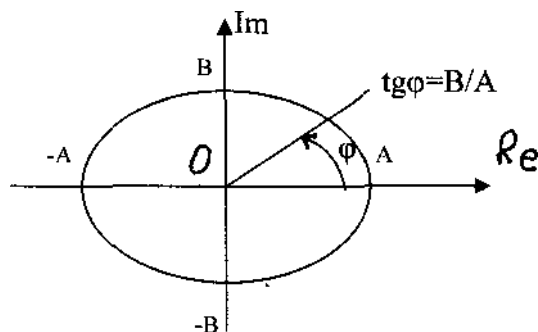


Рисунок 2- Траектория движения центра шпинделя

3 Определим смещения опор и динамическую нагрузку на опоры. Рассмотрим смещение оси шпинделя из-за деформаций опор в одной из плоскостей, например, в плоскости XOZ. Считаем шпиндель абсолютно жестким.

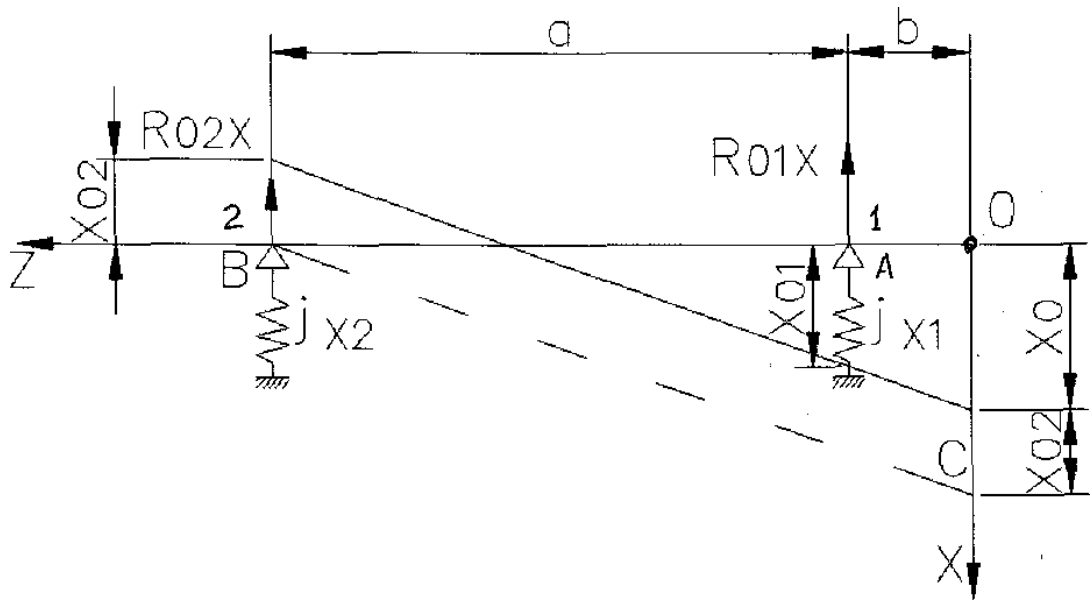


Рисунок 3-Схема смещения оси шпинделя из-за деформации опор
Из треугольника ОВС:

$$\frac{x_0 + x_{02}}{a + b} = \frac{x_{01} + x_{02}}{a}.$$

Отсюда:

$$x_0 = x_{01} + \frac{b}{a} \cdot (x_{01} + x_{02}). \quad (27)$$

Деформация опор x_{01} и x_{02} может быть выражено через нагрузку на опору и ее жесткость:

$$x_{01} = \frac{R_{01x}}{j_{x01}}; \quad x_{02} = \frac{R_{02x}}{j_{x02}}; \quad (28)$$

Реакции в опорах R_{01} и R_{02} находятся из уравнений статики. Если обозначить проекцию центробежной силы на ось ОХ через F_x , то:

$$R_{01x} = F_x \cdot \frac{a+b}{a}; \quad R_{02x} = F_x \cdot \frac{b}{a};$$

Подставив значения R_{01x} и R_{02x} в (28) и взяв отношение $\frac{x_{01}}{x_{02}}$, получим:

$$\frac{x_{01}}{x_{02}} = \frac{j_{x2}}{j_{x1}} \cdot \frac{a+b}{a}.$$

Приняв, $\frac{j_{x1}}{j_{x2}} = \mu_x$, получим $x_{02} = x_{01} + \mu_x \cdot \left(\frac{b}{a+b} \right).$ (29)

Подставив (29) в (27) и проведя преобразования, получим:

$$x_{01} = x_0 \cdot \frac{a \cdot (a+b)}{(a+b)^2 + \mu_x \cdot b^2}. \quad (30)$$

Аналогично для смещения опоры 1 в плоскости ХОZ:

$$y_{01} = y_0 \cdot \frac{a \cdot (a + b)}{(a + b)^2 + \mu_y \cdot b^2}. \quad (31)$$

где $\mu_y = \frac{j_{y1}}{j_{y2}}$.

Найдем соотношение между x_0 и y - с одной стороны и x_{02} и y_{02} - с другой. Подставим в (29) значение x_{01} (30), получим:

$$x_{02} = x_0 \cdot \frac{a \cdot b \cdot \mu_x}{(a + b)^2 + \mu_x \cdot b^2}. \quad (32)$$

Аналогично:

$$y_{02} = y_0 \cdot \frac{a \cdot b \cdot \mu_y}{(a + b)^2 + \mu_y \cdot b^2}. \quad (33)$$

В выражениях (30), (31), (32), (33) заменим величины смещения опор 1 и 2 по координатам x_0 , y_0 через смещение центра масс. Для этого из двух последних уравнений системы (16) найдем значения x_0 и y_0 .

$$x_0 = \frac{j}{j + j_{x0}} \cdot (x - e \cdot \cos \omega t); \quad y_0 = \frac{j}{j + j_{y0}} \cdot (y - e \cdot \sin \omega t);$$

Заменим x и y их значениями из (24) и (25), получим:

$$x_0 = \frac{j}{j + j_{x0}} \cdot \left(\frac{j_1}{j_1 - m \cdot \omega^2} - 1 \right) \cdot e \cdot \cos \omega t; \quad (34)$$

$$y_0 = \frac{j}{j + j_{y0}} \cdot \left(\frac{j_2}{j_2 - m \cdot \omega^2} - 1 \right) \cdot e \cdot \sin \omega t. \quad (35)$$

Используя полученные выражения (34) и (35), находим координаты центра опор в произвольный момент времени t . Подставив (34), (35) в выражения (30) и (31), получим координаты центра опоры 1:

$$x_{01} = \frac{a \cdot (a + b)}{(a + b)^2 + \mu_x \cdot b^2} \cdot \frac{j}{j + j_{x0}} \cdot \left(\frac{j_1}{j_1 - m \cdot \omega^2} - 1 \right) \cdot e \cdot \cos \omega t; \quad (36)$$

$$y_{01} = \frac{a \cdot (a + b)}{(a + b)^2 + \mu_y \cdot b^2} \cdot \frac{j}{j + j_{y0}} \cdot \left(\frac{j_2}{j_2 - m \cdot \omega^2} - 1 \right) \cdot e \cdot \sin \omega t. \quad (37)$$

Для опоры 2 имеем:

$$x_{02} = \frac{a \cdot b \cdot \mu_x}{(a + b)^2 + \mu_x \cdot b^2} \cdot \frac{j}{j + j_{x0}} \cdot \left(\frac{j_1}{j_1 - m \cdot \omega^2} - 1 \right) \cdot e \cdot \cos \omega t. \quad (38)$$

$$y_{02} = \frac{a \cdot b \cdot \mu_y}{(a + b)^2 + \mu_y \cdot b^2} \cdot \frac{j}{j + j_{y0}} \cdot \left(\frac{j_2}{j_2 - m \cdot \omega^2} - 1 \right) \cdot e \cdot \sin \omega t. \quad (39)$$

Выражения (36), (37), (38), (39) в явном виде связывают величину динамического смещения опор под действием центробежных сил, возникающих из-за неуравновешенности динамической системы и параметры конструкции.

Для нахождения динамической нагрузки на опоры 1 и 2 умножим

смещения в опорах на их жесткости.

Для опоры 1 получим:

$$F_1 = \sqrt{(j_{x1} \cdot x_{01})^2 + (j_{y1} \cdot y_{01})^2}. \quad (40)$$

Для опоры 2 получим:

$$F_2 = \sqrt{(j_{x2} \cdot x_{02})^2 + (j_{y2} \cdot y_{02})^2}. \quad (41)$$

Для лучшего усвоения методики перечислим основные этапы разработки математической модели и выполним числовой пример в соответствии со схемой, приведенной на рисунке 1.

1 Найдём общее выражение функций Лагранжа (11).

$$L = T - \Pi = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} - \frac{1}{2}j \cdot (x - x_0 - e \cos \omega \cdot t)^2 - \frac{1}{2}j \cdot (y - y_0 - e \sin \omega \cdot t)^2 - \frac{1}{2}j_{x0} \cdot x_0^2 - \frac{1}{2}j_{y0} \cdot y_0^2.$$

2 Составим систему уравнений Лагранжа 2-го рода (1) и преобразуем ее к виду (16).

$$\begin{cases} m\ddot{x} + j \cdot (x - x_0 - e \cdot \cos \omega \cdot t) = 0 \\ m\ddot{y} + j \cdot (y - y_0 - e \cdot \sin \omega \cdot t) = 0 \\ j(x_0 - x) + j_{x0} \cdot x_0 = -j \cdot e \cdot \cos \omega \cdot t \\ j(y_0 - y) + j_{y0} \cdot y_0 = -j \cdot e \cdot \sin \omega \cdot t \end{cases}.$$

3 Исключим x_0 и y_0 из уравнений системы (16) и найдём приведённые жесткости первой и второй опоры j_1 и j_2 . Задаём конкретные числовые параметры конструкции шпиндельного узла:

Наружный диаметр шпинделя $d=170$ мм,

Внутренний диаметр шпинделя $d_0=85$ мм,

Диаметр консольной части $d_{\kappa}=220$ мм,

Расстояние между опорами $a=500$ мм,

Длина консольной части $b=100$ мм,

Общая длина шпинделя $L=900$ мм.

Жесткость передней опоры $j_{x1} = 92 \frac{\text{даН}}{\text{мкм}}, j_{y1} = 66 \frac{\text{даН}}{\text{мкм}}.$

Жесткость задней опоры $j_{x2} = 174 \frac{\text{даН}}{\text{мкм}}, j_{y2} = 107 \frac{\text{даН}}{\text{мкм}}.$

Максимальная частота вращения шпинделя $n_{\max} = 2800 \frac{\text{об}}{\text{мин}},$

Величина эксцентриситета центра масс $e = (5-50)$ мкм.

Предварительно находим приведённую массу шпинделя с приспособлением:

$$m = m_1 + m_2,$$

где m_1 - масса приспособления (можно задаться весом приспособления $G_1=150 \div 200$ Н),

$$m_2 = 0,3 \cdot m_{\text{ш}}, \quad m_{\text{ш}} - \text{масса шпинделя,}$$

$$m_{\text{ш}} = \frac{\gamma}{g} \cdot V,$$

где γ - удельный вес материала шпинделя, для стали $\gamma = 7,8 \frac{\Gamma}{\text{см}^3}$, $g = 9,81 \frac{M}{c^2}$ - ускорение свободного падения, V - объём шпинделя, мм^3 ,

Чтобы привести данные к общей размерности, что важно для выражений (23), (25), (26), (36), (37), (38) и (39), в них будем подставлять размерности: жесткостей в Н/м; массу $m_{\text{ш}} = 7,8 \cdot 10^3 \cdot V \frac{H \cdot c^2}{M}$; объем V в мм^3 ; угловую скорость выразим через частоту вращения шпинделя $\omega = 2\pi n$; n - частота вращения шпинделя в об/с.

Находим:

$$\text{массу шпинделя: } m_{\text{ш}} = 7,8 \cdot 10^3 \cdot 12000000 \cdot 10^{-9} = 93,6 \frac{H \cdot c^2}{M},$$

приведенную массу системы:

$$m = m_1 + 0,3 \cdot m_{\text{ш}} = \frac{200}{9,81} + 0,3 \cdot 93,6 = 48,08 \frac{H \cdot c^2}{M}.$$

Определим приведённую жесткость шпинделя по выражению (7), $\frac{\text{даН}}{\text{мкМ}}$:

$$j = \frac{10^{-3}}{\frac{b^3}{3EJ_k} + \frac{ab^2}{3EJ_{\text{п}}}},$$

где J_k , $J_{\text{п}}$ - моменты инерции консольной и пролётной части соответственно:

$$J_M = \pi \cdot \frac{(d^4 - d_0^4)}{64} = 3,14 \cdot \frac{(150^4 - 85^4)}{64} = 2,22 \cdot 10^7 \text{ мм}^4;$$

$$J_k = \pi \cdot \frac{(d_k^4 - d_0^4)}{64} = 3,14 \cdot \frac{(210^4 - 85^4)}{64} = 9,29 \cdot 10^7 \text{ мм}^4;$$

$$j = \frac{10^{-3}}{\frac{100^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 9,29 \cdot 10^7} + \frac{500 \cdot 100^2}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 2,22 \cdot 10^7}} = 266,96 \frac{\text{даН}}{\text{мкМ}}.$$

Определим приведённую жесткость опор шпинделя по выражениям (8) и (9), $\frac{\text{даН}}{\text{мкМ}}$, приняв соотношения между жесткостями $j_{x1}/j_{y1} = 1,3$; $j_{x2}/j_{y2} = 1,5$.

$$j_{x0} = \frac{1}{\frac{(a+b)^2}{j_{x1} \cdot a^2} + \frac{b^2}{j_{x2} \cdot a^2}} = \frac{1}{\frac{(500+100)^2}{85,8 \cdot 500^2} + \frac{100^2}{160,5 \cdot 500^2}} = 58,71 \frac{\text{даН}}{\text{мкМ}},$$

$$j_{y0} = \frac{1}{\frac{(a+b)^2}{j_{y1} \cdot a^2} + \frac{b^2}{j_{y2} \cdot a^2}} = \frac{1}{\frac{(500+100)^2}{66 \cdot 500^2} + \frac{100^2}{107 \cdot 500^2}} = 45,06 \frac{\text{даН}}{\text{мкМ}}.$$

4 Вычислим приведённые жесткости, $\frac{\text{даН}}{\text{мкМ}}$:

$$j_1 = \frac{j \cdot j_{x0}}{j + j_{x0}} = \frac{266,96 \cdot 58,71}{266,96 + 58,71} = 48,13 \frac{\text{даН}}{\text{мкМ}},$$

$$j_2 = \frac{j \cdot j_{y0}}{j + j_{y0}} = \frac{266,96 \cdot 45,06}{266,96 + 45,06} = 38,55 \frac{\text{даН}}{\text{мкМ}}.$$

4 Найдём критические частоты вращения шпинделя:

$$\omega_{1\text{кр}} = \sqrt{\frac{j_1}{m}} = \sqrt{\frac{4,813 \cdot 10^8}{48,08}} = 3,164 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

$$\omega_{2\text{кр}} = \sqrt{\frac{j_2}{m}} = \sqrt{\frac{3,855 \cdot 10^8}{48,08}} = 2,832 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

$$n_{1\text{кр}} = \frac{30\omega_{1\text{кр}}}{\pi} = \frac{30 \cdot 3,164 \cdot 10^3}{3,14} = 3,021 \cdot 10^4 \frac{\text{об}}{\text{мин}},$$

$$n_{2\text{кр}} = \frac{30\omega_{2\text{кр}}}{\pi} = \frac{30 \cdot 2,832 \cdot 10^3}{3,14} = 2,704 \cdot 10^4 \frac{\text{об}}{\text{мин}}.$$

5 Рассчитаем траекторию движения центра масс, мкМ:

$$x = \frac{j_1 e}{j_1 - m\omega^2} \cos \omega t$$

$$y = \frac{j_2 e}{j_2 - m\omega^2} \sin \omega t,$$

$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$, частоту вращения шпинделя принимаем равной наибольшей:

$$\omega = \frac{\pi \cdot 2800}{30} = 293,215 \text{ рад/с}.$$

Построение траектории движения центра масс шпинделя на комплексной плоскости осуществляется по модулю $|z|$ и аргументу $\varphi = \omega t$. Введем общепринятые обозначения:

действительная часть комплексного числа:

$$R_e = \frac{j_1 \cdot e}{j_1 - m \cdot \omega^2} \cdot \cos \omega t;$$

мнимая часть комплексного числа:

$$I_m = \frac{j_2 \cdot e}{j_2 - m \cdot \omega^2} \cdot \sin \omega t,$$

$$|z| = \sqrt{R_e^2 + I_m^2}.$$

Вычисленные значения координат траектории сводим в таблицу 2.

Таблица 2- Результаты расчета координат траектории оси шпинделя

φ, рад	Z , мкм при e _{min} = 5 мкм	Z , мкм при e _{max} = 50 мкм
0	5,043	50,43
π/4	5,049	50,49
π/2	5,054	50,54
3π/4	5,049	50,49
π	5,043	50,43
5π/4	5,049	50,49
3π/2	5,054	50,54
7π/4	5,049	50,49
2π	5,043	50,43

6 Находим смещения опор x₀₁ и y₀₁, x₀₂ и y₀₂:

Для опоры 1:

$$x_{01} = \frac{a(a+b)}{(a+b)^2 + \mu_x \cdot b^2} \cdot \frac{j}{j+j_{x0}} \cdot \left(\frac{j_1}{j_1 - m \cdot \omega^2} - 1 \right) \cdot e \cdot \cos \omega \cdot t.$$

$$y_{01} = \frac{a(a+b)}{(a+b)^2 + \mu_y \cdot b^2} \cdot \frac{j}{j+j_{y0}} \cdot \left(\frac{j_2}{j_2 - m \cdot \omega^2} - 1 \right) \cdot e \cdot \sin \omega \cdot t.$$

Для опоры 2:

$$x_{02} = \frac{a \cdot b \cdot \mu_x}{(a+b)^2 + \mu_x \cdot b^2} \cdot \frac{j}{j+j_{x0}} \cdot \left(\frac{j_1}{j_1 - m \cdot \omega^2} - 1 \right) \cdot e \cdot \cos \omega \cdot t.$$

$$y_{02} = \frac{a \cdot b \cdot \mu_y}{(a+b)^2 + \mu_y \cdot b^2} \cdot \frac{j}{j+j_{y0}} \cdot \left(\frac{j_2}{j_2 - m \cdot \omega^2} - 1 \right) \cdot e \cdot \sin \omega \cdot t,$$

$$\text{где } \mu_x = \frac{j_{x1}}{j_{x2}} = 0,535, \quad \mu_y = \frac{j_{y1}}{j_{y2}} = 0,617,$$

$$Z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Данные расчета представлены в таблице 3.

Таблица 3- Результаты расчета координат центров опор шпинделя

φ, рад	Для опоры 1		Для опоры 2	
	Z , мкм при e _{min} = 5 мкм	Z , мкм при e _{max} = 50 мкм	Z , мкм при e _{min} = 5 мкм	Z , мкм при e _{max} = 50 мкм
0	0,029	0,29	0,026	0,26
π/4	0,034	0,34	0,033	0,33
π/2	0,038	0,38	0,039	0,39
3π/4	0,034	0,34	0,033	0,33
π	0,029	0,29	0,026	0,26
5π/4	0,034	0,34	0,033	0,33
3π/2	0,038	0,38	0,039	0,39
7π/4	0,034	0,34	0,033	0,33
2π	0,029	0,29	0,026	0,26

Построение траектории смещения опор шпинделя на комплексной плоскости осуществляется по модулю $|z|$ и аргументу $\varphi = \omega t$.

7 Определяем нагрузку на опоры при максимальной частоте вращения $n = 2800$ об/мин.

Для опоры 1 имеем:

$$F_1 = \sqrt{(j_{x1} \cdot x_{01})^2 + (j_{y1} \cdot y_{01})^2}.$$

Для опоры 2:

$$F_2 = \sqrt{(j_{x2} \cdot x_{02})^2 + (j_{y2} \cdot y_{02})^2}.$$

Данные расчета представлены в таблице 4.

Таблица 4- Расчет нагрузок на опоры шпинделя

φ, рад	F ₁ , Н	F ₂ , Н
0	250,17	41,695
π/4	250,44	41,74
π/2	250,709	41,785
3π/4	250,44	41,74
π	250,17	41,695
5π/4	250,44	41,74
3π/2	250,709	41,785
7π/4	250,44	41,74
2π	250,17	41,695

8 На модели можно исследовать влияние, переменного параметра (например, частоты вращения шпинделя) n на выходные характеристики: x_{\max} , y_{\max} , F_1 , F_2 .

2 Моделирование шпиндельного узла в системе Mathcad

1 Масса шпинделя

Объем тела шпинделя $V := 12000000 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3$

$$m_{ш} := 7,8 \cdot 10^3 \cdot V, \quad m_{ш} := 93,6 \text{ кг или } \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}$$

2 Приведенная масса системы

$$m_l := \frac{200}{10}$$

$$m := m_l + 0,3 \cdot m_{ш}$$

$$m := 48,08 \text{ кг или } \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}$$

3 Определим приведенную жесткость шпинделя

$$a := 500 \quad J_{п} := 22,2 \cdot 10^6 \text{ мм}^4 \quad E := 2,1 \cdot 10^4 \frac{\text{даН}}{\text{мм}^2}$$

$$b := 100 \quad J_{к} = 92,9 \cdot 10^6 \text{ мм}^4$$

$$j = \frac{10^{-3}}{\frac{b^3}{3E \cdot J_{к}} + \frac{a \cdot b^2}{3E \cdot J_{п}}}$$

$$j = 266,961 \frac{\text{даН}}{\text{мкм}} \quad \text{или} \quad j = 266,961 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

4 Определим приведенную жесткость опор шпинделя, даН/мкм

$$\begin{aligned} \text{Жесткости опор шпинделя, даН/мкм:} \quad j_{x1} &= 92 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}} & j_{x2} &= 1743 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \\ j_{y1} &= 66 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}} & j_{y2} &:= 107 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \end{aligned}$$

Примем соотношения между жесткостями

$$\begin{aligned} j_{x1} &:= 1,3 \cdot j_{y1} & j_{x2} &:= 1,5 \cdot j_{y2} \\ j_{x1} &= 8,58 \times 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}} & j_{x2} &= 1,605 \times 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_{x0} &:= \frac{1}{\frac{(a+b)^2}{j_{x1} \cdot a^2} + \frac{b^2}{j_{x2} \cdot a^2}} & j_{y0} &:= \frac{1}{\frac{(a+b)^2}{j_{y1} \cdot a^2} + \frac{b^2}{j_{y2} \cdot a^2}} \\ j_{x0} &= 5,871 \times 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}} & j_{y0} &= 4,506 \times 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \end{aligned}$$

5 Вычислим приведенные жесткости, Н/м:

$$\begin{aligned} j_1 &:= \frac{j \cdot j_{x0}}{j + j_{x0}} & j_2 &:= \frac{j \cdot j_{y0}}{j + j_{y0}} \\ j_1 &= 4,813 \times 10^8 & j_2 &= 3,855 \times 10^8 \end{aligned}$$

6 Найдем критические частоты вращения шпинделя:

$$\begin{aligned} \omega_{1кр} &:= \sqrt{\frac{j_1}{m}} & \omega_{2кр} &:= \sqrt{\frac{j_2}{m}} \\ \omega_{1кр} &= 3,164 \times 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{с}} & \omega_{2кр} &= 2,832 \times 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \\ n_{1кр} &:= \frac{30 \cdot \omega_{1кр}}{\pi} & n_{2кр} &:= \frac{30 \cdot \omega_{2кр}}{\pi} \end{aligned}$$

$$n_{1кр} = 3.021 \times 10^4 \frac{\text{об}}{\text{мин}} \quad n_{2кр} = 2.704 \times 10^4 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$$

7 Рассчитаем траекторию движения центра масс, м:

Наибольшая частота вращения шпинделя, об/мин: $n := 2800$

$$\omega := \frac{\pi \cdot n}{30} \quad \omega = 293.215 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

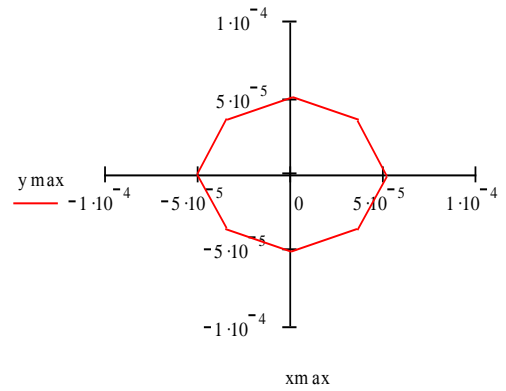
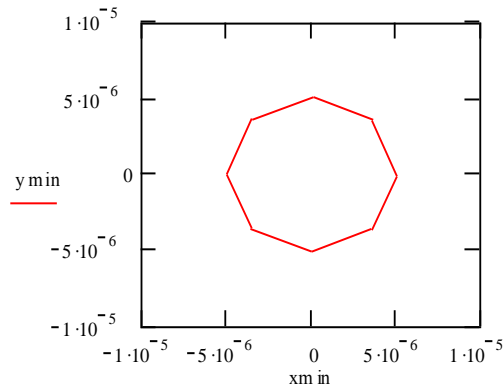
$$e_{\min} := 5 \cdot 10^{-6} \text{ м} \quad e_{\max} := 50 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$\omega t := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{4} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{2} \\ \frac{7\pi}{4} \\ 2\pi \end{pmatrix}$$

$$x_{\min} := \frac{j1 \cdot e_{\min}}{j1 - m \cdot \omega^2} \cdot \cos(\omega t) \quad y_{\min} := \frac{j2 \cdot e_{\min}}{j2 - m \cdot \omega^2} \cdot \sin(\omega t)$$

$$x_{\max} := \frac{j1 \cdot e_{\max}}{j1 - m \cdot \omega^2} \cdot \cos(\omega t) \quad y_{\max} := \frac{j2 \cdot e_{\max}}{j2 - m \cdot \omega^2} \cdot \sin(\omega t)$$

$$x_{\min} = \begin{pmatrix} 5.043 \times 10^{-6} \\ 3.566 \times 10^{-6} \\ 0 \\ -3.566 \times 10^{-6} \\ -5.043 \times 10^{-6} \\ -3.566 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 3.566 \times 10^{-6} \\ 5.043 \times 10^{-6} \end{pmatrix} \quad y_{\min} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3.574 \times 10^{-6} \\ 5.054 \times 10^{-6} \\ 3.574 \times 10^{-6} \\ 0 \\ -3.574 \times 10^{-6} \\ -5.054 \times 10^{-6} \\ -3.574 \times 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_{\max} = \begin{pmatrix} 5.043 \times 10^{-5} \\ 3.566 \times 10^{-5} \\ 0 \\ -3.566 \times 10^{-5} \\ -5.043 \times 10^{-5} \\ -3.566 \times 10^{-5} \\ 0 \\ 3.566 \times 10^{-5} \\ 5.043 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \quad y_{\max} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3.574 \times 10^{-5} \\ 5.054 \times 10^{-5} \\ 3.574 \times 10^{-5} \\ 0 \\ -3.574 \times 10^{-5} \\ -5.054 \times 10^{-5} \\ -3.574 \times 10^{-5} \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$Z_{\min} := \sqrt{x_{\min}^2 + y_{\min}^2}$$

$$Z_{\min} = \begin{pmatrix} 5.043 \times 10^{-6} \\ 5.049 \times 10^{-6} \\ 5.054 \times 10^{-6} \\ 5.049 \times 10^{-6} \\ 5.043 \times 10^{-6} \\ 5.049 \times 10^{-6} \\ 5.054 \times 10^{-6} \\ 5.049 \times 10^{-6} \\ 5.043 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$Z_{\max} := \sqrt{x_{\max}^2 + y_{\max}^2}$$

$$Z_{\max} = \begin{pmatrix} 5.043 \times 10^{-5} \\ 5.049 \times 10^{-5} \\ 5.054 \times 10^{-5} \\ 5.049 \times 10^{-5} \\ 5.043 \times 10^{-5} \\ 5.049 \times 10^{-5} \\ 5.054 \times 10^{-5} \\ 5.049 \times 10^{-5} \\ 5.043 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

8 Находим смещения опор

$$\mu_x := \frac{jx1}{jx2} \quad \mu_x = 0.535$$

$$\mu_y := \frac{jy1}{jy2} \quad \mu_y = 0.617$$

$$ux1 := \frac{a \cdot (a + b)}{(a + b)^2 + \mu_x \cdot b^2} \cdot \frac{j}{j + jx0} \cdot \left(\frac{j1}{j1 - m \cdot \omega^2} - 1 \right) \quad ux1 = 5.831 \times 10^{-3}$$

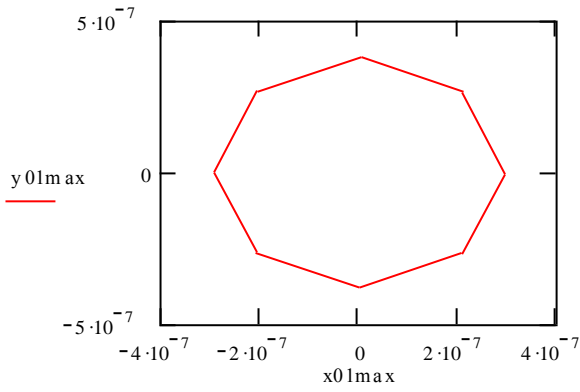
$$uy1 := \frac{a \cdot (a + b)}{(a + b)^2 + \mu_y \cdot b^2} \cdot \frac{j}{j + jy0} \cdot \left(\frac{j2}{j2 - m \cdot \omega^2} - 1 \right) \quad uy1 = 7.597 \times 10^{-3}$$

$$ux2 := \frac{a \cdot b \cdot \mu_x}{(a + b)^2 + \mu_x \cdot b^2} \cdot \frac{j}{j + jx0} \cdot \left(\frac{j1}{j1 - m \cdot \omega^2} - 1 \right) \quad ux2 = 5.196 \times 10^{-4}$$

$$uy2 := \frac{a \cdot b \cdot \mu_y}{(a + b)^2 + \mu_y \cdot b^2} \cdot \frac{j}{j + jy0} \cdot \left(\frac{j2}{j2 - m \cdot \omega^2} - 1 \right) \quad uy2 = 7.81 \times 10^{-4}$$

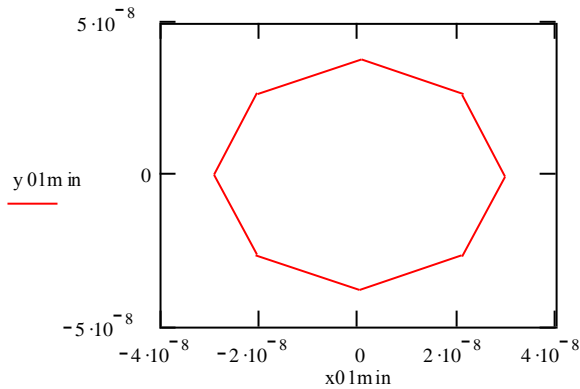
Для опоры 1:

$$x01_{\max} = ux1 \cdot e_{\max} \cdot \cos(\omega t) \quad y01_{\max} = uy1 \cdot e_{\max} \cdot \sin(\omega t)$$



$$\begin{array}{l}
 x01max = \begin{pmatrix} 2.916 \times 10^{-7} \\ 2.062 \times 10^{-7} \\ 0 \\ -2.062 \times 10^{-7} \\ -2.916 \times 10^{-7} \\ -2.062 \times 10^{-7} \\ 0 \\ 2.062 \times 10^{-7} \\ 2.916 \times 10^{-7} \end{pmatrix} \\
 y01max = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.686 \times 10^{-7} \\ 3.799 \times 10^{-7} \\ 2.686 \times 10^{-7} \\ 0 \\ -2.686 \times 10^{-7} \\ -3.799 \times 10^{-7} \\ -2.686 \times 10^{-7} \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$x01min = ux1 \cdot emin \cdot \cos(\omega t) \quad y01min = uy1 \cdot emin \cdot \sin(\omega t)$$



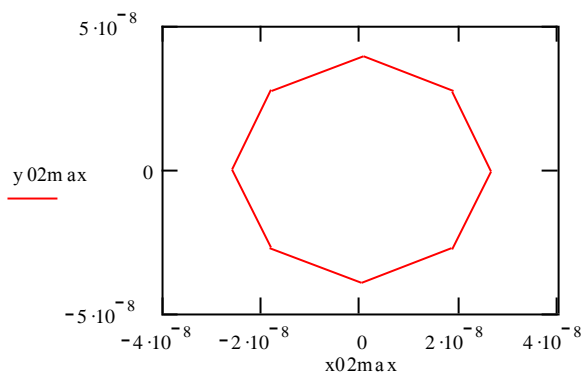
$$\begin{array}{l}
 x01min = \begin{pmatrix} 2.916 \times 10^{-8} \\ 2.062 \times 10^{-8} \\ 0 \\ -2.062 \times 10^{-8} \\ -2.916 \times 10^{-8} \\ -2.062 \times 10^{-8} \\ 0 \\ 2.062 \times 10^{-8} \\ 2.916 \times 10^{-8} \end{pmatrix} \\
 y01min = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.686 \times 10^{-8} \\ 3.799 \times 10^{-8} \\ 2.686 \times 10^{-8} \\ 0 \\ -2.686 \times 10^{-8} \\ -3.799 \times 10^{-8} \\ -2.686 \times 10^{-8} \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$Zmin01 := \sqrt{x01min^2 + y01min^2} \quad Zmax01 := \sqrt{x01max^2 + y01max^2}$$

$$Z_{\min 01} = \begin{pmatrix} 2.916 \times 10^{-8} \\ 3.386 \times 10^{-8} \\ 3.799 \times 10^{-8} \\ 3.386 \times 10^{-8} \\ 2.916 \times 10^{-8} \\ 3.386 \times 10^{-8} \\ 3.799 \times 10^{-8} \\ 3.386 \times 10^{-8} \\ 2.916 \times 10^{-8} \end{pmatrix} \quad Z_{\max 01} = \begin{pmatrix} 2.916 \times 10^{-7} \\ 3.386 \times 10^{-7} \\ 3.799 \times 10^{-7} \\ 3.386 \times 10^{-7} \\ 2.916 \times 10^{-7} \\ 3.386 \times 10^{-7} \\ 3.799 \times 10^{-7} \\ 3.386 \times 10^{-7} \\ 2.916 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

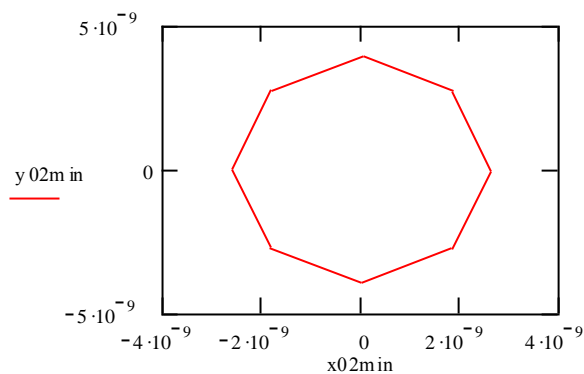
Для опоры 2:

$$x_{02\max} = u_{x2} \cdot e_{\max} \cdot \cos(\omega t) \quad y_{02\max} = u_{y2} \cdot e_{\max} \cdot \sin(\omega t)$$



$$x_{02\max} = \begin{pmatrix} 2.598 \times 10^{-8} \\ 1.837 \times 10^{-8} \\ 0 \\ -1.837 \times 10^{-8} \\ -2.598 \times 10^{-8} \\ -1.837 \times 10^{-8} \\ 0 \\ 1.837 \times 10^{-8} \\ 2.598 \times 10^{-8} \end{pmatrix} \quad y_{02\max} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.761 \times 10^{-8} \\ 3.905 \times 10^{-8} \\ 2.761 \times 10^{-8} \\ 0 \\ -2.761 \times 10^{-8} \\ -3.905 \times 10^{-8} \\ -2.761 \times 10^{-8} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_{02\min} = u_{x2} \cdot e_{\min} \cdot \cos(\omega t) \quad y_{02\min} = u_{y2} \cdot e_{\min} \cdot \sin(\omega t)$$



$$x_{02min} = \begin{pmatrix} 2.598 \times 10^{-9} \\ 1.837 \times 10^{-9} \\ 0 \\ -1.837 \times 10^{-9} \\ -2.598 \times 10^{-9} \\ -1.837 \times 10^{-9} \\ 0 \\ 1.837 \times 10^{-9} \\ 2.598 \times 10^{-9} \end{pmatrix} \quad y_{02min} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.761 \times 10^{-9} \\ 3.905 \times 10^{-9} \\ 2.761 \times 10^{-9} \\ 0 \\ -2.761 \times 10^{-9} \\ -3.905 \times 10^{-9} \\ -2.761 \times 10^{-9} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_{min02} := \sqrt{x_{02min}^2 + y_{02min}^2} \quad Z_{max02} := \sqrt{x_{02max}^2 + y_{02max}^2}$$

$$Z_{min02} = \begin{pmatrix} 2.598 \times 10^{-9} \\ 3.317 \times 10^{-9} \\ 3.905 \times 10^{-9} \\ 3.317 \times 10^{-9} \\ 2.598 \times 10^{-9} \\ 3.317 \times 10^{-9} \\ 3.905 \times 10^{-9} \\ 3.317 \times 10^{-9} \\ 2.598 \times 10^{-9} \end{pmatrix} \quad Z_{max02} = \begin{pmatrix} 2.598 \times 10^{-8} \\ 3.317 \times 10^{-8} \\ 3.905 \times 10^{-8} \\ 3.317 \times 10^{-8} \\ 2.598 \times 10^{-8} \\ 3.317 \times 10^{-8} \\ 3.905 \times 10^{-8} \\ 3.317 \times 10^{-8} \\ 2.598 \times 10^{-8} \end{pmatrix}$$

9 Определим нагрузку на опоры.

Для опоры 1 имеем $F_1 := \sqrt{(jx_1 \cdot x_{01max})^2 + (jy_1 \cdot y_{01max})^2}$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 250.17 \\ 250.44 \\ 250.709 \\ 250.44 \\ 250.17 \\ 250.44 \\ 250.709 \\ 250.44 \\ 250.17 \end{pmatrix}$$

Для опоры 2 имеем $F_2 := \sqrt{(jx_2 \cdot x_{02max})^2 + (jy_2 \cdot y_{02max})^2}$

$$F2 = \begin{pmatrix} 41.695 \\ 41.74 \\ 41.785 \\ 41.74 \\ 41.695 \\ 41.74 \\ 41.785 \\ 41.74 \\ 41.695 \end{pmatrix}$$

10 На модели исследуем влияние переменного параметра n на выходные характеристики $\omega_{1кр}$, $\omega_{2кр}$, x, y, x0, y0, F1, F2 и построим графики.

$$n := \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 3000 \\ 4000 \\ 5000 \\ 6000 \\ 7000 \\ 8000 \\ 9000 \\ 10000 \end{pmatrix}$$

$$\omega := \frac{\pi \cdot n}{30}$$

	0
0	104.72
1	209.44
2	314.159
3	418.879
4	523.599
5	628.319
6	733.038
7	837.758
8	942.478
9	$1.047 \cdot 10^3$

$$\omega =$$

$$\omega t := \frac{\pi}{4}$$

$$x_{\max} = \frac{j1 \cdot e_{\max}}{j1 - m \cdot \omega^2} \cdot \cos(\omega t)$$

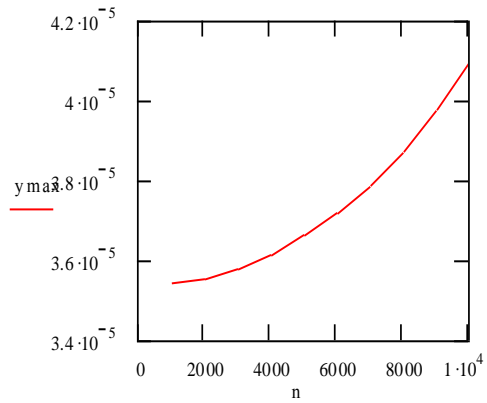
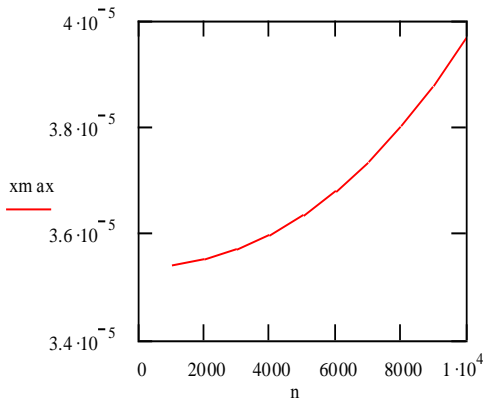
$$y_{\max} =$$

	0
0	$3.54 \cdot 10^{-5}$
1	$3.555 \cdot 10^{-5}$
2	$3.58 \cdot 10^{-5}$
3	$3.615 \cdot 10^{-5}$
4	$3.661 \cdot 10^{-5}$
5	$3.719 \cdot 10^{-5}$
6	$3.789 \cdot 10^{-5}$
7	$3.875 \cdot 10^{-5}$
8	$3.976 \cdot 10^{-5}$
9	$4.096 \cdot 10^{-5}$

$$y_{\max} := \frac{j2 \cdot e_{\max}}{j2 - m \cdot \omega^2} \cdot \sin(\omega t)$$

$$x_{\max} =$$

	0
0	$3.539 \cdot 10^{-5}$
1	$3.551 \cdot 10^{-5}$
2	$3.571 \cdot 10^{-5}$
3	$3.599 \cdot 10^{-5}$
4	$3.635 \cdot 10^{-5}$
5	$3.681 \cdot 10^{-5}$
6	$3.736 \cdot 10^{-5}$
7	$3.802 \cdot 10^{-5}$
8	$3.88 \cdot 10^{-5}$
9	$3.971 \cdot 10^{-5}$



$$ux1 := \frac{a \cdot (a + b)}{(a + b)^2 + \mu_x \cdot b^2} \cdot \frac{j}{j + jx0} \cdot \left(\frac{j1}{j1 - m \cdot \omega^2} - 1 \right)$$

$$uy1 := \frac{a \cdot (a + b)}{(a + b)^2 + \mu_y \cdot b^2} \cdot \frac{j}{j + jy0} \cdot \left(\frac{j2}{j2 - m \cdot \omega^2} - 1 \right)$$

$$ux2 := \frac{a \cdot b \cdot \mu_x}{(a + b)^2 + \mu_x \cdot b^2} \cdot \frac{j}{j + jx0} \cdot \left(\frac{j1}{j1 - m \cdot \omega^2} - 1 \right)$$

$$uy2 := \frac{a \cdot b \cdot \mu_y}{(a + b)^2 + \mu_y \cdot b^2} \cdot \frac{j}{j + jy0} \cdot \left(\frac{j2}{j2 - m \cdot \omega^2} - 1 \right)$$

$$x01max = ux1 \cdot emax \cdot \cos(\omega t)$$

$$x02max = ux2 \cdot emax \cdot \cos(\omega t)$$

$$y01max = uy1 \cdot emax \cdot \sin(\omega t)$$

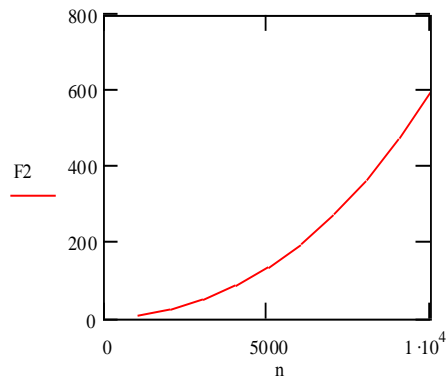
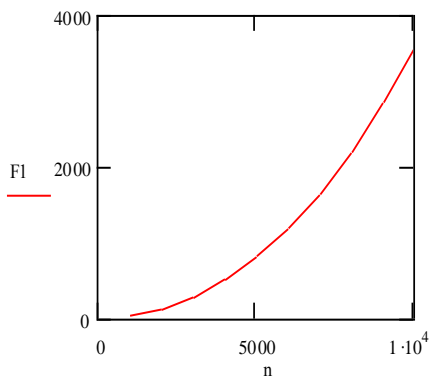
$$y02max = uy2 \cdot emax \cdot \sin(\omega t)$$

$$F1 := \sqrt{(jx1 \cdot x01max)^2 + (jy1 \cdot y01max)^2}$$

$$F2 := \sqrt{(jx2 \cdot x02max)^2 + (jy2 \cdot y02max)^2}$$

	0
0	31.674
1	127.168
2	287.91
3	516.344
4	816.024
5	1.192 · 10 ³
6	1.65 · 10 ³
7	2.198 · 10 ³
8	2.847 · 10 ³
9	3.609 · 10 ³

	0
0	5.279
1	21.195
2	47.985
3	86.057
4	136.004
5	198.626
6	274.969
7	366.366
8	474.509
9	601.529



Список литературы

- 1 Алешин А.К. Колебания в технологических машинах. – М.: Изд-во МГТУ «Станкин», 1999.- 227с.

Содержание

Введение	3
1 Расчет динамических характеристик шпиндельных узлов с переменной радиальной жесткостью опор	3
2 Приложение. Моделирование шпиндельного узла в системе Mathcad.	22

Рохин Владимир Леонидович
Рохин Леонид Владимирович

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
ШПИНДЕЛЬНЫХ УЗЛОВ С ПЕРЕМЕННОЙ РАДИАЛЬНОЙ
ЖЕСТКОСТЬЮ ОПОР**

Методические указания к выполнению домашнего задания
по курсу «Расчет и конструирование станков»
раздел : «Математическое моделирование основных систем и узлов станков»
для студентов специальности 151002 (120200)

Редактор А.Н. Деткина

Подписано в печать	Формат 60x84 1/16	Бумага тип. №
Заказ Печать трафаретная	Усл. печ. л.2,0	Уч.-изд.л 2,0
	Тираж 50	Цена свободная

Редакционно – издательский центр КГУ
640669, г. Курган, ул Гоголя, 25
Курганский государственный университет